

**TEREZA DENYSE PEREIRA DE ARAÚJO**

**ANÁLISE ELASTO-PLÁSTICA ADAPTATIVA DE  
ESTRUTURAS COM TRINCAS**

Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Engenharia Civil da PUC/RJ como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil: Estruturas.

Orientador: Luiz Fernando Martha.

Departamento de Engenharia Civil  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro, 13 de agosto de 1999.

*Afirma-se que, segundo cálculos matemáticos, o besouro não tem as mínimas condições de voar ...*  
*... A isso responde um humorista: "Como o besouro não conhece matemática, ele voa" ...*  
*... Agora, o mais trágico de tudo isso é que muitos seres humanos, por "conhecerem matemática", não ousam voar.*

*(do livro a "A Verdade de Cada Um" de João Mansur Júnior - Biblioteca Rosacruz)*

Ao meu pai, José Prtagil de  
Araújo (*in memorian*), um  
resgate à sua memória.

## AGRADECIMENTOS

Ao Deus do Meu Coração, que me deu asas com as quais pude e sempre poderei voar.

À minha mãe, Tereza Pereira de Araújo, aos meus irmãos, José James, João Prtagil, Gilsa Isacy, Lúcia Rejane, Joségil Jorge e Rogério César, aos cunhados, cunhadas e sobrinhos, pelo apoio, sempre incondicional, em todos os momentos da minha vida e, principalmente, pela amizade que nos une.

A Clycia Brandt Motta, por ser minha amiga e pelo apoio, conselhos nas questões legais e pelo seu modo de ser: sempre positiva, procurando ajudar aqueles que a rodeiam sem esperar nada em troca.

Ao Prof. Luiz Fernando Martha, por aceitar a orientação deste trabalho e por me deixar livre para escolher o meu caminho.

À Prof<sup>a</sup> Deane Roehl, pela amizade de tantos anos e, principalmente, pela colaboração inestimável no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Túlio Nogueira Bittencourt, pela colaboração na indicação de artigos e esclarecimentos em relação a disciplina de Mecânica da Fratura.

Aos professores Raul Rosas e Silva e João Luiz Pascal Roehl, por acreditarem em mim e pelo apoio que me foi dispensado na hora de decidir entre o trabalho e o doutorado.

Aos amigos Evandro Parente Júnior, Joaquim Cavalcante Neto e João Batista Sousa, pela troca de idéias durante a evolução deste trabalho.

Aos ex-colegas de trabalho, Ten. Cel. Haroldo Leite, Ricardo Weber e Tereza Jansen Flores, pelo incentivo.

Aos amigos, Andréia Diniz, Araken Dumont, Áurea de Holanda, Claudia Campos, Eduardo Thadeu, Evandro Parente, João Batista Sousa e Maria Élia, pela amizade, companheirismo e apoio.

A todos os professores do Departamento de Engenharia Civil, pelos conhecimentos transmitidos.

À turma do chope, Ana Cristina, Andréia, Áurea, Camilo, Claudia, Daniella, Evandro, João Batista, João Luiz (Aça), Joaquim, Eduardo Kubrusly (Turco), Márcio, Raquel, Roque, Paulo Rodacki, Setton, Thadeu e William, pelas noites alegres no hipódromo.

Ao 'clube da magali', Clycia, Floriano, Maria Myrce, Onira, Sônia e Veridiana, pelas longas, interessantes e proveitosas conversas (esotéricas), meu refúgio, e ao sempre 'alto astral'.

Aos amigos fraternos na Rosa e na Cruz, minha segunda família, pelo carinho e amizade que me têm sido dispensados em todos estes anos que nos conhecemos, principalmente, nos anos de 1996 e 1997.

A todos os colegas da pós-graduação do DEC, pelo companheirismo e boa convivência.

A todos os funcionários da secretaria do DEC, em especial a Ana Roxo e Cristiano Vieira, pelo apoio dado durante todo o curso.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES), pela ajuda financeira recebida durante o curso.

## RESUMO

A análise de problemas mecânicos e estruturais, pelo método dos elementos finitos, requer do analista certa experiência na discretização do modelo para minimizar os erros das soluções. A geração da malha é uma tarefa árdua, que torna-se ainda mais difícil quando trincas estão presentes no modelo. Em um modelo discreto, cada vez que a trinca propaga, a geometria do modelo muda e a malha deve ser atualizada.

Neste trabalho é apresentado um sistema gráfico interativo, para modelagem bidimensional de problemas de fraturamento estrutural. O sistema permite introduzir trincas em qualquer posição no modelo, regenerando sua malha e executando um processo auto-adaptativo de elementos finitos. Este sistema pode ser usado para problemas mecânicos, com ou sem trincas, elásticos lineares ou elastoplásticos.

O processo auto-adaptativo está baseado em estimadores de erro *a posteriori*, com refinamento do tipo *h*. Três tipos de estimadores estão disponíveis. O primeiro, baseado na norma de energia, é aplicado na análise de problemas elásticos lineares. O segundo e o terceiro, baseados em tensão efetiva e na razão do trabalho plástico, respectivamente, são aplicados na análise de problemas elastoplásticos. A geração da malha está baseada em técnicas de enumeração espacial recursiva, que consiste de uma partição em árvore binária (*binary tree*) para as curvas do contorno, incluindo as curvas das trincas, e uma partição em árvore quaternária (*quadtree*) para a geração da malha no domínio. O sistema integra diferentes ferramentas: um modelador geométrico que cria a geometria do modelo, um pré-processador que gera a malha e aplica os atributos, um módulo de análise numérica que avalia a resposta de elementos finitos e um módulo, chamado de módulo adaptativo, que faz o gerenciamento do processo adaptativo das malhas e que também é um pós-processador que auxilia na visualização dos resultados, inclusive dos parâmetros de fratura.

No processo adaptativo não linear, uma interpolação das variáveis de solução é realizada entre malhas para que a análise incremental da plasticidade continue. O critério de

escoamento de von Mises, com encruamento isotrópico linear, é usado. Exemplos são apresentados que permitem avaliar os métodos de cálculo dos parâmetros de fratura e o desempenho do processo adaptativo.

## ABSTRACT

The numerical analysis of structural and mechanical problems by the finite element method requires, by the analyst, some knowledge and experience on mesh refinement. Mesh generation is a difficult task, especially when the model contains cracks. As the crack propagates in the discret model, the geometry of the model changes and the mesh must be updated.

This work presents an interactive graphics system for modeling fracture processes of two-dimensional structures. This system may consider any number of cracks that can be inserted in the model at any position, with automatic and adaptive finite element mesh generation. The system can be used for linear and elastic-plastic mechanical problems, with and without cracks.

The self-adaptive process is based on an *h-type* refinement, with an *a posteriori* error estimation. Three types of error estimators are available. The first, which is based on the energy norm, is used for elastic-linear analysis. The second and the third, which are based on effective stress and on ratio of plastic work, respectively, are used for elastic-plastic analysis. Mesh generation is based on spatial decomposition techniques, which consists on a binary tree partition of boundary curves, including crack curves, and on a quadtree partition for the domain refinement. The system incorporates the following components: a geometric modeler to create the model geometry, a pre-processor that generates the initial mesh and applies model attributes, a numerical analysis module that evaluates the finite element response, and a module, called the adaptive module, that manages the adaptive process of mesh generation. The latter module also incorporates post-processing features that assist in the visualization of analysis results, including fracture parameters.

In the non-linear adaptive process for incremental plasticity analysis, it is used a technique for interpolating analysis variables across distinct meshes. The von Mises yielding criterion, with isotropic hardening, is used. Some examples are presented to evaluate the



methods for computing fracture analysis parameters and the performance of the adaptive process.

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS .....</b>	<b>ix</b>
<b>LISTA DE TABELAS .....</b>	<b>xii</b>
<b>LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS .....</b>	<b>xiii</b>
<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1. Mecânica da Fratura Computacional .....	3
1.2. Códigos de Elementos Finitos Adaptativos .....	6
1.3. Objetivos e Organização .....	9
<b>2. CONCEITOS DE PLASTICIDADE E MECÂNICA DA FRATURA .....</b>	<b>13</b>
2.1. Formulação Elastoplástica .....	13
2.2. Mecânica da Fratura .....	18
2.2.1. Fator de Intensidade de Tensão .....	20
2.2.2. Taxa de Liberação de Energia .....	22
2.2.3. Integral $J$ .....	23
2.2.3.1. Campos de Tensões na Ponta da Trinca .....	24
2.2.3.2. Definição de $J$ como Energia .....	25
<b>3. MÉTODOS PARA O CÁLCULO NUMÉRICO DOS PARÂMETROS DE</b>	
<b>FRATURA .....</b>	<b>27</b>
3.1. Elementos Finitos Especiais .....	27
3.2. Técnica de Correlação dos Deslocamentos .....	30
3.3. Método de Fechamento da Trinca Modificado .....	32
3.4. Método da Integral de Domínio Equivalente .....	37
3.4.1. Análise Elástica Linear .....	38
3.4.2. Análise Elastoplástica .....	41

3.4.3. Formulação de Domínio Equivalente no MEF .....	41
3.4.4. Função $q$ .....	45
<b>4. ESTRATÉGIA AUTO-ADAPTATIVA .....</b>	<b>46</b>
4.1. Estimadores de Erro .....	47
4.1.1. Estimador de Erro para Elasticidade .....	49
4.1.2. Estimador de Erro para Plasticidade .....	51
4.2. Estratégia de Refinamento .....	53
4.3. Enumeração Espacial Recursiva e Triangulação .....	55
4.4. Auto-Adaptação .....	57
4.5. Iniciação e Propagação de Trincas .....	60
4.6. Transferência de Variáveis .....	63
4.6.1. Mapeamento dos Deslocamentos Nodais .....	64
4.6.2. Mapeamento das Variáveis Incrementais .....	67
<b>5. AVALIAÇÃO DOS MÉTODOS NUMÉRICOS DE CÁLCULO .....</b>	<b>71</b>
5.1. Processo de Fraturamento Elástico .....	71
5.1.1. Tração de Uma Trinca Central Inclinada .....	73
5.1.2. Tração de Uma Trinca de Aresta .....	76
5.1.3. Tração de Duas Trincas de Aresta .....	77
5.2. Processo de Fraturamento Elastoplástico .....	78
5.2.1. Tração de Uma Trinca Central .....	78
5.2.2. Tração de Uma Trinca de Aresta .....	85
5.2.3. Duas Trincas Saindo de Um Furo Circular .....	88
<b>6. AVALIAÇÃO DO PROCESSO ADAPTATIVO .....</b>	<b>90</b>
6.1. Adaptação de Fraturamento Linear .....	90
6.1.1. Exemplo 5.1.1 .....	91
6.1.2. Exemplo 5.1.2 .....	95
6.1.3. Exemplo 5.1.3 .....	97
6.2. Adaptação de Problemas Plásticos .....	99
6.2.1. Viga em Balanço .....	100

6.2.2. Placa com Furo .....	107
6.2.3. Console .....	111
6.2.4. Exemplo 5.2.1 .....	112
6.2.5. Exemplo 5.2.2 .....	119
6.2.6. Exemplo 5.2.3 .....	121
<b>7. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>123</b>
7.1. Conclusões .....	124
7.2. Sugestões para Futuros Trabalhos .....	127
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>129</b>
<b>APÊNDICE A .....</b>	<b>140</b>

## LISTA DE FIGURAS

Fig. 2.1. Curva tensão-deformação uniaxial para material com encruamento isotrópico linear .....	16
Fig. 2.2. Modos de carregamento .....	18
Fig. 2.3. Efeito da plasticidade nos campos de tensões .....	19
Fig. 2.4. Eixos coordenados na ponta da trinca .....	21
Fig. 2.5. Contorno arbitrário em torno da ponta da trinca .....	23
Fig. 2.6. Curva tensão-deformação de Ramberg-Osgood .....	23
Fig. 3.1. Elementos singulares <i>quarter-points</i> .....	28
Fig. 3.2. Elemento Q8 colapsado .....	28
Fig. 3.3. Rosetas de elementos finitos .....	29
Fig. 3.4. Roseta de elementos <i>quarter-points</i> na ponta da trinca .....	31
Fig. 3.5. Conceito de Irwin .....	33
Fig. 3.6. Idealização de elementos finitos .....	35
Fig. 3.7. Superposição das forças nodais .....	36
Fig. 3.8. Área a ser empregada no cálculo da integral $J$ .....	37
Fig. 4.1. Arranjo esquemático do sistema adaptativo proposto .....	47
Fig. 4.2. Notações do problema da Mecânica Estrutural .....	48
Fig. 4.3. <i>Quadtree</i> .....	56
Fig. 4.4. Auto-adaptação .....	59
Fig. 4.5. Trinca no modelo da Fig. 4.4h .....	61
Fig. 4.6. Trinca propagante .....	62
Fig. 4.7. Detalhes de malhas deformadas com múltiplas trincas .....	63
Fig. 4.8. Mapeamento dos deslocamentos nodais .....	64
Fig. 4.9. Localização de ponto em polígono .....	65
Fig. 4.10. Localização de nós que pertencem à curva da trinca .....	66

Fig. 5.1. Configurações elásticas de trincas .....	72
Fig. 5.2. Malhas de elementos finitos para cada configuração de trinca .....	74
Fig. 5.3. Malha de elementos finitos de duas trincas de aresta ( $a = 25$ mm, $h = 50$ mm, $W = 50$ mm) .....	77
Fig. 5.4. Configurações para análise elastoplástica .....	79
Fig. 5.5. Modelo A .....	80
Fig. 5.6. Curvas tensão-deformação uniaxial para os modelos B e C .....	81
Fig. 5.7. Modelo B .....	83
Fig. 5.8. Modelo B – Distribuição das tensões de von Mises .....	84
Fig. 5.9. Curva da integral $J$ – Modelo C .....	85
Fig. 5.10. Modelo C – Distribuição das tensões de von Mises .....	86
Fig. 5.11. Tração de uma trinca de aresta .....	87
Fig. 5.12. Tração de duas trincas simétricas saindo de um furo circular .....	88
Fig. 6.1. Adaptação do Exemplo 5.1.1 .....	92
Fig. 6.2. Distribuição do erro na norma de energia, para cada análise e cada configuração de trinca .....	93
Fig. 6.3. Adaptação do Exemplo 5.1.2 – Roseta de elementos T6 .....	95
Fig. 6.4. Adaptação do Exemplo 5.1.2 – Roseta de elementos QP40 .....	96
Fig. 6.5. Adaptação do Exemplo 5.1.2 – Roseta de elementos QP30 .....	96
Fig. 6.6. Adaptação do Exemplo 5.1.3 – CARGA B .....	98
Fig. 6.7. Adaptação do Exemplo 5.1.3 – CARGA A .....	99
Fig. 6.8. Viga em balanço .....	101
Fig. 6.9. Processo adaptativo da viga em balanço para o estimador de erro ES e $\Delta P =$ $0,05$ MN/m .....	101
Fig. 6.10. Processo adaptativo da viga em balanço para o estimador de erro ES e $\Delta P =$ $0,25$ MN/m .....	102
Fig. 6.11. Curva $P \times v$ do ponto A da viga em balanço para o estimador de erro ES .....	104
Fig. 6.12. Processo adaptativo da viga em balanço para o estimador de erro PW e $\Delta P =$ $0,05$ MN/m .....	104
Fig. 6.13. Processo adaptativo da viga em balanço para o estimador de erro PW e $\Delta P =$ $0,25$ N/m .....	105

Fig. 6.14. Curva $P \times v$ do ponto A da viga em balanço para o estimador de erro PW .....	106
Fig. 6.15. Evolução do erro de discretização da viga em balanço para $\Delta P = 0,05$ MN/m	107
Fig. 6.16. Evolução do erro de discretização da viga em balanço para $\Delta P = 0,25$ MN/m	107
Fig. 6.17. Placa com furo .....	108
Fig. 6.18. Processo adaptativo da placa com furo usando o estimador de erro ES .....	109
Fig. 6.19. Processo adaptativo da placa com furo usando o estimador de erro PW .....	110
Fig. 6.20. Console .....	111
Fig. 6.21. Processo adaptativo para o console, com estimador de erro PW .....	112
Fig. 6.22. Processo adaptativo do Exemplo 5.2.1 – Modelo A (roseta Q8C - $h^* = 10\%$ ) .	113
Fig. 6.23. Processo adaptativo do Exemplo 5.2.1 – Modelo A (roseta Q8C - $h^* = 35\%$ ) .	114
Fig. 6.24. Detalhe da distribuição das deformações $\epsilon_{yy}$ , em torno das pontas da trinca para a malha da Fig. 6.23a .....	115
Fig. 6.25. Processo adaptativo do Exemplo 5.2.1 – Modelo A (roseta T6) .....	116
Fig. 6.26. Processo adaptativo do Exemplo 5.2.1 – Modelo B .....	116
Fig. 6.27. Curva da integral $J$ do Exemplo 5.2.1 – Modelo B .....	117
Fig. 6.28. Processo adaptativo do Exemplo 5.2.1 – Modelo C .....	118
Fig. 6.29. Curva da integral $J$ do Exemplo 5.2.1 – Modelo C .....	118
Fig. 6.30. Processo adaptativo para o Exemplo 5.2.2 – Estimador PW .....	119
Fig. 6.31. Processo adaptativo para o Exemplo 5.2.2 – Estimador ES .....	121
Fig. 6.32. Processo adaptativo para o Exemplo 5.2.3 .....	122
Fig. 6.33. Fator de intensidade de tensão elastoplástico normalizado do Exemplo 5.2.3 .	122

## LISTA DE TABELAS

Tab. 5.1. Nº de nós e de elementos para cada configuração de trinca .....	74
Tab. 5.2. Resultados de $K_I$ (MPa $\sqrt{m}$ ) para tração de trinca central inclinada .....	75
Tab. 5.3. Resultados de $K_{II}$ (MPa $\sqrt{m}$ ) para tração de trinca central inclinada .....	75
Tab. 5.4. Malhas segundo o tipo da roseta .....	76
Tab. 5.5. Resultados adimensionais de $K_I$ para tração de uma trinca de aresta .....	77
Tab. 5.6. Resultados adimensionais de $K_I$ para tração de duas trincas de aresta .....	77
Tab. 5.7. Comparação dos valores de $J$ – Modelo A .....	80
Tab. 6.1. Erros relativos na norma de energia para as duas análises e cada configuração de trinca .....	91
Tab. 6.2. Resultados de $K_I$ (MPa $\sqrt{m}$ ) para o Exemplo 5.1.1 .....	94
Tab. 6.3. Resultados de $K_{II}$ (MPa $\sqrt{m}$ ) para o Exemplo 5.1.1 .....	94
Tab. 6.4. Resultados adimensionais de $K_I$ para o Exemplo 5.1.2 .....	97
Tab. 6.5. Resultados adimensionais de $K_I$ para o Exemplo 5.1.3 .....	99



# LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

## • ABREVIATURAS

CTOA	<i>Crack Tip Opening Angle</i>
CTOD	<i>Crack Tip Opening Displacement</i>
EPRI	<i>Electric Power Research Institute</i>
EPUSP	Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
ES	<i>Effective Stress</i>
FEMOOP	<i>Finite Element Method – Object Oriented Program</i>
FTM	Fechamento da Trinca Modificado
HC	Hinton e Campbell
HRR	Hutchinson, Rice e Rosegren
IDE	Integral de Domínio Equivalente
MEF	Método dos Elementos Finitos
MFEP	Mecânica da Fratura Elasto-Plástica
MFLE	Mecânica da Fratura Linear Elástica
PW	<i>Plastic Work</i>
QP	<i>Quarter-Point</i>
QP45	Roseta de elementos QP cujo ângulo entre os elementos é 45°
QP40	Roseta de elementos QP cujo ângulo entre os elementos é 40°
QP30	Roseta de elementos QP cujo ângulo entre os elementos é 30°
Q8	Elemento finito quadrangular de oito nós
Q8C	Q8 Colapsado
RM	Resistência dos Materiais
SPR	<i>Superconvergent Patch Recovery</i>
TCD	Técnica de Correlação dos Deslocamentos
T6	Elemento finito triangular de seis nós

• **SÍMBOLOS LATINOS**

$a$	Comprimento da trinca
$a_{eff}$	Comprimento da trinca efetivo
$A$	Área
$b$	Largura da viga
$B$	Espessura da placa
${}^t\mathbf{B}_N$	Matriz de deformação-deslocamento nodal da malha nova ( <i>new</i> ) no instante $t$
$C, C_1, C_2$	Contornos de integração
$\mathbf{C}$	Matriz constitutiva elástica
$\mathbf{C}^{-1}$	Matriz inversa da matriz constitutiva elástica
${}^t\mathbf{C}_N$	Matriz constitutiva elástica da malha nova ( <i>new</i> ) no instante $t$
$C_{ijkl}$	Matriz constitutiva elástica
$C_{ijkl}^{ep}$	Matriz tangente elastoplástica
$\mathbf{DN}$	Matriz das derivadas das funções de interpolação em relação às coordenadas paramétricas
$e$	Erro absoluto total
$e_E$	Erro absoluto do elemento $E$
$\ e\ $	Norma do erro absoluto total
$\ e_E\ $	Norma do erro absoluto do elemento $E$
$e_s$	Erro em tensão
$e^p$	Deformação plástica equivalente
${}^t e_N^p, {}^t e_O^p$	Deformação plástica equivalente da nova ( <i>new</i> ) malha e da malha antiga ( <i>old</i> ), respectivamente, no instante $t$
${}^{t-\Delta t} e_N^p, {}^{t-\Delta t} e_O^p$	Deformação plástica equivalente da nova ( <i>new</i> ) malha e da malha antiga ( <i>old</i> ), respectivamente, no instante $t-\mathbf{Dt}$
$\left({}^{t-\Delta t} e_N^p\right)^n$	Deformação plástica equivalente da nova ( <i>new</i> ) malha, no instante $t-\mathbf{Dt}$ do nó $n$
$\left({}^{t-\Delta t} e_O^p\right)^k$	Deformação plástica equivalente da malha antiga ( <i>old</i> ), no instante $t-\mathbf{Dt}$ do nó $k$

$E$	Módulo elástico
	Elemento da malha de elementos finitos
$E_O$	Elemento da malha antiga ( <i>old</i> )
$E_T$	Módulo tangente
$f$	Função que define o critério de escoamento
$\mathbf{f}$	Vetor das forças de massa
$\mathbf{f}^T$	Transposta do vetor $\mathbf{f}$
${}^t f_N$	Função de escoamento na malha nova ( <i>new</i> ), no instante $t$
$f_{ij}(\mathbf{q}), g_{ij}(\mathbf{q})$	Funções adimensionais de $\mathbf{q}$
$F$	Trabalho das forças externas
$\mathbf{F}$	Vetor das forças de superfície
$\mathbf{F}^T$	Transposta do vetor $\mathbf{F}$
$F_{x_i}, F_{x_j}$	Forças nodais equivalentes na direção $x$ , nos nós $i$ e $j$ , respectivamente
$F_{y_i}, F_{y_j}$	Forças nodais equivalentes na direção $y$ , nos nós $i$ e $j$ , respectivamente
$F_{y_i}^C, F_{y_j}^C$	Forças provenientes da análise de elementos finitos, na direção $y$ , nos nós $i$ e $j$ , respectivamente
$g$	Função que define a superfície do potencial plástico
$G$	Taxa de liberação de energia
$G_c$	Valor crítico de $G$
$G_I, G_{II}, G_{III}$	Taxas de liberação de energia nos modos I, II e III de carregamento, respectivamente
$h$	Altura da placa
	Tamanho dos elementos da malha de elementos finitos
$h'$	Módulo plástico
$h_1$	Fator geométrico
$h_N^E, h_O^E$	Tamanho característico do elemento $E$ na malha nova ( <i>new</i> ) e na malha antiga ( <i>old</i> ), respectivamente
$\mathbf{I}$	Matriz unitária
$I_n$	Constante de integração
$J$	Integral $J$

<b>J</b>	Vetor da integral $J$
<b>Jb</b>	Matriz Jacobiana
<b>Jb<sup>-1</sup></b>	Matriz inversa da matriz jacobiana
$ Jb $	Determinante da matriz jacobiana de área
$ Jb' $	Determinante do jacobiano de linha
$J_e$	Parte elástica da integral $J$
$J_c$	Valor crítico da integral $J$
$J_k$	Integrais invariantes
$J_p$	Parte plástica da integral $J$
$J_I, J_{II}$	Integrais $J$ associadas aos modos I e II de carregamento, respectivamente
$J_1, J_2$	Integrais $J$ associadas às direções $x$ e $y$ , respectivamente
$k$	Número de nós do elemento
$K$	Fator de intensidade de tensão
$K_c$	Tenacidade à fratura
$K_{ep}$	Fator de intensidade de tensão elastoplástico
$\bar{K}_{ep}$	Fator de intensidade de tensão elastoplástico normalizado
$K_I, K_{II}, K_{III}$	Fatores de intensidade de tensão nos modos I, II e III de carregamento, respectivamente
$K_{Ic}, K_{IIc}, K_{IIIc}$	Tenacidade à fratura nos modos I, II e III de carregamento, respectivamente
$l$	Comprimento da viga
${}^t l_N, {}^t l_O$	Lista de variáveis incrementais da malha nova ( <i>new</i> ) e da malha antiga ( <i>old</i> ), respectivamente, no instante $t$
${}^t \tilde{l}_N, {}^t \tilde{l}_O$	Lista de variáveis incrementais necessárias da malha nova ( <i>new</i> ) e da malha antiga ( <i>old</i> ), respectivamente, no instante $t$
$L$	Tamanho dos elementos em torno da ponta da trinca
$m$	Número de elementos da malha
$n$	Expoente de encruamento
	Ponto nodal da nova malha
$n_j$	Vetor unitário normal

$\mathbf{N}$	Vetor das funções de interpolação
$N_k$	Funções de interpolação
$O(h^q)$	Convergência do erro em relação ao tamanho do elemento $h$
$p$	Ordem do polinômio de interpolação
$pg$	Ponto de integração de Gauss
$P$	Carga aplicada
$P_Y$	Carga limite ou carga de escoamento
$q$	Função contínua
	Variáveis de encruamento
$\mathbf{q}_{,\bar{x}}$	Vetor das derivadas da função contínua $q$ em relação às coordenadas globais
$Q$	Valor nodal da função contínua $q$
$\mathbf{Q}$	Vetor nodal da função contínua $q$
$r$	Distância da ponta da trinca a um ponto qualquer do corpo trincado
$R$	Raio do círculo
$r, s$	Coordenadas paramétricas
$r_o^n, s_o^n$	Coordenadas paramétricas do nó $n$ , no elemento $E_o$
$s$	Comprimento de arco ao longo do contorno de integração
$s_{ij}$	Tensor das tensões desviadoras
$S$	Pressão uniforme nas faces da trinca
	Superfície de integração
$t$	Passo de carga
$\mathbf{t}$	Vetor das cargas de tração nas superfícies da trinca
$t_i$	Carga de tração nas superfícies da trinca
$u, v$	Deslocamentos nas direções dos eixos $x$ e $y$ , respectivamente
$u(r), v(r)$	Deslocamentos relativos de abertura da trinca, nas direções dos eixos $x$ e $y$ , respectivamente
$u_i$	Vetor dos deslocamentos
$\tilde{u}_i(n, \mathbf{q})$	Funções adimensionais de $n$ e $\mathbf{q}$

${}^t u_N, {}^t u_O$	Deslocamentos nodais da malha nova ( <i>new</i> ) e da malha antiga ( <i>old</i> ), respectivamente, no instante $t$
${}^t u_N^n, {}^t u_O^k$	Deslocamentos nodais do nó $n$ da malha nova ( <i>new</i> ), e do nó $k$ da malha antiga ( <i>old</i> ), respectivamente, no instante $t$
$u^I, v^I$	Deslocamentos associados simétricos
$u^{II}, v^{II}$	Deslocamentos associados antissimétricos
$\ u^h\ $	Norma de energia
$U$	Energia de deformação
$\bar{U}$	Campo de deslocamentos a ser determinado
$\mathbf{U}$	Vetor dos deslocamentos
$\mathbf{U}_d$	Vetor dos deslocamentos prescritos
$\mathbf{U}_0$	Matriz dos deslocamentos nodais
$\mathbf{U}_{,\bar{x}}$	Matriz das derivadas dos deslocamentos em relação às coordenadas globais
$\mathbf{U}_{,\bar{x}}^T$	Transposta da matriz $\mathbf{U}_{,\bar{x}}$
$V$	Potencial das forças externas
$v_Y$	Deslocamento na carga de escoamento
$x, y$	Eixos coordenados locais na ponta da trinca
${}^t x_O^k, {}^t y_O^k$	Coordenadas cartesianas do nó $k$ da malha antiga ( <i>old</i> ), no instante $t$
${}^t x_N^n, {}^t y_N^n$	Coordenadas cartesianas do nó $n$ da malha nova ( <i>new</i> ), no instante $t$
${}^{t-\Delta t} x_N^n, {}^{t-\Delta t} y_N^n$	Coordenadas cartesianas do nó $n$ da malha nova ( <i>new</i> ), no instante $t-\Delta t$
$X, Y$	Eixos coordenados globais
$\bar{\mathbf{X}}$	Vetor das coordenadas globais
$\mathbf{X}_0$	Matriz das coordenadas globais nodais
${}^t \mathbf{X}_N$	Vetor das coordenadas globais nodais da malha nova ( <i>new</i> ), no instante $t$
${}^t X_N, {}^t X_O$	Coordenadas cartesianas globais dos nós da malha nova ( <i>new</i> ) e da malha antiga ( <i>old</i> ), respectivamente, no instante $t$
${}^t X_N^n, {}^t X_O^k$	Coordenadas cartesianas globais dos nós $n$ da malha nova ( <i>new</i> ) e dos nós $k$ da malha antiga ( <i>old</i> ), respectivamente, no instante $t$

$w_{pg}$	Peso de Gauss
$W$	Largura da placa
	Densidade de energia de deformação total
$W^e$	Trabalho elástico
$W^p$	Trabalho plástico
$\mathbf{W}_{,\bar{x}}^p$	Vetor das derivadas de $W^p$ em relação às coordenadas globais

• **SÍMBOLOS GREGOS**

$a$	Constante adimensional do material
$b$	Ângulo de inclinação da trinca
$d_{ij}$	Delta de Kronecker
$d(r)$	Deslocamento de abertura da trinca
$da$	Acréscimo virtual da trinca
$DP$	Variação da carga $P$
$Dt$	Acréscimo do passo de carga
$e$	Vetor das deformações totais
$e_{ij}$	Tensor das deformações totais
$\tilde{e}_{ij}(n, \mathbf{q}), \tilde{s}_{ij}(n, \mathbf{q})$	Funções adimensionais de $n$ e $\mathbf{q}$
$e_Y$	Deformação de escoamento uniaxial
$e_{ij}^e$	Tensor das deformações elásticas
$e_{ij}^p$	Tensor das deformações plásticas
$(e_{ij}^p)^*$	Tensor das deformações plásticas suavizadas
$(e_{ij}^p)^h$	Tensor das deformações plásticas provenientes da análise de elementos finitos
$e_{,\bar{x}}^p$	Vetor das derivadas de $e^p$ em relação às coordenadas globais
${}^t e_N$	Vetor das deformações totais da malha nova ( <i>new</i> ), no instante $t$

${}^t \mathbf{e}_N^p, {}^t \mathbf{e}_O^p$	Vetor das deformações plásticas da malha nova ( <i>new</i> ) e da malha antiga ( <i>old</i> ), respectivamente, no instante $t$
$h$	Erro relativo global
$\bar{h}$	Erro relativo admissível
$h^*$	Erro predefinido
$h_E$	Erro relativo do elemento $E$
$l$	Intensidade da singularidade
$dl$	Parâmetro de consistência
$m$	Módulo de cisalhamento
$n$	Coefficiente de Poisson
$\pi$	3,1416
$\Pi$	Energia potencial
$q$	Ângulo no plano da trinca
$\mathbf{s}$	Vetor das tensões
$\mathbf{s}^T$	Transposta do vetor $\mathbf{s}$
$\mathbf{s}_{ij}$	Tensor das tensões
$\mathbf{s}_y$	Tensão normal na direção $y$
$\mathbf{s}_Y$	Tensão de escoamento
$\mathbf{s}^I, \mathbf{s}^{II}$	Tensões associadas simétricas e antissimétricas, respectivamente
${}^t \mathbf{s}_N, {}^t \mathbf{s}_O$	Vetor das tensões na malha nova ( <i>new</i> ) e na malha antiga ( <i>old</i> ), respectivamente, no instante $t$
${}^t \mathbf{s}_{Y_N}, {}^t \mathbf{s}_{Y_O}$	Lei de encruamento que define a tensão de escoamento no instante $t$ , nas malhas nova ( <i>new</i> ) e antiga ( <i>old</i> ), respectivamente
$\mathbf{s}^*$	Vetor das tensões suavizadas
$\mathbf{s}^h$	Vetor das tensões provenientes da análise de elementos finitos
$\mathbf{s}_{ij}^*$	Tensor das tensões suavizadas
$\mathbf{s}_{ij}^h$	Tensor das tensões provenientes da análise de elementos finitos
$(\hat{\mathbf{s}}_{ij}^*)_k$	Tensor das tensões nodais suavizadas
$\bar{\mathbf{s}}$	Tensão efetiva



$\bar{\mathbf{s}}^*$	Tensão efetiva suavizada
$\bar{\mathbf{s}}^h$	Tensão efetiva proveniente da análise de elementos finitos
$\bar{\mathbf{s}}_{máx}^h, \bar{\mathbf{s}}_{mín}^h$	Valores máximos e mínimos de $\bar{\mathbf{s}}^h$ , respectivamente
$\in$	Pertence a
$\forall$	Qualquer que seja
$\Sigma$	Somatório
$W$	Domínio do problema
$W_E$	Subdomínio do elemento $E$
${}^t\Omega$	Domínio do problema no instante $t$
$\partial_1\Omega$	Contorno onde os deslocamentos são prescritos
$\partial_2\Omega$	Contorno onde atuam as forças de superfície
$z_E$	Razão de erro do elemento $E$

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

O projeto de componentes estruturais e mecânicos envolve a determinação das dimensões, da geometria e a escolha de seus materiais de forma a assegurar que estes componentes operem com segurança sob certas condições mecânicas, ambientais e por períodos de tempo determinados. O projetista, antes de construir a peça, deve ser capaz de prever seu comportamento, a partir de resultados experimentais, previsões de um modelo matemático e da experiência adquirida com construções existentes e seus modos de ruptura. Uma das causas da ruína de uma estrutura pode ser a existência de fissuras provenientes de defeitos de fabricação ou de eventos externos.

A mecânica da fratura descreve o comportamento das estruturas na presença destas fissuras. Ela prevê a evolução da trinca até a ruptura completa da peça, bem como verifica a resistência do material ao crescimento da trinca. Em alguns materiais, qualquer propagação da trinca pode significar a ruína total, enquanto que, em outros, a trinca pode propagar de forma estável até que alcance um tamanho crítico. Várias formulações matemáticas foram obtidas para estruturas com formas geométricas simples e sob a ação de cargas especiais. Estas formulações procuram descrever o comportamento da trinca para diferentes tipos de materiais, cujas soluções podem ser encontradas em vários livros textos [1, 48].

Com o advento de tecnologias mais avançadas, os problemas da mecânica da fratura tornaram-se mais complexos e soluções analíticas tornaram-se mais difíceis de serem obtidas. Para resolver estes problemas, os pesquisadores recorreram aos métodos numéricos que, com o passar dos anos, tornaram-se ferramentas indispensáveis para estas análises.

A análise numérica de um corpo trincado proporciona informações sobre as tensões e deformações na ponta da trinca, bem como sobre os parâmetros globais e locais de fratura. Vale ressaltar, contudo, que tal análise, sozinha, não é suficiente para a aceitação de suas

respostas, pois hipóteses simplificadoras são adotadas nestes modelos. Portanto, estas soluções têm que ser validadas por resultados experimentais.

Dentre as inúmeras técnicas numéricas existentes, o Método dos Elementos Finitos (MEF) destaca-se por sua simplicidade conceitual e facilidade de ser aplicado às mais diferentes formas geométricas, aos mais variados tipos de materiais e diferentes condições de carregamento [14, 26]. Ele tem sido extensivamente usado na mecânica da fratura para análises lineares e não lineares, como por exemplo na análise elastoplástica.

As soluções obtidas pelo MEF são aproximadas. Portanto, a magnitude e a distribuição dos erros destas soluções dependem da discretização usada no modelo numérico. Na análise não linear, os erros das soluções evoluem durante a análise incremental, fazendo com que a precisão das tensões seja difícil de ser obtida. A escolha de uma malha, que modele bem qualquer problema de engenharia, requer do analista certa experiência. Em problemas de fratura, o nível do refinamento da malha depende da proposta da análise. Em uma análise linear, onde ocorrem altos gradientes de tensões na frente da trinca, a malha deve ser refinada nesta região. Entretanto, uma malha mais grosseira pode ser utilizada, desde que esta inclua elementos especiais na ponta da trinca [11, 12, 40]. Em problemas elastoplásticos, a malha deve ser mais refinada nas regiões onde o escoamento ocorre, a fim de capturar a deformação ali existente.

Portanto, a geração de uma malha é tarefa árdua, que torna-se ainda mais difícil quando se procura simular a propagação de uma trinca discreta. Cada vez que a trinca se move, a geometria do modelo muda e a malha tem de ser atualizada, seja de forma local ou global. Sistemas automáticos de geração de malha facilitam esta tarefa, permitindo a criação de malhas assistida por computador.

Códigos de elementos finitos adaptativos, baseados em estimadores de erro, permitem um melhor controle dos erros de discretização. Esses códigos, aliados a um sistema de geração de malhas, automatizam a busca de uma malha ótima, segundo uma razão de erro definida, com interferência mínima do usuário.

## 1.1. MECÂNICA DA FRATURA COMPUTACIONAL

Na Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE), o cálculo dos fatores de intensidade de tensão é um dos principais objetivos da análise. Estes fatores definem a magnitude dos campos de tensões na ponta da trinca e auxiliam na predição dos ângulos e incrementos da trinca propagante. As tensões, neste caso, apresentam uma singularidade  $1/\sqrt{r}$  na ponta da trinca.

Chan *et al.* [22] foram uns dos primeiros a se utilizarem do MEF para determinar os fatores de intensidade de tensão. A principal dificuldade encontrada por estes autores foi representar a singularidade da ponta da trinca com elementos convencionais. A partir de então, vários pesquisadores procuraram criar elementos especiais para modelar esta singularidade [38, 80]. Os elementos singulares tipo *quarter-points*, isoparamétricos, sugeridos independentemente por Henshell e Shaw [40] e Barsoum [11], tornaram-se populares entre os pesquisadores por serem mais simples e proporcionarem resultados mais precisos com malhas relativamente grosseiras.

Vários estudos foram realizados com o intuito de investigar as condições ideais de uso destes elementos. O efeito do tamanho do elemento ( $L$ ) com relação ao comprimento da trinca ( $a$ ) sobre o cálculo dos fatores de intensidade de tensão [37, 57] e do critério de fratura [86] foi um dos problemas estudados. Saouma *et al.* [73] avaliaram esse efeito numericamente, obtendo deste estudo várias recomendações referentes à relação ( $L/a$ ) e à quantidade de elementos.

Os valores numéricos dos fatores de intensidade de tensão podem ser calculados substituindo os deslocamentos, ou as tensões, provenientes da análise de elementos finitos nas soluções teóricas [22]. Esta técnica, apesar de simples e direta, proporciona resultados com pouca precisão. Quando os elementos singulares *quarter-points* são usados, a técnica de correlação dos deslocamentos, proposta por Shih *et al.* [77], proporciona resultados mais exatos. Esta técnica foi generalizada por Ingraffea e Manu [46] para problemas com modo misto de carregamento. Outras técnicas de extrapolação dos deslocamentos [87], que procuram melhorar a precisão, podem ser encontradas na literatura.

A taxa de liberação de energia,  $G$ , proveniente da teoria de Griffith [1], foi relacionada aos fatores de intensidade de tensão por Irwin [48] e tornou-se uma das variáveis mais importantes na determinação destes fatores. Os métodos existentes, baseados neste conceito, proporcionam resultados mais exatos para os fatores de intensidade de tensão, sem a necessidade de uma malha tão refinada. Por esta razão, o método da extensão virtual da trinca tornou-se tão atrativo. Contudo, a necessidade de se efetuar duas análises de elementos finitos para o mesmo modelo, com dois comprimentos de trinca diferentes, torna-o desvantajoso. Outros métodos, que utilizam apenas uma análise de elementos finitos no cálculo de  $G$ , foram propostos [55]. Um destes métodos está baseado no método de fechamento virtual da trinca de Irwin. Raju [66], baseando-se nessa formulação, propôs um método modificado. No método original, as tensões na frente da ponta da trinca e os deslocamentos atrás desta mesma ponta são usados para este cálculo. No método modificado de Raju, os deslocamentos de abertura da trinca e as forças nodais na frente da ponta da trinca são utilizados. Este procedimento foi aplicado para vários tipos de elementos, singulares e não singulares, de qualquer ordem.

A MFLE considera apenas deformações elásticas na frente da ponta da trinca. Contudo, na prática, deformações inelásticas estão sempre presentes na vizinhança da ponta da trinca, dependendo do tipo do material. A região onde estas deformações ocorrem é denominada de zona plástica. Quando esta região é bastante pequena, os conceitos da MFLE ainda são válidos e podem ser usados sem restrição, como ocorre no crescimento de trinca à fadiga. No entanto, quando esta região torna-se excessivamente grande, o uso das soluções baseadas na elasticidade linear não mais se justifica, sendo necessário utilizar soluções não lineares, como as baseadas na teoria da plasticidade.

A Mecânica da Fratura Elasto-Plástica (MFEP) estuda um corpo trincado considerando as deformações excessivas na ponta da trinca. Neste caso, a singularidade  $1/\sqrt{r}$  não mais existe fazendo com que os elementos *quarter-points* não sejam apropriados. Elementos quadrilaterais degenerados a um triângulo [12] são usados na ponta da trinca a fim de modelar seu arredondamento, além de permitir calcular o deslocamento de abertura da ponta da trinca na malha deformada.

A integral  $J$  [67], inicialmente proposta para resolver problemas de elasticidade infinitesimal ou finita, foi estendida, com o passar dos anos, para além de sua validade teórica. Seu significado porém depende do contexto em que está inserida: se uma trinca cresce em um material elástico linear, sob condições quase estáticas, a integral  $J$  é igual à taxa de liberação de energia por unidade de área de trinca. Se a trinca propaga em um material elastoplástico,  $J$  ainda caracteriza a intensidade de deformação ao longo da ponta da trinca, porém não tem o significado de taxa de liberação de energia. Neste caso,  $J$  é simplesmente a diferença na energia potencial total entre dois corpos trincados e identicamente carregados com diferentes comprimentos de trinca. Finalmente, a propagação em materiais plásticos com deformações finitas, a integral  $J$  não tem qualquer significado físico. Ela simplesmente caracteriza as tensões e deformações na ponta da trinca.

Vários trabalhos foram desenvolvidos usando o conceito da integral  $J$ . Hutchinson [43] e Rice e Rosengren [68] mostraram que, sob determinadas condições, as tensões e deformações próximas à ponta da trinca são controladas por  $J$ . O crescimento da trinca em material dúctil é acompanhado de significativa deformação plástica não proporcional, que invalida a teoria de deformação da plasticidade. A validade de  $J$  sob estas circunstâncias é questionável. Contudo, Hutchinson e Paris [45] mostraram que, para crescimentos limitados da trinca,  $J$  ainda é um parâmetro controlador. Os conceitos do módulo de separação,  $T$ , e da curva de resistência [62] foram então introduzidos para analisar a estabilidade de tal crescimento. Estes conceitos foram também relacionados aos conceitos do ângulo de abertura da ponta da trinca – CTOA [23] - e do deslocamento de abertura da ponta da trinca - CTOD [76].

A integral  $J$  é uma integral de contorno que independe do caminho escolhido para a sua integração. Dois procedimentos computacionais foram desenvolvidos para a avaliação numérica dessa integral, que são: as integrais de contorno e as integrais de domínio. Ambos os procedimentos levam a valores numéricos idênticos, sendo que a escolha entre um e outro depende da especificação do problema e da conveniência da malha. A técnica de extensão virtual da trinca, citada anteriormente, está baseada nas formulações da mecânica do contínuo. DeLorenzi [29] aplicou esta técnica para calcular a taxa de liberação de energia em materiais elásticos lineares e não lineares. Hellen [39] mostrou que esta técnica pode ser bastante

eficiente para materiais não lineares, se for baseada na minimização da energia potencial. A técnica da integral de domínio equivalente, que é uma variação da técnica de extensão virtual da trinca, foi proposta por Nikishkov *et al.* [59] para o cálculo da integral  $J$  de uma forma geral. Ela envolve somente integração sobre o domínio e foi generalizada por Dodds *et al.* [30] para problemas em duas e três dimensões. Banks-Sills e Sherman [9] mostraram que os resultados obtidos por estas duas técnicas, extensão virtual da trinca e integral de domínio equivalente, em duas dimensões, são idênticos dentro do contexto do MEF, com elementos retangulares, isoparamétricos, de quatro e oito nós, e singulares para a análise linear elástica.

## 1.2. CÓDIGOS DE ELEMENTOS FINITOS ADAPTATIVOS

O principal objetivo de uma estratégia adaptativa é controlar o erro de discretização de um modelo discreto e aumentar a precisão das soluções da maneira mais econômica possível.

A precisão pode ser melhorada de quatro maneiras diferentes: na *versão h*, a densidade dos elementos é aumentada usando a mesma ordem de interpolação; na *versão p*, a malha original é mantida e a ordem dos elementos é aumentada; na *versão h-p*, tamanho e ordem do elemento são variados simultaneamente; e na *versão r*, o número de graus de liberdade e a ordem do polinômio são mantidos, modificando-se a posição dos nós. Vários trabalhos foram publicados [51, 90] que empregam estes refinamentos. O refinamento *h* tem sido o mais utilizado, principalmente por não necessitar de uma vasta biblioteca de elementos finitos como no refinamento *p*. No entanto, quando se estudam problemas tridimensionais, o número de graus de liberdade aumenta rapidamente fazendo com que os refinamentos *p* e *h-p* sejam preferidos. O refinamento *r* tem sido pouco utilizado pelos pesquisadores.

Estimadores de erro, *a priori* e *a posteriori*, baseados nas quantidades integradas, tornam-se necessários no processo adaptativo, principalmente se houver geração automática de malhas. O estimador de erro *a priori* está baseado no conhecimento das propriedades das soluções e das propriedades de aproximação dos métodos discretos. O conhecimento antecipado do erro proporciona informações qualitativas sobre a magnitude do erro e sobre o modo de convergência das soluções, quando o tamanho dos elementos da malha tende a zero.

As informações sobre o erro atual, no entanto, não são disponíveis durante o processo. O estimador de erro *a posteriori* está baseado nas informações obtidas durante o processo de solução. As estimativas do erro podem ser feitas para cada elemento ou para a malha globalmente. Este último estimador é o mais utilizado na prática.

Babuska e Rheiboldt [5] introduziram os princípios e conceitos relativos à adaptatividade, utilizando estimadores de erro *a posteriori* que foram aplicados em problemas unidimensionais de elementos finitos. A partir de então, vários autores, por exemplo Zienkiewicz e Zhu [90], têm procurado estender estes conceitos para problemas mais complexos e em outras dimensões, com estimadores de erro mais eficientes. No entanto, a pesquisa tem sido voltada principalmente para problemas lineares, enquanto que para os não lineares, a pesquisa é relativamente recente. O trabalho de Ladevèze *et al.* [50] apresenta estimadores de erro na relação constitutiva de problemas elastoplásticos e de análise dinâmica. Já Gallimard *et al.* [34], além de controlarem a qualidade da malha com o erro na relação constitutiva de Drucker-Prager, também controlam os erros provenientes do método incremental da plasticidade. Zienkiewicz *et al.* [88] introduziram o erro baseado na razão de dissipação de energia para materiais porosos e não porosos, enquanto Johnson e Hansbo [47] se utilizaram de um estimador residual baseado na norma de energia para problemas de Hencky, com plasticidade perfeita de pequenas deformações. Peric *et al.* [64], baseados na formulação termodinâmica de problemas elastoplásticos de pequenas deformações, propuseram três estimadores diferentes para o controle da discretização. Estes estimadores são baseados na norma de energia da tensão generalizada, no funcional de dissipação plástica e na razão do trabalho plástico. O trabalho de Lee e Bathe [52] propõe dois estimadores para problemas elastoplásticos de grandes deslocamentos. O primeiro estimador, baseado na tensão efetiva ou pressão, controla o erro nas equações de equilíbrio e o segundo, baseado no incremento de deformação plástica, controla os incrementos de carga. Finalmente, Sandhu e Liebowitz [72] controlam a qualidade da malha com estimadores baseados numa média simples da tensão efetiva e na integração da deformação plástica efetiva. Estes estimadores foram aplicados em modelos de plasticidade usando o critério de von Mises.

Para que uma técnica adaptativa seja dita eficiente, ela deve ser capaz de localizar exatamente as regiões de concentração de tensões, ou de singularidade, além de definir



corretamente o tamanho dos elementos nestas regiões. Poucos trabalhos são encontrados na literatura que se utilizam destas técnicas em problemas de fratura. O refinamento preferido de alguns autores é a versão  $h-p$  [2, 92] ou versão  $h$  [27, 54, 72, 83]. A maneira de tratar a singularidade é também diferente em alguns trabalhos. Zienkiewicz e Zhu [92] e Coorevits *et al.* [27] consideram a intensidade da singularidade no cálculo do tamanho característico dos elementos adjacentes à esta região. Contudo, Lee e Bathe [52] recomendam excluir os elementos destas regiões do cálculo do erro, pois podem apresentar valores relativamente altos. Já Liebowitz *et al.* [54] acreditam que se a nova malha é gerada de tal maneira que o erro estimado é igualmente distribuído em cada elemento, a malha é dita ótima e a influência da singularidade é eliminada, ou seja, não é necessário considerar a intensidade da singularidade na análise.

A busca de um gerador de malhas, que facilite sobremaneira o processo adaptativo, tem sido o principal objetivo de muitos pesquisadores. Shephard [75] foi um dos primeiros a propor um algoritmo de geração de malhas baseado na estrutura de dados *quadtree*, para modelos bidimensionais. Baehmann *et al.* [7] basearam-se no trabalho de Shephard para propor um algoritmo que utiliza esta mesma estrutura de dados para representar o domínio a ser discretizado. Zienkiewicz e Zhu [90], contudo, não se valeram desta estrutura de dados, mas de um esquema de subdivisões triangulares sucessivas usando a técnica proposta por Peraire *et al.* [63], onde nós e elementos do domínio são criados simultaneamente. Potyondy *et al.* [65], por sua vez, combinaram as técnicas apresentadas nos trabalhos de Baehmann e Zienkiewicz, ou seja, os nós do domínio são gerados pela *quadtree* e os elementos pela técnica de contração de contorno [63].

### 1.3. OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO

O principal objetivo deste trabalho é apresentar uma estratégia auto-adaptativa confiável, robusta e eficiente para processos de fraturamento estrutural elastoplástico, bidimensional, que considere, adequadamente, os atributos físicos e geométricos do modelo.

Para alcançar este objetivo, alguns objetivos secundários foram estabelecidos, quais sejam: cálculo seguro dos parâmetros de fratura, com ou sem processo adaptativo, seja para problemas elásticos ou plásticos; uma estratégia adaptativa confiável para propagação de trincas em material elástico; assegurar que a estratégia adaptativa proposta seja robusta e confiável para qualquer problema de plasticidade de pequenos deslocamentos.

O trabalho, então, está dividido em duas partes: a primeira consiste da estratégia adaptativa para o processo de fraturamento linear e a segunda, da estratégia adaptativa para o processo de fraturamento elastoplástico, ambos com modo misto de carregamento e pressão uniforme nas faces da trinca. Estes processos foram implementados no sistema adaptativo desenvolvido por Cavalcante [20], originalmente aplicável a modelos de elementos finitos elásticos, lineares, bidimensionais, cujo estimador de erro é baseado na norma de energia.

Para os problemas de plasticidade, foram implementados dois estimadores de erro, sendo o primeiro em tensão efetiva, que é uma variação daquele proposto por Lee e Bathe [52], e o segundo na razão do trabalho plástico, proposto por Peric *et al.* [64]. A transferência de variáveis, feita da malha antiga para a nova, é necessária em todo processo adaptativo não linear. A técnica de mapeamento de variáveis utilizada neste trabalho foi a sugerida por Lee e Bathe [52].

A auto-adaptação está baseada nas técnicas de enumeração espacial recursiva, que consiste de uma partição em árvore binária (*binary tree*) para as curvas do contorno, incluindo as curvas das trincas, e uma partição em árvore quaternária (*quadtree*) para a geração da malha no domínio. Nesta última, as vantagens do algoritmo baseado na técnica da *quadtree* são combinadas com a técnica de triangulação por contração do contorno, a qual é baseada nas propriedades de Delaunay. Uma triangulação baseada em padrões aplicados às células da *quadtree* é utilizada em todo o domínio, exceto na estreita região próxima ao contorno, onde a triangulação por contração de contorno é usada. Para melhorar a eficiência computacional, a informação de adjacência proporcionada pela estrutura de dados da árvore quaternária é também utilizada no algoritmo de contração de contorno.

Trincas podem ser introduzidas arbitrariamente pelo usuário, em qualquer posição no modelo. O sistema regenera as malhas automaticamente, considerando as novas superfícies das trincas. Uma roseta, seja de elementos especiais ou de elementos isoparamétricos T6, é inserida em torno das pontas das trincas. A técnica geométrica de propagar a trinca foi implementada, inicialmente, com a direção de propagação e o valor do incremento da trinca determinados pelo usuário. A propagação automática da trinca foi desenvolvida, posteriormente, por Carvalho [19], dando prosseguimento a esta linha de pesquisa.

O sistema integra diferentes ferramentas: um modelador geométrico que cria a geometria do modelo, um pré-processador que gera a malha e aplica os atributos, um módulo de análise numérica que avalia a resposta de elementos finitos e um módulo, chamado de módulo adaptativo, que faz o gerenciamento do processo adaptativo das malhas e que também é um pós-processador que auxilia na visualização dos resultados.

No processo adaptativo para análise linear, o módulo adaptativo é capaz de decidir onde refinar a malha inicial, de refazer a análise e de repetir todo o processo, até que um critério de convergência predefinido seja alcançado. É importante mencionar que em cada passo do ciclo, o usuário pode interferir no processo. Na análise adaptativa para problemas plásticos, o sistema decide se a análise incremental da teoria da plasticidade deve continuar ou não, segundo um critério de convergência preestabelecido. Se esse critério não for alcançado em um determinado passo, a análise incremental é terminada neste passo com a malha corrente. Uma nova malha é gerada para o passo anterior, usando os parâmetros determinados para a malha corrente. Estes parâmetros definem onde o refinamento é necessário. As variáveis de solução (deslocamentos, deformações, tensões, etc.) são então transferidas de uma malha para outra. A análise é então reiniciada tomando o passo corrente como passo inicial e as variáveis do passo anterior são usadas como valores iniciais. O processo continua até que o critério de convergência seja novamente violado, ou termine a análise incremental. Ambos os processos adaptativos independem da presença de trincas no modelo geométrico.

O módulo de análise numérica utilizado é o FEMOOP (*Finite Element Method - Object Oriented Program*). É um programa de elementos finitos baseado nos conceitos de programação orientada a objetos, desenvolvido no Departamento de Engenharia Civil da

PUC-Rio [35, 58] e no laboratório de Mecânica Computacional da EPUSP, para problemas lineares, não lineares e plásticos.

Os fatores de intensidade de tensão são calculados por três métodos diferentes: pela técnica de correlação dos deslocamentos [77], pelo método de fechamento da trinca modificado [66] e pela integral  $J$ , que utiliza a decomposição dos deslocamentos e das tensões em partes simétricas e antissimétricas proposta por Bui [18]. A técnica da integral de domínio equivalente [59] é utilizada no cálculo da integral  $J$ , tanto para a análise linear elástica, como para a análise elastoplástica.

Este trabalho contém, além desta introdução, seis capítulos. O segundo capítulo faz um breve resumo sobre os principais conceitos da Teoria da Plasticidade e da Mecânica da Fratura. Os vários métodos utilizados no cálculo dos parâmetros de fratura são descritos no capítulo 3.

O capítulo 4 descreve o sistema adaptativo proposto juntamente com os estimadores de erro implementados, a estratégia de refinamento adotada, a geração da malha, a iniciação e propagação de trincas e a técnica utilizada para a transferência de variáveis.

Alguns exemplos são mostrados no capítulo 5, com o intuito de avaliar os vários métodos implementados para o cálculo dos parâmetros de fratura. O capítulo 6 apresenta exemplos que procuram mostrar, ou mesmo validar, a estratégia adaptativa proposta. Finalmente, o capítulo 7 contém as conclusões e algumas sugestões para futuros trabalhos.

## CAPÍTULO 2

# CONCEITOS DE PLASTICIDADE E MECÂNICA DA FRATURA

O objetivo deste capítulo é apresentar, resumidamente, os principais conceitos utilizados neste trabalho relacionados às teorias da plasticidade e mecânica da fratura. Aqueles interessados em obter maiores detalhes sobre estas teorias devem reportar-se, por exemplo, às referências [24] e [1], respectivamente.

### 2.1. FORMULAÇÃO ELASTOPLÁSTICA

O comportamento plástico de uma estrutura é caracterizado por deformações irreversíveis que dependem do carregamento final, bem como da história deste carregamento. Os campos de tensões e deformações, que descrevem este comportamento, não se relacionam através de relações finitas mas através de relações incrementais.

A principal característica de um modelo elastoplástico é a existência de uma função de escoamento  $f$  que delimita o domínio elástico. No espaço das funções, este domínio é definido por,

$$\{(\mathbf{s}, q) / f(\mathbf{s}, q) < 0\} \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{s}$  é o campo das tensões e  $q$  são as variáveis de encruamento.

O material, após escoar, apresenta um comportamento com uma parcela de deformação elástica e outra parcela plástica. O incremento de deformações decompõe-se em duas partes:

$$d\mathbf{e}_{ij} = d\mathbf{e}_{ij}^e + d\mathbf{e}_{ij}^p. \quad (2.2)$$

Os índices  $e$  e  $p$  referem-se a elástico e plástico, respectivamente. O incremento de tensões deve-se à parcela elástica ( $d\mathbf{e}_{ij}^e$ ) do incremento de deformações totais os quais estão relacionados pela matriz constitutiva elástica,  $C_{ijkl}$ , segundo equação a seguir.

$$d\mathbf{s}_{ij} = C_{ijkl} d\mathbf{e}_{ij}^e, \quad (2.3)$$

O incremento de deformações plásticas é definido por uma lei de escoamento dada por:

$$d\mathbf{e}_{ij}^p = d\mathbf{l} \frac{\mathbb{I}g}{\mathbb{I}\mathbf{s}_{ij}}, \quad d\mathbf{l} \geq 0. \quad (2.4)$$

onde,  $g$  é uma função que define o potencial plástico. Se esta função coincide com a função de escoamento, a lei de fluxo é dita associada ( $g = f$ ), do contrário ( $g \neq f$ ), a lei de fluxo é não associada. Neste trabalho considera-se a lei de fluxo associada para definir o incremento de deformação plástica. Neste caso, a Eq. (2.4) toma a seguinte forma:

$$d\mathbf{e}_{ij}^p = d\mathbf{l} \frac{\mathbb{I}f}{\mathbb{I}\mathbf{s}_{ij}} \quad (2.5)$$

O parâmetro  $d\mathbf{l}$  é conhecido como parâmetro de consistência e satisfaz as condições de carregamento e descarregamento

$$d\mathbf{l} \geq 0, \quad f \leq 0 \quad \text{e} \quad f d\mathbf{l} = 0 \quad (2.6)$$

e a condição de consistência

$$d\mathbf{l} df = 0. \quad (2.7)$$

Esta última condição garante que, após o carregamento plástico, as tensões continuam satisfazendo o critério de escoamento. No caso de encruamento isotrópico, o conjunto de variáveis de encruamento  $q$  reduz-se a uma variável escalar,  $e^p$ , denominada deformação plástica equivalente. Neste caso, a tensão de escoamento uniaxial pode ser expressa em função da deformação plástica equivalente pela seguinte forma geral

$$\mathbf{s}_Y = \mathbf{s}_Y(e^p), \quad (2.8)$$

cuja relação incremental é dada por:

$$d\mathbf{s}_Y = h' de^p, \quad (2.9)$$

onde  $h'$  é o módulo plástico que está associado com a expansão da superfície de escoamento ou de carregamento. Esta variável corresponde à tangente da curva tensão-deformação plástica. Para materiais com encruamento linear, este módulo é definido por:

$$h' = \frac{EE_T}{E - E_T}. \quad (2.10)$$

$E$  e  $E_T$  são os módulos elástico e tangente, respectivamente (Fig. 2.1).

Neste trabalho, o critério de escoamento a ser adotado é o de von Mises, com encruamento isotrópico linear, o qual é definido por:

$$f(\mathbf{s}_{ij}, e^p) = \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} - \mathbf{s}_Y^2(e^p), \quad (2.11)$$

onde  $s_{ij}$  é o tensor das tensões desviadoras dado pela expressão

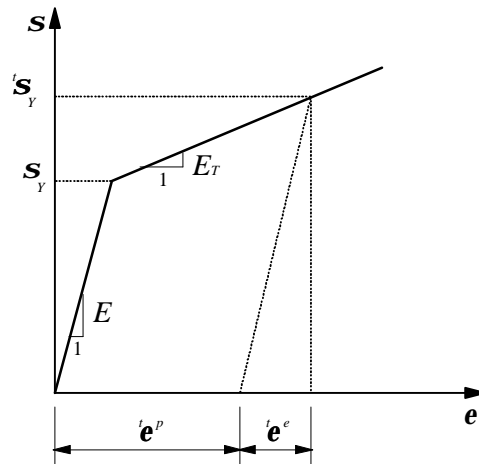


Fig. 2.1. Curva tensão-deformação uniaxial para material com encruamento isotrópico linear.

$$s_{ij} = s_{ij} - \frac{1}{3} s_{kk} d_{ij}, \quad (2.12)$$

sendo  $d_{ij}$ , o delta de Kronecker.

A tensão efetiva,  $\bar{s}$ , e a deformação plástica equivalente relacionam os parâmetros de encruamento em uma curva tensão-deformação uniaxial. Esta curva é obtida de ensaios experimentais de tração ou de compressão. Para o material de von Mises, as relações que definem a tensão efetiva e o incremento de deformação plástica equivalente são dadas por:

$$\bar{s}^2 = \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}, \quad (2.13)$$

$$de^p = \sqrt{\frac{2}{3} de_{ij}^p de_{ij}^p}. \quad (2.14)$$

O parâmetro de consistência  $dI$  da Eq. (2.4) é determinado diretamente da condição de consistência (Eq. (2.7)) com o auxílio das equações (2.3), (2.14) e (2.9). Então, encontra-se que



$$d\mathbf{l} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{ij}} C_{ijkl} d\mathbf{e}_{kl}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{kl}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_y} h' \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{ij}}}}. \quad (2.15)$$

Substituindo-se esta expressão na Eq. (2.4), junto com as equações (2.2) e (2.3), chega-se à expressão da tangente elastoplástica:

$$d\mathbf{s}_{ij} = C_{ijkl}^{ep} d\mathbf{e}_{kl} \quad (2.16)$$

onde

$$C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl}, \text{ para } d\mathbf{l} = 0 \quad (2.17)$$

$$C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{mn}} C_{ijmn} C_{ijpq} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{pq}}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{kl}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_y} h' \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}_{ij}}}}, \text{ para } d\mathbf{l} > 0$$

Pelas equações (2.16) e (2.17), verifica-se que a relação entre as tensões e as deformações é não linear. Adicionalmente, a obtenção das variáveis incrementais (tensões, deformações plásticas, variáveis de encruamento, etc.) depende da história das deformações totais.

A solução de problemas elastoplásticos pelo MEF requer, além da solução do problema de valor de contorno, a solução dos problemas de valor inicial em cada ponto de Gauss para a determinação destas variáveis. Dois tipos de algoritmos estão envolvidos na solução de problemas plásticos pelo MEF, cuja carga total é incrementada passo a passo. O primeiro algoritmo resolve o sistema de equações globais não lineares, em deslocamentos, através, por exemplo, do método de Newton-Raphson [32], com controle de carga, de deslocamentos, entre outros. O segundo utiliza o método de integração implícito de Euler [79] para obter os incrementos de tensões, deformações plásticas e das variáveis de encruamento.

## 2.2. MECÂNICA DA FRATURA

Uma estrutura trincada pode estar submetida a três tipos de carregamentos diferentes, os quais podem atuar sozinhos ou combinados. Estes modos de carregamento são: (a) modo I, ou modo de abertura (Fig. 2.2a), onde a carga é aplicada normal ao plano da trinca tendendo a abrir as faces da mesma; (b) modo II, ou modo de cisalhamento (Fig. 2.2b), onde a carga é aplicada no plano da trinca fazendo com uma face da trinca tenda a deslizar em relação a outra face; (c) modo III, ou modo de cisalhamento antiplano (Fig. 2.2c), onde a carga é aplicada fora do plano da trinca quando as faces da trinca tendam a deslizar em direções opostas.

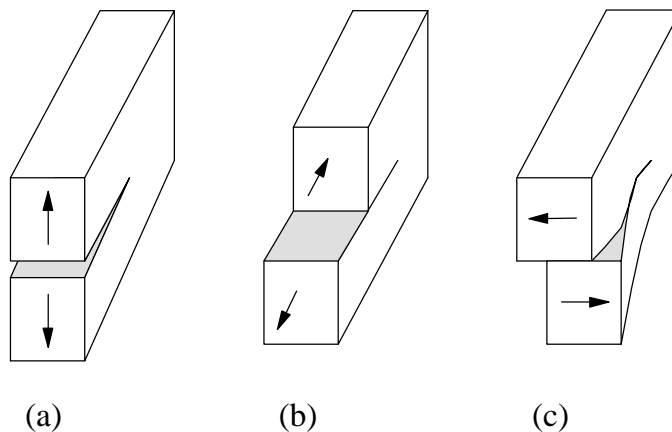


Fig. 2.2. Modos de carregamento. (a) Modo I; (b) Modo II; (c) Modo III.

O que determina se um material deve ser analisado pela MFLE, ou pela MFEP, é o tamanho da zona plástica. Dependendo do tamanho desta região, o processo de fratura é controlado pelo fator de intensidade de tensão,  $K$ , ou pela integral  $J$ , ou pode não ter parâmetro que o caracterize.

A condição de “pequeno escoamento” (*small scale yielding*) determina que o tamanho da região inelástica deve ser pequeno quando comparado ao tamanho da trinca, ou a qualquer outro comprimento característico. Esta é uma condição assintótica que é violada à medida que a carga aumenta. Portanto, a validade deste conceito está condicionada à carga aplicada, cujo

valor, para um corpo trincado de material elástico-perfeitamente plástico, deve estar abaixo, aproximadamente, de um meio da carga limite [44].

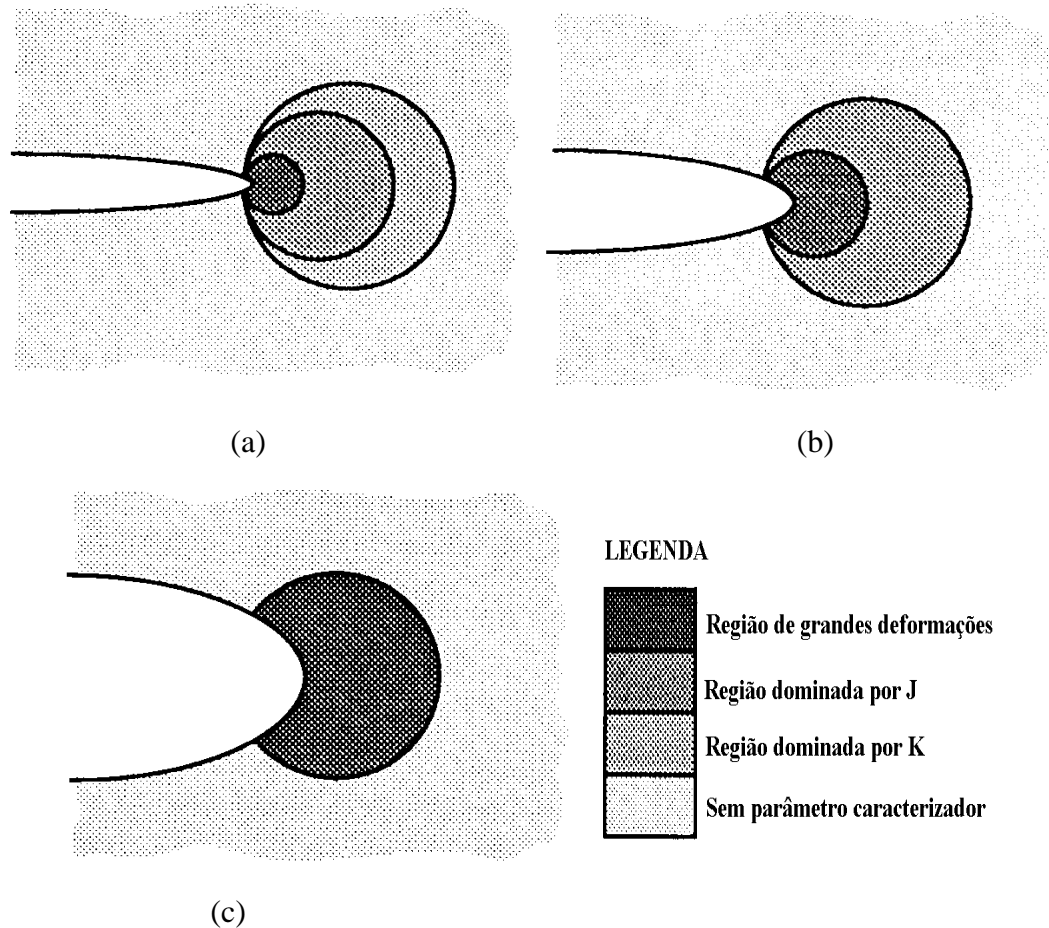


Fig. 2.3. Efeito da plasticidade nos campos de tensões<sup>1</sup>. (a) Condição de pequeno escoamento; (b) Condição elastoplástica; (c) Grandes deformações.

Nesta condição (Fig. 2.3a), a região onde as deformações inelásticas ocorrem está confinada por uma região caracterizada por  $K$ . Dentro da zona plástica, contudo, existe uma região unicamente caracterizada por  $J$ , cuja singularidade das tensões é definida pela teoria conhecida como HRR (Hutchinson, Rice e Rosengren) e será explicada em detalhes posteriormente. Na região próxima à ponta da trinca, as deformações são finitas e a teoria HRR não é mais válida. Esta região é denominada zona de processo de fraturamento, pois é nela que ocorrem os eventos microscópicos que levam à fratura. Na condição de “pequeno

<sup>1</sup>Figuras obtidas do livro do Anderson [1].

escoamento”, ambos,  $K$  e  $J$ , caracterizam as condições na ponta da trinca. Contudo, a região dominada por  $K$  não requer que a singularidade  $1/\sqrt{r}$  exista na zona plástica. O mesmo se aplica para a região dominada por  $J$ , ou seja, esta região não requer que os campos singulares, definidos pela teoria HRR, existam na zona de processo.

Quando a zona plástica cresce em tamanho (Fig. 2.3b), a região caracterizada por  $K$  desaparece e a região caracterizada por  $J$  persiste. Neste caso, ocorre um arredondamento da ponta da trinca que não é considerada no caso anterior. A região dominada por  $J$  não requer a existência dos campos singulares, requer apenas que a zona de processo exista. Contudo, se esta zona de processo alcançar um tamanho finito em relação às dimensões no plano (Fig. 2.3c), a região caracterizada por  $J$  não mais existirá, tornando-se, portanto, um parâmetro inválido.

### 2.2.1. Fator de Intensidade de Tensão

O fator de intensidade de tensão,  $K$ , está relacionado às tensões e aos deslocamentos na ponta de uma trinca pelas soluções elásticas clássicas conhecidas como soluções de Westergaard. Estas soluções são dadas pelas seguintes equações:

$$\mathbf{s}_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2pr}} f_{ij}(\mathbf{q}); \quad i, j = x, y \quad (2.18)$$

$$u_i = \frac{K}{2m} \left( \frac{r}{2p} \right)^{1/2} g_{ij}(\mathbf{q}), \quad (2.19)$$

onde,  $\mathbf{s}_{ij}$  é o tensor das tensões,  $u_i$  é o vetor dos deslocamentos,  $r$  é a distância da ponta da trinca a um ponto qualquer do corpo (Fig. 2.4),  $\mathbf{q}$  é o ângulo no plano da trinca,  $m$  é o módulo de cisalhamento,  $f_{ij}$  e  $g_{ij}$  são funções adimensionais de  $\mathbf{q}$  e  $x$  e  $y$  são os eixos coordenados locais na ponta da trinca.

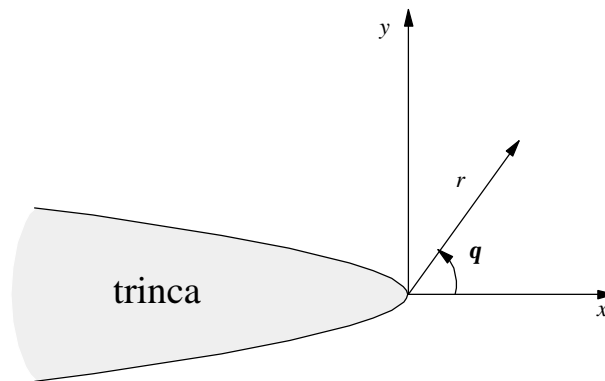


Fig. 2.4. Eixos coordenados na ponta da trinca.

Ao fator de intensidade de tensão é dado um subscrito para indicar cada um dos modos de carregamento, isto é,  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ . Assim, as expressões para  $f_{ij}$  e  $g_{ij}$  são diferentes em cada um dos modos. A singularidade das tensões (Eq. (2.18)) é dada pelo termo  $1/\sqrt{r}$  quando  $r \rightarrow 0$ . Portanto,  $K$  define a amplitude desta singularidade na ponta da trinca, bem como mede o nível de deformação na vizinhança da mesma. Seu valor depende linearmente da carga aplicada, do comprimento da trinca e de outros parâmetros geométricos que caracterizam a estrutura.

A propagação de uma trinca só ocorrerá se o fator de intensidade de tensão  $K$  atingir um valor crítico  $K_c$ . Este valor, denominado de tenacidade à fratura, é obtido de ensaios experimentais e independe da geometria da estrutura e/ou do tamanho e forma da trinca. Embora seja considerado uma constante do material, seu valor varia com o modo de carregamento, ou seja,

$$K_{Ic} \neq K_{IIc} \neq K_{IIIc}. \quad (2.20)$$

Na prática, o modo I de carregamento é o mais importante, pois muitos materiais são mais susceptíveis à fratura por tensões normais de tração do que por tensões de cisalhamento. Os modos II e III de carregamento, usualmente, não levam à fratura. Neste caso, pode-se dizer que  $K_{IIc}$  e  $K_{IIIc}$  são, geralmente, maiores do que  $K_{Ic}$ . Em um modo misto de carregamento, a ação combinada dos dois modos pode levar ao fraturamento do material, sendo, portanto, os dois fatores de tenacidade considerados no critério de fratura [31, 42, 78].

### 2.2.2. Taxa de Liberação de Energia

A taxa de liberação de energia,  $G$ , é definida, em material elástico, como a taxa de variação na energia potencial com respeito ao crescimento da trinca. Ela mede a energia potencial que é liberada durante o processo de fraturamento; depende do tipo de carregamento, da geometria do corpo e do tamanho e forma da trinca. Ela pode então ser escrita pela seguinte equação,

$$G = -\frac{d\Pi}{da} \quad (2.21)$$

onde  $\Pi$  é a energia potencial e  $a$  é o comprimento da trinca. A energia potencial é definida pela soma da energia de deformação armazenada no corpo,  $U$ , com o potencial adquirido pelas forças externas,  $V$ .

$$\Pi = U + V \quad (2.22)$$

O fator de intensidade de tensão é considerado um parâmetro local, enquanto a taxa de liberação de energia é um parâmetro global. Em materiais elásticos, ambos estão relacionados de forma simples e direta, portanto, um valor crítico  $G_c$  pode ser considerado como uma medida alternativa da tenacidade à fratura. Para cada modo de carregamento, combina-se a respectiva solução de Westergaard (Eq. (2.18)) com a definição de energia (Eq. (2.23)), obtendo-se as seguintes relações,

$$G_I = \frac{k+1}{8m} K_I^2 \quad (2.23)$$

$$G_{II} = \frac{k+1}{8m} K_{II}^2, \quad (2.24)$$

$$G_{III} = \frac{1}{2\mathbf{m}} K_{III}^2, \quad (2.25)$$

onde  $\mathbf{k}$  é

$\mathbf{k} = 3 - 4\mathbf{n}$  em estado de deformação plana, e

$\mathbf{k} = \frac{3 - \mathbf{n}}{1 + \mathbf{n}}$  em estado de tensão plana

e  $\mathbf{n}$  é o coeficiente de Poisson.

Quando os três modos de carga estão presentes em uma estrutura, a taxa de liberação de energia é dada por

$$G = G_I + G_{II} + G_{III}, \quad (2.26)$$

sendo, portanto, aditivo pois  $G$ , como energia, é uma variável escalar. A separação dos modos se dá apenas para efeito didático.

### 2.2.3. Integral $J$

A integral  $J$ , também conhecida como a integral de Rice [67], está baseada na lei de conservação da energia. É uma integral de contorno e o seu valor independe do caminho de integração escolhido. Foi proposta inicialmente para o estudo de materiais não lineares, dentro da condição de “pequeno escoamento”. Ela é definida como

$$J = \int_C \left[ W n_1 - \mathbf{s}_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} \right] ds \quad (2.27)$$

em que

$$W = \int \mathbf{s}_{ij} d\mathbf{e}_{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{s}_{ij} \mathbf{e}_{ij} \quad (2.28)$$

é a densidade de energia de deformação.  $C$  é qualquer caminho que começa na face inferior da trinca, envolve a ponta da trinca e termina na face superior (Fig. 2.5),  $n_j$  é o vetor unitário normal a  $C$ , onde  $n_1$  corresponde à componente normal na direção  $x$ , e  $s$  é o comprimento de arco ao longo do contorno de integração.

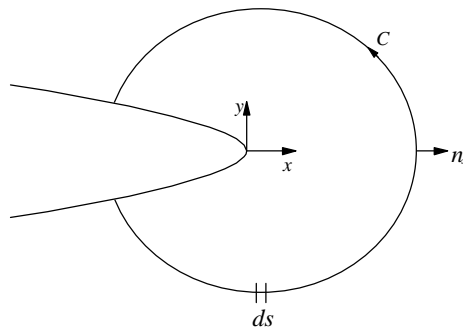


Fig. 2.5. Contorno arbitrário em torno da ponta da trinca.

O parâmetro  $J$ , quando utilizado para avaliar o comportamento plástico de um material, pode ser visto como um parâmetro de tensão ou como de energia. No primeiro caso,  $J$  define a amplitude dos campos de tensões, enquanto que no segundo,  $J$  define uma variação na energia potencial quando a trinca cresce.

### 2.2.3.1. Campos de Tensões na Ponta da Trinca

Hutchinson [43], Rice e Rosengren [68] mostraram, independentemente, que para materiais elásticos não lineares, a integral  $J$  depende dos estados de tensões, deformações e deslocamentos próximos à ponta da trinca.

Estes campos na ponta da trinca são definidos pela teoria de deformação da plasticidade, que considera carregamento proporcional, monotônico, e não considera o arredondamento da ponta da trinca. A curva tensão-deformação é modelada pela relação de Ramberg-Osgood, dada por:



$$\frac{\mathbf{e}}{e_Y} = \frac{\mathbf{s}}{s_Y} + a \left( \frac{\mathbf{s}}{s_Y} \right)^n \quad (2.29)$$

onde  $s_Y$  é a tensão de escoamento uniaxial,  $e_Y$  é a deformação de escoamento uniaxial,  $a$  é uma constante adimensional do material e  $n$  é o expoente que determina o encruamento. O primeiro termo desta equação descreve o comportamento elástico do material, enquanto que o segundo refere-se à resposta plástica ou não linear (Fig. 2.6). Quando  $n = 1$ , a curva corresponde ao comportamento elástico do material. À medida que  $n$  tende a um valor infinito, a curva aproxima-se do comportamento plástico perfeito do material.

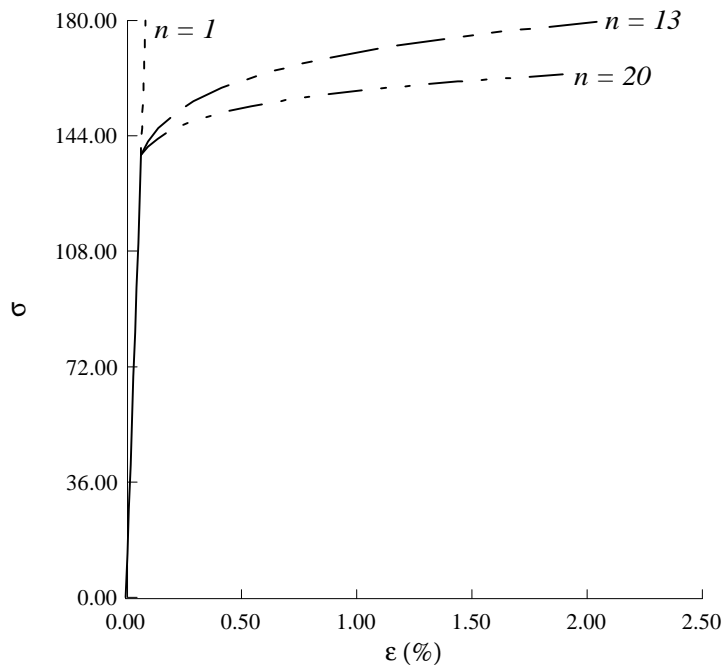


Fig. 2.6. Curva tensão-deformação de Ramberg-Osgood.

Usando a definição de tensão efetiva, segundo o critério de von Mises (Eq. (2.13)), e a Eq. (2.29) na definição da integral  $J$  (Eq. (2.27)), encontram-se os campos HRR, assim denominados devido aos seus autores. As relações das distribuições de tensões, deformações e deslocamentos são dadas por:

$$s_{ij} = s_Y \left( \frac{J}{a e_Y s_Y I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{s}_{ij}(n, q) \quad (2.30)$$

$$\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{a}e_Y \left( \frac{J}{\mathbf{a}e_Y \mathbf{s}_Y I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\mathbf{e}}_{ij}(n, \mathbf{q}) \quad (2.31)$$

$$u_i = \frac{\mathbf{a} \mathbf{s}_Y}{E} \left( \frac{EJ}{\mathbf{a} \mathbf{s}_Y^2 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} r \tilde{u}_i(n, \mathbf{q}) \quad (2.32)$$

onde  $I_n$  é uma constante de integração que depende de  $n$ .  $\tilde{\mathbf{S}}_{ij}$ ,  $\tilde{\mathbf{e}}_{ij}$  e  $\tilde{u}_i$  são funções adimensionais de  $n$  e  $\mathbf{q}$ . Os parâmetros  $I_n$ ,  $\tilde{\mathbf{S}}_{ij}$ ,  $\tilde{\mathbf{e}}_{ij}$  e  $\tilde{u}_i$  também dependem do modo de carregamento.

A singularidade das tensões e deformações é dada pelos termos  $1/r^{1/n+1}$  e  $1/r^{n/n+1}$ , respectivamente. Quando  $n = 1$ , encontra-se a singularidade de  $1/\sqrt{r}$  que caracteriza as soluções elásticas, sendo, portanto, um caso particular destas equações.

Pela equação dos deslocamentos (Eq. (2.32)), Shih [76] mostrou que a relação entre  $J$  e CTOD é única para um dado material e que sua validade teórica vai além dos limites da MFLE. Vale ressaltar, contudo, que estas soluções só são válidas dentro da zona plástica, sendo inválida dentro da zona de processo de fraturamento por não se considerar, nesta formulação, variações de geometria da ponta da trinca.

### 2.2.3.2. Definição de $J$ como Energia

O uso de  $J$  como um conceito de energia tem sido normalmente utilizado para materiais elásticos não lineares, na condição de pequeno escoamento. Este conceito é considerado uma consequência mais matemática do que física. Uma expressão alternativa para definir a integral  $J$  é

$$J = - \frac{d\Pi}{da} \quad (2.33)$$

Quando  $J$  é usado para materiais elásticos lineares, seu valor é igual ao da taxa de liberação de energia (Eq. (2.21)). Neste caso, o caminho de integração escolhido deve estar dentro da região cujos campos de tensões são caracterizados por  $K$ .  $J$  relaciona-se com os fatores de intensidade de tensão da mesma forma que  $G$  (equações (2.23), (2.24) e (2.25)). Contudo, para materiais plásticos, não ocorre somente liberação de energia, mas também uma variação na energia potencial absorvida por extensão de trinca. Na verdade, a energia de deformação absorvida por estes materiais não é recuperada quando a trinca cresce, ou o corpo trincado é descarregado, como acontece com os materiais elásticos.

Um critério de propagação da fratura, neste caso, pode então ser definido como

$$J = J_c \quad (2.34)$$

em que  $J_c$  é uma constante do material definida experimentalmente.

## CAPÍTULO 3

# MÉTODOS PARA O CÁLCULO NUMÉRICO DOS PARÂMETROS DE FRATURA

Dois métodos podem ser utilizados no cálculo dos fatores de intensidade de tensão: o método direto e o indireto. No método direto,  $K$  é calculado das tensões, ou dos deslocamentos, resultantes da análise de elementos finitos. Como já foi dito, a formulação adotada do MEF está baseada em deslocamentos e, portanto, estes resultados são mais exatos do que os das tensões. Por isso, os deslocamentos são usualmente empregados. No indireto, os fatores de intensidade de tensão são determinados por suas relações com a taxa de liberação de energia ou com a integral  $J$ .

Como o sistema proposto é bidimensional, as estruturas trincadas em estudo podem estar submetidas ao carregamento puro ou combinado. Portanto, os métodos aqui apresentados calculam os parâmetros de fratura,  $K$ ,  $G$  e  $J$ , para os modos I e/ou II.

### 3.1. ELEMENTOS FINITOS ESPECIAIS

Os elementos singulares *quarter-points* (QP) são formados pelos elementos isoparamétricos convencionais, triangulares ou quadrilaterais, de ordem quadrática, cuja singularidade  $1/\sqrt{r}$  é introduzida desviando o nó do meio do lado para a posição de  $1/4$  do lado (Fig. 3.1). Barsoum [11] mostrou que o elemento triangular proporciona melhores resultados que o elemento quadrilateral. No triangular, a singularidade é encontrada tanto no contorno quanto no interior do elemento, enquanto que no quadrilateral, só é encontrada no interior do elemento. Estes elementos são utilizados apenas para o processo de fraturamento linear.

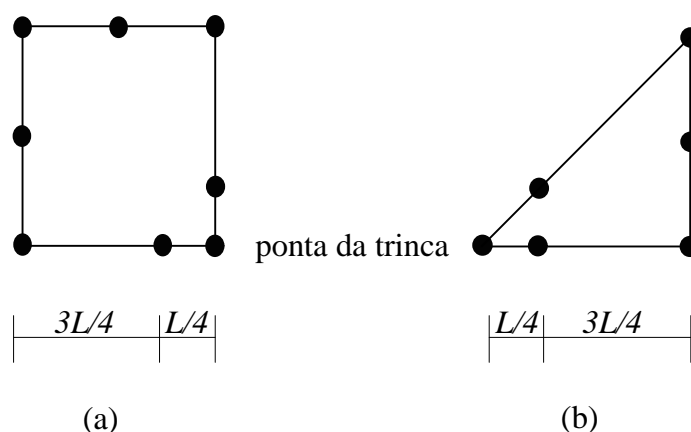


Fig. 3.1. Elementos singulares *quarter-points*. (a) Quadrilateral; (b) Triangular.

No processo de fraturamento não linear, um elemento especial é utilizado. Este elemento é formado pelo elemento quadrilateral Q8 degenerado a um triângulo na ponta da trinca (Fig. 3.2). Este elemento produz a singularidade  $1/r$  nos campos de tensões, para materiais plásticos sem encruamento [12]. A principal vantagem deste elemento é que ele permite calcular o CTOD da malha deformada. Na malha indeformada, os nós da ponta da trinca ocupam a mesma posição no espaço (Fig. 3.2a), mas movem-se quando os elementos se deformam (Fig. 3.2b).

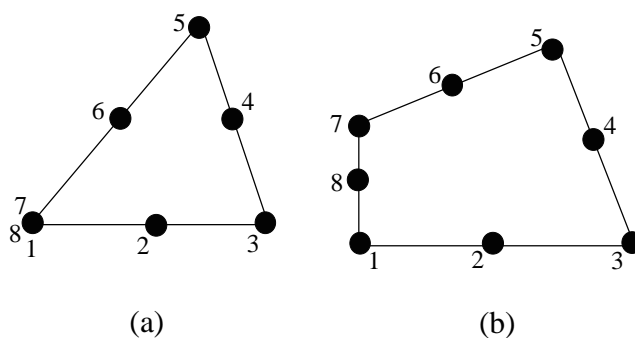


Fig. 3.2. Elemento Q8 colapsado. (a) Elemento indeformado; (b) Elemento deformado.

Estes elementos são dispostos na ponta da trinca em forma de uma roseta. A roseta padrão é formada por oito elementos que formam entre si um ângulo de  $45^\circ$ , normalmente alinhada com a trinca (Fig. 3.3a). Os elementos que compõem a roseta podem ser os elementos triangulares convencionais (T6), os elementos singulares, ou os elementos Q8 colapsados. Várias rosetas de elementos singulares foram implementadas neste trabalho, variando-se apenas o ângulo entre os elementos.

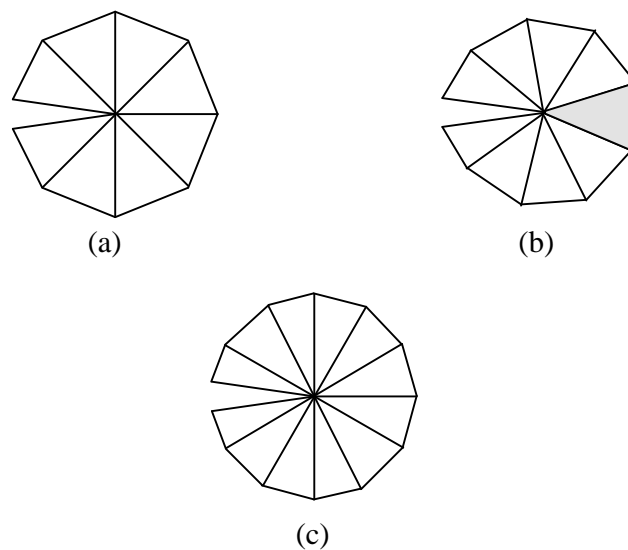


Fig. 3.3. Rosetas de elementos finitos. (a) Roseta padrão (T6, QP, Q8C); (b) Roseta com elementos QP a  $40^\circ$ ; (c) Roseta com elementos QP a  $30^\circ$ .

Pode-se então escolher entre cinco tipos diferentes de rosetas:

- (1) Com o elemento T6 na roseta padrão (Fig. 3.3a);
- (2) Com o elemento Q8 colapsado na roseta padrão (Fig. 3.3a);
- (3) Com o elemento singular *quarter-point* na roseta padrão (QP45 - Fig. 3.3a);
- (4) Com o elemento singular *quarter-point* na roseta com o ângulo de  $40^\circ$  (QP40 - Fig. 3.3b);
- (5) Com o elemento singular *quarter-point* na roseta com o ângulo de  $30^\circ$  (QP30 - Fig. 3.3c);

A roseta (4) foi utilizada por Valente [82], com elementos T6 não singulares, a fim de capturar a tensão principal máxima na ponta de uma trinca fictícia, a qual estaria no centro de gravidade do elemento hachurado na Fig. 3.3b. A roseta (1) possibilita comparar os resultados da análise com os resultados provenientes da análise com as demais rosetas (3,4,5), enquanto que a roseta (5) proporciona um maior refinamento na ponta da trinca. O arredondamento da ponta da trinca, no processo de fraturamento não linear, é representado pela roseta de elementos Q8 colapsados (2).

### 3.2. TÉCNICA DE CORRELAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS

A idéia básica desta técnica é correlacionar os deslocamentos em determinados pontos nodais da trinca, obtidos pela análise de elementos finitos, com as soluções analíticas (Eq. 2.19) a fim de que os fatores de intensidade de tensão sejam obtidos. Esta técnica é comumente utilizada quando a roseta de elementos singulares *quarter-points* está presente na ponta da trinca. Ela permite calcular, separadamente, os fatores de intensidade de tensão quando a estrutura está submetida ao modo misto de carregamento. Maiores detalhes sobre este método podem ser encontrados nas referências [13], [77] e [81].

- *Elemento singular quarter-point*

O deslocamento de abertura da trinca,  $\mathbf{d}(r)$ , para os elementos singulares, é dado por:

$$\mathbf{d}(r) = (4v_{j-1} - v_{j-2}) \sqrt{\frac{r}{L}} \quad (3.1)$$

onde  $v_{j-1}$  e  $v_{j-2}$  são os deslocamentos relativos na direção  $y$ , nos nós  $j-1$  e  $j-2$ , e  $L$  é o tamanho do elemento (Fig. 3.4). Esta equação descreve a curva de abertura da trinca onde são desprezados os termos de mais alta ordem. A expressão analítica para  $\mathbf{d}$ , em  $x = r$ , é dada pela seguinte equação:

$$\mathbf{d}(r) = K_I \left( \frac{\mathbf{k} + 1}{\mathbf{m}} \right) \sqrt{\frac{r}{2p}} \quad (3.2)$$

Igualando as expressões (3.1) e (3.2), o fator de intensidade de tensão para o modo I pode ser avaliado por:

$$K_I = \left( \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{k} + 1} \right) \sqrt{\frac{2p}{L}} (4v_{j-1} - v_{j-2}) \quad (3.3)$$

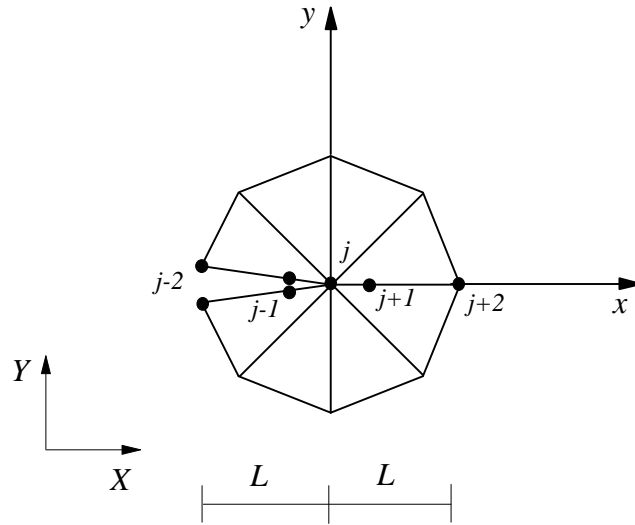


Fig. 3.4. Roseta de elementos *quarter-points* na ponta da trinca.

Seguindo os mesmos passos descritos para o modo I, encontra-se a expressão para a avaliação do fator de intensidade de tensão no modo II que é dado por:

$$K_{II} = \left( \frac{m}{k+1} \right) \sqrt{\frac{2p}{L}} (4u_{j-1} - u_{j-2}) \quad (3.4)$$

onde  $u_{j-1}$  e  $u_{j-2}$  são os deslocamentos relativos na direção  $x$ , nos nós  $j-1$  e  $j-2$  (Fig. 3.4).

Esta técnica tem sido largamente usada para trincas em materiais isotrópicos, mas é difícil aplicá-la em materiais ortotrópicos ou anisotrópicos e, ao que se sabe, não tem sido aplicada para trincas ao longo de interfaces entre materiais distintos.

- *Elemento T6 não singular*

Quando a roseta na ponta da trinca é formada por elementos T6, não singulares, os fatores de intensidade de tensão são obtidos através dos deslocamentos relativos dos nós  $j-2$ , sendo que a expressão para  $\mathbf{d}(r)$ , neste caso, é dada por:



$$\mathbf{d}(r) = v_{j-2} \sqrt{\frac{r}{L}}. \quad (3.5)$$

Seguindo-se o mesmo raciocínio descrito anteriormente para os elementos singulares, encontra-se as seguintes expressões, para os modos I e II de carregamento:

$$K_I = \left( \frac{m}{k+1} \right) \sqrt{\frac{2p}{L}} v_{j-2} \quad (3.6)$$

$$K_{II} = \left( \frac{m}{k+1} \right) \sqrt{\frac{2p}{L}} u_{j-2} \quad (3.7)$$

### 3.3. MÉTODO DE FECHAMENTO DA TRINCA MODIFICADO

Este método foi primeiro utilizado por Rybicki e Kanninen [70] para obter a taxa de liberação de energia de um corpo trincado, isotrópico, modelado com elementos não singulares quadrilaterais de quatro nós. É um método simples, eficiente e capaz de separar as componentes referentes a cada um dos modos na situação de carregamento combinado.

A idéia básica deste modelo é usar o conceito de Irwin da integral de fechamento da trinca. Este conceito supõe que, no modo I de carregamento, quando uma trinca propaga de  $a$  para  $a + da$ , sendo  $da$  infinitesimal, o deslocamento de abertura da nova ponta da trinca será aproximadamente igual ao deslocamento da ponta da trinca original. Então, o trabalho necessário para aumentar a trinca de  $a$  para  $a + da$  é o mesmo necessário para fechá-la de  $a + da$  para  $a$ . Baseado nisto, Irwin obteve a seguinte expressão para  $G$ ,

$$G = \lim_{da \rightarrow 0} \frac{1}{2da} \int_0^{da} v(r) \mathbf{s}_y(r) dr. \quad (3.8)$$

Onde  $da$  é o acréscimo virtual da trinca;  $s_y$  é a distribuição de tensão normal na frente da ponta da trinca (Fig. 3.5) e  $v(r)$  é o deslocamento de abertura da trinca a uma distância  $r$ , atrás da nova ponta da trinca.

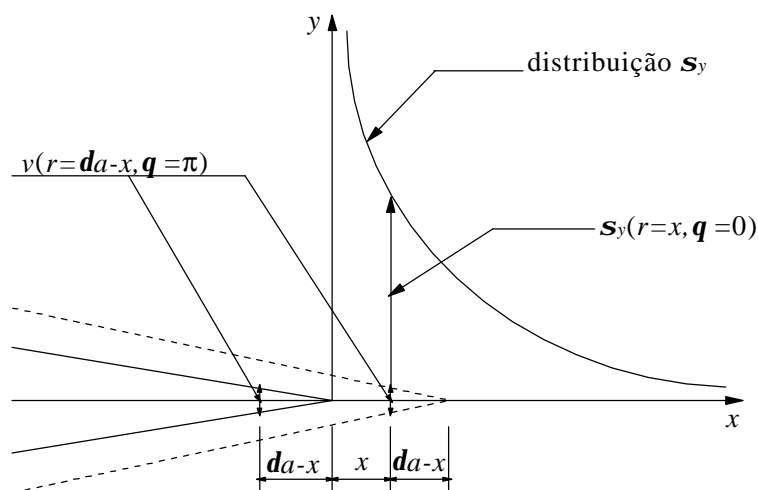


Fig. 3.5. Conceito de Irwin.

O conceito de Irwin é muito importante porque não supõe nenhuma condição para o material, podendo ser usado tanto para materiais homogêneos quanto heterogêneos. A taxa de liberação de energia é avaliada considerando somente o trabalho realizado pelas tensões sobre os deslocamentos produzidos pelo aumento virtual da trinca.

O método de fechamento da trinca modificado, proposto por Raju [66], está baseado nas seguintes suposições:

1. A discretização de elementos finitos, na vizinhança da ponta da trinca, é simétrica em torno dos eixos locais  $x$  e  $y$ ;
2. Considera-se que as tensões normal e de cisalhamento sobre o eixo  $x$  e na frente da ponta da trinca obedecem a distribuição de tensão clássica, ou seja, estão em função de  $1/\sqrt{r}$ ;
3. A forma funcional dos deslocamentos de abertura da trinca,  $u(r)$  e  $v(r)$ , é determinada pelas funções de forma dos elementos.

As tensões são determinadas das forças equivalentes nodais na ponta da trinca e na frente dela. Portanto, somente os elementos que estão em torno da ponta da trinca são usados para determiná-las. Com os valores das tensões e dos deslocamentos provenientes da análise de elementos finitos, calcula-se  $G$  substituindo-os na equação de Irwin (Eq. (3.8)). É importante dizer que tanto as forças quanto os deslocamentos devem estar no sistema local de coordenadas da trinca.

Quando um corpo trincado está submetido ao carregamento puro (modo I ou II), a deformação das faces da trinca é simétrica em torno do eixo- $x$ , ou seja, o trabalho realizado para fechar uma face da trinca de  $a + da$  para  $a$  é igual ao trabalho realizado pela face oposta. Mas, se o carregamento é o de modo misto, a deformação não é simétrica, nem antissimétrica, em relação à ponta da trinca. Neste caso, o trabalho necessário para fechar a face superior da trinca é diferente daquele para fechar a face inferior. Contudo, as expressões aqui apresentadas já levam em consideração estes dois tipos de carregamento, em material isotrópico.

As expressões para  $G$  são diferentes para cada tipo de elemento. Neste trabalho, são apresentadas somente as expressões para o elemento triangular T6, não singular e singular (QP). Maiores detalhes sobre as deduções destas expressões para estes elementos, ou outros quaisquer, podem ser encontrados na referência [66]. Ressalta-se, ainda, que a roseta da Fig. 3.3b não pode ser usada nesta formulação por não satisfazer a condição 1.

- *Elemento T6 não singular*

$$G_I = -\frac{1}{2da} [F_{y_i} (v_m - v_{m'}) + F_{y_j} (v_l - v_{l'})] \quad (3.9)$$

$$G_{II} = -\frac{1}{2da} [F_{x_i} (u_m - u_{m'}) + F_{x_j} (u_l - u_{l'})] \quad (3.10)$$

onde  $F_{x_i}$ ,  $F_{x_j}$ ,  $F_{y_i}$  e  $F_{y_j}$  são as forças nodais equivalentes atuando nos nós  $i$  e  $j$ , nas direções  $x$  e  $y$ ;  $u$  e  $v$  são os deslocamentos nodais, nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, nos nós  $m$ ,  $m'$ ,  $l$

e  $l'$ . A Fig. 3.6a mostra as forças nodais, na direção  $y$ , próximas à ponta da trinca para este elemento.

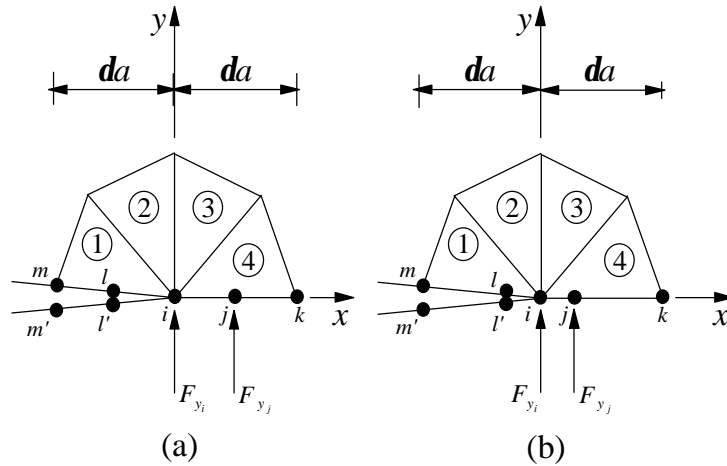


Fig. 3.6. Idealização de elementos finitos. (a) T6 não singular; (b) Singular QP.

- *Elemento singular quarter-point*

Raju, em seu trabalho, propõe dois tipos de fórmulas para este elemento: a fórmula consistente, que usa três forças no elemento, e a fórmula simplificada, que usa somente duas forças no elemento. Neste trabalho, foram implementadas as fórmulas simplificadas por serem mais fáceis de trabalhar e por apresentarem resultados mais exatos do que os obtidos pelas fórmulas consistentes. As fórmulas simplificadas são:

$$G_I = -\frac{1}{2da} \left[ F_{y_i} \{t_{11}(v_m - v_{m'}) + t_{12}(v_l - v_{l'})\} + F_{y_j} \{t_{21}(v_m - v_{m'}) + t_{22}(v_l - v_{l'})\} \right] \quad (3.11)$$

$$G_{II} = -\frac{1}{2da} \left[ F_{x_i} \{t_{11}(u_m - u_{m'}) + t_{12}(u_l - u_{l'})\} + F_{x_j} \{t_{21}(u_m - u_{m'}) + t_{22}(u_l - u_{l'})\} \right] \quad (3.12)$$

onde  $t_{11} = 6 - 3\frac{p}{2}$ ;  $t_{12} = 6p - 20$ ;  $t_{21} = \frac{1}{2}$ ;  $t_{22} = 1$ . As forças nodais, na direção  $y$ , para este elemento, estão mostradas na Fig. 3.6b.

Em ambos os elementos, a força no nó  $i$  é a soma das contribuições dos elementos 1, 2, 3 e 4, enquanto que a força no nó  $j$  utiliza apenas a contribuição do elemento 4.

As expressões (3.9), (3.10), (3.11) e (3.12) foram desenvolvidas considerando que as faces da trinca estão livres de pressões. Contudo, quando estas faces estão submetidas a uma pressão uniforme (Fig. 3.7a), as forças nodais equivalentes devem ser corrigidas e usadas nas expressões de  $G$ . Esta correção é feita somando-se as forças provenientes da análise de elementos finitos ( $F_{y_i}^c, F_{y_j}^c$ ) às forças nodais consistentes devidas à pressão nas faces da trinca. As figuras Fig. 3.7b e Fig. 3.7c mostram a superposição destas forças para os dois elementos aqui considerados.

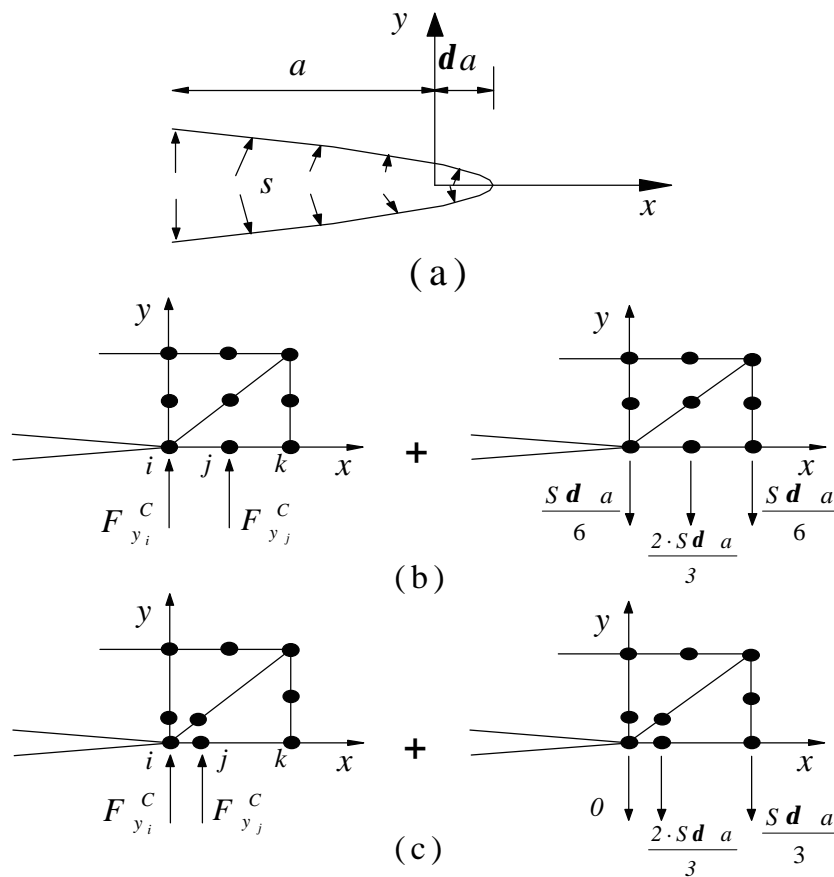


Fig. 3.7. Superposição das forças nodais. (a) Pressão uniforme nas faces da trinca; (b) Elemento T6, não singular; (c) Elemento singular.

De posse dos valores de  $G_I$  e  $G_{II}$ , calculam-se os fatores de intensidade de tensão pelas equações (2.23) e (2.24).

### 3.4. MÉTODO DA INTEGRAL DE DOMÍNIO EQUIVALENTE

O método da integral de domínio equivalente transforma a integral de contorno em uma integral de domínio finito pelo teorema da divergência. Este método se justifica no presente contexto porque é mais conveniente avaliar uma integral de domínio em modelos de elementos finitos do que uma integral de linha. Para problemas bidimensionais, a integral de linha é substituída por uma integral de área, cujo contorno  $C_1$  é substituído pela área anular  $A$  mostrada na Fig. 3.8. Uma função contínua,  $q$ , em  $A$  é empregada tal que seu valor seja unitário sobre o contorno  $C_1$  e nulo no contorno  $C_2$ . Então, a integral  $J$  como definida na Eq. (2.27) é rescrita como

$$J = - \int_C \left[ W d_{ij} - s_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right] q n_j dC, \quad C = C_1 + C_2 \quad (3.13)$$

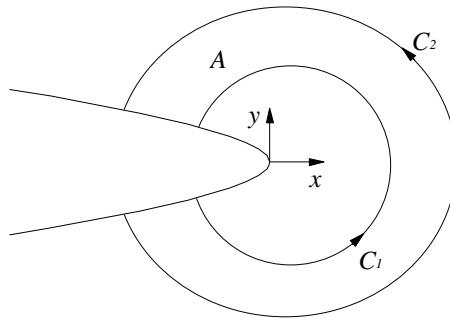


Fig. 3.8. Área a ser empregada no cálculo da integral  $J$ .

Pelo teorema da divergência tem-se a seguinte integral, considerando pressão uniforme nas faces da trinca,

$$J = - \int_A \left[ W \frac{\mathcal{I}q}{\mathcal{I}x} - s_{ij} \frac{\mathcal{I}u_i}{\mathcal{I}x} \frac{\mathcal{I}q}{\mathcal{I}x} \right] dA - \int_A \left\{ \frac{\mathcal{I}W}{\mathcal{I}x} - \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}x} \left[ s_{ij} \frac{\mathcal{I}u_i}{\mathcal{I}x} \right] \right\} q dA - \int_S t_i \frac{\mathcal{I}u_i}{\mathcal{I}x} q ds \quad (3.14)$$

onde  $t_i$  é a força de superfície nas faces da trinca e  $ds$  é uma integral de linha. O terceiro termo desta equação desaparecerá se as faces da trinca não estiverem carregadas, ou se  $q=0$  nos trechos carregados.

### 3.4.1. Análise Elástica Linear

A integral  $J$ , tida como independente do caminho de integração, considera um balanço de energia mecânica somente para uma translação local da frente da trinca na direção  $x$  (modo I). Isto quer dizer que se um corpo trincado está submetido a qualquer um dos modos de carregamento puro, o valor resultante da integral  $J$  (Eq. (3.14)) permite que qualquer um dos fatores de intensidade de tensão sejam calculados. Contudo, se o corpo trincado está submetido a um carregamento combinado, o valor da integral  $J$ , sozinha, não permite que estes fatores sejam calculados separadamente. Neste caso, lança-se mão das integrais invariantes que são integrais tipo integral  $J$ . As mais usualmente empregadas são as integrais de caminho independente  $J_k$ , definidas por Knowles e Sternberg [49] para problemas bidimensionais, expressas como

$$J_k = - \int_A \left[ W \frac{\mathcal{I}q}{\mathcal{I}x_k} - \mathcal{S}_{ij} \frac{\mathcal{I}u_i}{\mathcal{I}x_k} \frac{\mathcal{I}q}{\mathcal{I}x_j} \right] dA - \int_A \left[ \frac{\mathcal{I}W}{\mathcal{I}x_k} - \mathcal{S}_{ij} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}x_j} \left( \frac{\mathcal{I}u_i}{\mathcal{I}x_k} \right) \right] q dA - \int_S t_i \frac{\mathcal{I}u_i}{\mathcal{I}x_k} q ds \quad (3.15)$$

onde  $k$  corresponde à direção de um dos eixos coordenados ( $x, y$ ) na frente da trinca (Fig. 2.4). Estas integrais têm sido utilizadas para pequenas deformações e foram generalizadas por Atluri [3, 4] para deformações finitas.

Os fatores de intensidade de tensão podem então ser calculados por duas maneiras diferentes. A primeira é pelas relações entre as componentes  $J_I$  e  $J_2$  da integral  $J$  e os fatores de intensidade de tensão. Estas relações são definidas por:

$$J_1 = \frac{k+1}{8m} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (3.16)$$

$$J_2 = -\frac{\mathbf{k}+1}{4\mathbf{m}} K_I K_{II} \quad (3.17)$$

Onde os sub-índices 1 e 2 referem-se às direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.  $J_1$  e  $J_2$  são calculados pela Eq. (3.15), cujo segundo termo é nulo. Após algumas manipulações matemáticas, as seguintes equações, para  $K_I$  e  $K_{II}$ , são determinadas.

$$K_I = 0.5 \sqrt{\frac{8\mathbf{m}}{\mathbf{k}+1}} (\sqrt{J_1 - J_2} + \sqrt{J_1 + J_2}) \quad (3.18)$$

$$K_{II} = 0.5 \sqrt{\frac{8\mathbf{m}}{\mathbf{k}+1}} (\sqrt{J_1 - J_2} - \sqrt{J_1 + J_2}) \quad (3.19)$$

A outra maneira de calcular os fatores de intensidade de tensão é utilizando os campos associados proposto por Bui [18]. Estes campos proporcionam uma separação total dos modos de carregamento. Segundo Bui, a primeira componente da Eq. (3.15) é o próprio  $J$  e a segunda componente,  $J_2$ , não é uma integral de caminho independente, não proporcionando, portanto, resultados exatos.

Neste caso, os deslocamentos e as tensões são separadas em partes simétricas e antissimétricas. Assim, para os deslocamentos, tem-se:

$$\begin{aligned} u &= u^I + u^{II} = \frac{1}{2}(u + u') + \frac{1}{2}(u - u') \\ v &= v^I + v^{II} = \frac{1}{2}(v - v') + \frac{1}{2}(v + v') \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde  $u$  e  $v$  são os deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente;  $u'(x, y) = u(x, -y)$  e  $v'(x, y) = v(x, -y)$ . Os sobrescritos I e II, nos deslocamentos  $u$  e  $v$ , indicam os campos associados correspondentes às partes simétricas e antissimétricas dos deslocamentos, respectivamente.

As tensões são assim divididas:



$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_{xx} &= \mathbf{s}_{xx}^I + \mathbf{s}_{xx}^{II} = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_{xx} + \mathbf{s}'_{xx}) + \frac{1}{2}(\mathbf{s}_{xx} - \mathbf{s}'_{xx}) \\
\mathbf{s}_{yy} &= \mathbf{s}_{yy}^I + \mathbf{s}_{yy}^{II} = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_{yy} + \mathbf{s}'_{yy}) + \frac{1}{2}(\mathbf{s}_{yy} - \mathbf{s}'_{yy}) \\
\mathbf{s}_{zz} &= \mathbf{s}_{zz}^I + \mathbf{s}_{zz}^{II} = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_{zz} + \mathbf{s}'_{zz}) \\
\mathbf{s}_{xy} &= \mathbf{s}_{xy}^I + \mathbf{s}_{xy}^{II} = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_{xy} - \mathbf{s}'_{xy}) + \frac{1}{2}(\mathbf{s}_{xy} + \mathbf{s}'_{xy})
\end{aligned} \tag{3.21}$$

onde  $\mathbf{s}'_{ij}(x, y) = \mathbf{s}_{ij}(x, -y)$  e  $\mathbf{s}_{zz}^{II} = 0$ .

As novas integrais  $J_I$  e  $J_{II}$  têm, agora, a seguinte propriedade:

$$J = J_I + J_{II} \tag{3.22}$$

onde  $J_I$  é a integral que está associada aos campos simétricos (modo I) e  $J_{II}$  aos campos antissimétricos (modo II), as quais são obtidas por:

$$J_I = - \int_A \left[ W(u_i^I) \frac{\mathcal{I}q}{\mathcal{I}x_k} - \mathbf{s}_{ij}(u_i^I) \frac{\mathcal{I}u_i^I}{\mathcal{I}x_k} \frac{\mathcal{I}q}{\mathcal{I}x_j} \right] dA - \int_S t_i \frac{\mathcal{I}u_i^I}{\mathcal{I}x_k} q ds \tag{3.23}$$

$$J_{II} = - \int_A \left[ W(u_i^{II}) \frac{\mathcal{I}q}{\mathcal{I}x_k} - \mathbf{s}_{ij}(u_i^{II}) \frac{\mathcal{I}u_i^{II}}{\mathcal{I}x_k} \frac{\mathcal{I}q}{\mathcal{I}x_j} \right] dA - \int_S t_i \frac{\mathcal{I}u_i^{II}}{\mathcal{I}x_k} q ds \tag{3.24}$$

$J$  é igual à taxa de liberação de energia e suas componentes,  $J_I$  e  $J_{II}$ , estão relacionadas aos fatores de intensidade de tensão pelas equações (2.23) e (2.24).

Neste trabalho, a segunda maneira de calcular os fatores de intensidade de tensão é empregada para a análise elástica linear, enquanto que a primeira é empregada para a fase elástica do processo elastoplástico, o qual será descrito a seguir.

### 3.4.2. Análise Elastoplástica

Nesta análise, o segundo termo da Eq. (3.15) é diferente de zero e a equação é rescrita como

$$J_k = - \int_A \left[ W \frac{\mathcal{I}q}{\mathcal{I}x_k} - \mathbf{s}_{ij} \frac{\mathcal{I}u_i}{\mathcal{I}x_k} \frac{\mathcal{I}q}{\mathcal{I}x_j} \right] dA - \int_A \left[ \frac{\mathcal{I}W^p}{\mathcal{I}x_k} - \mathbf{s}_{ij} \frac{\mathcal{I}e_{ij}^p}{\mathcal{I}x_k} \right] q dA - \int_S t_i \frac{\mathcal{I}u_i}{\mathcal{I}x_k} q ds \quad (3.25)$$

Os efeitos das deformações inelásticas são introduzidos nesta equação pela densidade de energia de deformação, a qual é agora dividida em componentes elásticas e plásticas, cada uma podendo ser calculada separadamente. Então,

$$W = W^e + W^p . \quad (3.26)$$

As componentes elástica e plástica são dadas pelas equações abaixo.

$$W^e = \int \mathbf{s}_{ij} d\mathbf{e}_{ij}^e = \frac{1}{2} \mathbf{s}_{ij} \mathbf{e}_{ij}^e , \quad (3.27)$$

$$W^p = \int \mathbf{s}_{ij} d\mathbf{e}_{ij}^p . \quad (3.28)$$

Contudo, o trabalho plástico também pode ser escrito em termos da tensão efetiva e da deformação plástica equivalente, tal que

$$W^p = \int \bar{\mathbf{s}} de^p = \mathbf{s}_y e^p + \frac{1}{2} h'(e^p)^2 . \quad (3.29)$$

### 3.4.3. Formulação de Domínio Equivalente no MEF

No MEF, a formulação de domínio equivalente é conveniente pois rotinas que executam integração numérica sobre um domínio finito estão sempre disponíveis. A notação

indicial das equações (3.23), (3.24) e (3.25) pode ser substituída pela notação matricial, que é mais adequada para o método. Apesar destas equações estarem escritas nas coordenadas locais da trinca, a formulação de elementos finitos será escrita nas coordenadas globais. Portanto, uma transformação de coordenadas se faz necessária.

O elemento considerado na análise é o isoparamétrico que é descrito por um sistema de coordenadas paramétricas,  $r$  e  $s$ . A relação entre as coordenadas globais,  $X$  e  $Y$ , e estas coordenadas é dada por

$$\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{X}_0 \mathbf{N} \quad (3.30)$$

onde

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_k \\ Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_k \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_k \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

e  $k$  é o número de nós que descreve o elemento. As coordenadas globais dos nós do elemento são dadas pela matriz  $\mathbf{X}_0$  e as funções de interpolação para cada nó  $N_k$  são funções das coordenadas isoparamétricas. O relacionamento entre os deslocamentos globais, em cada elemento, e seus deslocamentos nodais é semelhante ao das coordenadas e é escrito como

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 \mathbf{N} \quad (3.32)$$

com

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_k \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Estes deslocamentos podem ser os deslocamentos simétricos, ou antissimétricos, dos campos associados da análise elástica, ou o próprio campo de deslocamentos da análise plástica.

A matriz Jacobiana do mapeamento descrito pela Eq. (3.30) é dada por:

$$\mathbf{Jb} = \begin{bmatrix} X_{,r} & X_{,s} \\ Y_{,r} & Y_{,s} \end{bmatrix} = \mathbf{X}_0 \mathbf{DN} \quad (3.34)$$

onde

$$\mathbf{DN} = \begin{bmatrix} N_{1,r} & N_{1,s} \\ N_{2,r} & N_{2,s} \\ \vdots & \vdots \\ N_{k,r} & N_{k,s} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Pela regra da cadeia é encontrado que

$$\mathbf{Jb}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{,X} & \mathbf{x}_{,Y} \\ \mathbf{h}_{,X} & \mathbf{h}_{,Y} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

que junto com a Eq. (3.32) e a (3.35) chega-se a seguinte expressão

$$\mathbf{U}_{,\bar{X}} = \begin{bmatrix} u_{,X} & u_{,Y} \\ v_{,X} & v_{,Y} \end{bmatrix} = \mathbf{U}_0 \mathbf{DNJb}^{-1}. \quad (3.37)$$

Assim como as coordenadas e os deslocamentos são determinados das quantidades nodais através das funções de interpolação, define-se a função  $q$  da mesma forma tal que

$$q = \mathbf{QN} \quad (3.38)$$

com  $\mathbf{Q}$  sendo o vetor dos valores nodais de  $q$ . Mais detalhes sobre esta função serão dados adiante. Com os operadores definidos nas equações (3.35) e (3.36), as derivadas de  $q$  são dadas por:

$$\mathbf{q}_{,\bar{X}} = \begin{Bmatrix} q_{,X} \\ q_{,Y} \end{Bmatrix} = \mathbf{QDNJb}^{-1} \quad (3.39)$$

Então, pode-se escrever que

$$\mathbf{J} = \int_A \left( -W \mathbf{I} \mathbf{q}_{,\bar{X}} + \mathbf{U}_{,\bar{X}}^T \mathbf{s} \mathbf{q}_{,\bar{X}} \right) dA + \int_A \left( -\mathbf{W}_{,\bar{X}}^p + \mathbf{s}^T \mathbf{e}_{,\bar{X}}^p \right) q dA - \int_S \mathbf{U}_{,\bar{X}}^T \mathbf{t} q ds \quad (3.40)$$

onde  $\mathbf{s}$  é o vetor das tensões,  $\mathbf{e}^p$  é o vetor das deformações plásticas e

$$\mathbf{J} = \begin{Bmatrix} J_I \\ J_{II} \end{Bmatrix} \text{ ou } \mathbf{J} = \begin{Bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_X \\ t_Y \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (3.41)$$

$$\mathbf{W}_{,\bar{X}}^p = \begin{Bmatrix} W_{,X}^p \\ W_{,Y}^p \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{e}_{,\bar{X}}^p = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_{,X}^p \\ \mathbf{e}_{,Y}^p \end{Bmatrix}. \quad (3.42)$$

A integração da Eq. (3.40) é feita sobre os elementos escolhidos para representar o domínio. Neste trabalho, o domínio é formado pelos elementos da roseta na ponta da trinca e é automaticamente determinado pelo sistema. O método de integração de Gauss é comumente empregado nos programas de elementos finitos e foi utilizado para integrar esta equação, que passa a ser expressa por

$$\mathbf{J} = \sum_E \sum_{pg} \left[ -W \mathbf{I} \mathbf{q}_{,\bar{X}} + \mathbf{U}_{,\bar{X}}^T \mathbf{s} \mathbf{q}_{,\bar{X}} - \mathbf{W}_{,\bar{X}}^p + \mathbf{s}^T \mathbf{e}_{,\bar{X}}^p \right]_{pg} w_{pg} |Jb|_{pg} - \sum_k \sum_{pg} \left[ \mathbf{U}_{,\bar{X}}^T \mathbf{t} q \right]_{pg} w_{pg} |Jb'|_{pg} \quad (3.43)$$

onde o somatório em cada elemento  $E$  do domínio é feito para todos os pontos de Gauss  $pg$ ,  $w_{pg}$  é o peso de Gauss,  $|Jb|$  e  $|Jb'|$  são os determinantes dos Jacobianos de área e de linha, respectivamente. No entanto, problemas surgem no segundo termo desta equação, pois  $W^p$  e  $\mathbf{e}_{ij}^p$  devem estar disponíveis nos pontos nodais dos elementos e não, nos pontos de Gauss. Portanto, uma extrapolação destas variáveis é feita utilizando a técnica dos mínimos quadrados [41].

#### 3.4.4. Função $q$

Esta função pode ser interpretada como um aumento virtual da trinca embora a formulação não requeira tal interpretação. Ela é apenas um artifício matemático que permite a integral de área equivalente ser aceita nos cálculos de elementos finitos. É definida segundo a Eq. (3.38). Usualmente, uma função linear é usada pois, geralmente, uma função mais complicada do que esta não é muito útil. Maiores detalhes sobre esta função podem ser encontradas nas referências [9] e [59].

Neste trabalho,  $q$  é descrito pela função linear cujos valores nodais são:

- $Q = 1$  para o nó da ponta da trinca, mesmo para o elemento Q8 colapsado;
- $Q = 3/4$  para o nó colocado a  $1/4$  da ponta da trinca, em elementos singulares;
- $Q = 1/2$  para os nós do meio do lado, em elementos não singulares (T6 ou Q8 colapsado);
- $Q = 0$  para os nós do elemento que definem o contorno do domínio.

## CAPÍTULO 4

### ESTRATÉGIA AUTO-ADAPTATIVA

A estratégia adaptativa proposta baseia-se em um estimador de erro *a posteriori* com refinamento  $h$ . Esta estratégia é uma extensão daquela que foi proposta por Cavalcante [20] para incluir problemas de fraturamento estrutural, linear e não linear, em duas dimensões.

A Fig. 4.1 mostra um diagrama representativo desta estratégia. No problema linear, o modelo é analisado em um único passo e o processo é repetido até que um critério de convergência para o erro de discretização seja atendido. No problema não linear, o modelo é analisado incrementalmente. A variável  $t$ , na figura, representa simplesmente o passo de carga da análise. Ao final de cada passo de análise, os erros das soluções são estimados e, segundo um critério de convergência, é decidido se uma nova malha é necessária.

Se no passo  $t + \Delta t$  o erro em algum ponto do modelo exceder o valor predefinido do erro, então, a análise incremental com o modelo corrente é interrompida. Um novo modelo de elementos finitos é construído para o passo  $t$ , refinando a malha onde necessário. Após a geração da nova malha, as soluções no instante  $t$  (deslocamentos, tensões, deformações, etc.) são transferidas da malha antiga para a nova. A análise incremental é reiniciada a partir do passo  $t$ , e continua até que novamente os critérios de erro de discretização sejam violados.

A avaliação do erro, para os dois tipos de problemas, é feita no módulo de análise. Este módulo é um código de elementos finitos, baseado em programação orientada a objetos [58].

Trincas podem ser introduzidas em qualquer posição do modelo e a qualquer momento, isto é, no modelo estrutural inicial ou em qualquer estágio do processo adaptativo. Cada vez que uma trinca propaga, ou é iniciada, a geometria do modelo muda fazendo com que a malha global seja atualizada. Existem alguns trabalhos na literatura que resolvem este

problema modificando a malha apenas localmente [17, 65, 85]. Neste trabalho, contudo, emprega-se o esquema de refazer toda a malha, o que foi possível devido à eficiência do algoritmo de geração de malha.

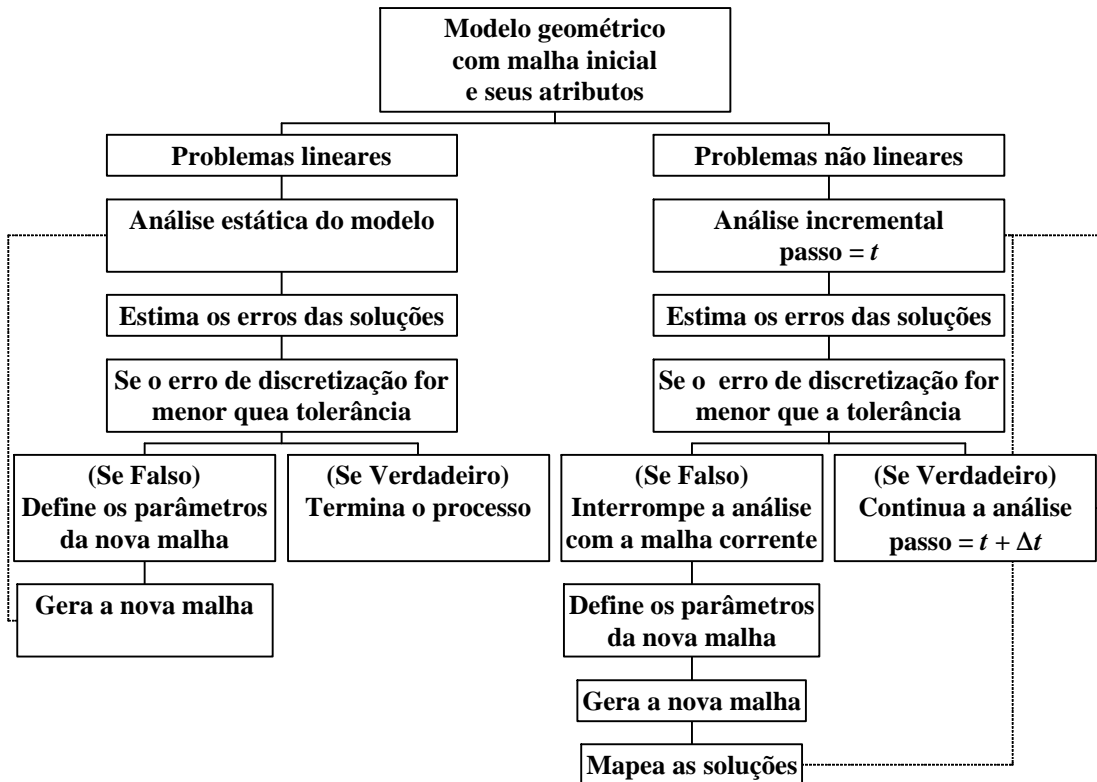


Fig. 4.1. Arranjo esquemático do sistema adaptativo proposto.

#### 4.1. ESTIMADORES DE ERRO

Em um sistema adaptativo, o principal objetivo dos estimadores de erro é manter os erros de discretização das soluções, provenientes da análise de elementos finitos, dentro de limites específicos. Para pequenos deslocamentos, o problema quase estático da Mecânica Estrutural pode ser formulado em deslocamentos como se segue.

Deseja-se encontrar os deslocamentos  $\mathbf{U}$  e as tensões  $\mathbf{s}$  que satisfaçam simultaneamente as condições de equilíbrio e compatibilidade no domínio e as restrições essenciais (cinemáticas) e naturais no contorno. Para descrever os estimadores de erro de discretização utilizados neste trabalho, é preciso definir:



a) as restrições cinemáticas

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_d \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{U}_d$  são os deslocamentos prescritos no contorno  $\mathcal{I}_1 \mathbf{W}$  (Fig. 4.2).

b) as equações de equilíbrio

$$\int_{\Omega} \mathbf{s}^T \mathbf{e}(\bar{\mathbf{U}}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f}^T \bar{\mathbf{U}} d\Omega + \int_{\mathcal{I}_2 \Omega} \mathbf{F}^T \bar{\mathbf{U}} ds, \quad \forall \bar{\mathbf{U}} \in \mathbf{U} \quad (4.2)$$

Onde  $\bar{\mathbf{U}}$  é o campo de deslocamentos a ser determinado,  $\mathbf{f}$  é o vetor das forças de massa do corpo,  $\mathbf{F}$  é o vetor das forças de superfície prescritas no contorno  $\mathcal{I}_2 \mathbf{W}$  (Fig. 4.2) e  $\mathbf{W}$  é o domínio do problema.

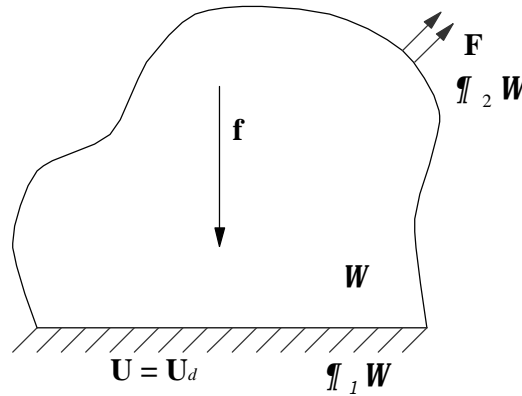


Fig. 4.2. Notações do problema da Mecânica Estrutural.

Vários estimadores de erro têm sido propostos. Os baseados em suavização das tensões são os mais comuns. As tensões suavizadas  $\mathbf{s}_{ij}^*$  são usadas como as ‘soluções exatas’ do problema, as quais são comparadas com as tensões não suavizadas da análise de elementos finitos,  $\mathbf{s}_{ij}^h$ , para medir a magnitude do erro. O erro em tensão é

$$e_s = \left| \mathbf{s}_{ij}^* - \mathbf{s}_{ij}^h \right| \quad (4.3)$$

Dois métodos podem ser utilizados para a suavização das tensões nos nós de um elemento: o método superconvergente [91] e o método dos mínimos quadrados [41]. Estes métodos estão implementados no módulo de análise numérica para todos os tipos de elementos. Assim, as tensões suavizadas  $\mathbf{s}_{ij}^*$  em um determinado ponto do elemento são obtidas por interpolação:

$$\mathbf{s}_{ij}^* = \sum_k N_k(r, s) (\hat{\mathbf{s}}_{ij}^*)_k \quad (4.4)$$

onde as funções de interpolação  $N_k(r, s)$  são aquelas usadas para os deslocamentos,  $r$  e  $s$  são as coordenadas paramétricas dos pontos de Gauss,  $k$  é o número do nó do elemento e  $(\hat{\mathbf{s}}_{ij}^*)_k$  são as tensões suavizadas no nó  $k$ .

Neste trabalho são utilizados diferentes tipos de estimadores de erro, os quais são escolhidos de acordo com o tipo de análise do problema.

#### 4.1.1. Estimador de Erro para Elasticidade

O estimador de erro empregado, neste caso, é o proposto por Zienkiewicz e Zhu [89]. Implementado por Cavalcante [20], este estimador considera o erro na norma de energia tal que

$$\|e\|^2 = \sum_E \|e_E\|^2 \quad (4.5)$$

Com

$$\|e_E\|^2 = \int_{\mathbf{W}_E} (\mathbf{s}^h - \mathbf{s}^*)^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{s}^h - \mathbf{s}^*) d\mathbf{W}_E \quad (4.6)$$

onde  $\|e\|$  é o erro absoluto total da discretização,  $\|e_E\|$  é o erro absoluto do elemento  $E$ ,  $\mathbf{W}_E$  é o subdomínio do elemento  $E$  e  $\mathbf{C}$  é a matriz constitutiva elástica. Estes erros, contudo, não são

convenientes para cálculos práticos, pois têm dimensão de energia. Os erros relativos são mais favoráveis por serem adimensionais. Então, o erro relativo do elemento  $\mathbf{h}_E$  é calculado dividindo o erro absoluto do elemento por uma norma de energia corrigida pelo erro nesta norma, ou seja,

$$\mathbf{h}_E = \frac{\|e_E\|}{\sqrt{\|u^h\|^2 + \|e\|^2}} \quad (4.7)$$

em que

$$\|u^h\|^2 = \int_W \mathbf{s}^h \mathbf{C}^{-1} \mathbf{s}^h dW \quad (4.8)$$

é a norma de energia. Um erro relativo global  $\mathbf{h}$  é definido, segundo a Eq. (4.5), tal que

$$\mathbf{h}^2 = \sum_E (\mathbf{h}_E)^2. \quad (4.9)$$

Desta forma obtém-se que

$$\mathbf{h} = \frac{\|e\|}{\sqrt{\|u^h\|^2 + \|e\|^2}} \quad (4.10)$$

#### 4.1.2. Estimador de Erro para Plasticidade

Na solução de problemas não lineares pelo MEF estão presentes três fontes de erros numéricos, a saber:

1. Erros devidos à discretização da malha de elementos finitos;
2. Erros devidos aos incrementos do passo de carga da análise incremental;
3. Erros devidos à solução iterativa das equações que formulam o problema.

Neste trabalho, contudo, só são estimados os erros provenientes da discretização. Para isso, dois estimadores de erro foram implementados: o primeiro baseado em tensão efetiva [52] e o segundo, na razão do trabalho plástico [64], os quais são descritos a seguir.

(a) *Estimador de Erro em Tensão Efetiva*

O erro absoluto do elemento é uma avaliação direta do erro no interior deste (nos pontos de integração). Sua expressão é dada por

$$e_E = \max |\bar{\mathbf{s}}^h - \bar{\mathbf{s}}^*| \quad (4.11)$$

onde  $\bar{\mathbf{s}}^h$  é a tensão efetiva não suavizada proveniente da análise de elementos finitos e  $\bar{\mathbf{s}}^*$  é a tensão efetiva suavizada calculada pela Eq. (4.4). O erro absoluto total corresponde ao valor máximo do erro no domínio, ou seja,

$$e = \max |e_E|. \quad (4.12)$$

O erro relativo do elemento é então dado pela seguinte equação,

$$\mathbf{h}_E = \frac{e_E}{\sqrt{(\bar{\mathbf{s}}_{\max}^h)_W^2 - (\bar{\mathbf{s}}_{\min}^h)_W^2}} \quad (4.13)$$

onde  $\bar{\mathbf{s}}_{\max}^h$  e  $\bar{\mathbf{s}}_{\min}^h$  são os valores máximos e mínimos de  $\bar{\mathbf{s}}^h$  sobre toda a malha. O erro relativo global da malha é obtido pela equação abaixo, a qual é diferente da definição dada pela Eq. (4.9).

$$\mathbf{h} = \frac{e}{\sqrt{(\bar{\mathbf{s}}_{\max}^h)_\Omega^2 - (\bar{\mathbf{s}}_{\min}^h)_\Omega^2}} \quad (4.14)$$

Esse estimador de erro não é exatamente igual ao utilizado por Lee e Bathe [52]. Naquele trabalho, eles não consideram um erro relativo global da malha, mas apenas um erro

relativo pontual para cada elemento. A equação por eles adotada para o erro relativo não apresenta a raiz quadrada no denominador, como é considerado na Eq. (4.13), nem os termos da raiz estão elevados ao quadrado. Este tipo de formulação para o estimador de erro torna difícil a distribuição uniforme do erro por toda a malha durante o processo de refinamento na estratégia aqui adotada (veja próxima seção).

(b) *Estimador de Erro na Razão do Trabalho Plástico*

O estimador de erro baseado na razão do trabalho plástico [64], para um elemento genérico  $E$ , pode ser expresso como

$$e_E^2 = \int \sum_{\mathbf{w}_E^{i,j}} \left| (\mathbf{s}_{ij}^* - \mathbf{s}_{ij}^h) \left[ (\mathbf{e}_{ij}^p)^* - (\mathbf{e}_{ij}^p)^h \right] \right| dx. \quad (4.15)$$

onde  $(\mathbf{e}_{ij}^p)^*$  e  $(\mathbf{e}_{ij}^p)^h$  são as deformações plásticas suavizadas pela Eq. (4.4) e as não suavizadas resultantes da análise de elementos finitos, respectivamente. O erro relativo do elemento é definido como

$$\mathbf{h}_E = \frac{\|e_E\|}{(W^p)^{1/2}} \quad (4.16)$$

onde  $W^p$  é o trabalho plástico (Eq. 3.28) de todo o modelo;  $\|e\|$  é obtido pela Eq. (4.5) e o erro relativo global da malha  $\mathbf{h}$  é obtido pela Eq. (4.9), tal que

$$\mathbf{h} = \frac{\|e\|}{(W^p)^{1/2}} \quad (4.17)$$

## 4.2. ESTRATÉGIA DE REFINAMENTO

O procedimento de refinamento da malha é feito de uma forma padrão com o objetivo de alcançar uma distribuição uniforme do erro entre os elementos [53]. Além disso, deseja-se que o erro relativo global esteja abaixo de um limite predefinido, ou seja,

$$\mathbf{h} \leq \mathbf{h}^* . \quad (4.18)$$

Sendo assim, um erro relativo admissível  $\bar{\mathbf{h}}$  é estabelecido para cada elemento. Supõe-se que este erro é igual em todos os elementos da malha. Então, substituindo nas equações (4.9) e (4.18) tem-se que

$$\mathbf{h} = \sqrt{m \bar{\mathbf{h}}^2} = \mathbf{h}^* \quad (4.19)$$

onde  $m$  é o número de elementos da malha e  $\mathbf{h}^*$  é o erro definido pelo usuário. Desta relação obtém-se o erro relativo admissível, o qual é dado por:

$$\bar{\mathbf{h}} = \frac{\mathbf{h}^*}{\sqrt{m}} \quad (4.20)$$

O novo tamanho do elemento é previsto de acordo com a taxa de convergência do erro. Esta convergência está relacionada ao tamanho do elemento  $h$  por

$$e = O(h^q) \text{ com } q = \text{menor}(\mathbf{1}, p) \quad (4.21)$$

onde  $p$  é a ordem do polinômio de interpolação usada para descrever o elemento e  $\lambda$  é a intensidade da singularidade. Segundo Zienkiewicz e Zhu [92],  $\lambda$  deve ser inferior a 0,5 no caso de trincas. Coorevits *et al.* [27] consideram 0,52 um valor satisfatório, enquanto Sandhu e Liebowitz [72] observam que a influência da singularidade é eliminada se a malha gerada é dita ótima. Neste trabalho, é considerado o valor de 0,5 para  $\lambda$ , tanto para a roseta de elementos T6 na ponta da trinca, como para a roseta de elementos singulares (QP). Contudo,

exemplos serão mostrados que comparam esta possibilidade com a não consideração da intensidade da singularidade nestes elementos.

Então, a razão do tamanho do elemento está relacionada a uma razão de erro por

$$\frac{h_O^E}{h_N^E} = \mathbf{z}_E^{1/p}, \quad (4.22)$$

para elementos não adjacentes a singularidades, e por

$$\frac{h_O^E}{h_N^E} = \mathbf{z}_E^{1/l}, \quad (4.23)$$

para elementos adjacentes a singularidades. Os índices  $N$  e  $O$  correspondem ao novo (*new*) e ao antigo (*old*) tamanho do elemento  $E$ , respectivamente.  $\mathbf{z}_E$  é a razão de erro do elemento  $E$  definida por:

$$\mathbf{z}_E = \frac{\mathbf{h}_E}{\mathbf{h}}. \quad (4.24)$$

Então, o refinamento da malha é orientado pelo tamanho característico de cada elemento, predito de acordo com a razão de erro e o grau da função de interpolação do elemento, ou da intensidade da singularidade se trincas estão presentes no modelo. Desta forma, refinam-se ( $\mathbf{z}_E > 1$ ) as regiões onde uma malha mais discretizada é necessária, e desrefinam-se ( $\mathbf{z}_E < 1$ ) as áreas onde uma discretização mais grosseira é aconselhável. Contudo, quando  $e_E = 0$  na análise adaptativa plástica, isso quer dizer que a tensão efetiva proveniente da análise de elementos finitos é igual à tensão efetiva suavizada, ou que as deformações plásticas provenientes da análise de elementos finitos são iguais às deformações plásticas suavizadas. Com isso, a razão de erro do elemento é nula ( $\mathbf{z}_E = 0$ ) e, já que se considera que o tamanho do elemento é ótimo, este tamanho é mantido.

### 4.3. ENUMERAÇÃO ESPACIAL RECURSIVA E TRIANGULAÇÃO

Algoritmos de enumeração espacial recursiva subdividem uma região particular do espaço (bi ou tridimensional) em regiões menores e semelhantes, repetindo o processo um número arbitrário de vezes. A estrutura de dados resultante desta subdivisão descreve a região de interesse.

A *quadtree* [71] é uma estrutura de dados cuja forma básica é, usualmente, o quadrado. Uma determinada região do espaço é subdividida recursivamente em quatro quadrados, os quais são arranjados em uma árvore quaternária (Fig. 4.3d). Cada nó da árvore pode ter quatro filhos, ou nenhum filho, cujo primeiro nó corresponde à raiz da árvore. Esta raiz forma o quadrado inicial que limita a região desejada (Fig. 4.3a). As regiões não divididas são chamadas células (círculos pretos na árvore quaternária – Fig. 4.3d), cujo tamanho pode ser determinado pelo seu nível na árvore.

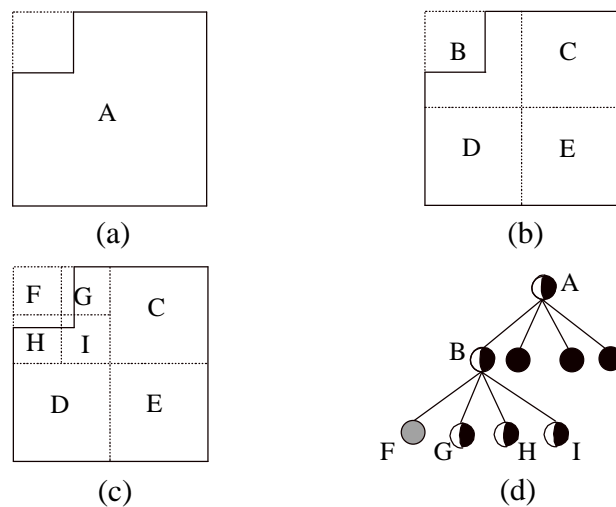


Fig. 4.3. *Quadtree*. (a) Região a ser subdividida; (b) Primeiro nível na árvore; (c) Segundo nível na árvore; (d) Árvore quaternária.

Cada célula da árvore deve ser capaz de diferenciar entre os três seguintes casos (Fig. 4.3b e Fig. 4.3c): (1) se a célula está fora do domínio (círculo cinza – Fig. 4.3d); (2) se a célula está dentro do domínio (círculo preto – Fig. 4.3d) e (3) se a célula está parcialmente dentro do domínio (círculo meio preto, meio branco – Fig. 4.3d). Assim, as células são classificadas como *exteriores* (completamente fora do domínio), *vértices* (contém vértices do



contorno), *contorno* (atravessada por algum segmento do contorno) e *interiores* (completamente dentro do domínio).

Algoritmos que usam a *quadtree* para geração de malha são computacionalmente eficientes e proporcionam uma boa transição entre regiões, com diferentes ordens de refinamento. Contudo, como em geral esta árvore também orienta a discretização do contorno, sua discretização torna-se irregular, pois novos vértices são criados em posições não controladas [6, 7]. A malha assim gerada não é compatível com uma discretização definida *a priori* para o contorno, o que torna difícil combinar diferentes algoritmos de geração de malha, especialmente em problemas com modificação local de malha.

Nos algoritmos de geração de malha baseados na contração de contorno [56, 74], não só a discretização do contorno é garantida, como também os pontos do contorno são usados como entrada de dados para os algoritmos. A malha é gerada em duas fases: primeira, nós interiores são gerados e segunda, uma triangulação, usualmente baseada nos critérios de Delaunay, é executada. Outros trabalhos empregam a triangulação de Delaunay propriamente dita para regiões com restrições (regiões não convexas e com furos) [25, 28], o que é, em teoria, mais eficiente.

Neste trabalho, a malha de elementos finitos é gerada combinando-se o procedimento da *quadtree*, a técnica de contração de contorno e um critério de Delaunay. Esta combinação tenta incorporar a eficiência e a capacidade de transição da técnica de *quadtree* com as vantagens proporcionadas pelo algoritmo de contração de contorno [21], mostrando-se eficiente para problemas bidimensionais.

#### **4.4. AUTO-ADAPTAÇÃO**

O processo adaptativo requer uma malha inicial (Fig. 4.4a) de elementos finitos para o modelo, as descrições geométricas, as condições de contorno e seus atributos. A descrição geométrica é realizada através de curvas (linhas, arcos, etc.) que representam o contorno do modelo e que definem cada região do mesmo (materiais distintos, por exemplo). A descrição

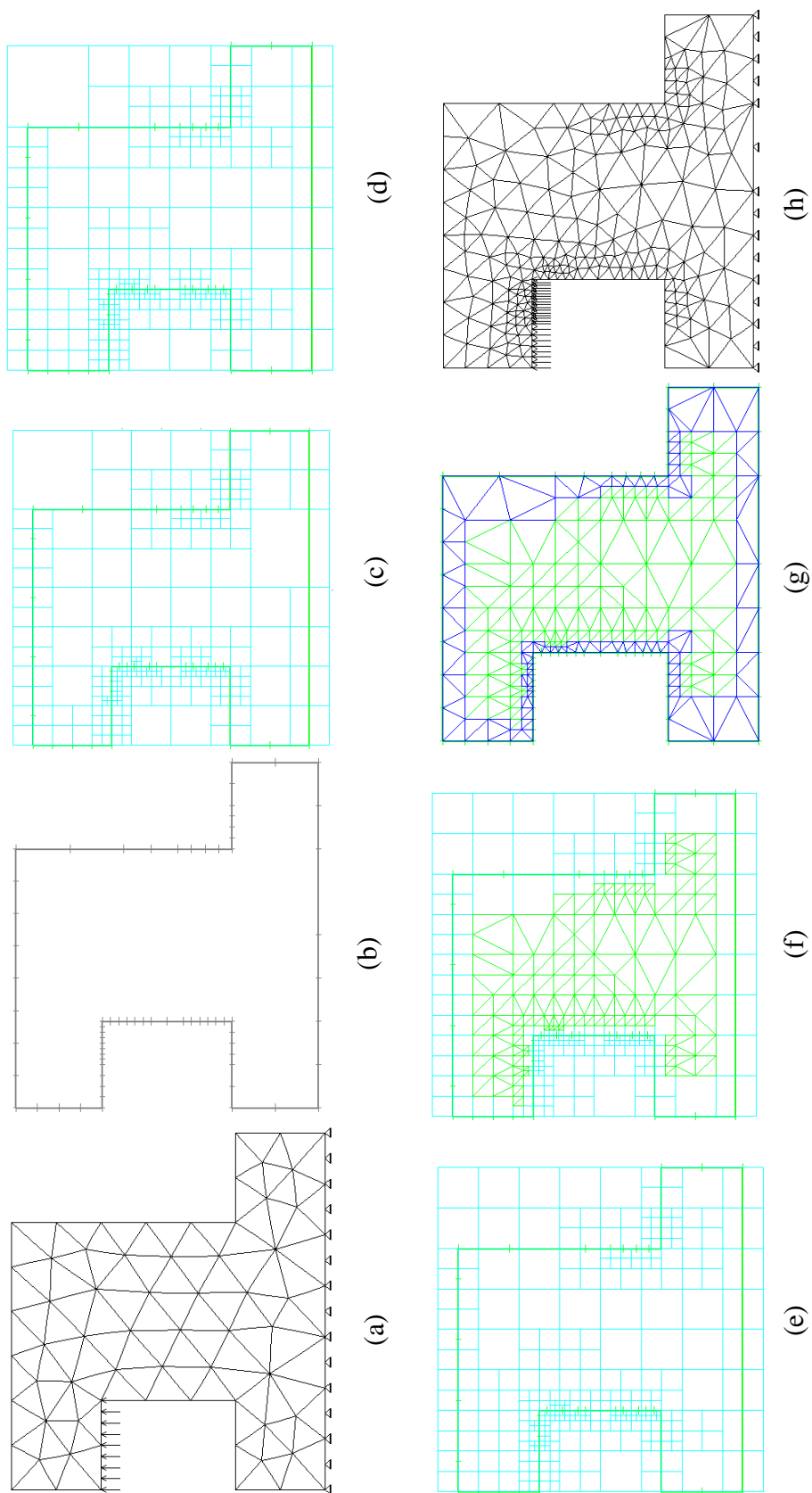
das condições de contorno (apoio e/ou carregamento) está associada às curvas e os parâmetros do domínio (material, propriedades, espessura, etc.) estão associados às regiões.

O processo é iniciado executando-se a análise da malha inicial, seja esta análise linear ou não. Os resultados da análise, junto com as descrições das regiões, curvas e atributos, são usados para o refinamento da malha. Os passos subsequentes do processo adaptativo têm início com os resultados da malha corrente.

Uma das principais características desta estratégia é que o refinamento das curvas de fronteira é realizado independentemente do refinamento do domínio. De fato, a discretização do domínio requer uma discretização do contorno *a priori*. Isto força uma melhor gradação da malha ao longo do contorno. Neste refinamento do contorno, cada curva de fronteira é discretizada em seu próprio espaço paramétrico. Portanto, o algoritmo é genérico para todas as classes de curvas geométricas.

O algoritmo usado para refinar cada curva do contorno é uma versão unidimensional do algoritmo que é usado para refinar o domínio, o qual está baseado na técnica de *quadtree*. Cada uma das curvas é decomposta através de uma técnica de árvore binária. A idéia consiste em subdividir a curva em segmentos, recursivamente, cujos tamanhos são calculados considerando-se o tamanho característico (Eq. (4.22) ou (4.23)) de cada elemento adjacente às curvas. Após o refinamento das curvas do contorno (Fig. 4.4b), as condições de contorno são reaplicadas ao modelo de maneira consistente.

Depois que as curvas são discretizadas, a nova malha é gerada como descrito em Cavalcante [20]. Até este ponto, a estimativa de erro foi considerada apenas no refinamento do contorno. A árvore quaternária gerada no interior do domínio (Fig. 4.4c) é também refinada considerando-se o erro numérico dos elementos do domínio. Isto é executado visitando cada elemento da malha corrente e testando seu ponto médio com respeito às células *quadtree* geradas. Se a célula que contém o ponto médio do elemento tem um tamanho que é maior do que o tamanho característico do elemento, ditado pela análise de erro, esta célula é subdividida em quatro células. Este processo é repetido até que o tamanho da célula seja menor do que o tamanho característico (Fig. 4.4d).



4. Auto-adaptação. (a) Malha inicial; (b) Refinamento do contorno; (c) Discretização do domínio a partir da discretização do

Seguindo a técnica tradicional da *quadtree* [7], elementos finitos são gerados nas células interiores usando padrões (Fig. 4.4f). Estes padrões requerem que a diferença de nível de profundidade na árvore, para duas células adjacentes, seja no máximo um nível (Fig. 4.4e).

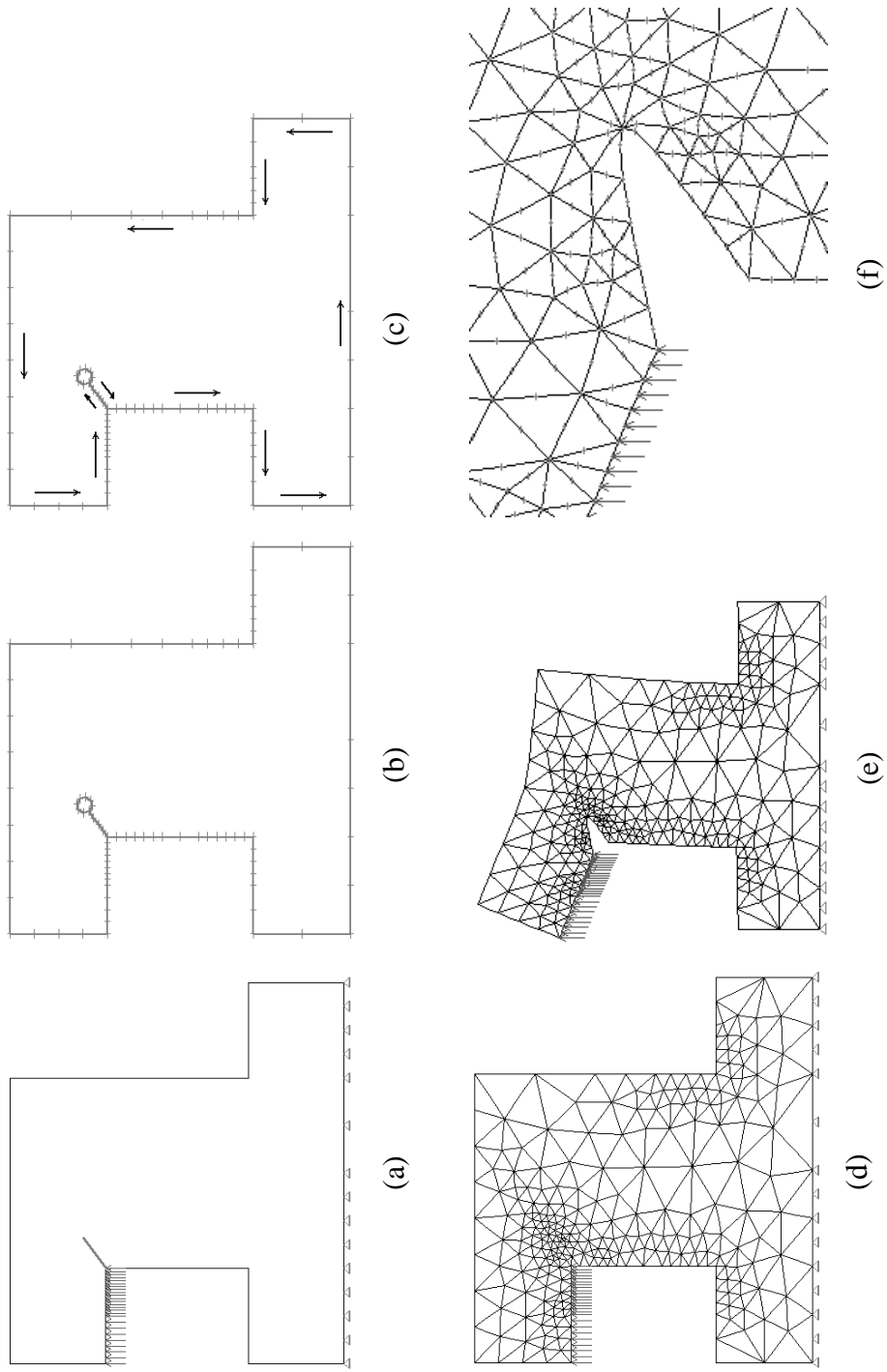
A principal diferença entre o presente algoritmo e os algoritmos tradicionais de *quadtree* é que somente as células interiores são consideradas para a geração dos elementos baseados na decomposição *quadtree*. As áreas entre as células interiores e o contorno do domínio são discretizadas em um único processo. Neste trabalho, um procedimento de contração de contorno (Fig. 4.4g) gera a malha na área restante. Nenhum novo nó interior é gerado neste processo. Uma propriedade da triangulação de Delaunay é usada para a criação dos elementos triangulares. Dado um segmento do contorno corrente, a seleção de um nó do contorno para a criação de um triângulo está baseada no máximo ângulo que pode ser formado tendo como vértice o nó em questão. Como o contorno não é necessariamente convexo, verificações adicionais são necessários para evitar superposição de triângulos [74].

Com o intuito de melhorar a eficiência do algoritmo, a seleção dos nós para a criação de triângulos ou quadriláteros explora a estrutura de dados *quadtree* a fim de evitar testar os nós que não estão na vizinhança do segmento do contorno em consideração. Isto é certamente um dos ganhos mais importantes do presente algoritmo, quando comparado aos procedimentos de contração de contorno existentes.

O passo final da geração de malha (Fig. 4.4h) é a suavização das coordenadas dos nós pela média das coordenadas dos nós adjacentes.

Com o intuito de melhorar a eficiência do algoritmo, a seleção dos nós para a criação de triângulos ou quadriláteros explora a estrutura de dados *quadtree* a fim de evitar testar os nós que não estão na vizinhança do segmento do contorno em consideração. Isto é certamente um dos ganhos mais importantes do presente algoritmo, quando comparado aos procedimentos de contração de contorno existentes.

O passo final da geração de malha (Fig. 4.4h) é a suavização das coordenadas dos nós pela média das coordenadas dos nós adjacentes.



5. Trinca no modelo da Fig. 4.4h. (a) Inserção da trinca; (b) Nós do contorno e roseta; (c) Orientação das curvas do contorno;

#### 4.5. INICIAÇÃO E PROPAGAÇÃO DE TRINCAS

No caso da simulação de fraturamento, uma trinca é arbitrariamente introduzida no modelo em qualquer fase do processo (Fig. 4.5a). Uma nova geometria é gerada e a malha anterior é cancelada. Uma nova malha (Fig. 4.5d) é criada utilizando o mesmo algoritmo descrito anteriormente, mas mantendo a mesma discretização do contorno da malha anterior. No momento, somente elementos triangulares (T6) são usados, embora o processo adaptativo também se utilize de elementos quadrilaterais.

As duas superfícies da trinca são consideradas geometricamente coincidentes. A trajetória da trinca é tratada como uma curva geométrica (Apêndice A) e, antes que o sistema regenere a malha, a curva é subdividida. Os nós desta subdivisão são adicionados à lista de dados que descreve o contorno, bem como os nós do contorno da malha anterior (Fig. 4.5b). Para assegurar a geração de elementos bem formados, uma roseta uniforme de elementos triangulares é inserida em torno de cada ponta da trinca. O algoritmo que gera a malha só considera a linha do contorno da roseta (Fig. 4.5b) e os nós deste contorno são considerados no contorno da região [85].

No processo de triangulação por contração de contorno, o algoritmo percorre a curva da trinca segundo a orientação das curvas do contorno da região à qual ela pertence (Fig. 4.5c). Antes que a nova malha seja enviada ao módulo de análise, ou antes da transferência de variáveis entre malhas, os nós da curva da trinca são duplicados (Fig. 4.5e). Se a análise é plástica, cada elemento da roseta é tornado quadrilateral (veja capítulo 3), ou seja, os nós da ponta da trinca são triplicados (Fig. 4.7b). Se, contudo, a análise é linear, os nós da ponta da trinca não são duplicados e os elementos da roseta continuam triangulares (Fig. 4.5f). Os nós do meio do lado, de cada elemento da roseta, são posicionados de acordo com o tipo de roseta escolhido pelo usuário.

No processo adaptativo, a discretização da curva da trinca considera sempre os elementos dos dois lados. Antes da geração da malha, cada elemento da roseta é visitado e um teste é realizado. O tamanho característico de cada elemento, calculado segundo a razão de erro dada, é comparado com aquele obtido da discretização da curva da trinca. Se o segundo

tamanho for menor que o primeiro, mantém-se a discretização do contorno; do contrário, novos nós são criados na curva da trinca correspondentes ao novo tamanho dos elementos da roseta.

No caso de propagação da trinca (Fig. 4.6), todos os passos acima descritos para a trinca inicial são seguidos. O sistema também aceita quaisquer número de trincas, sempre mantendo a discretização do contorno da malha onde a nova trinca é inserida. A Fig. 4.7 mostra detalhes de exemplos com duas trincas e cinco trincas.

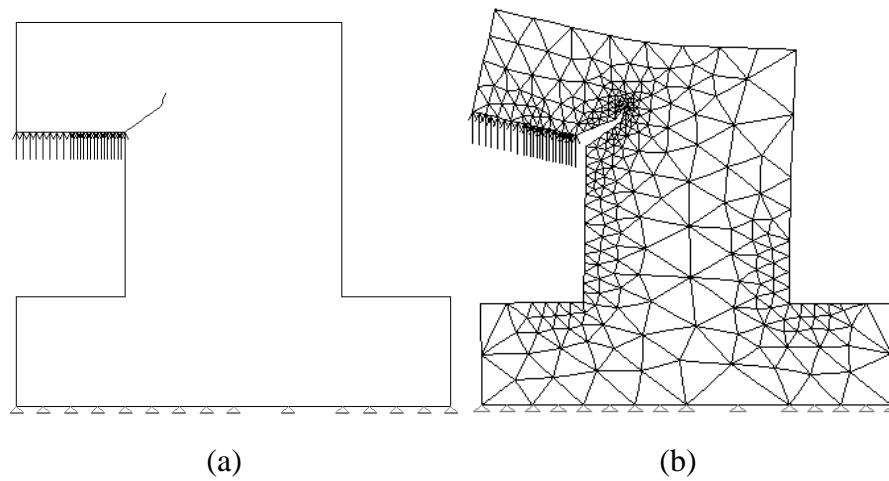


Fig. 4.6. Trinca propagante. (a) Propagação da trinca; (c) Configuração deformada.

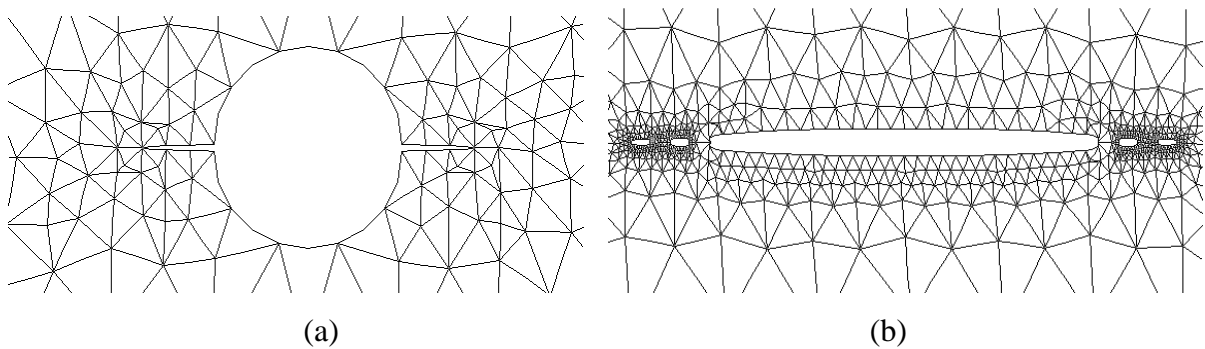


Fig. 4.7. Detalhes de malhas deformadas com múltiplas trincas. (a) Duas trincas; (b) Cinco trincas.

## 4.6. TRANSFERÊNCIA DE VARIÁVEIS

Em uma análise elastoplástica de elementos finitos, as soluções necessárias para um modelo de elementos finitos, no instante  $t$ , são os deslocamentos nodais e as variáveis incrementais. Estas últimas são as tensões de Cauchy, as deformações plásticas, a deformação plástica equivalente e a tensão de escoamento. Uma vez que a nova malha é gerada, estas variáveis devem ser transferidas da malha antiga para a nova. Alguns métodos de interpolação de variáveis [36, 52, 54] podem ser encontrados na literatura.

O processo de transferência de variáveis que é descrito aqui consiste basicamente na identificação do elemento na malha antiga no qual o nó  $n$  da nova malha cai; na determinação das coordenadas paramétricas do nó  $n$  no elemento da malha antiga e do cálculo dos valores das variáveis nas coordenadas paramétricas, o que é feito por meio da interpolação dos valores nodais usando as funções de forma do elemento. Para tanto, os valores das variáveis incrementais nos pontos de integração da malha antiga têm que ser avaliados nos nós antes de proceder ao mapeamento. A avaliação dos valores nodais, a partir de valores nos pontos de integração, é feita por extrapolação, para cada elemento, e por suavização usando a técnica SPR (superconvergente) ou o método HC (mínimos quadrados de Hinton e Campbell).

### 4.6.1. Mapeamento dos Deslocamentos Nodais

Seja  ${}^t u_O$  os deslocamentos nodais dados pela malha antiga no instante  $t$  e  ${}^t u_N$  os deslocamentos nodais dados pela nova malha no instante  $t$ ; ambas as malhas ocupam o mesmo domínio  ${}^t W$  no instante  $t$ . Os subscritos  $O$  e  $N$  referem-se às variáveis pertencentes aos modelos de elementos finitos antigo (*old*) e novo (*new*), respectivamente. O processo de mapeamento destas variáveis pode ser estabelecido como

$${}^t u_O({}^t W) \rightarrow {}^t u_N({}^t W) \quad (4.25)$$



A Fig. 4.8 ilustra este mapeamento, com  $n$  indicando o ponto nodal da nova malha onde os deslocamentos  ${}^t u_N$  são procurados, e  $k$  são os nós do elemento  $E_o$  na malha antiga que contém o nó  $n$ .

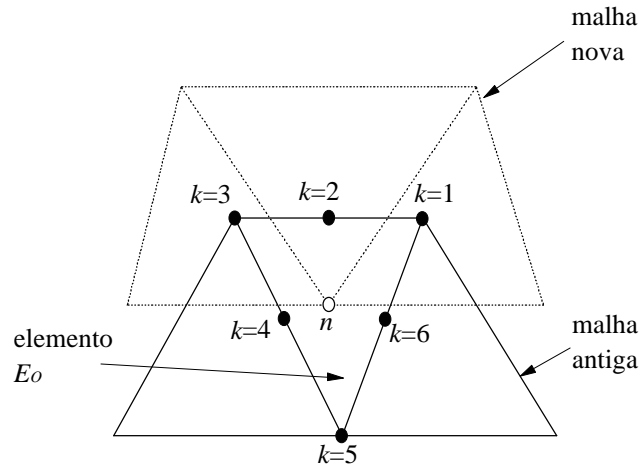


Fig. 4.8. Mapeamento dos deslocamentos nodais.

Para determinar qual o elemento da malha antiga que contém o ponto nodal da nova malha, utiliza-se o procedimento conhecido da geometria computacional chamado “localização de pontos em relação a polígonos” [33]. Para cada elemento da malha antiga, passa-se uma semi-reta horizontal para a direita, cuja origem é o próprio ponto nodal, e verifica-se quantas vezes esta semi-reta corta o elemento. Se o número de interseções é par, o ponto está fora do elemento; se o número de interseções é ímpar, o ponto está dentro do elemento (Fig. 4.9). Este procedimento, contudo, faz com que alguns nós do contorno do elemento sejam considerados fora do elemento. Então, nestes casos, um outro procedimento é utilizado para verificar se o nó em questão pertence ao contorno do elemento.

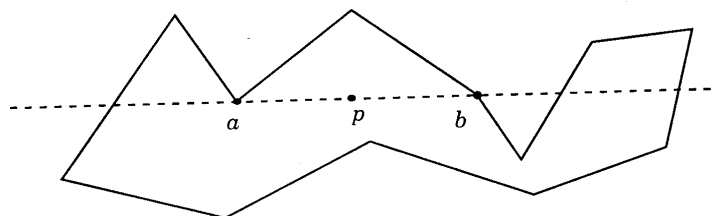


Fig. 4.9. Localização de ponto em polígono.

No caso em que diferentes nós ocupam a mesma posição na malha, o elemento da malha antiga que contém um destes nós pode não ser o elemento que efetivamente contenha o nó. Este é o caso dos nós que pertencem à curva da trinca. Nela, nós com as mesmas coordenadas podem pertencer a elementos diferentes (nós que não são ponta de trinca), ou ao mesmo elemento (nós da ponta da trinca). Para resolver este problema, duas verificações diferentes são feitas: uma para os nós que não são de ponta de trinca e a outra, para os nós de ponta de trinca. No primeiro caso, verifica-se se o elemento da nova malha, ao qual o nó pertence, e o elemento da malha antiga, que contém este nó, estão do mesmo lado da face da trinca. Isto é feito verificando-se os ângulos que os pontos médios destes elementos fazem com a curva da trinca. Se estes ângulos são maiores ou menores que  $\pi$ , os elementos estão do mesmo lado da trinca (Fig. 4.10a); do contrário, os elementos estão em lados diferentes (Fig. 4.10b). No segundo, verifica-se apenas se estes ângulos são iguais (Fig. 4.10c).

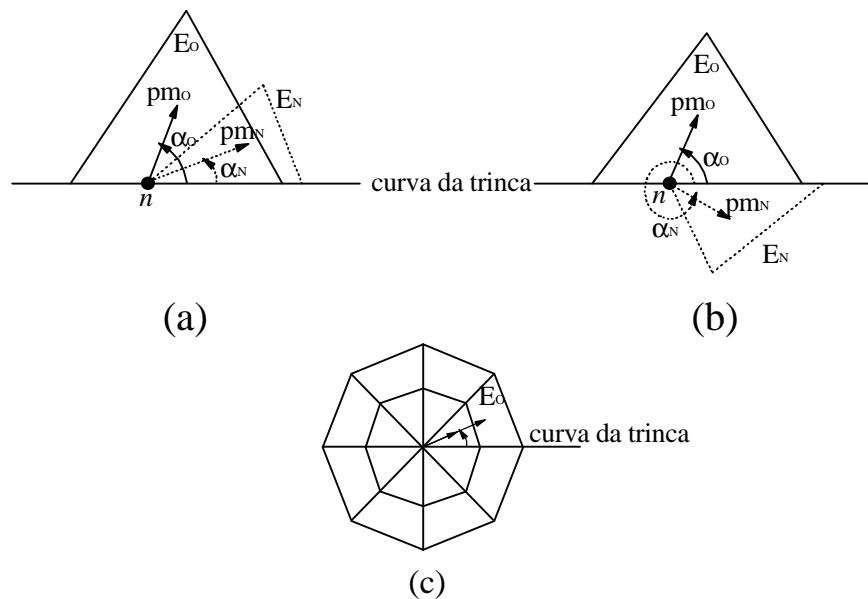


Fig. 4.10. Localização de nós que pertencem à curva da trinca. (a) Elementos do mesmo lado da face da trinca; (b) Elementos de lados diferentes da face da trinca; (c) Elementos da roseta – Q8 colapsado.

As coordenadas paramétricas  $(r_o^n, s_o^n)$  do nó  $n$  devem ser obtidas no elemento  $E_o$ . Duas técnicas foram implementadas para se determinar estas coordenadas: a que usa as coordenadas naturais dos triângulos [26] e a técnica de mapeamento isoparamétrico inverso

[52]. Contudo, o uso das coordenadas naturais dos triângulos, como sua denominação já diz, está limitado aos elementos triangulares de lados retos.

O mapeamento isoparamétrico inverso usa um método de iteração Newton-Raphson direto [69] para resolver a seguinte equação,

$${}^t X_N^n = \sum_k N_k(r_O^n, s_O^n) {}^t X_O^k \quad (4.26)$$

onde  $N_k$  é a função de interpolação correspondente ao nó  $k$ .

$${}^t X_O^k = \begin{Bmatrix} {}^t x_O^k \\ {}^t y_O^k \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

são as coordenadas cartesianas do nó  $k$  e

$${}^t X_N^n = \begin{Bmatrix} {}^t x_N^n \\ {}^t y_N^n \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

são as coordenadas cartesianas do nó  $n$ . Esta técnica pode ser empregada para quaisquer elementos, de qualquer ordem. É um método muito preciso, com convergência quadrática.

Uma vez que  $r_O^n$  e  $s_O^n$  são conhecidos, os deslocamentos  ${}^t u_N^n$ , no nó  $n$ , são obtidos diretamente pela seguinte expressão

$${}^t u_N^n = \sum_k N_k(r_O^n, s_O^n) {}^t u_O^k. \quad (4.29)$$

#### 4.6.2. Mapeamento das Variáveis Incrementais

O processo de mapeamento das variáveis incrementais pode ser estabelecido de forma semelhante ao dos deslocamentos, como

$${}^t l_O({}^t \mathbf{W}) \rightarrow {}^t l_N({}^t \mathbf{W}) \quad (4.30)$$

onde  ${}^t l_O$  e  ${}^t l_N$  são a lista de variáveis incrementais da malha antiga e da malha nova, respectivamente. Estas variáveis correspondem aos parâmetros do modelo constitutivo, definidos nos pontos de integração dos elementos de ambas as malhas.

Em uma análise elastoplástica, a lista de variáveis incrementais da nova malha, em cada ponto de Gauss, é dada por:

$${}^t l_N = \{ {}^t \mathbf{s}_N, {}^t \mathbf{e}_N^p, {}^t e_N^p, {}^t \mathbf{s}_{y_N} \} \quad (4.31)$$

onde  ${}^t \mathbf{s}_N$  é o tensor das tensões de Cauchy,  ${}^t \mathbf{e}_N^p$  é o vetor das deformações plásticas,  ${}^t e_N^p$  é a deformação plástica equivalente e  ${}^t \mathbf{s}_{y_N}$  é a função que define a lei de encruamento (Eq. 2.8). Estas variáveis são determinadas através da transferência das variáveis correspondentes, em cada ponto de Gauss, do antigo modelo de elementos finitos.

$${}^t l_O = \{ {}^t \mathbf{s}_O, {}^t \mathbf{e}_O^p, {}^t e_O^p, {}^t \mathbf{s}_{y_O} \} \rightarrow {}^t l_N = \{ {}^t \mathbf{s}_N, {}^t \mathbf{e}_N^p, {}^t e_N^p, {}^t \mathbf{s}_{y_N} \} \quad (4.32)$$

Contudo, a transferência destas variáveis pode resultar em um conjunto de valores não consistentes, tornando o processo de mapeamento inviável.

Pela teoria da plasticidade, estas variáveis estão inter-relacionadas. Para um material com encruamento isotrópico, a lista de variáveis  ${}^t l_N$ , em cada ponto de Gauss, pode ser obtida dos deslocamentos nodais no instante  $t$ ,  ${}^t u_N$ , da deformação plástica, em cada ponto de Gauss, no instante  $t$ ,  ${}^t \mathbf{e}_N^p$ , e da deformação plástica equivalente, em cada ponto de Gauss, no instante  $t - \mathbf{D}t$ ,  ${}^{t-\mathbf{D}t} e_N^p$ , através do algoritmo de integração das tensões. Tal procedimento assegura que a condição de consistência (Eq. (2.7)) seja satisfeita também na nova malha.

Assim sendo, somente a seguinte lista de variáveis incrementais necessita ser transferida do modelo antigo:

$${}^t\tilde{l}_O = \{ {}^t\mathbf{e}_O^p, {}^{t-Dt}e_O^p \} \quad (4.33)$$

Em um problema de estado de deformação plana, por exemplo, tem-se que

$$\mathbf{e}_{xz}^p = \mathbf{e}_{zx}^p = \mathbf{e}_{yz}^p = \mathbf{e}_{zy}^p = 0. \quad (4.34)$$

Então, somente seis grandezas escalares em (4.33) necessitam ser transferidas.

O processo é executado da seguinte forma, para  ${}^{t-Dt}e_O^p$ :

1. Extrapolação de  ${}^{t-Dt}e_O^p$  para os pontos nodais no modelo antigo;
2. Obtenção da deformação plástica equivalente nodal suavizada  $({}^{t-Dt}e_O^p)^k$ , pela técnica SPR ou HC, em cada ponto nodal  $k$  no modelo antigo;
3. Cálculo das coordenadas cartesianas  $({}^{t-Dt}x_N^n, {}^{t-Dt}y_N^n)$  de cada ponto de Gauss  $n$  do novo modelo;
4. Identificação, no modelo antigo, do elemento  $E_O$  que contém estas coordenadas, usando a técnica de “localização de pontos em polígono” descrita anteriormente;
5. Obtenção das coordenadas paramétricas  $(r_O^n, s_O^n)$  correspondentes às coordenadas  $({}^{t-Dt}x_N^n, {}^{t-Dt}y_N^n)$ , pelas técnicas já expostas para o mapeamento dos deslocamentos;
6. Cálculo da deformação plástica equivalente  $({}^{t-Dt}e_N^p)^n$  no ponto de Gauss  $n$  do novo modelo, dado por

$$({}^{t-Dt}e_N^p)^n = \sum_k N_k(r_O^n, s_O^n) ({}^{t-Dt}e_O^p)^k. \quad (4.35)$$

O primeiro e o segundo passo deste processo foram implementados no módulo de análise, enquanto que os passos restantes foram implementados no módulo adaptativo. Esse mesmo procedimento é usado para mapear as outras variáveis de  ${}^t\tilde{l}_O$  para obter

$${}^t\tilde{l}_N = \{ {}^t\mathbf{e}_N^p, {}^{t-Dt}e_N^p \} \quad (4.36)$$

A lei de encruamento (Eq. 2.8) é obtida, no instante  $t-Dt$ , por

$${}^{t-Dt} \mathbf{s}_{y_N} ({}^{t-Dt} \mathbf{e}_N^p) = \mathbf{s}_Y + h' {}^{t-Dt} \mathbf{e}_N^p \quad (4.37)$$

Conhecidos os valores de  ${}^t \mathbf{u}_N$ ,  ${}^t \mathbf{e}_N^p$  e  ${}^{t-Dt} \mathbf{e}_N^p$ , procede-se com o algoritmo de integração das tensões para se obter os valores das variáveis que permitem reiniciar a análise da nova malha considerando  $t$  como o passo inicial. O procedimento é descrito a seguir.

- As deformações totais são obtidas através de suas relações com os deslocamentos nodais:

$${}^t \hat{\mathbf{a}}_N = \frac{\partial {}^t \mathbf{u}_N}{\partial {}^t \mathbf{X}_N} = {}^t \mathbf{B}_N {}^t \mathbf{u}_N \quad (4.38)$$

onde  ${}^t \mathbf{B}_N$  é a matriz de deformação-deslocamento nodal no instante  $t$ .

- As tensões são calculadas pela relação finita

$${}^t \mathbf{s}_N = {}^t \mathbf{C}_N ({}^t \mathbf{e}_N - {}^t \mathbf{e}_N^p) \quad (4.39)$$

- Com os valores de  ${}^t \mathbf{s}_N$  e de  ${}^{t-Dt} \mathbf{e}_N^p$ , calcula-se a função de escoamento ( ${}^t f_N$ ) com o auxílio das equações (2.11) e (4.37).
- Se  ${}^t f_N < 0$ , então o processo é elástico. As tensões, neste passo, são as calculadas pela equação (4.39). Os valores de  ${}^t \mathbf{e}_N^p$  e  ${}^{t-Dt} \mathbf{e}_N^p$  são usados como valores iniciais para o passo  $t + Dt$ .
- Se  ${}^t f_N \geq 0$ , então o processo é plástico. As tensões são trazidas para a superfície de escoamento pelos algoritmos de retorno. Com isso, os valores de  ${}^t \mathbf{e}_N^p$  e  ${}^{t-Dt} \mathbf{e}_N^p$  são corrigidos e usados como valores iniciais para o passo  $t + Dt$ .

## CAPÍTULO 5

# AVALIAÇÃO DOS MÉTODOS NUMÉRICOS DE CÁLCULO

A avaliação dos três métodos numéricos, para o cálculo dos parâmetros de fratura, está dividida em duas partes. A primeira parte refere-se ao processo de fraturamento elástico e a segunda, ao processo de fraturamento elastoplástico. Em ambas as análises, o sistema adaptativo proposto é utilizado para introduzir as trincas no modelo inicial e gerar as respectivas malhas. Contudo, nenhuma consideração sobre diferentes níveis de refinamento da malha é feita no momento.

Para a avaliação dos parâmetros no processo de fraturamento elástico, foram escolhidos exemplos numéricos simples cujas soluções teóricas são conhecidas. Estas soluções são utilizadas como valores de referência na comparação dos resultados. Soluções analíticas de problemas de fratura elastoplástica, contudo, não estão disponíveis. Os exemplos, referentes a esta análise, são comparados com resultados obtidos por outros autores. A percentagem de erro das soluções obtidas em ambas as análises é calculada por:

$$\text{Percentagem de erro} = \frac{\text{Valor de referência} - \text{Valor numérico}}{\text{Valor de referência}} 100\% \quad (5.1)$$

### 5.1. PROCESSO DE FRATURAMENTO ELÁSTICO

Nesta análise, consideram-se os seguintes exemplos: tração de uma trinca central inclinada (Fig. 5.1a), que possibilita avaliar os resultados dos diferentes métodos em diferentes condições de carregamento; tração de uma trinca de aresta (Fig. 5.1b), onde se verifica o desempenho das diversas rosetas implementadas; e, por fim, duas trincas de aresta

(Fig. 5.1c) tracionadas de duas formas diferentes: pressão nas faces das trincas e carga de tração aplicada remotamente. Todas as trincas estão em uma placa retangular, cujas malhas foram inicialmente discretizadas com elementos isoparamétricos T6, com integração em 4 pontos de Gauss. O coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  é adotado em todos os modelos.

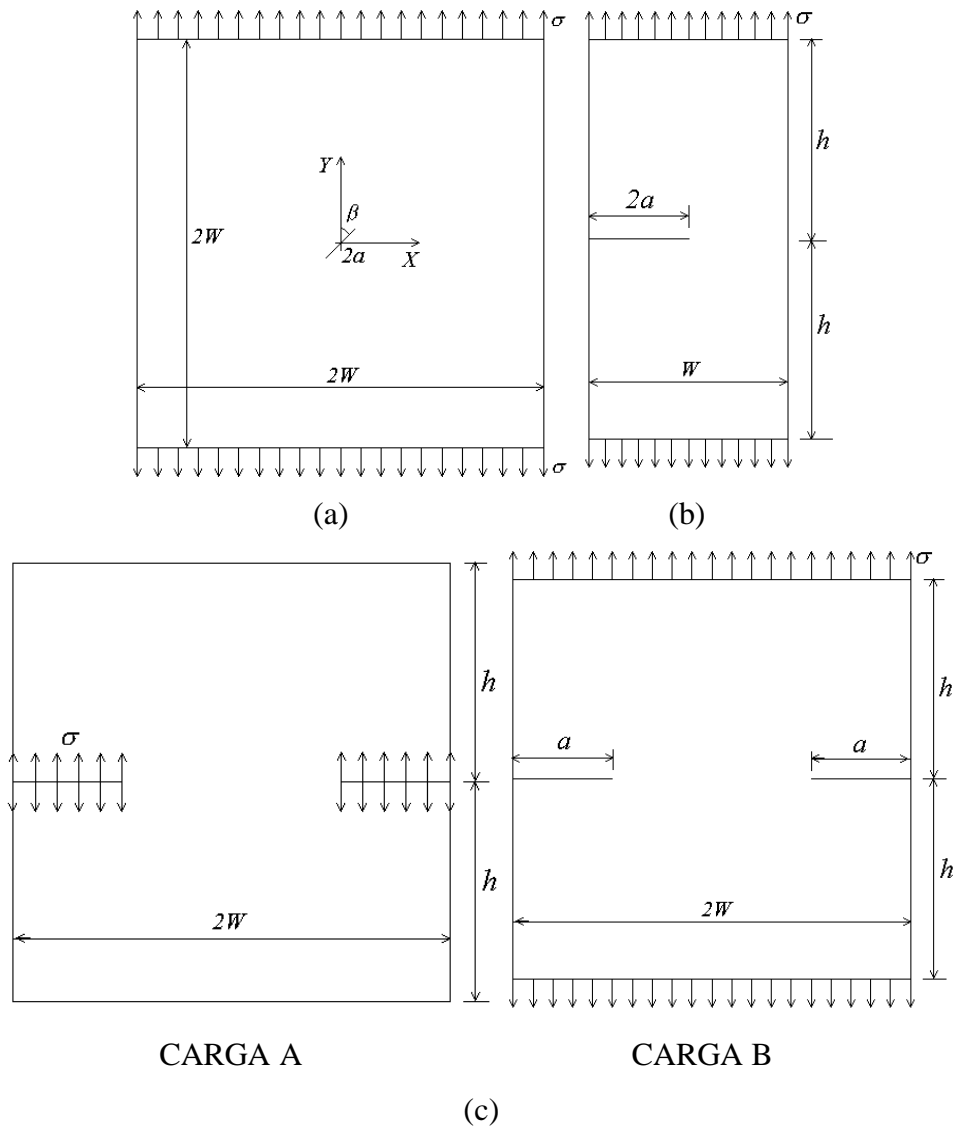


Fig. 5.1. Configurações elásticas de trincas. (a) Uma trinca central inclinada; (b) Uma trinca de aresta; (c) Duas trincas de aresta.

As seguintes abreviaturas são utilizadas para designar os três métodos que calculam os fatores de intensidade de tensão:

TCD, Técnica de Correlação dos Deslocamentos;

FTM, método de Fechamento da Trinca Modificado;



IDE, método da Integral de Domínio Equivalente.

### 5.1.1. Tração de Uma Trinca Central Inclinada

Uma placa retangular, submetida a uma carga uniaxial de tração,  $\mathbf{s} = 68,95$  MPa, possui largura e altura iguais a  $2W$ , uma trinca central inclinada de comprimento  $2a$  e espessura  $B$  (Fig. 5.1a). As dimensões são  $W = 254$  mm,  $a = 25,4$  mm e  $B = 25,4$  mm. As soluções analíticas desta placa são dadas pelas seguintes expressões

$$K_I = \mathbf{s} \sin^2 \mathbf{b} \sqrt{pa} \quad (5.2)$$

$$K_{II} = \mathbf{s} \sin \mathbf{b} \cos \mathbf{b} \sqrt{pa} \quad (5.3)$$

A variação do ângulo de inclinação da trinca,  $\mathbf{b}$ , possibilita verificar diferentes níveis de carregamento combinado. Então, a análise é feita no estado de tensão plana, variando-se  $\mathbf{b}$  de  $90^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $20^\circ$ . O módulo de elasticidade é tomado igual a  $6895$  MPa.

Este exemplo foi analisado por Bittencourt *et al.* [15], utilizando um código de elementos finitos para problemas de mecânica da fratura. Naquele trabalho, a malha é refeita localmente quando a trinca é inserida e vários níveis de refinamento da malha são analisados. A primeira malha, considerada para  $\mathbf{b}$  igual a  $90^\circ$  e  $60^\circ$ , era composta de elementos isoparamétricos Q8 e T6, num total de 498 nós e 186 elementos. Para os outros ângulos de inclinação da trinca, as malhas não foram citadas. Para todas as configurações de trincas, a roseta padrão de elementos QP foi usada em torno das pontas das trincas. Neste trabalho, utiliza-se a mesma roseta nas pontas das trincas, cujo tamanho do lado do elemento QP é metade do comprimento da trinca ( $L/a = 1/2$ ), em todas as configurações. As malhas obtidas para cada configuração de trinca (Fig. 5.2) estão resumidas na Tab. 5.1. Os resultados estão tabelados na Tab. 5.2 e na Tab. 5.3, para  $K_I$  e  $K_{II}$ , respectivamente.

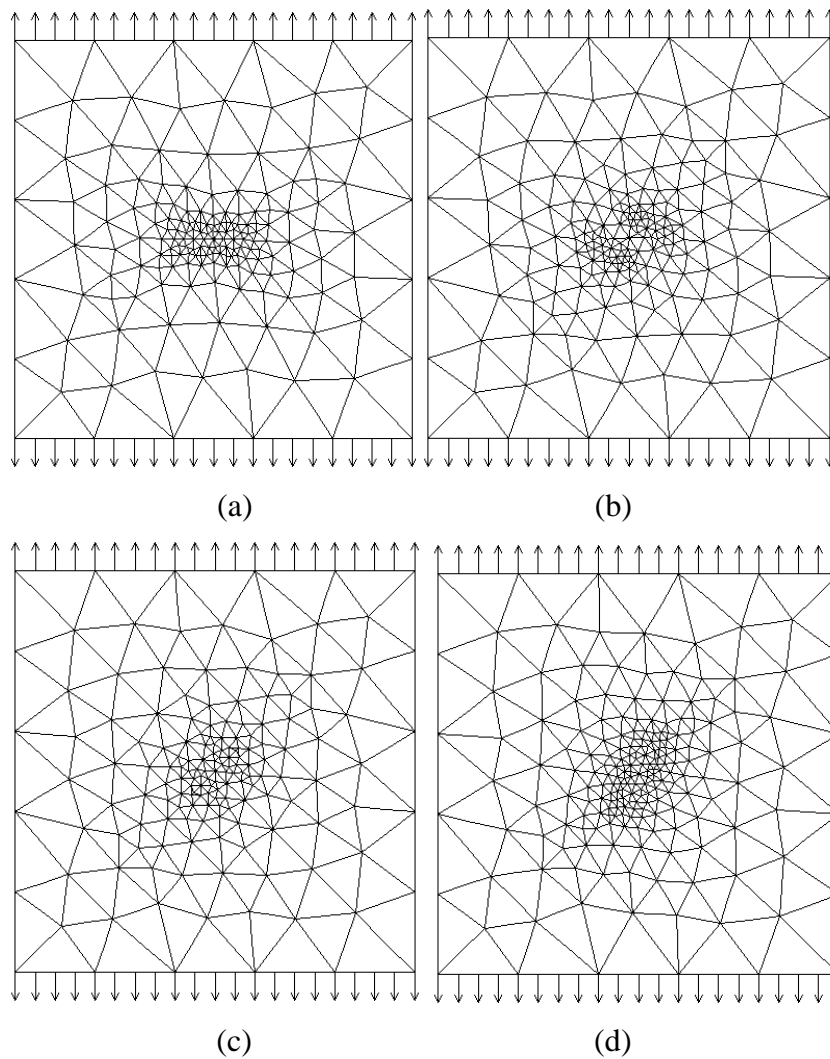


Fig. 5.2. Malhas de elementos finitos para cada configuração de trinca. (a)  $\beta = 90^\circ$ ; (b)  $\beta = 60^\circ$ ; (c)  $\beta = 45^\circ$ ; (d)  $\beta = 20^\circ$ .

Tab. 5.1. N<sup>o</sup> de nós e de elementos para cada configuração de trinca.

$\beta$	$90^\circ$	$60^\circ$	$45^\circ$	$20^\circ$
N <sup>o</sup> de nós	<b>660</b>	<b>708</b>	<b>628</b>	<b>796</b>
N <sup>o</sup> de elementos	<b>316</b>	<b>340</b>	<b>300</b>	<b>384</b>

Pode-se observar que os resultados obtidos pelo FTM e pelo IDE estão muito próximos das soluções teóricas, para todas as configurações. No FTM, os maiores erros estão em torno de 0,45% para  $K_I$  e em torno de 1,5% para  $K_{II}$ . No IDE, a consideração dos campos associados no método da integral  $J$  melhora consideravelmente os resultados destes fatores. O maior erro, nesta técnica, está em torno de 1,8% para  $K_I$ , enquanto que para  $K_{II}$ , está em torno de 1%. Já o TCD apresenta os maiores erros, em torno de 9,5% para  $K_I$  e de 3,5% para  $K_{II}$ .

Verifica-se também que quando a carga tende para um modo de carregamento puro, seja modo I ou modo II, o erro diminui para o modo dominante e aumenta para o não dominante.

Tab. 5.2. Resultados de  $K_I$  (MPa $\sqrt{m}$ ) para tração de trinca central inclinada.

	Teóricos	TCD	FTM	IDE
$b = 90^\circ$ Ref. [15]	<b>19,47</b>	<b>21,11</b> <b>21,54</b>	<b>19,41</b> <b>19,27</b>	<b>19,77</b> <b>20,93</b>
$b = 60^\circ$ Ref. [15]	<b>14,60</b>	<b>15,98</b> <b>16,08</b>	<b>14,54</b> <b>14,51</b>	<b>14,85</b> <b>16,45</b>
$b = 45^\circ$ Ref. [15]	<b>9,74</b>	<b>10,55</b> <b>10,79</b>	<b>9,70</b> <b>9,73</b>	<b>9,86</b> <b>12,07</b>
$b = 20^\circ$ Ref. [15]	<b>2,27</b>	<b>2,47</b> <b>2,49</b>	<b>2,26</b> <b>2,31</b>	<b>2,31</b> <b>3,97</b>

Tab. 5.3. Resultados de  $K_{II}$  (MPa $\sqrt{m}$ ) para tração de trinca central inclinada.

	Teóricos	TCD	FTM	IDE
$b = 90^\circ$ Ref. [15]	<b>0,00</b>	<b>-0,01</b> <b>-0,01</b>	<b>-0,00</b> <b>-0,02</b>	<b>0,02</b> <b>-0,00</b>
$b = 60^\circ$ Ref. [15]	<b>8,43</b>	<b>8,72</b> <b>8,77</b>	<b>8,30</b> <b>8,28</b>	<b>8,52</b> <b>7,00</b>
$b = 45^\circ$ Ref. [15]	<b>9,74</b>	<b>10,04</b> <b>10,11</b>	<b>9,61</b> <b>9,59</b>	<b>9,84</b> <b>8,00</b>
$b = 20^\circ$ Ref. [15]	<b>6,26</b>	<b>6,46</b> <b>6,52</b>	<b>6,17</b> <b>6,29</b>	<b>6,32</b> <b>5,93</b>

No geral, pode-se dizer que os valores dos fatores de intensidade de tensão, aqui obtidos, são satisfatórios. Quando estes são comparados com os da Ref. [15], verifica-se que os erros obtidos para o método IDE são bem menores. Naquele trabalho, os resultados para este método divergem dos teóricos com margens de erro muito elevadas (variando de 7,5% a 75% para  $K_I$ ; e entre 5% a 18% para  $K_{II}$ ). Isto se deve, principalmente, a não utilização da separação dos modos de carga pelos campos associados. Já para o FTM, aquele trabalho se utiliza das fórmulas consistentes, para o elemento QP, em vez das fórmulas simplificadas aqui utilizadas. Segundo o próprio Raju [66], as fórmulas simplificadas proporcionam resultados mais próximos dos exatos. Portanto, observa-se uma pequena diferença entre os resultados deste trabalho e aqueles da Ref. [15]. Contudo, para o TCD, os dois trabalhos apresentam erros na mesma ordem de grandeza.

### 5.1.2. Tração de Uma Trinca de Aresta

Este exemplo consiste de uma placa de largura  $W$  e altura  $2h$ , com uma trinca de aresta de comprimento  $a$  (Fig. 5.1b), onde  $W = 50$  mm,  $h = 50$  mm e  $a = 25$  mm. A placa está sujeita a um carregamento uniaxial de tração ( $s = 200$  MPa), em estado de deformação plana e módulo de elasticidade  $E = 210$  GPa. O tamanho dos elementos que formam as diversas rosetas é determinado de acordo com a relação sugerida por Raju [66] ( $L/a = 1/16$ ). A malha, portanto, varia de acordo com a roseta que envolve a ponta da trinca, segundo mostra a Tab. 5.4.

Tab. 5.4. Malhas segundo o tipo da roseta.

Rosetas	T6	QP45	QP40	QP30
Nº de nós	<b>552</b>	<b>552</b>	<b>556</b>	<b>568</b>
Nº de elementos	<b>253</b>	<b>253</b>	<b>255</b>	<b>261</b>

A placa está carregada no modo I puro, portanto, só o resultado de  $K_I$  é necessário. O valor de referência, utilizado para comparar os resultados, foi calculado por Banks-Sills e Sherman [8]. Este valor é adimensional, considerado exato e igual a 2,818. O fator de intensidade de tensão é tornado adimensional como segue

$$\bar{K}_I = \frac{K_I}{s\sqrt{pa}} \quad (5.4)$$

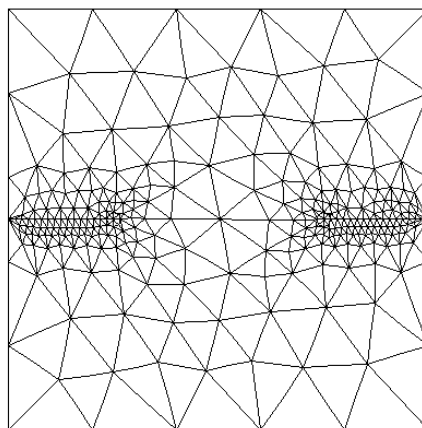
Os resultados desta análise são mostrados na Tab. 5.5, de acordo com o tipo de roseta e para os três diferentes métodos numéricos de cálculo. As quatro rosetas apresentam ótimos resultados, com erros inferiores a 5% e com valores muito próximos entre si. Contudo, a roseta formada pelo elemento T6 é a que mais se afasta do valor exato para os métodos TCD e IDE. As rosetas de elementos QP40 e QP30 apresentam resultados muito próximos, não fazendo diferença entre a utilização de uma ou de outra roseta. Contudo, a roseta de elementos QP40 não apresenta resultados para o método FTM por esta não ser simétrica em relação aos eixos coordenados locais na ponta da trinca,  $x$  e  $y$ . Dos três métodos, o IDE é o único que apresenta erros inferiores a 1% em todas as rosetas, com exceção da roseta de elementos T6.

Tab. 5.5. Resultados adimensionais de  $K_I$  para tração de uma trinca de aresta.

Rosetas	T6	QP45	QP40	QP30
TCD	<b>2,678</b>	<b>2,754</b>	<b>2,773</b>	<b>2,770</b>
FTM	<b>2,767</b>	<b>2,788</b>	-	<b>2,790</b>
IDE	<b>2,724</b>	<b>2,798</b>	<b>2,799</b>	<b>2,794</b>

### 5.1.3. Tração de Duas Trincas de Aresta

A placa com duas trincas de aresta (Fig. 5.1c), cujas dimensões são iguais às do exemplo anterior, está submetida a uma pressão uniforme aplicada nas superfícies das duas trincas (carga A -  $\sigma = 200$  MPa) e a um carregamento uniaxial de tração aplicado nas bordas da placa (carga B -  $\sigma = 200$  MPa). No caso linear elástico, os resultados são idênticos para estas duas cargas. O modelo é analisado em estado de deformação plana, com módulo de elasticidade igual a 210 GPa. A malha, mostrada na Fig. 5.3, é composta de 1163 nós e 538 elementos. A roseta que envolve a ponta das trincas é formada pelos elementos QP, cujo tamanho é estabelecido de acordo com o critério citado para o exemplo anterior [66] ( $L/a = 1/16$ ). Os resultados são tornados adimensionais segundo a Eq. (5.4). Eles são apresentados na Tab. 5.6, os quais são comparados com a solução adimensional de Banks-Sills e Sherman [8], que é considerada exata e igual a 1,332.

Fig. 5.3. Malha de elementos finitos de duas trincas de aresta ( $a = 25$  mm;  $h = 50$ mm;  $W = 50$  mm).Tab. 5.6. Resultados adimensionais de  $K_I$  para tração de duas trincas de aresta.

Cargas	TCD	FTM	IDE
CARGA A	<b>1,335</b>	<b>1,330</b>	<b>1,335</b>
CARGA B	<b>1,335</b>	<b>1,330</b>	<b>1,335</b>

Os resultados numéricos das duas cargas são exatamente iguais, como era esperado. Os três métodos convergiram para o valor exato com erros inferiores a 0,25%. Essa mesma margem de erro foi encontrada na Ref. [8], para os três métodos, e no trabalho de Zhu e Smith [87], que utiliza um método de extrapolação de deslocamentos, ou tensões, para calcular  $K_I$ . Nestes dois trabalhos, só um quarto da placa foi analisada, cuja malha foi formada por elementos isoparamétricos Q8. Contudo, no primeiro trabalho, a ponta da trinca foi envolvida por elementos singulares quadrilaterais, enquanto que no segundo, o elemento singular triangular foi utilizado.

## 5.2. PROCESSO DE FRATURAMENTO ELASTOPLÁSTICO

Nesta seção três exemplos são mostrados: tração de uma trinca central (Fig. 5.4a), tração de uma trinca de aresta (Fig. 5.4b) e tração de duas trincas simétricas saindo de um furo circular (Fig. 5.4c). Não foi encontrado na literatura qualquer exemplo que aplique pressão uniforme nas superfícies de uma trinca. Contudo, um exemplo é apresentado com o intuito de ilustrar esta possibilidade. Todos os exemplos são inicialmente discretizados com elementos T6, com integração em 3 pontos de Gauss. O método de Newton-Raphson com controle de carga é utilizado. A integral  $J$  é calculada pelo método IDE, cujo domínio de integração é definido pelos elementos que envolvem a ponta da trinca.

### 5.2.1. Tração de Uma Trinca Central

Neste exemplo, uma placa retangular com uma trinca central (Fig. 5.4a) é analisada como descrito a seguir.

1. Modelo A: Material perfeitamente plástico (sem encruamento), cujo módulo elástico é  $E = 100\mathbf{s}_v$  e o coeficiente de Poisson é  $\nu = 0,3$ . A análise considera estado de deformação plana, com a carga de tração uniaxial aplicada nas bordas da placa. As dimensões são dadas por:  $a/W = 0,4$  e  $h/W = 2,5$ .
2. Modelo B: Material modelado pela equação de Ramberg-Osgood (Eq. 2.28), cuja carga de tração uniaxial é aplicada nas bordas da placa. Os parâmetros do material são tomados iguais a 72398 MPa (10500 ksi) para o módulo elástico e 0,33 para o

coeficiente de Poisson, em condições de tensão plana. As dimensões são:  $W = 114,3$  cm;  $h = 190,5$  cm;  $a = 28,58$  cm e  $B = 25,4$  cm.

3. Modelo C: O material e as dimensões do modelo B são considerados para este modelo, contudo, a carga de tração é uma pressão uniforme aplicada nas faces da trinca. A análise é realizada em estado de tensão plana.

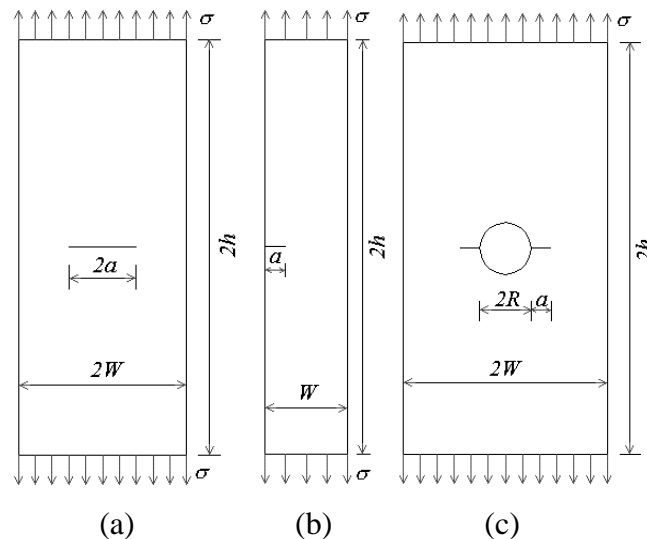


Fig. 5.4. Configurações para análise elasto-plástica de trincas. (a) Tração de uma trinca central; (b) Tração de uma trinca de aresta; (c) Tração de duas trincas simétricas saindo de furo circular central.

#### (1) Modelo A

A malha de elementos finitos (Fig. 5.5a), deste modelo, tem um total de 218 elementos, sendo que as pontas das trincas são envolvidas por dois tipos diferentes de rosetas. A primeira roseta é formada pelos elementos T6 e a segunda, pelos elementos Q8C (Q8 colapsado). A relação entre o tamanho do elemento e o comprimento da trinca é  $L/a = 0,25$ . Vale ressaltar, contudo, que o elemento T6 não é capaz de capturar a singularidade ( $1/r$ ) da ponta da trinca.

Bittencourt e Sousa [16] analisaram este problema considerando os mesmos elementos envolvendo as pontas da trinca. A integral  $J$  foi calculada pelo método IDE com a possibilidade de definir outros domínios de integração. As respostas obtidas da presente

análise são comparadas, na Tab. 5.7, com as da Ref. [61], calculadas usando integrais de contorno, e com as da Ref. [16], referentes só ao domínio em questão.

Tab. 5.7. Comparação dos valores de  $J$  – Modelo A.

$s/s_y$	Ref. [61]	T6		Q8C	
		Ref. [16]	$J_{calc}$	Ref. [16]	$J_{calc}$
0,1	-	0,13	0,13	0,15	0,14
0,2	-	0,52	0,51	0,59	0,55
0,3	-	1,18	1,15	1,33	1,26
0,4	2,1	2,07	2,05	2,33	2,55
0,5	3,5	3,22	3,24	3,80	3,99
0,6	6,0	5,17	4,87	5,64	6,07

Pelo exposto, verifica-se que a roseta de elementos T6 não obteve bons resultados, como era esperado. Contudo, a roseta de elementos Q8C apresenta resultados com margens de erro bem pequenas. O gráfico da Fig. 5.5b mostra a tendência dos resultados em relação aos da Ref. [61].

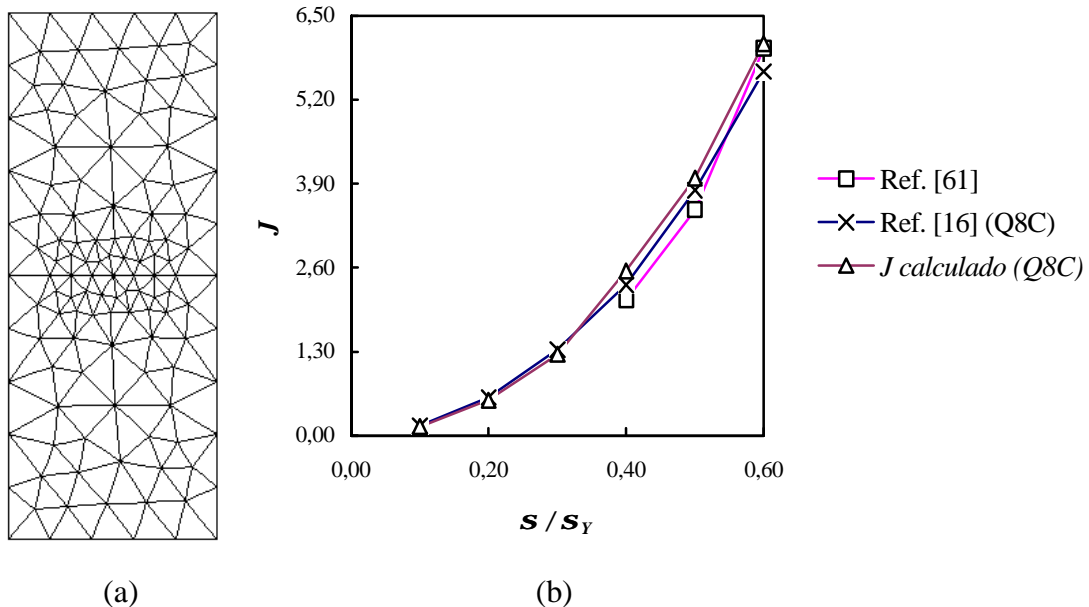


Fig. 5.5. Modelo A. (a) Malha de elementos finitos (506 nós e 218 elementos); (b) Curva da integral  $J$ .



(2) *Modelo B*

Wang e Atluri [84] adotaram o modelo de Ramberg-Osgood para a curva tensão-deformação a fim de que pudessem comparar seus resultados com as soluções obtidas pelo EPRI (*Electric Power Research Institute*). Este procedimento proporciona um meio de calcular a integral  $J$  sob condições elastoplásticas e totalmente plásticas, para uma variedade de configurações geométricas e diferentes materiais, os quais encontram-se tabelados [1]. Esse mesmo procedimento é também usado para comparar os resultados deste exemplo.

Os parâmetros que definem a curva de tensão-deformação uniaxial (Eq. 2.28) são: 324 MPa (47 ksi) para a tensão de escoamento, 1 para  $a$  e 13 para  $n$ . Contudo, este trabalho adota a curva de tensão-deformação bi-linear para descrever o material com encruamento isotrópico, cujo módulo plástico tem valor igual a 1975 MPa (286,4 ksi). Estas duas curvas estão esboçadas na Fig. 5.6.

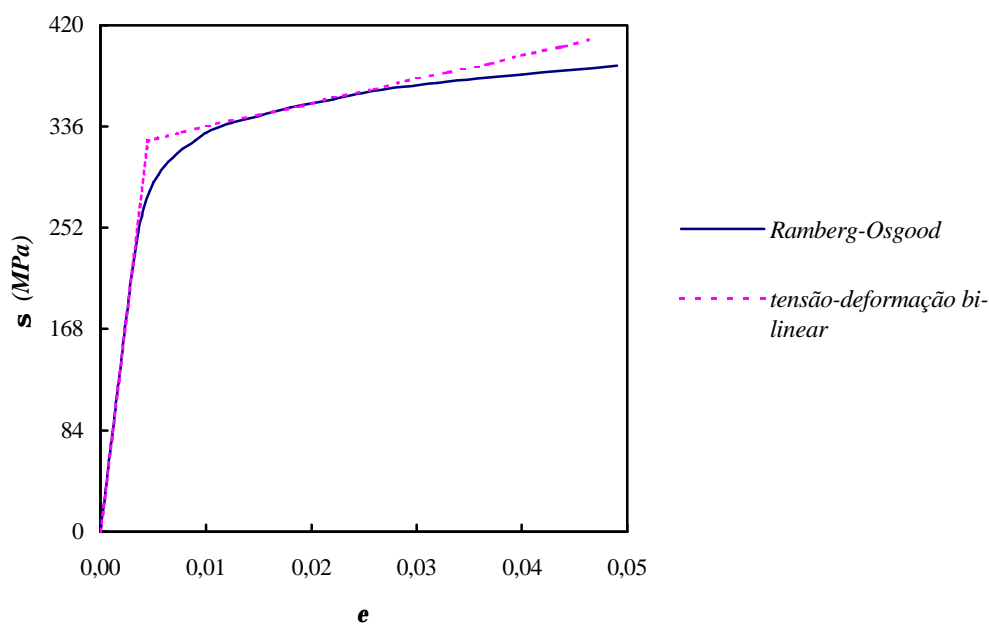


Fig. 5.6. Curvas tensão-deformação uniaxial para os modelos B e C.

Na solução EPRI, a integral  $J$  é a soma da parcela plástica com a parcela elástica, as quais são calculadas separadamente.

$$J = J_p + J_e \quad (5.5)$$

Para esta configuração de trinca, a parcela totalmente plástica é dada por:

$$J_p = \alpha e_Y s_Y \frac{a}{W} (W-a) h_1(a/W, n) (P/P_Y)^{n+1} \quad (5.6)$$

onde  $h_1$  é um fator geométrico que depende de  $a/W$  e  $n$ . Seus valores encontram-se tabelados para uma variedade de configurações e expoentes de encruamento [1, 48]. Para este problema,  $h_1 = 2,65$ .  $P$  é a carga aplicada e  $P_Y$  é a carga limite, dada por

$$P_Y = 2s_Y (W-a)B \quad (5.7)$$

A parcela elástica, dada MFLE, é estimada pela seguinte fórmula

$$J_e = \frac{K^2}{E} \quad (5.8)$$

onde

$$K = s \sqrt{pa} \sqrt{\sec\left(\frac{pa}{2W}\right)} \left[ 1 - 0,025 \left(\frac{a}{W}\right)^2 + 0,06 \left(\frac{a}{W}\right)^4 \right] \quad (5.9)$$

O tamanho efetivo da trinca é

$$a_{eff} = a + \frac{1}{1 + (P/P_Y)^2} \frac{1}{2p} \frac{n-1}{n+1} \left(\frac{K}{s_Y}\right)^2 \quad (5.10)$$

onde  $K$  é obtido usando a Eq. (5.9) com o próprio tamanho da trinca  $a$ . O valor de  $J_e$  é obtido usando o comprimento efetivo da trinca nas equações (5.9) e (5.8).

A malha de elementos finitos (Fig. 5.7a) é formada por 732 nós, 318 elementos T6 e 16 elementos Q8C em torno das pontas da trinca. O tamanho do lado dos elementos Q8C é 0,04 vezes o comprimento da trinca. O gráfico da Fig. 5.7b mostra os valores da integral  $J$  obtidos pelo EPRI e pela técnica aqui adotada.

Observa-se que os resultados se aproximam dos obtidos pelo EPRI com uma margem de erro bem pequena, pelo menos até a carga limite. A distribuição das tensões de von Mises estão mostradas na Fig. 5.8 para as seguintes tensões aplicadas:  $s = 49$  MPa (início do escoamento);  $s = 231$  MPa;  $s = 243$  MPa (carga limite) e  $s = 255$  MPa. Nesta figura, pode-se ver a zona plástica em torno das pontas da trinca e a zona de processamento. Na Fig. 5.8a, a região de deformação plástica corresponde às tensões que variam de 42,5 ksi a 47,7 ksi (faixa vermelha); na Fig. 5.8b, a plastificação corresponde às tensões que variam de 41,7 ksi a 107 ksi (da faixa azul clara à vermelha); enquanto que nas figuras Fig. 5.8c e Fig. 5.8d, as regiões adjacentes às pontas das trincas estão totalmente plastificadas (44,6 ksi a 115 ksi e 37,3 ksi a 133 ksi, respectivamente).

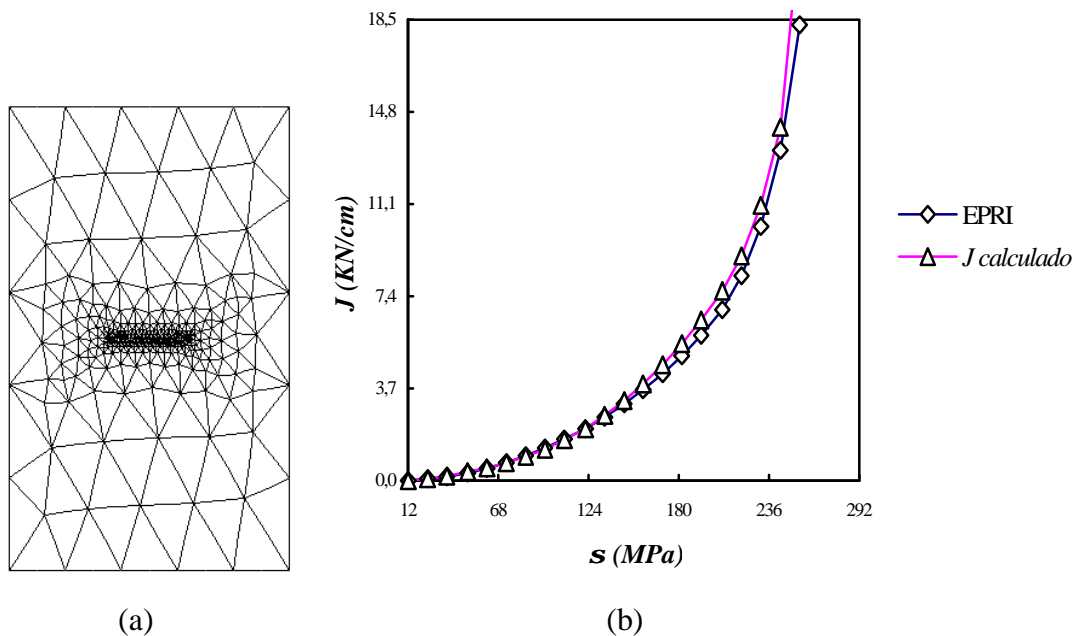


Fig. 5.7. Modelo B. (a) Malha de elementos finitos (732 nós e 334 elementos); (b) Curva da integral  $J$ .

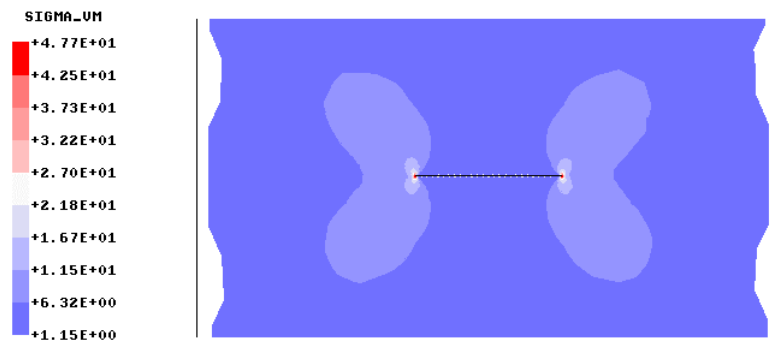
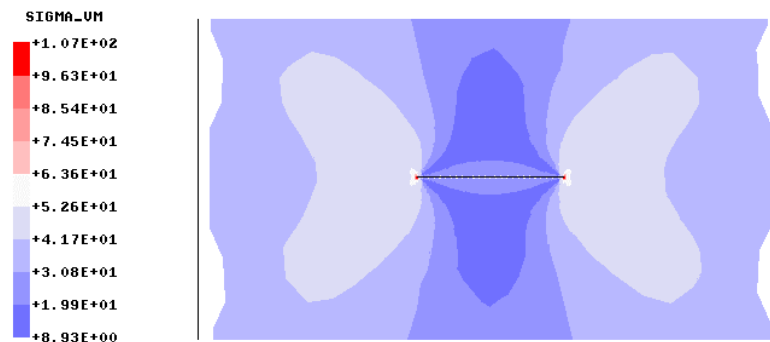
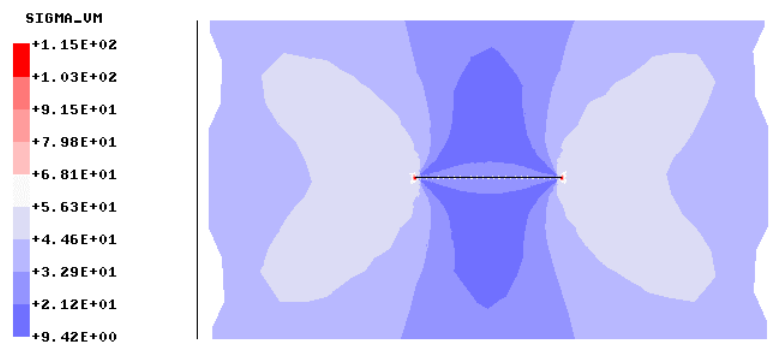
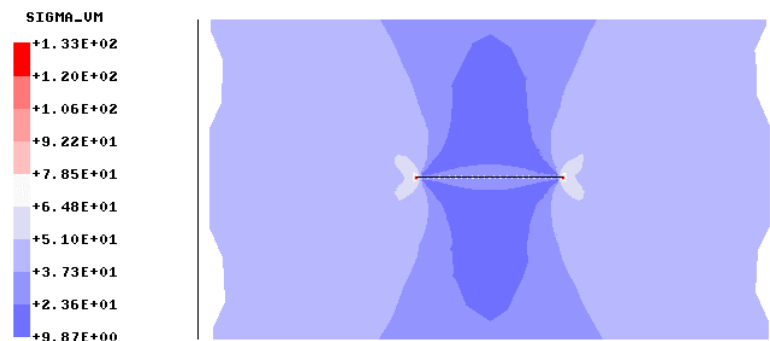
(a)  $s = 49$  MPa(b)  $s = 231$  MPa(c)  $s = 243$  MPa(d)  $s = 255$  MPa

Fig. 5.8. Modelo B – Distribuição das tensões de von Mises.

(c) *Modelo C*

Este problema é analisado para o mesmo material adotado no modelo B (Fig. 5.6). A malha de elementos finitos daquele mesmo modelo (Fig. 5.7a) é utilizada aqui. A integral  $J$  para cada passo de carga é apresentada na Fig. 5.9. A distribuição das tensões de von Mises é mostrada na Fig. 5.10 para diferentes níveis de cargas: início do escoamento ( $s = 49$  MPa), um passo de carga antes da carga limite ( $s = 219$  MPa), na carga limite ( $s = 243$  MPa) e um passo de carga após a carga limite ( $s = 267$  MPa).

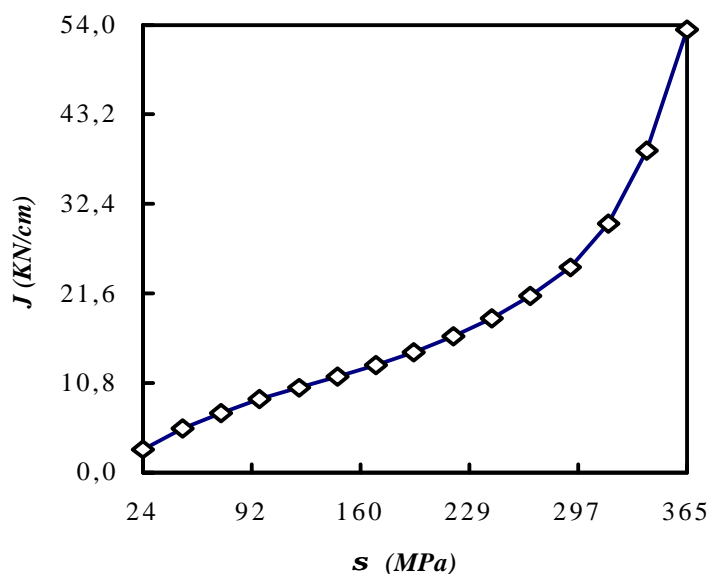


Fig. 5.9. Curva da integral  $J$  – Modelo C.

Verifica-se daquelas figuras que a região de plastificação, neste caso, está localizada só nas pontas da trinca: faixa vermelha na Fig. 5.10a; do rosa claro ao vermelho na Fig. 5.10b e Fig. 5.10c; da faixa branca à vermelha na Fig. 5.10d.

### 5.2.2. Tração de Uma Trinca de Aresta

Uma placa com  $h/W = 2,5$  e uma trinca de aresta  $a/W = 0,25$  está sujeita a uma carga de tração remota  $s$  (Fig. 5.4b). As seguintes propriedades do material são adotadas:  $E = 500s_y$ ;  $h' = 0,05E$  e  $n = 0,3$ . A análise é considerada em estado de deformação plana.

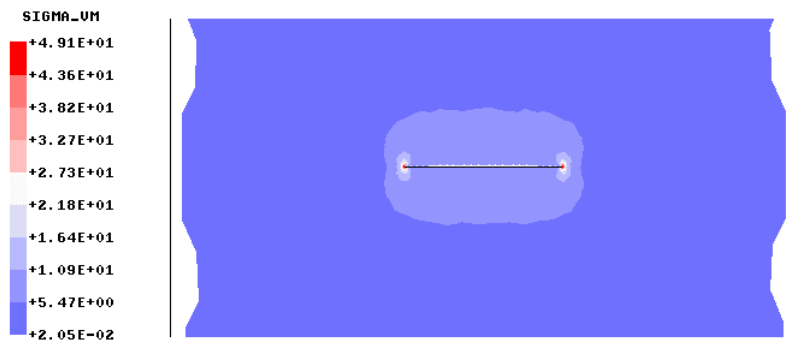
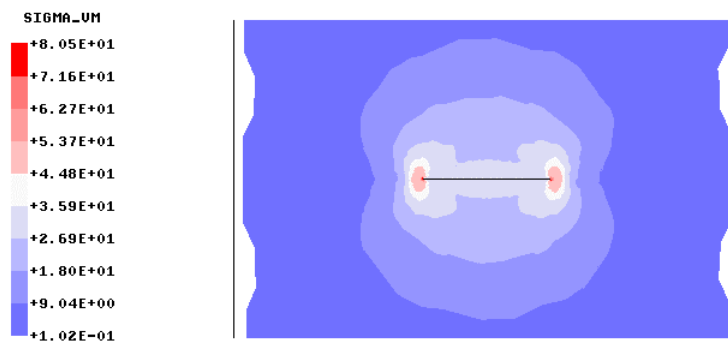
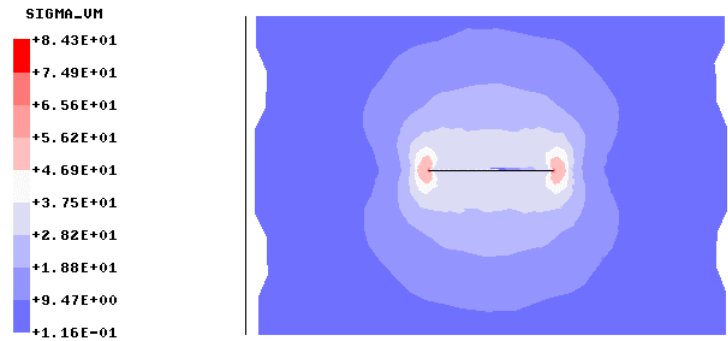
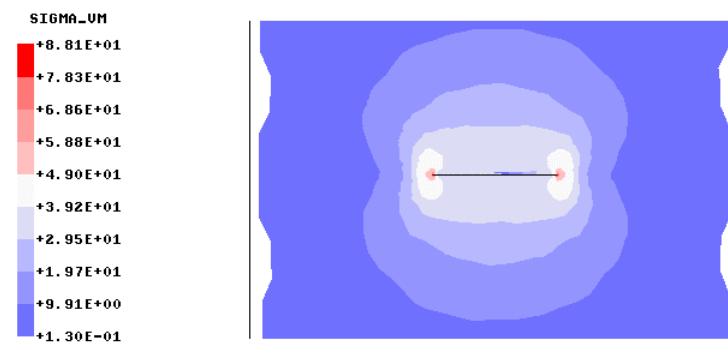
(a)  $s = 49$  MPa(b)  $s = 219$  MPa(c)  $s = 243$  MPa(d)  $s = 267$  MPa

Fig. 5.10. Modelo C – Distribuição das tensões de von Mises.

A malha de elementos finitos utilizada é mostrada na Fig. 5.11a. Ela consiste de 425 elementos T6, 8 elementos Q8C envolvendo a ponta da trinca e 948 nós. O tamanho do lado dos elementos Q8C é tomado igual a 0,04 vezes o comprimento da trinca.

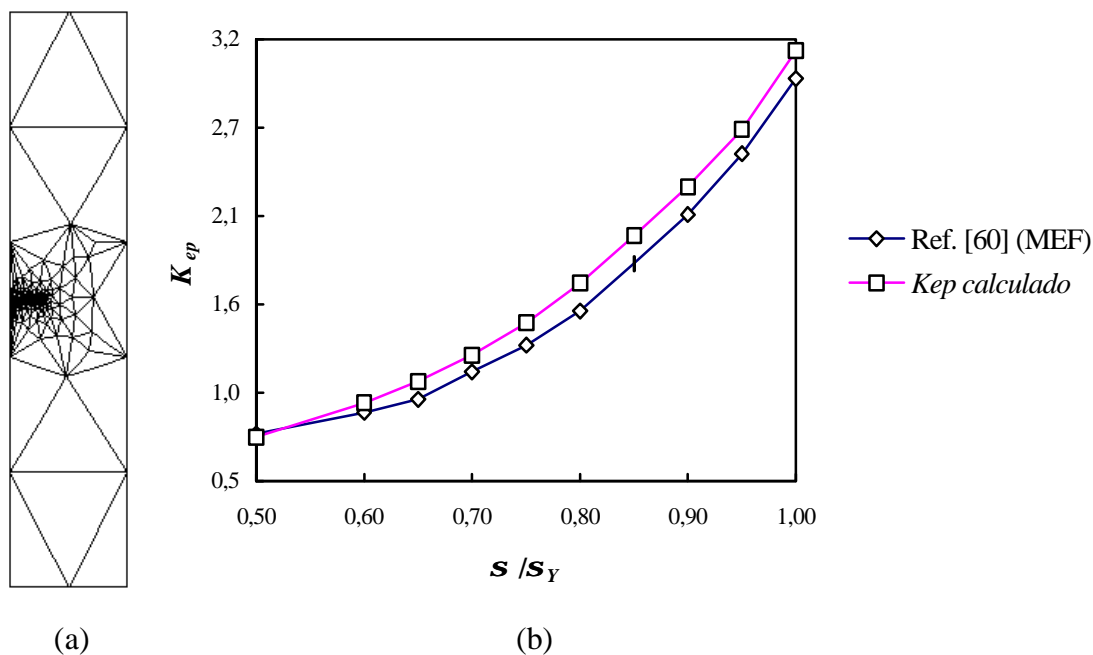


Fig. 5.11. Tração de uma trinca de aresta. (a) Malha de elementos finitos (948 nós e 433 elementos); (b) Curva do fator de intensidade de tensão elastoplástico normalizado.

Nikishkov e Atluri [60] analisaram este problema através de diferentes métodos numéricos. O método escolhido como referência foi o MEF, que emprega a técnica IDE para calcular a integral  $J$ . Seus resultados foram normalizados calculando-se um fator de intensidade de tensão elastoplástico, segundo as fórmulas a seguir.

$$K_{ep} = \sqrt{\frac{JE}{1-n^2}} \quad (5.11)$$

$$\bar{K}_{ep} = \frac{K_{ep}}{s_Y \sqrt{pa}} \quad (5.12)$$

O incremento de carga considerado neste trabalho é igual a 0,05, num total de 25 passos. Contudo, os valores da referência [60] são calculados só para incrementos de carga

que variam de 0,5 a 1,0. Da Fig. 5.11b, verifica-se que os resultados se aproximam. Isto era esperado já que as duas técnicas usam o MEF.

### 5.2.3. Duas Trincas Saindo de Um Furo Circular

Uma placa tracionada com duas trincas simétricas saindo de um furo central circular (Fig. 5.4c) tem suas dimensões definidas segundo as seguintes razões:  $R/W = 0,25$ ,  $a/R = 0,75$  e  $h/W = 2$ . A malha, composta de 753 nós, 321 elementos T6 e 16 elementos Q8C, é mostrada na Fig. 5.12a. As propriedades do material e o tamanho dos elementos Q8C são iguais aos do exemplo anterior, em estado de deformação plana.

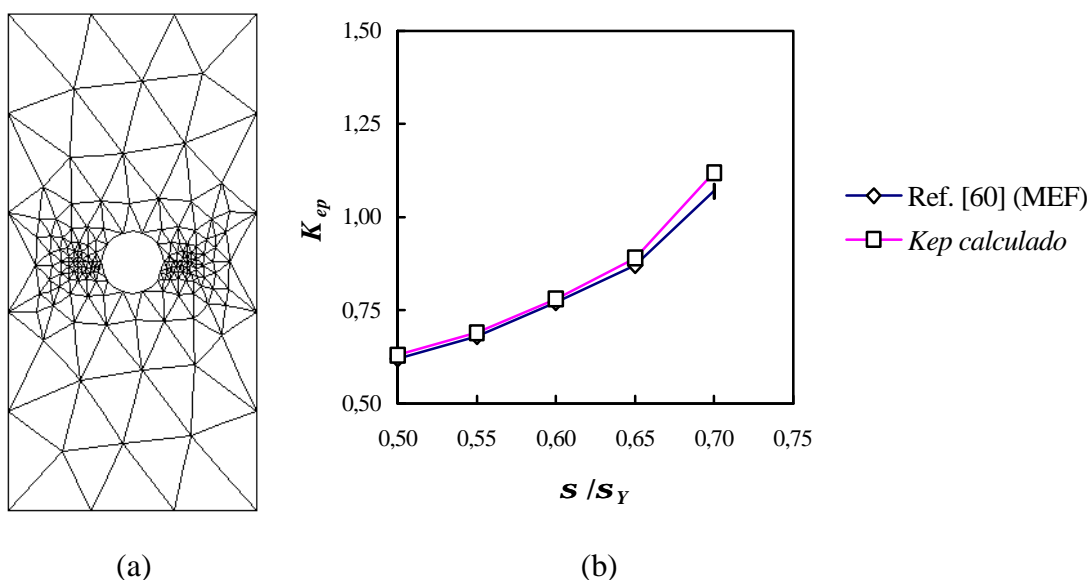


Fig. 5.12. Tração de duas trincas simétricas saindo de um furo circular. (a) Malha de elementos finitos (753 nós e 337 elementos); (b) Curva do fator de intensidade de tensão elastoplástico normalizado.

Os resultados são novamente comparados aos da Ref. [60], considerando o método MEF. Contudo, a normalização do fator de intensidade de tensão elastoplástico é agora feito pela seguinte expressão:

$$\bar{K}_{ep} = \frac{K_{ep}}{s_Y \sqrt{p(R+a)}} \quad (5.13)$$



O gráfico da Fig. 5.12b mostra as soluções para o incremento de carga variando entre 0,5 e 0,7. Observa-se que os valores obtidos são praticamente idênticos aos da referência [60], mesmo para cargas elevadas.

A Fig. 5.1 mostra, apenas para efeito de ilustração, o detalhe do arredondamento da trinca obtido pela roseta de elementos Q8 colapsados, no passo de carga  $\sigma/\sigma_Y = 0,7$ . Como se pode observar, este arredondamento é simétrico em relação ao eixo da trinca.

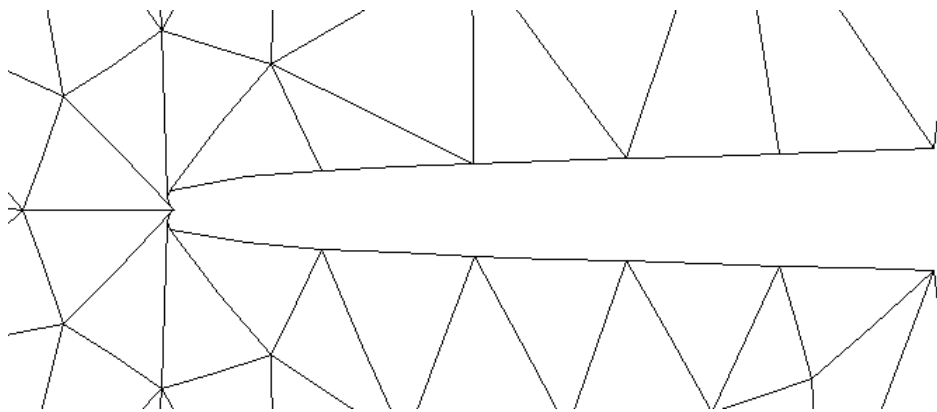


Fig. 5.13. Detalhe do arredondamento da ponta da trinca ( $\sigma/\sigma_Y = 0,7$ ).

## CAPÍTULO 6

### AVALIAÇÃO DO PROCESSO ADAPTATIVO

O processo adaptativo proposto neste trabalho e apresentado no capítulo 4 é aplicado na análise de problemas bidimensionais, elásticos e elastoplásticos em geral. Contudo, o processo adaptativo para análise de problemas lineares, no qual o presente trabalho é baseado, foi devidamente avaliado no trabalho de Cavalcante [20]. Portanto, neste trabalho, somente problemas de fraturamento elástico linear são analisados. Já o processo adaptativo para análise não linear é demonstrado e avaliado por um conjunto de exemplos plásticos, com e sem fratura.

#### 6.1. ADAPTAÇÃO DE FRATURAMENTO LINEAR

A seguir são apresentados três exemplos de construção de malhas otimizadas para problemas com fraturamento linear. Estes exemplos são os mesmos utilizados no capítulo 5, cujos resultados do processo adaptativo são comparados com os resultados teóricos.

As malhas iniciais destes exemplos são analisadas adaptativamente considerando, em primeira análise, a intensidade da singularidade ( $I = 0,5$ ) no cálculo do tamanho característico dos elementos adjacentes a uma ponta de trinca (Eq. (4.22)) e, em segunda análise, a ordem do polinômio da função de interpolação destes elementos ( $p = 2,0$ ) para o cálculo deste mesmo tamanho (Eq. (4.23)). Estas análises são realizadas independentemente do tipo de elemento (T6, QP45, QP40, QP30) utilizado para formar a roseta em torno das pontas das trincas. Depois que a malha inicial é analisada, erros na norma de energia são calculados a fim de obter uma malha melhorada, respeitando uma tolerância predefinida. A análise adaptativa é interrompida quando  $\mathbf{h} \leq \mathbf{h}^*$  (Eq. (4.18)).

O principal objetivo destes exemplos é verificar o desempenho do processo adaptativo em localizar as regiões de singularidade, bem como, comparar os resultados das duas análises. A influência da singularidade no processo de refinamento também é verificada, principalmente, quando elementos singulares são usados.

### 6.1.1. Exemplo 5.1.1

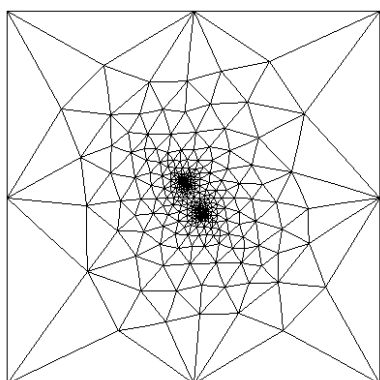
A análise auto-adaptativa do Exemplo 5.1.1 (Fig. 5.1a) é feita para cada inclinação de trinca, cujas malhas iniciais estão mostradas na Fig. 5.2 e resumidas na Tab. 5.1. A roseta em volta das pontas da trinca é composta de elementos QP45. A tolerância, definida como critério de parada da análise, é 3% para  $b$  igual a  $90^\circ$  e  $60^\circ$ , 2% para  $b$  igual a  $45^\circ$  e 1,4% para  $b$  igual a  $20^\circ$ .

Cada configuração de trinca necessitou apenas de um passo de adaptação para obter uma malha otimizada, nas duas análises. Os erros relativos na norma de energia são bastante reduzidos na malha final (Tab. 6.1), sendo que os da segunda análise ( $p = 2,0$ ) são, aproximadamente, duas vezes os da primeira análise ( $I = 0,5$ ). Isto acontece porque a primeira análise refina muito mais os modelos do que a segunda (Fig. 6.1). Contudo, ambas as análises capturam as singularidades das pontas da trinca, refinando e desrefinando a malha onde necessário.

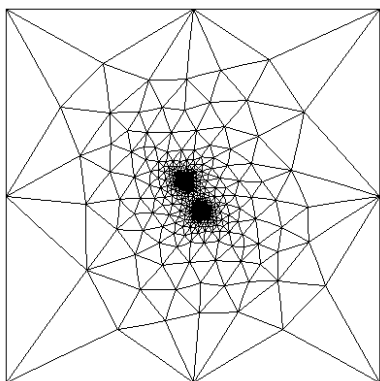
Tab. 6.1. Erros relativos na norma de energia para as duas análises adaptativas e cada configuração de trinca.

$b$	$h$ da malha inicial	$I = 0,5$	$p = 2,0$
		$h$ da malha final	$h$ da malha final
$90^\circ$	<b>3,03%</b>	<b>0,60%</b>	<b>1,20%</b>
$60^\circ$	<b>3,12%</b>	<b>0,50%</b>	<b>1,16%</b>
$45^\circ$	<b>2,72%</b>	<b>0,37%</b>	<b>1,00%</b>
$20^\circ$	<b>1,48%</b>	<b>0,22%</b>	<b>0,57%</b>

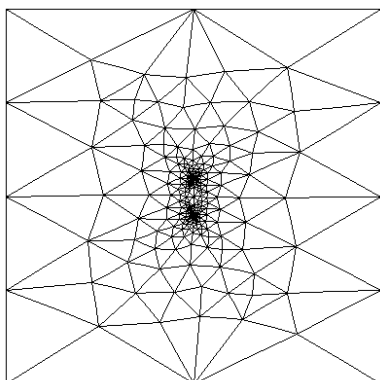
A distribuição do erro na norma de energia, através dos elementos das malhas, é mostrada na Fig. 6.2. Nota-se que a segunda análise ( $p = 2,0$ ) distribui mais uniformemente o erro entre os elementos do que a primeira análise ( $I = 0,5$ ), sendo que os valores mais altos da escala correspondem aos elementos adjacentes às pontas da trinca.



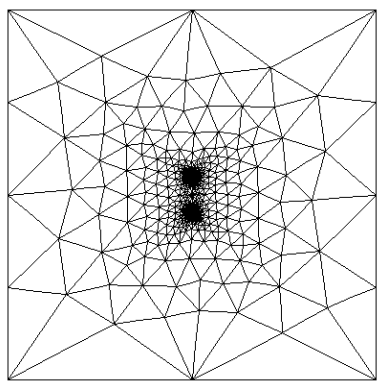
= 2,0 -  $h = 1,16\%$



= 0,5 -  $h = 0,50\%$

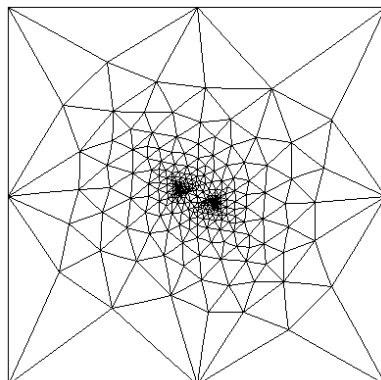


= 2,0 -  $h = 1,20\%$

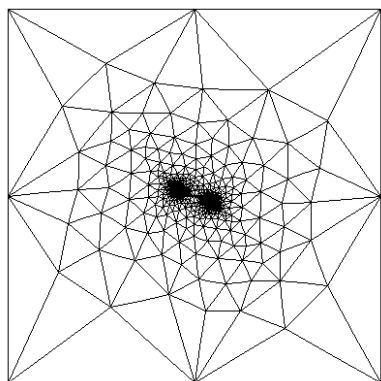


$l = 0,5 - h = 0,60\%$   
4416 nós e 2166 elementos

(a)

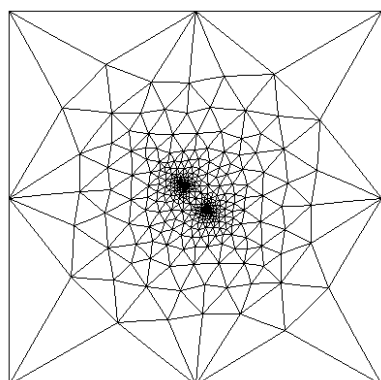


$p = 2,0 - h = 0,57\%$   
1376 nós e 672 elementos

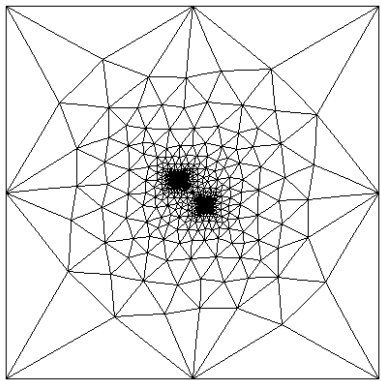


$l = 0,5 - h = 0,22\%$   
7156 nós e 3442 elementos

(d)



= 2,0 -  $h = 1,00\%$



= 0,5 -  $h = 0,37\%$

(c)

1. Adaptação do Exemplo 5.1.1. (a)  $b = 90^\circ$ ; (b)  $b = 60^\circ$ ; (c)  $b = 45^\circ$ ; (d)  $b = 20^\circ$ .

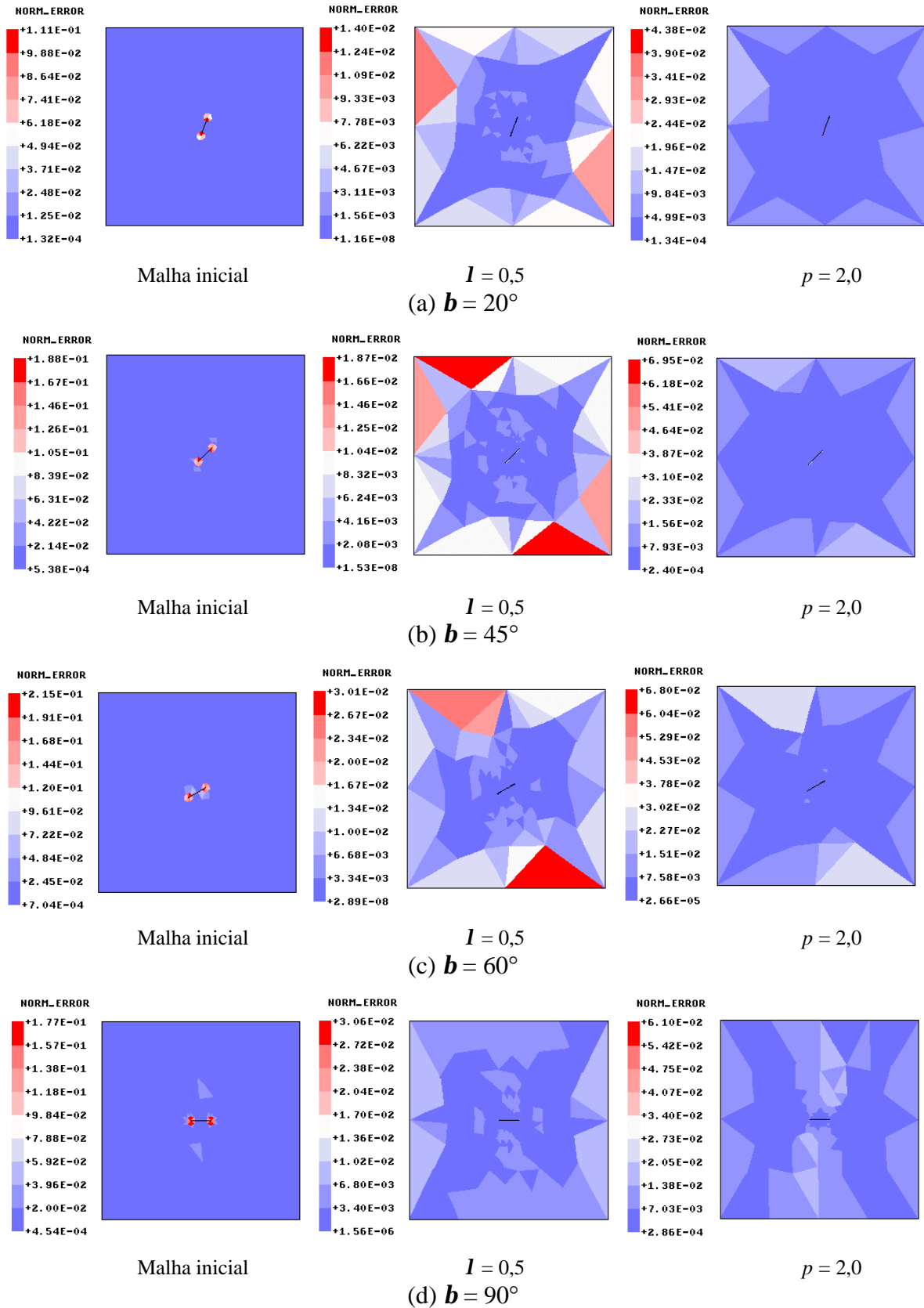


Fig. 6.2. Distribuição do erro na norma de energia, para cada análise e cada configuração de trinca.

Os fatores de intensidade de tensão, obtidos pelas duas análises, proporcionam valores muito próximos entre si, nos três métodos de cálculo (Tab. 6.2 e Tab. 6.3). Estes valores aproximam-se dos valores teóricos com pequenas margens de erro, as quais são calculadas segundo a Eq. (5.1). Na adaptação com  $I = 0,5$ , o maior erro está em torno de 3,5% para  $K_I$  e 0,8% para  $K_{II}$ , no método FTM; 4,9% para  $K_I$  e 1,2% para  $K_{II}$ , no método IDE. Contudo, o método TCD apresenta um erro de 15% em  $K_I$  para  $b = 20^\circ$ , enquanto que para as outras inclinações de trinca, os erros estão abaixo de 2,5%. Já para  $K_{II}$ , o maior erro está em torno de 6,3%. Na adaptação com  $p = 2,0$ , o maior erro está em torno de 0,9% para  $K_I$  e 0,7% para  $K_{II}$ , no método FTM; 2,2% para  $K_I$  e 1,3% para  $K_{II}$ , no método IDE. Já o método TCD apresenta o maior erro em torno de 4% para  $K_I$  e 2,2% para  $K_{II}$ .

Tab. 6.2. Resultados de  $K_I$  (MPa $\sqrt{m}$ ) para o Exemplo 5.1.1.

$b$	Teóricos	$I = 0,5$			$p = 2,0$		
		TCD	FTM	IDE	TCD	FTM	IDE
90°	19,47	19,67	19,69	19,74	19,89	19,65	19,78
60°	14,60	14,80	14,76	14,83	14,86	14,72	14,81
45°	9,74	9,98	10,00	10,02	9,90	9,81	9,87
20°	2,27	2,61	2,35	2,38	2,36	2,29	2,32

Tab. 6.3. Resultados de  $K_{II}$  (MPa $\sqrt{m}$ ) para o Exemplo 5.1.1.

$b$	Teóricos	$I = 0,5$			$p = 2,0$		
		TCD	FTM	IDE	TCD	FTM	IDE
90°	0,00	-0,01	0,01	0,02	0,00	-0,01	-0,04
60°	8,43	8,23	8,50	8,53	8,28	8,49	8,54
45°	9,74	9,13	9,76	9,68	9,53	9,78	9,84
20°	6,26	5,98	6,26	6,24	6,15	6,27	6,33

Observa-se, portanto, que os erros no cálculo dos fatores de intensidade de tensão em relação aos valores de referência são menores para o segundo processo adaptativo ( $p = 2,0$ ) do que para o primeiro ( $I = 0,5$ ). Esta diferença pode ser proveniente de problemas numéricos acarretados por elementos mal formados em torno da trinca e da roseta. Se comparados com aqueles obtidos com a malha inicial (Tab. 5.2 e Tab. 5.3), verifica-se que os erros tendem a diminuir para o método TCD, tanto para  $K_I$  quanto para  $K_{II}$ . No entanto, no método FTM, os erros são majorados para  $K_I$  e diminuem para  $K_{II}$ . Na verdade, este método, segundo o próprio Raju [66], não necessita de malhas tão refinadas na ponta da trinca para obter soluções exatas, principalmente, quando os elementos singulares são usados. Já no método IDE, os erros

permanecem na mesma ordem de grandeza tanto para  $K_I$  quanto para  $K_{II}$ , portanto, não fazendo diferença o grau de discretização da malha.

### 6.1.2. Exemplo 5.1.2

Este exemplo é analisado utilizando apenas as rosetas T6, QP40 e QP30, cujas malhas iniciais são mais grosseiras do que as da Tab. 5.4. Estas malhas são mostradas na Fig. 6.3a, na Fig. 6.4a e na Fig. 6.5a, respectivamente. O erro relativo especificado é 5%.

Na primeira análise auto-adaptativa ( $I = 0,5$ ), considerando a roseta T6 na ponta da trinca, a malha inicial obtém um erro na norma de energia de 19,46% , caindo para 1,84% no primeiro passo de adaptação. A malha obtida está na Fig. 6.3b. A segunda análise ( $p = 2,0$ ) requer dois passos adaptativos, sendo que o erro na norma de energia da malha inicial cai para 5,16% no primeiro passo (Fig. 6.3c) e para 2,44% no segundo passo (Fig. 6.3d).

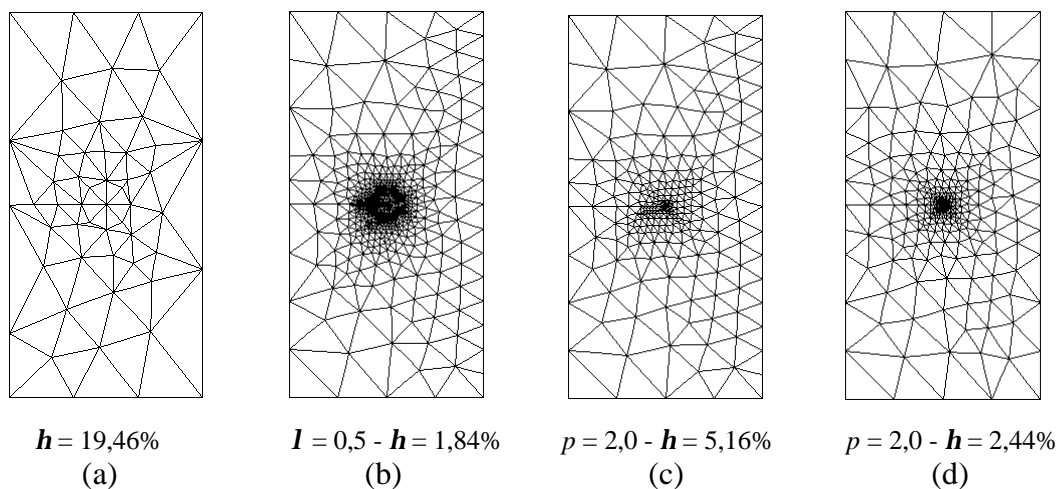


Fig. 6.3. Adaptação do Exemplo 5.1.2 – Roseta de elementos T6. (a) Malha inicial – 208 nós e 93 elementos; (b) 10822 nós e 5133 elementos; (c) 1038 nós e 489 elementos; (d) 1628 nós e 783 elementos.

Para a roseta QP40, a primeira análise ( $I = 0,5$ ) reduz o erro na norma de energia de 18,91% para 2,06% (Fig. 6.4b) em um único passo de adaptação. A segunda análise ( $p = 2,0$ ) reduz o erro para 6,71% no primeiro passo (Fig. 6.4c) e este para 3,01% no segundo passo (Fig. 6.4d).

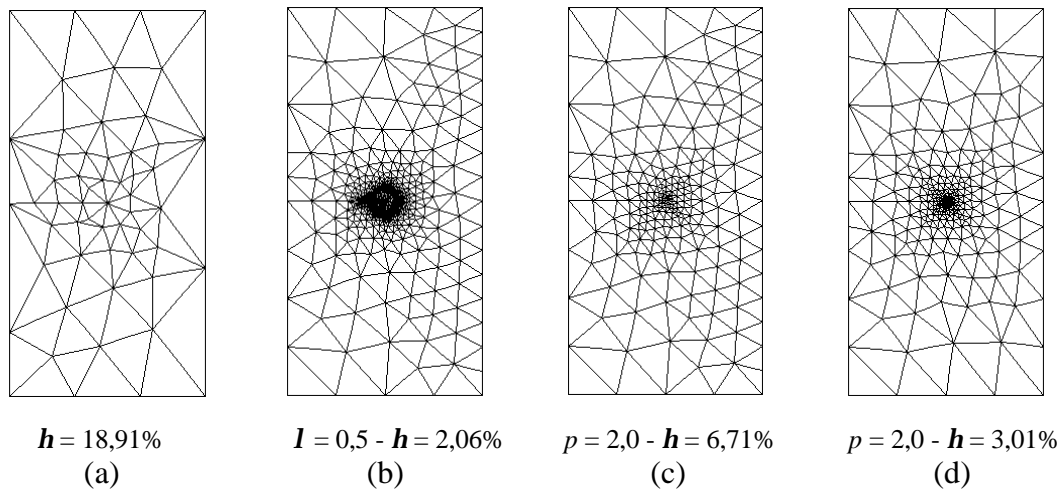


Fig. 6.4. Adaptação do Exemplo 5.1.2 – Roseta de elementos QP40. (a) Malha inicial – 212 nós e 95 elementos; (b) 7766 nós e 3733 elementos; (c) 866 nós e 407 elementos; (d) 1349 nós e 646 elementos.

Para a roseta QP30, novamente a primeira análise ( $I = 0,5$ ) necessita de apenas um passo adaptativo para reduzir o erro relativo na norma de energia de 18,35% para 1,86% (Fig. 6.5b). A segunda análise ( $p = 2,0$ ) também necessita de dois passos, sendo que o erro é reduzido para 6,48% no primeiro passo (Fig. 6.5c) e para 2,86% no segundo passo (Fig. 6.5d).

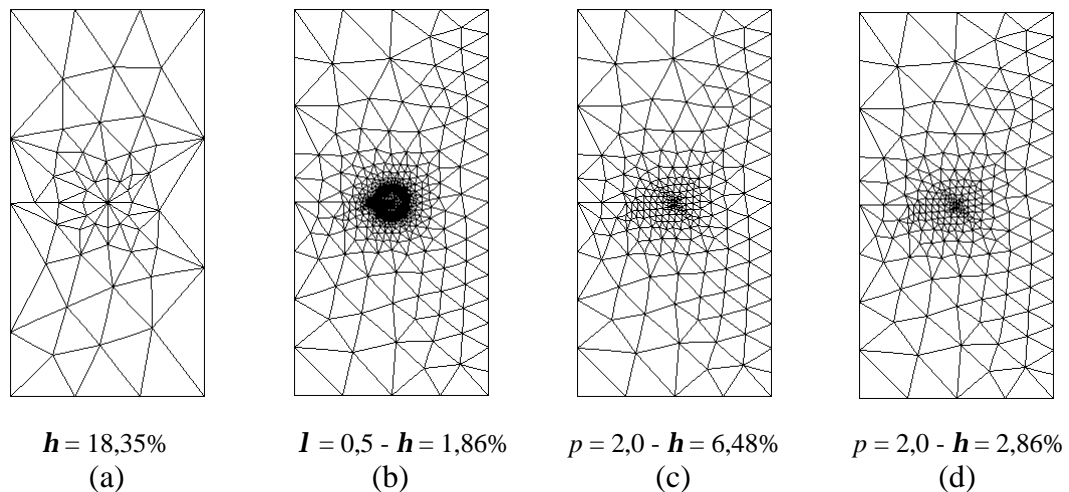


Fig. 6.5. Adaptação do Exemplo 5.1.2 – Roseta de elementos QP30. (a) Malha inicial – 224 nós e 101 elementos; (b) 8382 nós e 4039 elementos; (c) 962 nós e 453 elementos; (d) 1475 nós e 708 elementos.

Em todos os casos, a análise adaptativa para  $I = 0,5$  proporciona uma malha final bem mais refinada com apenas um passo de adaptação e com um erro na norma de energia bem abaixo da tolerância especificada. A análise para  $p = 2,0$ , contudo, necessita de dois passos



adaptativos para convergir para esta tolerância, porém, com erros finais bem maiores do que os da primeira análise.

Os resultados de  $K_I$ , tornados adimensionais segundo a Eq. 5.4, estão na Tab. 6.4 para a análise da malha inicial, os dois processos adaptativos e as diversas rosetas. Os resultados da malha inicial afastam-se dos valores teóricos, com margens de erro (Eq. 5.1) entre 6% e 1,4%. Para as duas análises adaptativas, as margens de erro, obtidas para as rosetas formadas pelos elementos QP40 e QP30, são inferiores ou iguais a 0,7%, em valor absoluto, em todos os métodos. Já para a roseta de elementos T6, as seguintes percentagens de erro são obtidas: para o método TCD, chega a 6,3%, considerando  $I = 0,5$ , e a 4,5%, considerando  $p = 2,0$ . No FTM, obtém-se erros de 0,7% e de 0,1%, respectivamente, enquanto que no IDE, obtém-se 2,1% e 1,3%, respectivamente. Como pode ser observado, ambas as análises fizeram com que o fator de intensidade de tensão, de cada um dos exemplos, convergissem para o valor teórico (2,818).

Tab. 6.4. Resultados adimensionais de  $K_I$  para o Exemplo 5.1.2.

Rosetas	Malha inicial sem adaptação			$I = 0,5$			$p = 2,0$		
	T6	QP40	QP30	T6	QP40	QP30	T6	QP40	QP30
TCD	2,714	2,708	2,702	2,640	2,815	2,815	2,691	2,838	2,832
FTM	2,674	-	2,781	2,798	-	2,821	2,821	-	2,821
IDE	2,652	2,798	2,793	2,759	2,827	2,821	2,781	2,832	2,827

Com relação aos resultados obtidos no capítulo 5 (Tab. 5.5), o processo adaptativo melhora os resultados das rosetas de elementos QP40 e QP30, em ambas as análises e para todos os métodos. Isto era esperado pois a região da trinca está bem mais discretizada do que na malha utilizada para aquela análise. Contudo, para a roseta de elementos T6, os resultados melhoram substancialmente somente no segundo processo adaptativo, para todos os métodos de cálculo. No primeiro processo, só os métodos FTM e IDE têm seus resultados ligeiramente melhorados, porém o TCD chega mesmo a piorar.

### 6.1.3. Exemplo 5.1.3

Este exemplo é analisado com a malha inicial mostrada na Fig. 6.6a, considerando uma pressão uniforme aplicada nas faces das trincas (CARGA A - Fig. 5.1c) e um

carregamento uniaxial de tração aplicado nas bordas da placa (CARGA B - Fig. 5.1c). A roseta nas pontas das trincas é formada por elementos QP45. O erro na norma de energia, especificado como critério de parada do processo adaptativo, é 5%.

A análise adaptativa, considerando a intensidade da singularidade, faz com que o erro na norma de energia seja reduzido em um passo de adaptação, para os dois tipos de carregamento. Para a CARGA B, o erro de 10,74% cai para 1,54% no primeiro passo de adaptação (Fig. 6.6b). Com a CARGA A, este erro cai para 2,68% (Fig. 6.7a). Nos dois casos, a malha final é super-refinada em torno das pontas das trincas, como era esperado. Contudo, este refinamento é maior quando a CARGA A está atuando.

Considerando a ordem de interpolação do polinômio na análise adaptativa, o erro na norma de energia fica abaixo do valor especificado em um único passo de adaptação somente quando a CARGA B é aplicada. O erro, neste caso, cai para 3,52% no primeiro passo (Fig. 6.6c). Já para a CARGA A, a análise converge em dois passos adaptativos, cujo erro na norma de energia cai para 5,39% no primeiro passo (Fig. 6.7b), que cai para 2,45% no segundo passo (Fig. 6.7c). Nestes dois casos, as malhas finais obtidas não são tão refinadas quanto na primeira análise ( $I = 0,5$ ), porém, o exemplo com a CARGA A termina com uma malha bem mais refinada do que quando a CARGA B está atuando.

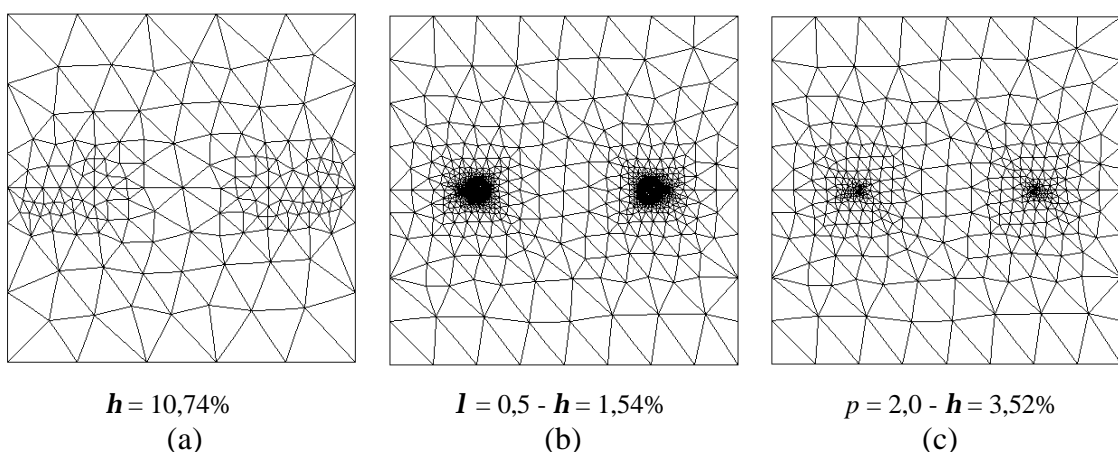


Fig. 6.6. Adaptação do Exemplo 5.1.3 – CARGA B. (a) Malha inicial – 655 nós e 306 elementos; (b) 12327 nós e 5926 elementos; (c) 1607 nós e 762 elementos.

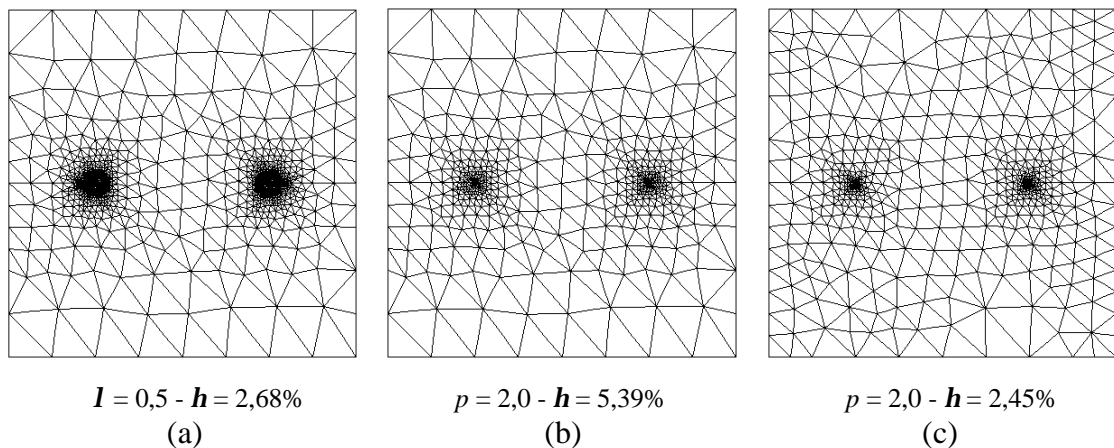


Fig. 6.7. Adaptação do Exemplo 5.1.3 – CARGA A. (a) 20547 nós e 9826 elementos; (b) 2059 nós e 986 elementos; (c) 2870 nós e 1379 elementos.

Os resultados de  $K_I$ , tornados adimensionais segundo a Eq. 5.4, são mostrados na Tab. 6.5 para as duas análises auto-adaptativas e os dois tipos de cargas. Verifica-se que os valores obtidos não são exatamente iguais para as duas cargas como era esperado. Isto se dá porque as malhas finais, obtidas do processo adaptativo, não são iguais para as duas cargas. Contudo, os erros em relação ao valor de referência (1,332) são considerados satisfatórios. Em valor absoluto, estes erros são inferiores a 0,9% para  $I = 0,5$  e inferiores a 0,5% para  $p = 2,0$ .

Tab. 6.5. Resultados adimensionais de  $K_I$  para o Exemplo 5.1.3.

Cargas	$I = 0,5$			$p = 2,0$		
	TCD	FTM	IDE	TCD	FTM	IDE
CARGA A	<b>1,325</b>	<b>1,321</b>	<b>1,326</b>	<b>1,337</b>	<b>1,330</b>	<b>1,338</b>
CARGA B	<b>1,340</b>	<b>1,327</b>	<b>1,338</b>	<b>1,337</b>	<b>1,331</b>	<b>1,337</b>

## 6.2. ADAPTAÇÃO DE PROBLEMAS PLÁSTICOS

A fim de avaliar e demonstrar o processo adaptativo para análise de problemas elastoplásticos, seis exemplos são apresentados. Destes, três são problemas de plasticidade, sem fratura, encontrados na literatura e os outros três são problemas de fraturamento elastoplástico, analisados no capítulo 5.

O estimador de erro em tensão efetiva (ES) e o estimador na razão do trabalho plástico (PW), implementados para este processo, são utilizados para avaliar a precisão das soluções

dos dois primeiros problemas plásticos. O objetivo destes dois exemplos é avaliar os dois estimadores e o desempenho do processo adaptativo em capturar as regiões de plastificação. O terceiro exemplo é analisado apenas para o estimador de erro PW e seu objetivo é mostrar a capacidade do sistema.

Já para os problemas com fratura, os três exemplos são analisados usando o estimador de erro PW, enquanto o segundo exemplo é também analisado utilizando o estimador ES. Neste caso, a região a ser refinada é a ponta da trinca, local onde ocorre o escoamento do material. Portanto, a capacidade da análise adaptativa em capturar esta região é avaliada.

Em todos os exemplos, o critério de escoamento de von Mises, com encruamento isotrópico linear, é empregado. Ao fim de cada passo de carga, depois que a solução converge, o erro em cada elemento é calculado. Se em algum ponto do modelo, o erro em qualquer um dos estimadores exceder a tolerância especificada, a análise incremental é interrompida e o refinamento da malha é realizado. Neste caso, a interpolação das variáveis de solução, da malha antiga para a nova, é feita antes de proceder ao próximo passo da análise incremental. Apesar de estarem disponíveis no módulo de análise duas técnicas de suavização (SPR ou HC) das variáveis incrementais (deformação plástica e deformação plástica equivalente), somente o método SPR é empregado. O método de Newton-Raphson com controle de carga é utilizado na análise destes problemas.

### **6.2.1. Viga em Balanço**

O primeiro exemplo é uma viga em balanço sujeita a uma carga concentrada na sua extremidade. As dimensões da viga e as propriedades do material estão descritas na Fig. 6.8a. A malha inicial (Fig. 6.8b) é formada por 147 nós e 60 elementos triangulares T6. O problema é analisado em estado de tensão plana, usando três pontos de integração por elemento. A carga é aplicada incrementalmente de 0 a 1,50 MN/m, com dois intervalos de carga diferentes: o primeiro,  $\Delta P = 0,05$  MN/m e o segundo,  $\Delta P = 0,25$  MN/m. O erro em tensão efetiva ou na razão do trabalho plástico, definido como critério de parada da análise incremental, é 5%.

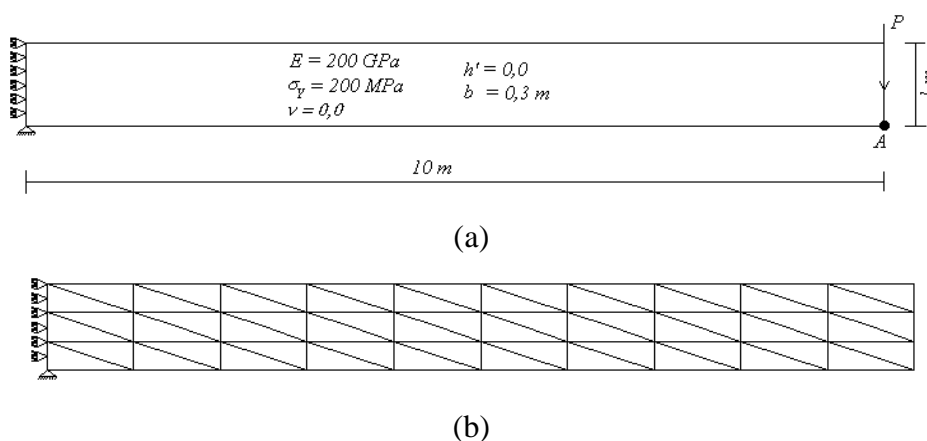


Fig. 6.8. Viga em balanço. (a) Problema mecânico; (b) Malha 1 (inicial) – 147 nós e 60 elementos.

(a) *Estimador de Erro ES*

O incremento inicial  $\Delta P = 0,05$  MN/m é aplicado na malha 1. O critério de erro é violado com um erro relativo em tensão efetiva de 6,22% no primeiro passo de carga, ou seja, quando a viga inicia o carregamento elástico. Um modelo refinado (Fig. 6.9a) é então criado, baseado na razão de erro de cada elemento da malha 1. Neste caso, nenhuma transferência de variáveis é executada já que a análise incremental está em sua fase inicial.

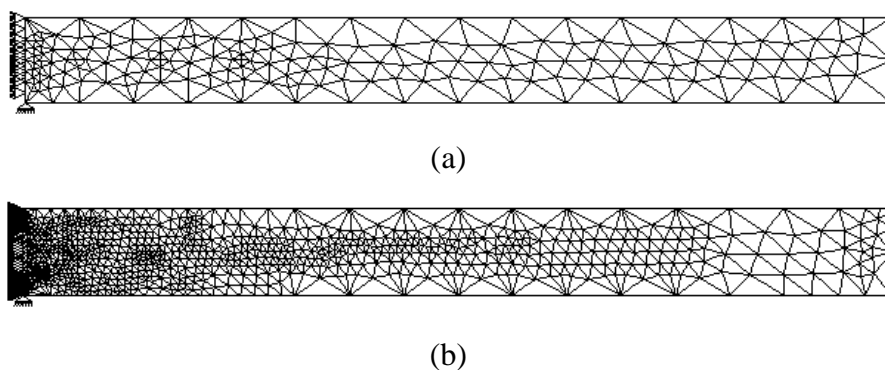


Fig. 6.9. Processo adaptativo da viga em balanço para o estimador de erro ES e  $\Delta P = 0,05$  MN/m. (a) Malha 2 - 719 nós e 338 elementos ( $\mathbf{h} = 6,66\%$ ); (b) Malha 3 - 3649 nós e 1776 elementos ( $\mathbf{h} = 3,67\%$ ).

Com a malha 2, a análise é reiniciada reaplicando-se a carga inicial. Na carga  $P = 1,40$  MN/m, o erro em tensão efetiva (6,66%) torna a exceder os 5% especificado. Neste passo, uma nova malha é gerada (Fig. 6.9b) e as variáveis de solução do passo anterior ( $P = 1,35$  MN/m) são extrapoladas da malha antiga para esta nova malha. Estas variáveis são

consideradas como valores iniciais da análise incremental que é reiniciada a partir desta carga. A análise então prossegue até a carga final sem que o critério de erro seja novamente violado e sem que haja necessidade de variar o incremento de carga original.

O segundo incremento de carga ( $\Delta P = 0,25$  MN/m) é agora aplicado na malha 1. Novamente, o critério de erro é violado no primeiro passo ( $P = 0,25$  MN/m), com um erro em tensão efetiva de 6,22%. A nova malha gerada é exatamente igual à malha 2 (Fig. 6.10a) do incremento de carga anterior. A análise é reiniciada com esta malha, a partir da carga inicial. Na carga  $P = 1,50$  MN/m, o erro relativo em tensão efetiva de 9,81% é maior do que o erro predefinido. A malha 3 (Fig. 6.10b) é então gerada e a análise continua, tomando como valores iniciais os resultados da carga  $P = 1,25$  MN/m. Contudo, o erro não converge no primeiro passo. A análise é então interrompida e o incremento de carga é dividido por cinco.

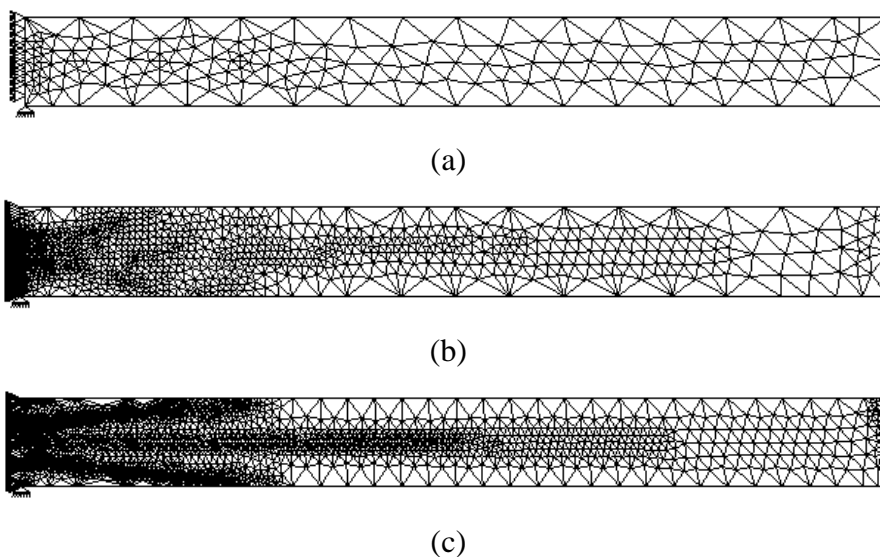


Fig. 6.10. Processo adaptativo da viga em balanço para o estimador de erro ES e  $\Delta P = 0,25$  MN/m. (a) Malha 2 - 719 nós e 338 elementos ( $h = 9,81\%$ ); (b) Malha 3 - 4568 nós e 2227 elementos ( $h = 6,09\%$ ); (c) Malha 4 - 14260 nós e 7029 elementos ( $h = 2,69\%$ ).

Reinicia-se a análise do modelo com a malha 3, a partir da carga  $P = 1,25$  MN/m e o novo incremento de carga ( $\Delta P = 0,05$  MN/m). Na carga  $P = 1,45$  MN/m, o erro em tensão efetiva é 6,09% e uma nova malha é gerada. A análise é reiniciada com a malha 4 (Fig. 6.10c), a partir da carga  $P = 1,40$  MN/m, que prossegue até o final da carga.

Os deslocamentos do ponto A (Fig. 6.8a), para cada passo de carga, são comparados com os resultados obtidos da análise da malha 1, sem adaptação e  $\Delta P = 0,05$  MN/m, e com as soluções da Resistência dos Materiais (RM). A expressão teórica para os deslocamentos, durante o escoamento, é dada por:

$$\frac{v}{v_Y} = \left( \frac{P_Y}{P} \right)^2 \left[ 5 - \left( 3 + \frac{P}{P_Y} \right) \sqrt{3 - \frac{2P}{P_Y}} \right] \text{ para } 1,00 \leq \frac{P}{P_Y} \leq 1,50 \quad (6.1)$$

onde

$$v_Y = \frac{4P_Y l^3}{bh^3 E} \quad (6.2)$$

$$P_Y = \frac{bh^2}{6l} s_Y \quad (6.3)$$

$P_Y$  é a carga da tensão de escoamento e  $v_Y$  é o deslocamento da tensão de escoamento.  $b$ ,  $h$  e  $l$  são a largura, a altura e o comprimento da viga, respectivamente. A curva carga x deslocamentos do ponto A está representada na Fig. 6.11, apenas para o carregamento plástico.

Os resultados obtidos para  $\Delta P = 0,25$  MN/m (Inc. 2 na Fig. 6.11) estão mais próximos dos resultados teóricos do que aqueles obtidos para  $\Delta P = 0,05$  MN/m (Inc. 1 na Fig. 6.11). No entanto, ambas as análises afastam-se dos resultados da malha 1 (sem adaptação) e estes dos valores teóricos. Para o primeiro incremento ( $\Delta P = 0,05$  MN/m), a análise é terminada com um erro em tensão efetiva de 3,67%, enquanto que para o segundo incremento ( $\Delta P = 0,25$  MN/m), a análise termina com um erro em tensão efetiva de 2,69%. Isso implica dizer que, neste exemplo, mesmo iniciando a análise com um grande intervalo inicial, o processo adaptativo fez com que as soluções praticamente convergissem para os resultados teóricos, mesmo que isso implique num maior refinamento do modelo no final da análise.

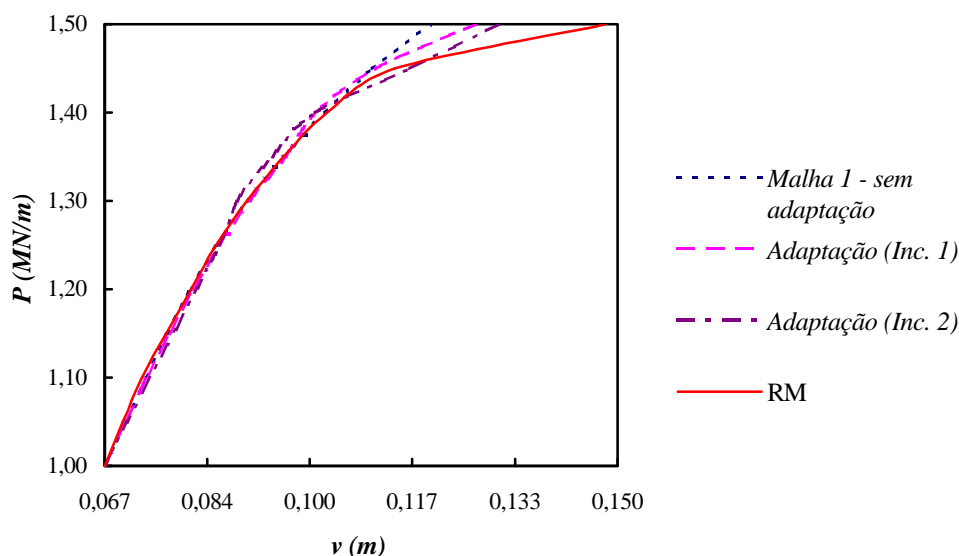
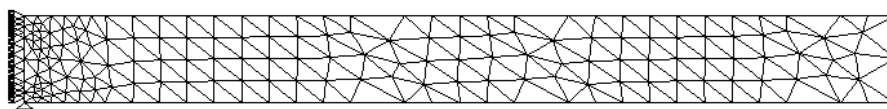


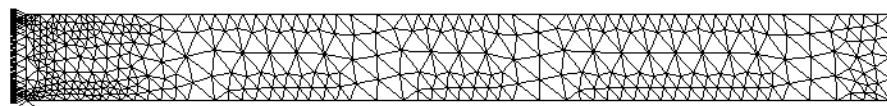
Fig. 6.11. Curva  $P \times v$  do ponto A da viga em balanço para o estimador de erro ES.

(b) *Estimador de Erro PW*

Quando o incremento  $\Delta P = 0,05$  MN/m é aplicado na malha 1, um erro relativo na razão do trabalho plástico de 10,86% ocorre na carga  $P = 1,20$  MN/m. A malha 2 (Fig. 6.12a) é então gerada, cuja análise proporciona um erro relativo de 5,45% na carga  $P = 1,30$  MN/m. A malha 3 (Fig. 6.12b) prossegue com a análise, alcançando um erro de 3,04% no último passo de carga.



(a)



(b)

Fig. 6.12. Processo adaptativo da viga em balanço para o estimador de erro PW e  $\Delta P = 0,05$  MN/m. (a) Malha 2 - 669 nós e 298 elementos ( $h = 5,45\%$ ); (b) Malha 3 - 1603 nós e 736 elementos ( $h = 3,04\%$ ).

Para o incremento  $\Delta P = 0,25$  MN/m, a malha 1 proporciona um erro de 12,93% na carga  $P = 1,25$  MN/m. Contudo, na malha 2 (Fig. 6.13a), o erro na razão do trabalho plástico



não fica acima do valor especificado no primeiro passo de carga. Então, o incremento de carga é multiplicado por dois ( $\Delta P = 0,5$  MN/m), reiniciando a análise que prossegue até o último passo, com um erro de 4,81%.

A fim de diminuir ainda mais o erro na razão do trabalho plástico, na malha 2, o incremento de carga inicial é dividido por cem ( $\Delta P = 0,0025$  MN/m) e a análise é reiniciada com esta malha. Na carga  $P = 1,035$  MN/m, uma nova malha é necessária ( $h = 5,73\%$ ). Nesta nova malha (malha 3 - Fig. 6.13b), o incremento de carga é multiplicado por vinte e sete ( $\Delta P = 0,0675$  MN/m), continuando a análise até a carga  $P = 1,505$  MN/m, cujo erro é 3,33%.

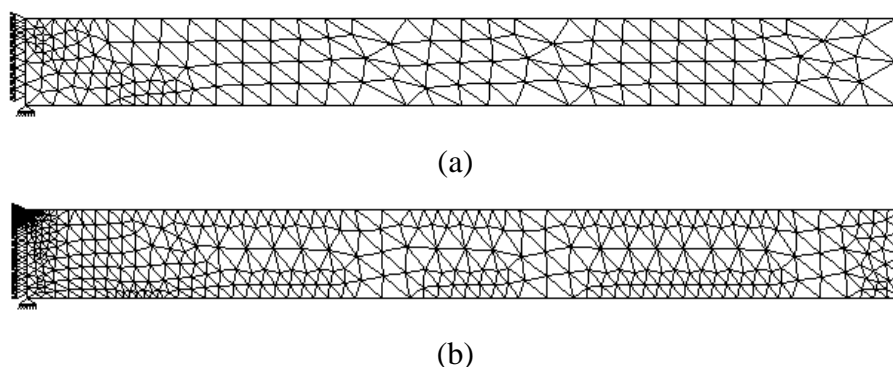


Fig. 6.13. Processo adaptativo da viga em balanço para o estimador de erro PW e  $\Delta P = 0,25$  MN/m. (a) Malha 2 - 674 nós e 301 elementos ( $h = 5,73\%$ ); (b) Malha 3 - 1636 nós e 745 elementos ( $h = 3,33\%$ ).

Os deslocamentos do ponto A, para o carregamento plástico, também são comparados com os da Resistência dos Materiais e com os obtidos da análise da malha 1, sem adaptação. A curva carga x deslocamentos é mostrada na Fig. 6.14.

Os resultados obtidos com o primeiro incremento de carga (Inc. 1) coincidem praticamente com os resultados do processo adaptativo 2 (Inc. 2) e ambos se aproximam dos resultados teóricos. No processo adaptativo 1 (Inc. 1), a curva gerada é uma reta, simplesmente porque não há valores intermediários entre o início do escoamento e a carga final. Contudo, o valor final encontrado por este processo converge para os valores obtidos pelos outros processos adaptativos. No geral, pode-se dizer que os dois estimadores de erro fornecem resultados que praticamente convergem para os teóricos, independentemente do

grau de refinamento alcançado nas malhas. As análises prosseguiram sem que nenhum problema, advindo da técnica de mapeamento das variáveis de solução, ocorresse.

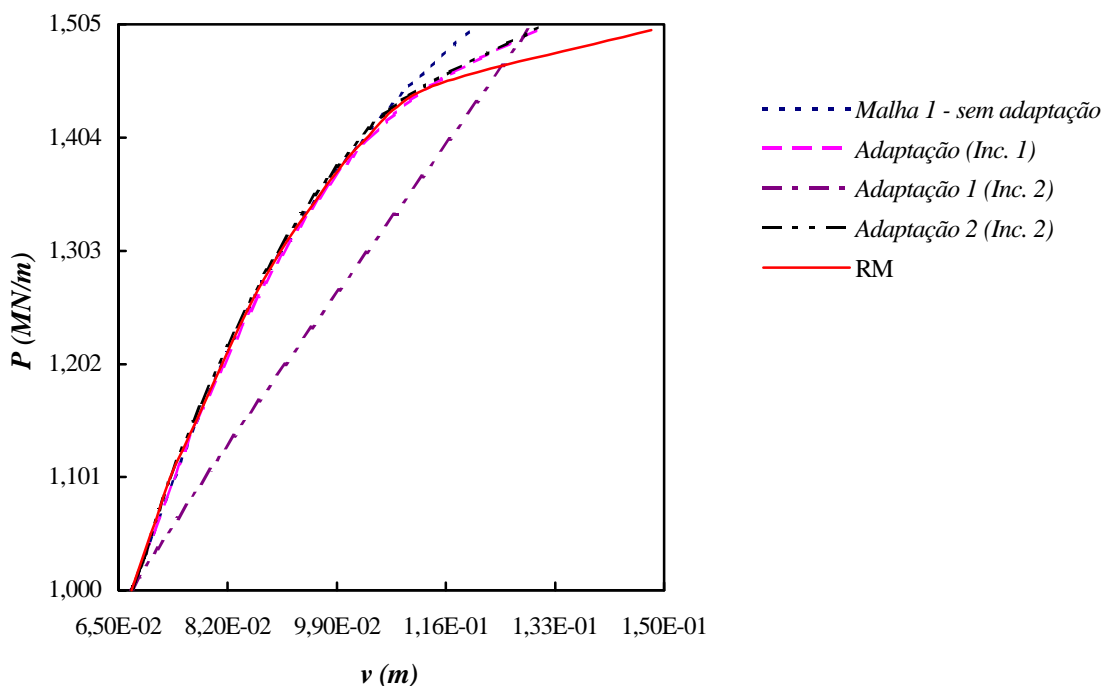


Fig. 6.14. Curva  $P \times v$  do ponto A da viga em balanço para o estimador de erro PW.

Comparando-se as malhas geradas durante os processos adaptativos, segundo os dois estimadores de erro e os dois incrementos de carga, verifica-se que o estimador ES refina muito mais o modelo do que o estimador PW. Na verdade, as malhas, obtidas pelo estimador ES, podem ser consideradas ‘quase’ iguais às obtidas pelo estimador de erro de Lee e Bathe [52], se este tivesse sido implementado. Não há diferença de uso entre estes dois estimadores, a não ser pelo valor final do erro.

A evolução do erro de discretização durante a análise, para os dois incrementos de carga e os dois estimadores de erro, estão mostrados na Fig. 6.15 e Fig. 6.16, respectivamente. O valor do erro em tensão efetiva, após o refinamento da primeira malha, se mantém constante durante o carregamento elástico, oscilando durante o carregamento plástico. Para o estimador PW, o erro só é calculado quando se inicia o escoamento ( $P = 1,0$  MN/m). Contudo, os erros obtidos por este estimador são em geral maiores do que aqueles obtidos pelo estimador ES. Na Fig. 6.15, o erro final do estimador PW é menor do que o erro do

estimador ES, mesmo para uma malha menos refinada. Os pontos de máximo, ou seja, erros maiores que 5%, indicam a geração automática da malha.

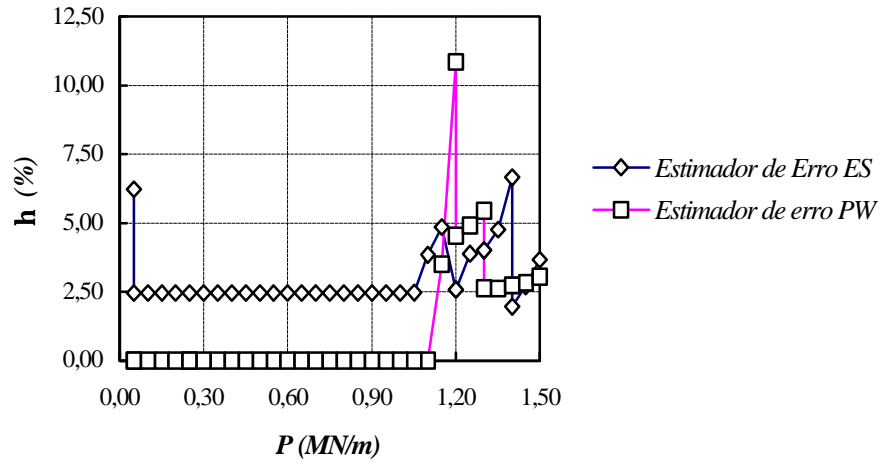


Fig. 6.15. Evolução do erro de discretização da viga em balanço para  $\Delta P = 0,05$  MN/m.

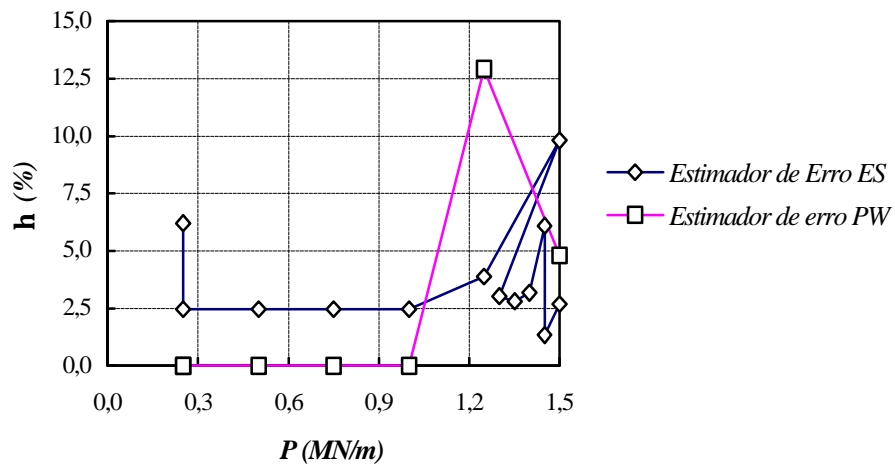


Fig. 6.16. Evolução do erro de discretização da viga em balanço para  $\Delta P = 0,25$  MN/m.

### 6.2.2. Placa com Furo

Um quarto de uma placa com furo central é descrita na Fig. 6.17a. A malha inicial, formada por 61 nós e 91 elementos T3, está na Fig. 6.17b. A placa é analisada considerando o material com encruamento isotrópico linear, no estado de tensão plana e três pontos de integração por elemento. A tolerância estabelecida para interromper a análise incremental é

10%. O incremento de carga a ser aplicado é  $\Delta P = 30,375$  kN/m, num total de dez passos de carga.

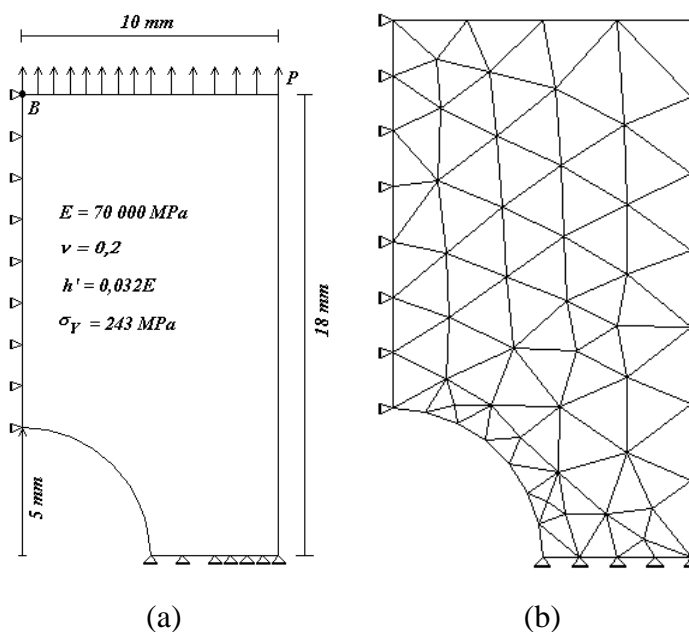


Fig. 6.17. Placa com furo. (a) Problema mecânico. (b) Malha 1 – 61 nós e 91 elementos.

(a) *Estimador de Erro ES*

O primeiro passo de carga ( $P = 30,375$  kN/m) é aplicado na malha 1, cujo erro em tensão efetiva chega a 23,24%. A distribuição da razão de erro na malha 1, neste passo, mostra que só a região em azul escuro, na Fig. 6.18a, não é refinada. Isto quer dizer, que além da região de concentração de tensões, outras regiões também são refinadas em um passo em que as tensões de von Mises (Fig. 6.18b) estão abaixo da tensão de escoamento ( $0,243$  kN/mm<sup>2</sup>), em todo o domínio.

A análise é reiniciada com a malha 2 (Fig. 6.18c), do passo inicial até a carga  $P = 151,875$  kN/m. Nesta carga, o erro em tensão efetiva é 24,64%. Da Fig. 6.18d, verifica-se que as regiões cujas cores variam do rosa ao vermelho estão totalmente plastificadas. Contudo, pela Fig. 6.18e, as regiões a serem refinadas são regiões ainda em regime elástico ( $z_E > 1$ ). Segundo mostra esta mesma figura, os elementos destas regiões devem ser divididos em torno de cem vezes o tamanho original do elemento. Sendo assim, o processo é interrompido devido, principalmente, a obtenção de uma malha altamente refinada.

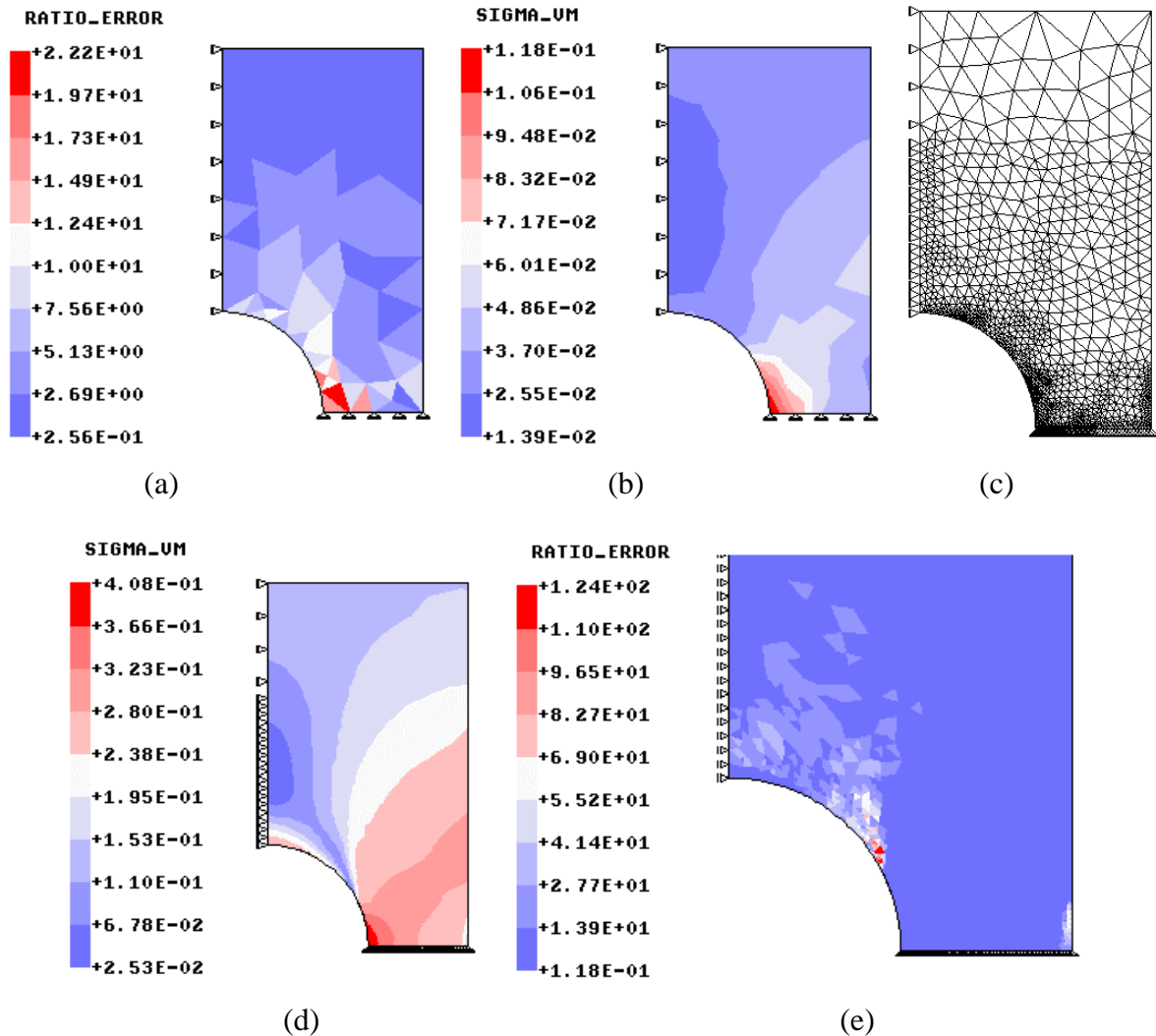


Fig. 6.18. Processo adaptativo da placa com furo usando o estimador de erro ES. (a) Distribuição da razão de erro na malha 1, na carga  $P = 30,375$  kN/m ( $h = 23,24\%$ ); (b) Distribuição das tensões de von Mises ( $\text{kN/mm}^2$ ) na malha 1, na carga  $P = 30,375$  kN/m; (c) Malha 2 – 1390 nós e 2535 elementos ( $h = 24,64\%$ ); (d) Distribuição das tensões de von Mises ( $\text{kN/mm}^2$ ) na malha 2, na carga  $P = 151,875$  kN/m; (e) Distribuição da razão de erro na malha 2, na carga  $P = 151,875$  kN/m.

(b) *Estimador de Erro PW*

O primeiro passo de carga ( $P = 30,375$  kN/m) é aplicado na malha 1. Na carga  $P = 91,125$  kN/m, o erro na razão do trabalho plástico chega a 27,45%. Pela distribuição da razão de erro (Fig. 6.19a), somente a região de concentração de tensões é refinada, ou seja, a região onde a deformação plástica (Fig. 6.19b) ocorre.

O modelo refinado (malha 2) é mostrado na Fig. 6.19c. A análise continua com este modelo até que na carga  $P = 151,875$  kN/m, o erro na razão do trabalho plástico chega a 10,03%. Neste caso, a região em azul escuro na Fig. 6.19d está totalmente em regime elástico. Então, esta região é desrefinada enquanto as regiões definidas pelas outras cores são refinadas. As regiões desrefinadas correspondem ao azul escuro da Fig. 6.19e. A nova malha, gerada a partir da razão de erro, é mostrada na Fig. 6.19f.

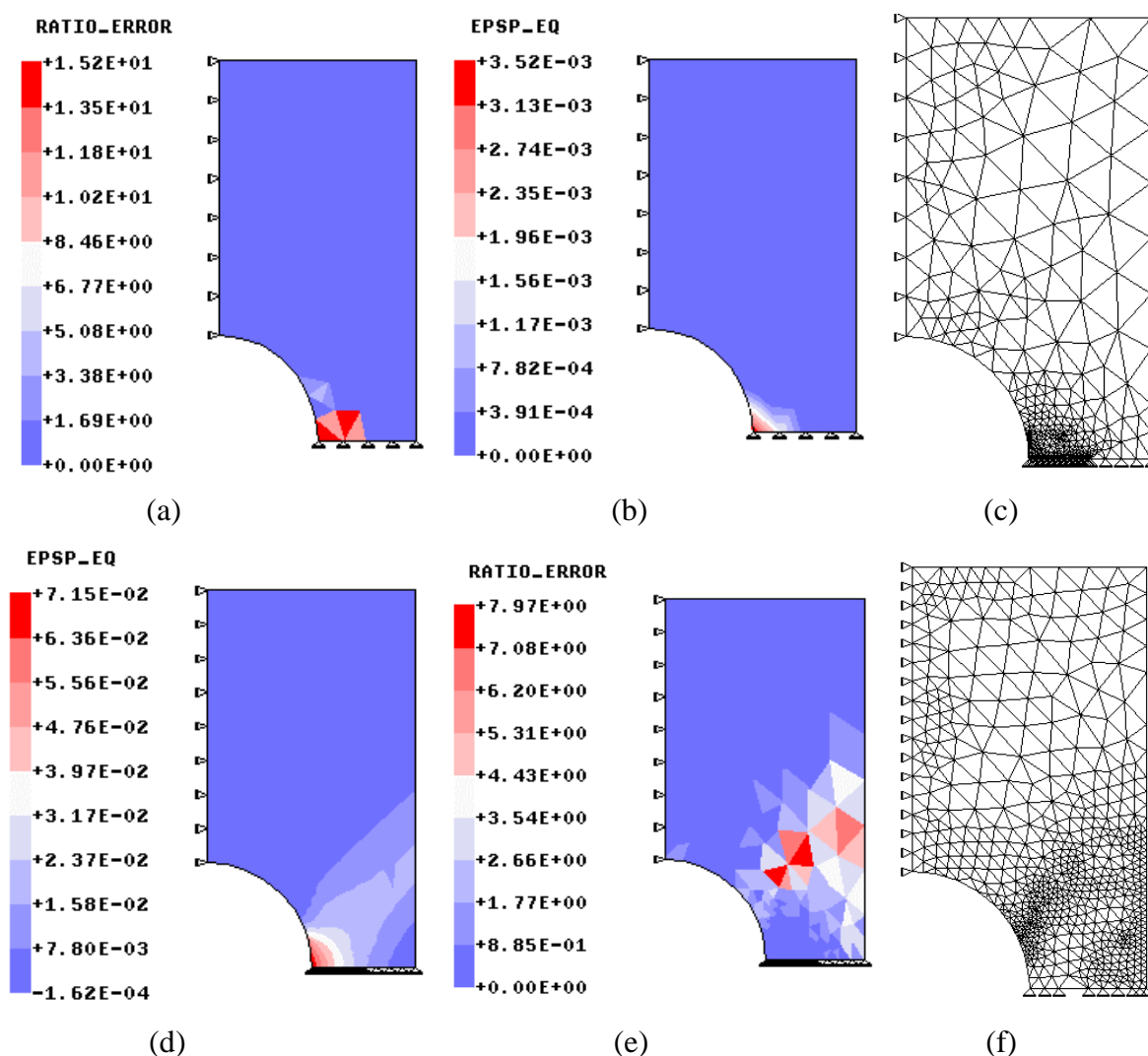


Fig. 6.19. Processo adaptativo da placa com furo usando o estimador de erro PW. (a) Distribuição da razão de erro na malha 1, na carga  $P = 91,125$  kN/m ( $h = 27,45\%$ ); (b) Distribuição da deformação plástica equivalente na malha 1, na carga  $P = 91,125$  kN/m; (c) Malha 2 – 400 nós e 710 elementos ( $h = 10,03\%$ ); (d) Distribuição da deformação plástica equivalente na malha 2, na carga  $P = 151,875$  kN/m; (e) Distribuição da razão de erro na malha 2, na carga  $P = 151,875$  kN/m; (f) Malha 3 – 628 nós e 1162 elementos ( $h = 7,31\%$ ).

A análise continua até o final da carga ( $P = 303,75$  kN/m), com a malha 3 e um novo incremento de carga ( $\Delta P = 6,075$  kN/m), cujo erro final na razão do trabalho plástico é 7,31%.

Pelo exposto, verifica-se que o estimador de erro ES não só refina as regiões que estão em regime plástico, mas também as que estão em regime elástico, refinando, portanto, excessivamente o modelo. Já o estimador de erro PW localiza exatamente as regiões de deformação, refinando-as de acordo com a distribuição da razão de erro.

### 6.2.3. Console

O terceiro exemplo é um console, cujas dimensões e descrição do material são mostradas na Fig. 6.20a. O problema é analisado em estado de tensão plana para um incremento de carga inicial  $\Delta P = 15,1875$  kN/m. A adaptação é realizada para a malha inicial da Fig. 6.20b, composta de 397 nós e 170 elementos T6. A tolerância especificada é 5%. Só o estimador de erro PW é usado neste exemplo.

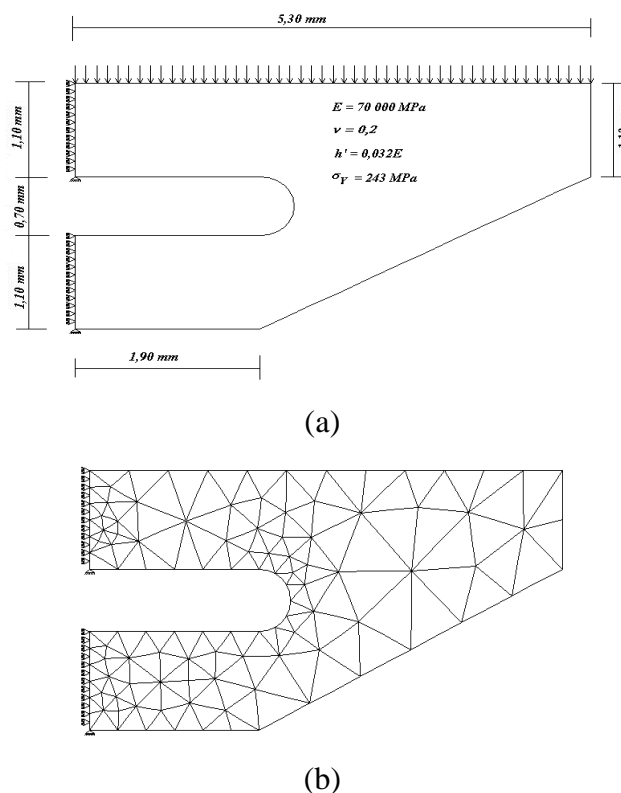


Fig. 6.20. Console. (a) Problema mecânico; (b) Malha inicial – 397 nós e 170 elementos ( $h = 14,62\%$ ).

A análise da malha inicial é interrompida na carga  $P = 60,75$  kN/m, com um erro na razão do trabalho plástico igual a 14,62%. A Fig. 6.21b mostra a malha 2, que é gerada a partir da distribuição da razão de erro (Fig. 6.21a). Esta malha reinicia a análise com um novo incremento de carga ( $\Delta P = 63,7875$  kN/m), a qual é terminada com um erro de 4,00 %.

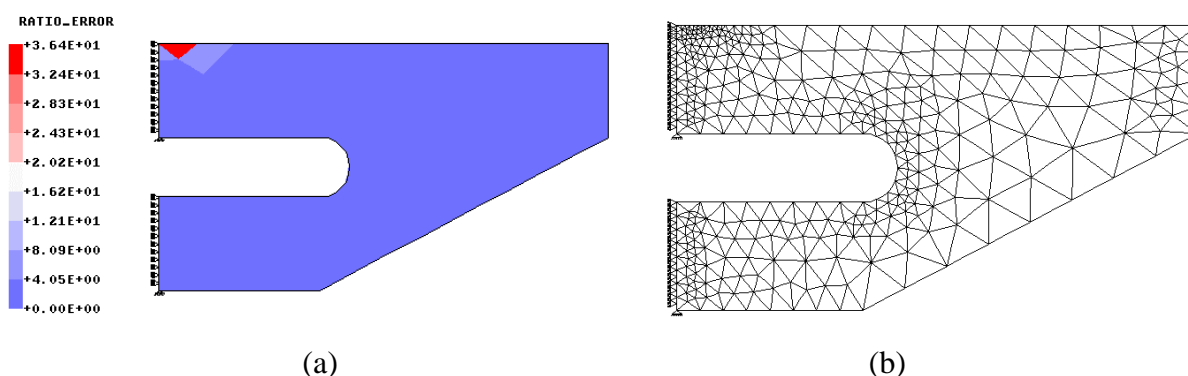


Fig. 6.21. Processo adaptativo para o console, com estimador de erro PW. (a) Distribuição da razão de erro; (b) Malha 2 – 1362 nós e 635 elementos ( $h = 4,00\%$ ).

Este exemplo foi utilizado por Gallimard *et al.* [34]. Eles iniciaram a análise com uma malha de 273 elementos triangulares T6 e 618 nós. Obtiveram uma malha final otimizada de 448 elementos e um erro final, baseado na relação constitutiva de Drucker-Prager, de 4,7%. Portanto, este valor está próximo do obtido neste trabalho, para uma malha bem mais otimizada.

#### 6.2.4. Exemplo 5.2.1

Este exemplo consta de três modelos elastoplásticos com trincas (ver capítulo 5). Os modelos A e B são analisados empregando-se os dois diferentes tipos de rosetas (T6 e Q8C), enquanto que o modelo C é analisado somente para a roseta de elementos Q8C. A ordem de integração para estes elementos é  $3 \times 3$  e para os elementos T6, de roseta ou não, utiliza-se 3 pontos de integração.

O modelo A tem como malha inicial aquela mostrada na Fig. 5.5a, que é igual para as duas rosetas, mudando apenas o número de nós. O incremento de carga inicial é 0,1 e a tolerância de convergência da malha é 10%.



A análise da primeira malha, com a roseta de elementos Q8C, viola o critério de erro no terceiro passo de carga ( $\mathbf{s}/\mathbf{s}_Y = 0,3$ ) com um erro na razão do trabalho plástico de 54,44%. A nova malha gerada é formada por 2148 nós e 1014 elementos (Fig. 6.22a). A análise é reiniciada com esta malha tomando os resultados do passo  $\mathbf{s}/\mathbf{s}_Y = 0,2$  como valores iniciais, os quais são interpolados da malha antiga. As tensões, contudo, não convergem no primeiro passo. O incremento de carga é então dividido por mil mas, mesmo assim, não ocorre a convergência das tensões.

Visto que o material deste modelo é plástico-perfeito, um valor de  $0,1E$  é utilizado como encruamento e uma nova análise é considerada. O erro relativo na razão do trabalho plástico, na malha inicial, é 56,36% no terceiro passo. A análise da nova malha, formada por 2236 nós e 1058 elementos (Fig. 6.22b), também não converge no primeiro passo de carga, mesmo para um incremento de carga muito pequeno.

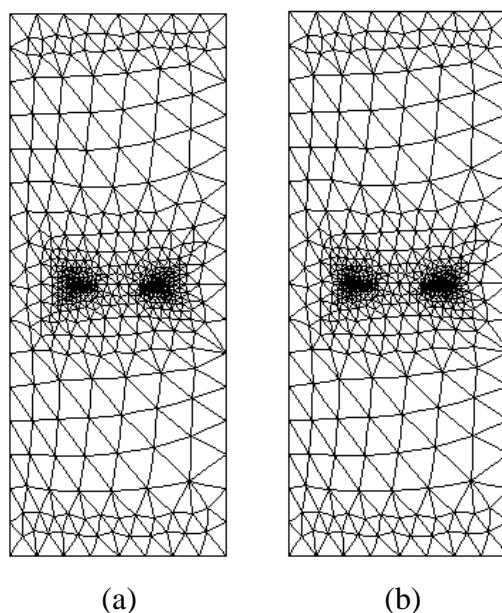


Fig. 6.22. Processo adaptativo do Exemplo 5.2.1 – Modelo A (roseta Q8C -  $\mathbf{h}^* = 10\%$ ). (a) Malha refinada (2148 nós e 1014 elementos), material sem encruamento; (b) Malha refinada (2236 nós e 1058 elementos), material com encruamento.

Da Fig. 6.22a e da Fig. 6.22b, verifica-se que a diferença entre as malhas é muito pequena e que o refinamento do modelo se dá apenas na região em que ocorre o escoamento, ou seja, em torno das pontas da trinca. Com isso, acredita-se que a não convergência das tensões, nas duas análises, deve-se a existência de um certo número de elementos totalmente

plastificados nesta região. Este mesmo comportamento é observado quando se refaz as duas análises com controle de deslocamentos. Neste caso, controla-se o deslocamento do nó de aplicação da carga.

Banthia [10], em seu trabalho, afirma que os elementos Q8 colapsados não requerem uma malha muito fina para modelar a singularidade das deformações, pois estes são capazes de representá-la perfeitamente. Ele afirma ainda que o escoamento dos elementos que envolvem a ponta da trinca causa grandes deslocamentos do nó da ponta da trinca, impedindo assim a continuação da análise. Baseado nisto, a tolerância, estabelecida para determinar a interrupção da análise incremental, é aumentada para 35% a fim de que estes elementos não sejam tão refinados.

O erro na razão do trabalho plástico, na malha inicial, é agora 54,44% no terceiro passo de carga. A nova malha (Fig. 6.23a) continua a análise com um novo incremento de carga,  $s/s_Y = 0,235$ , em um total de dois passos e um erro final de 15,68%. Os valores da integral  $J$  estão na Fig. 6.23b. O processo adaptativo, neste caso, faz com que os valores de  $J$  se afastem daqueles obtidos anteriormente, na fase de carregamento plástico. Como se pode ver na Fig. 6.24, as deformações  $e_{yy}$ , em alguns elementos da roseta, são finitas, ou seja, estes elementos estão dentro da zona de processamento. Com isso, os valores de  $J$  são majorados, pois o domínio de integração utilizado no método IDE é definido por estes elementos.

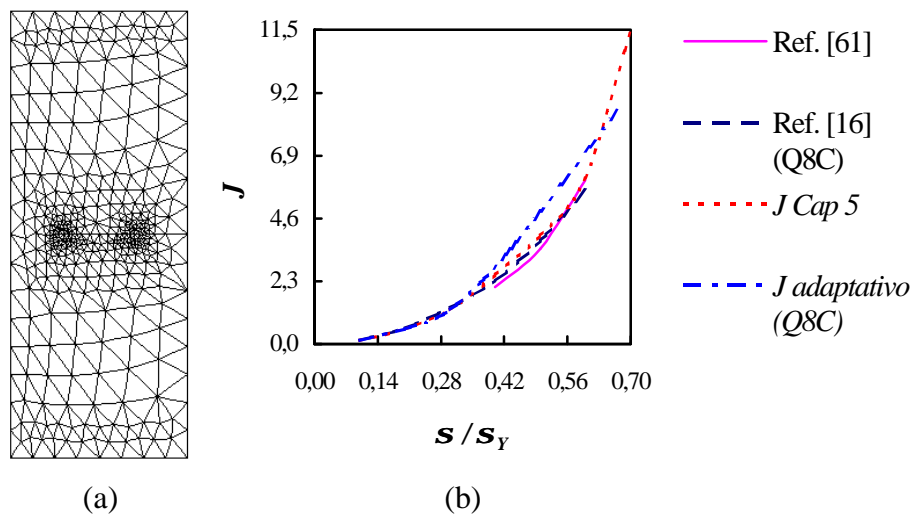


Fig. 6.23. Processo adaptativo do Exemplo 5.2.1 – Modelo A (roseta Q8C -  $h^* = 35\%$ ). (a) Malha refinada (1632 nós e 764 elementos), material sem encruamento; (b) Integral  $J$ .

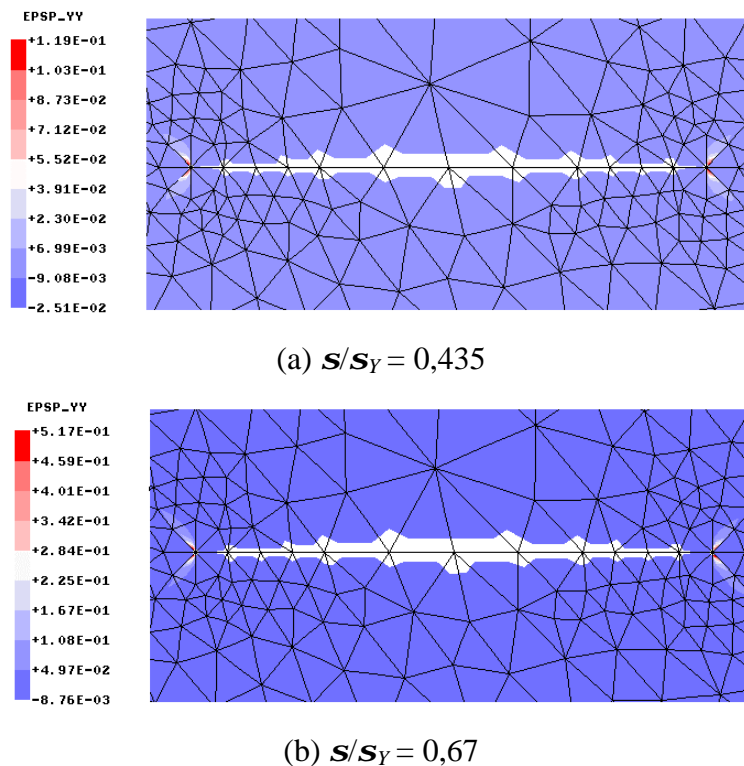


Fig. 6.24. Detalhe da distribuição das deformações  $\epsilon_{yy}$ , em torno das pontas da trinca para a malha da Fig. 6.23a.

Para a roseta de elementos T6, a análise da malha inicial é interrompida no quinto passo de carga ( $s/s_Y = 0,5$ ) com um erro na razão do trabalho plástico de 45,29%. A nova malha, gerada a partir da distribuição da razão de erro, é formada por 1804 nós e 864 elementos (Fig. 6.25a). A análise é reiniciada, nesta nova malha, com um novo incremento de carga ( $s/s_Y = 0,295$ ). Um único passo é executado, cujo erro é 9,87%. A curva da integral  $J$  é mostrada na Fig. 6.25b. A curva obtida neste processo tende a aproximar-se da curva obtida pela Ref. [61], afastando-se das curvas obtidas pela análise do capítulo 5 e pela Ref. [16]. Portanto, pode-se considerar a análise adaptativa satisfatória.

A malha final obtida na primeira análise auto-adaptativa (Q8C - Fig. 6.23a) é muito mais refinada na ponta da trinca do que a malha obtida na segunda análise (T6 - Fig. 6.25a). Isto se deve, principalmente, ao fato de que a roseta de elementos T6 não representa, exatamente, a singularidade da ponta da trinca necessitando, para isso, de elementos bem pequenos.

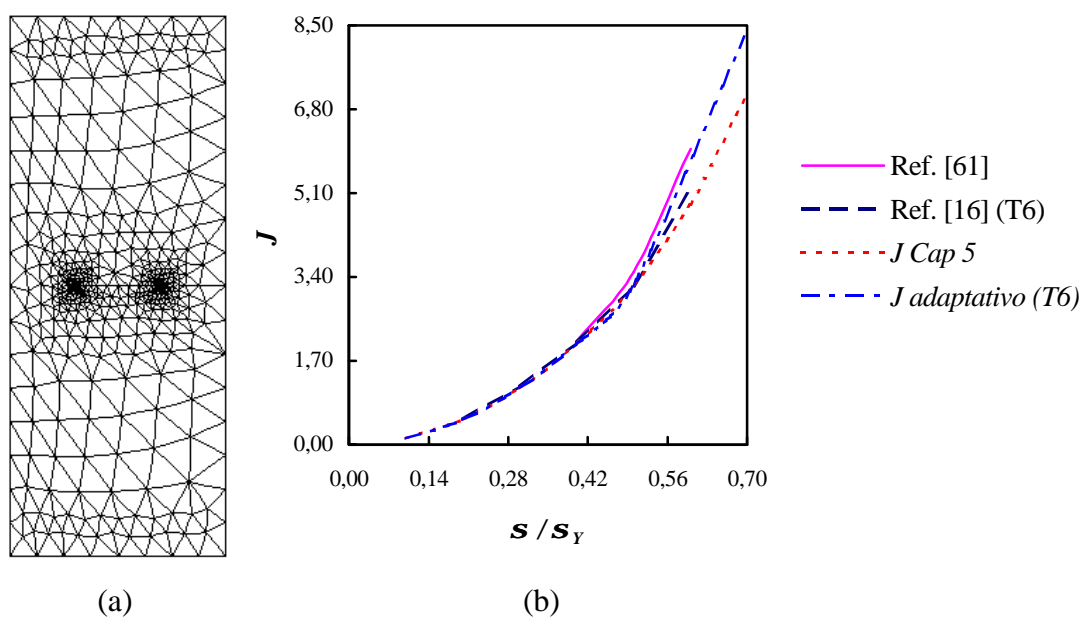


Fig. 6.25. Processo adaptativo do Exemplo 5.2.1 – Modelo A (roseta T6). (a) Malha refinada (1804 nós e 864 elementos) -  $h = 9,87\%$ , material sem encruamento; (b) Integral  $J$ .

O modelo B é analisado para a malha inicial da Fig. 6.26a, com um incremento de carga inicial igual a 7716 kN/m. O erro de discretização é 20% considerando que os elementos T6 formam as rosetas nas pontas da trinca, e 30% considerando rosetas de elementos Q8C. A malha inicial é igual para os dois casos diferindo apenas no número de nós.

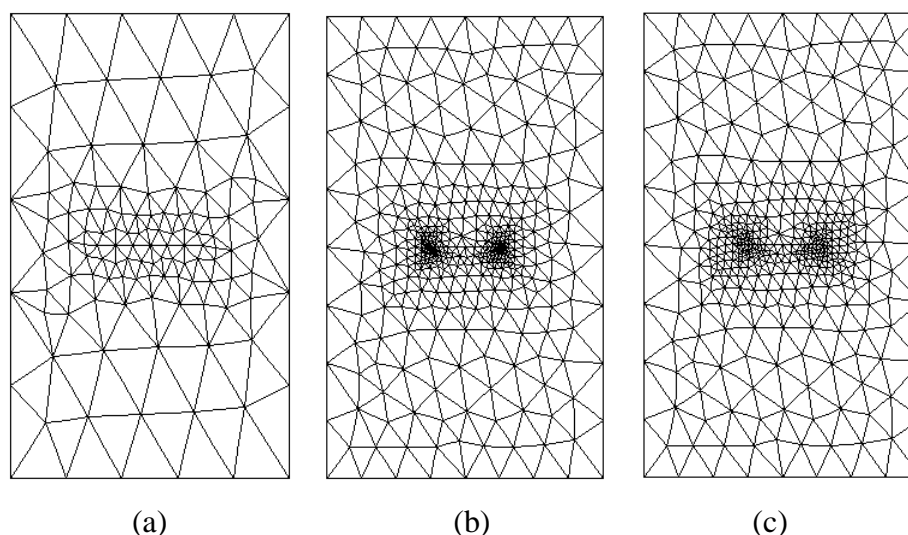


Fig. 6.26. Processo adaptativo do Exemplo 5.2.1 – Modelo B. (a) Malha inicial (216 elementos); (b) Malha refinada (roseta T6 - 1688 nós e 814 elementos) -  $h = 10,4\%$ ; (c) Malha refinada (roseta Q8C - 1628 nós e 770 elementos) -  $h = 7,21\%$ .

No primeiro caso (T6), somente um passo adaptativo faz com que o erro na razão do trabalho plástico de 44,06%, na malha inicial e no quinto passo de carga ( $\Delta P = 38580$  kN/m), caia para 10,4% na malha refinada (Fig. 6.26b). A análise desta malha é feita para um incremento de carga igual a 9877 kN/m, em um total de três passos. No segundo caso (Q8C), a malha inicial obtém um erro na razão do trabalho plástico de 55,96 % no terceiro passo de carga ( $\Delta P = 23148$  kN/m). A análise da malha refinada (Fig. 6.26c) obtém um erro, no último passo de carga ( $\Delta P = 77160$  kN/m), de 7,21%.

Os valores da integral  $J$ , para as duas análises, são comparados com os resultados obtidos pelo EPRI [1], com os da análise executada no capítulo 5 e com os da análise das malhas iniciais (T6 e Q8C), sem adaptação. Estes resultados são mostrados na Fig. 6.27. A curva obtida para a roseta Q8C apresenta valores maiores do que os da curva obtida pelo EPRI, mas ainda muito próxima da curva obtida no capítulo 5. Já os valores obtidos pela roseta T6 estão abaixo da curva EPRI, mas ainda com valores concordantes. Pode-se ainda dizer que os resultados de ambas as análises adaptativas são melhores do que os resultados sem adaptação.

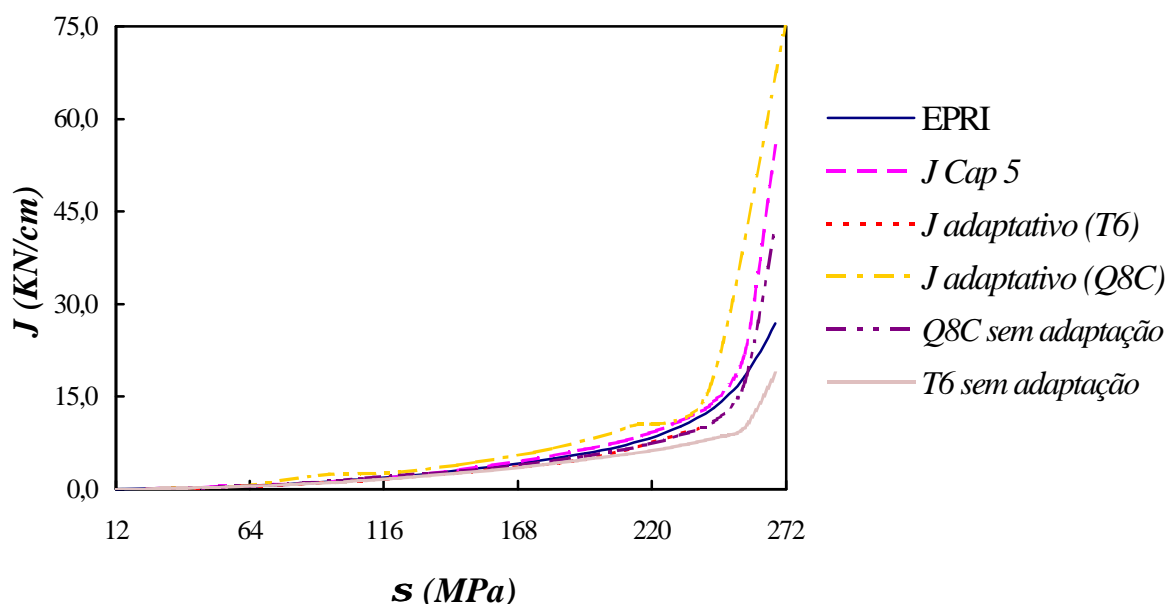


Fig. 6.27. Curva da integral  $J$  do Exemplo 5.2.1 – Modelo B.

O modelo C, como já foi dito, é analisado apenas para a roseta de elementos Q8C e os resultados comparados com aqueles obtidos no capítulo 5. A malha inicial (Fig. 6.28a) é

formada por 492 nós e 216 elementos, com um erro na razão do trabalho plástico estabelecido em 40% e um incremento de carga inicial de 15432 kN/m. O erro obtido nesta malha é 65,3 % no segundo passo de carga ( $\Delta P = 30864$  kN/m). A análise continua com a nova malha (Fig. 6.28b), num total de cinco passos e um erro final de 19,6%. Os valores de  $J$  são mostrados na Fig. 6.29.

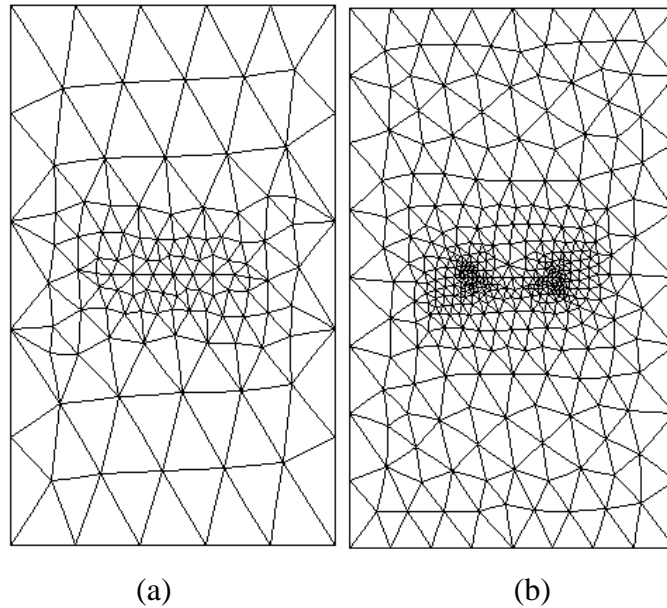


Fig. 6.28. Processo adaptativo do Exemplo 5.2.1 – Modelo C. (a) Malha inicial (492 nós e 216 elementos) -  $h = 65,3\%$ ; (b) Malha refinada (1604 nós e 758 elementos) -  $h = 19,6\%$ .

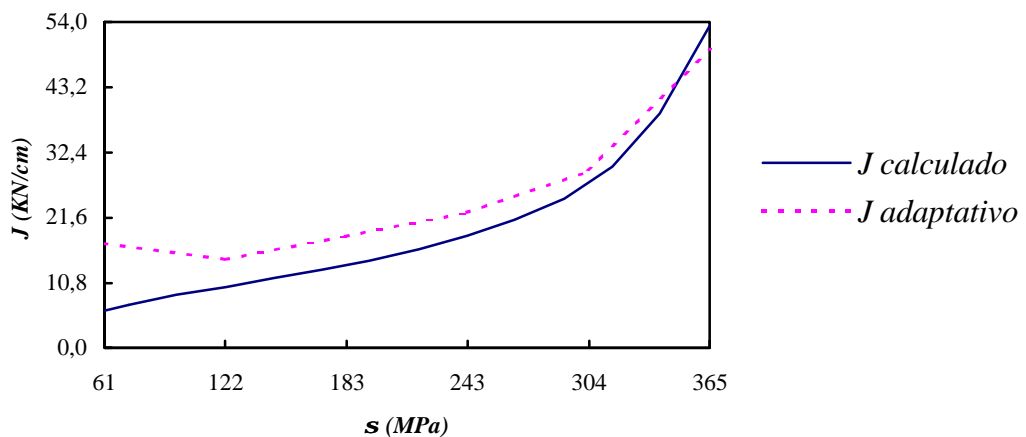


Fig. 6.29. Curva da integral  $J$  do Exemplo 5.2.1 – Modelo C.

### 6.2.5. Exemplo 5.2.2

Este exemplo é analisado utilizando os dois estimadores de erro, ES e PW. Os dois processos são executados para os dois tipos de rosetas, cujo incremento de carga inicial é 0,1.

#### (a) Estimador de Erro PW

Neste processo, a malha inicial (Fig. 6.30a) é a mesma para as duas análises, diferindo apenas no número de nós, 252 para o T6 e 268 para o Q8C. O erro especificado para interromper a análise incremental é 20%, para a roseta de elementos T6, e 45% para a roseta de elementos Q8C.

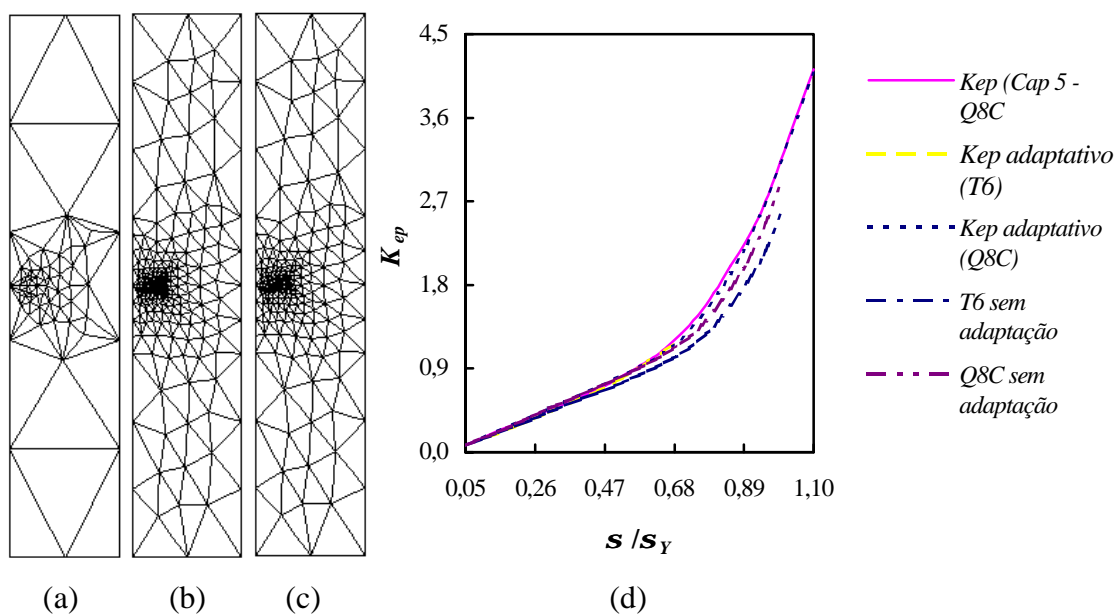


Fig. 6.30. Processo adaptativo para o Exemplo 5.2.2 – Estimador PW. (a) Malha inicial (115 elementos); (b) Malha refinada (roseta T6 - 1233 nós e 590 elementos) -  $h = 2,62\%$ ; (c) Malha refinada (roseta Q8C - 945 nós e 442 elementos) -  $h = 7,71\%$ ; (d) Fator de intensidade de tensão elastoplástica normalizado.

O processo adaptativo, no primeiro caso (T6), é iniciado alcançando um erro na razão do trabalho plástico de 53,28% no quarto passo de carga. O reinício da análise é feito com a malha da Fig. 6.30b, com um incremento de carga igual a 0,2, num total de 2 passos. O erro final nesta malha é 2,62%. No segundo caso (Q8C), o erro na razão do trabalho plástico de

68,96% acontece no segundo incremento de carga. A análise é reiniciada com a nova malha (Fig. 6.30c), com um incremento de 0,2, num total de cinco passos. O erro final é 7,71%.

O fator de intensidade de tensão elastoplástico, normalizado segundo as equações (5.11) e (5.12), é mostrado na Fig. 6.30d para as duas rosetas e comparados com os resultados obtidos da análise realizada no capítulo 5 e com os da malha inicial, sem adaptação. O processo adaptativo fez com que os resultados convergissem, exatamente, para a curva obtida anteriormente, contudo bem afastado dos resultados das análises das malhas iniciais, sem adaptação.

#### (b) *Estimador de Erro ES*

Neste caso, a malha inicial é a mesma da Fig. 6.30a e o erro em tensão efetiva, definido como critério de parada da análise incremental, é 40%, para os dois tipos de rosetas. Para a roseta Q8C, o erro na malha inicial é 40,79% e se dá no primeiro passo de carga ( $\mathbf{s}/\mathbf{s}_Y = 0,1$ ). A análise é reiniciada com a nova malha gerada (Fig. 6.31a), cujo erro em tensão efetiva é 45,34% no terceiro passo de carga ( $\mathbf{s}/\mathbf{s}_Y = 0,3$ ). A segunda malha refinada, mostrada na Fig. 6.31b, continua a análise. Contudo, não se obtém convergência do erro em tensão efetiva, mesmo aumentando, ou diminuindo, o tamanho do passo de carga. Quando a roseta T6 é usada, o erro na primeira malha é 43,57%, no primeiro passo de carga. Contudo, quando a segunda malha (Fig. 6.31c) é gerada e analisada, o erro em tensão efetiva, neste mesmo passo, aumenta para 44,81%, que aumenta para 58,97% na terceira malha (Fig. 6.31d). Se uma nova análise é realizada para um novo de incremento de carga, seja maior ou menor que o valor inicial do incremento, o erro em tensão efetiva continua não convergindo tanto na segunda quanto na terceira malha. Acredita-se que este requerimento de refinamento indefinido seja porque os elementos que envolvem a ponta da trinca tornam-se cada vez menores, capturando, portanto, a zona de processamento. Com isso, as tensões nestes elementos são cada vez maiores fazendo com que o erro em tensão efetiva seja relativamente grande, não convergindo. Lee e Bathe [52] recomendam que regiões de singularidades sejam identificadas *a priori* e retiradas da análise, o que não é feito neste trabalho para nenhum dos estimadores de erro apresentados.



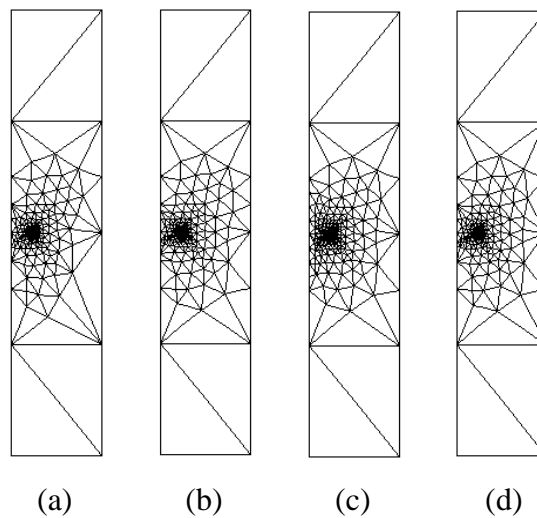


Fig. 6.31. Processo adaptativo para o Exemplo 5.2.2 – Estimador ES. (a) Malha refinada 1 (roseta Q8C - 854 nós e 401 elementos); (b) Malha refinada 2 (roseta Q8C - 1625 nós e 774 elementos); (c) Malha refinada 1 (roseta T6 - 1053 nós e 506 elementos); (d) Malha refinada 2 (roseta T6 - 1604 nós e 771 elementos).

Comparando-se as malhas obtidas nos dois processos, verifica-se que o estimador de erro PW obtém malhas bem mais uniformes do que as obtidas pelo estimador ES. Ambos, contudo, refinam apenas a região adjacente à ponta da trinca, como esperado.

### 6.2.6. Exemplo 5.2.3

Este exemplo é analisado considerando os dois tipos de rosetas, para um incremento de carga inicial igual a  $\mathbf{s}/\mathbf{s}_Y = 0,1$ . A tolerância especificada é 30%, para a roseta de elementos T6, e 50%, para a roseta de elementos Q8C. A malha inicial (Fig. 6.32a) é igual para os dois processos, sendo que no primeiro tem-se 570 nós e no segundo, 602 nós, num total de 266 elementos.

No primeiro processo auto-adaptativo (T6), a análise é interrompida no terceiro passo de carga ( $\mathbf{s}/\mathbf{s}_Y = 0,3$ ) com um erro na razão do trabalho plástico de 56,5%. A malha refinada (Fig. 6.32b) é analisada considerando um novo incremento de carga ( $\mathbf{s}/\mathbf{s}_Y = 0,2$ ), num total de 4 passos. Os valores iniciais da análise são os resultados do segundo passo de carga da primeira malha extrapolados para a nova malha. O erro final da nova malha é 4,73%, observando-se que o refinamento se dá apenas em volta das pontas das trincas. No segundo processo (Q8C), a análise da primeira malha é interrompida no segundo passo ( $\mathbf{s}/\mathbf{s}_Y = 0,2$ )

com um erro na razão do trabalho plástico de 60,53%. A segunda malha (Fig. 6.32c) continua a análise com o mesmo incremento de carga, num total de 10 passos e um erro final de 5,50%. Os valores da integral  $J$  são comparados com aqueles obtidos no capítulo 5 e com os resultados da análise da malha inicial, sem adaptação. Estes resultados são normalizados segundo a Eq. (5.13) e mostrados na Fig. 6.33. Verifica-se que todas as curvas são praticamente coincidentes, ou seja, a malha inicial já proporciona bons resultados não necessitando do processo adaptativo.

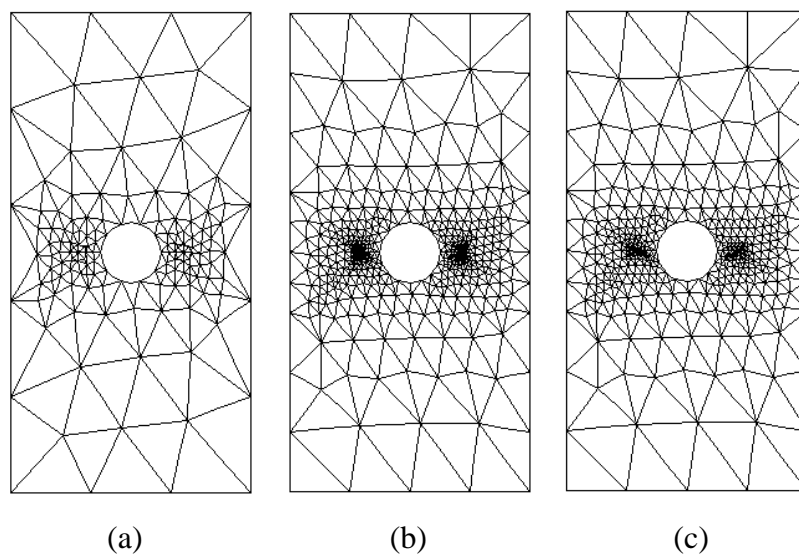


Fig. 6.32. Processo adaptativo para o Exemplo 5.2.3. (a) Malha inicial (266 elementos); (b) Malha refinada (roseta T6 - 2004 nós e 966 elementos) -  $\mathbf{h} = 4,73\%$ ; (c) Malha refinada (roseta Q8C - 1656 nós e 778 elementos) -  $\mathbf{h} = 5,50\%$ .

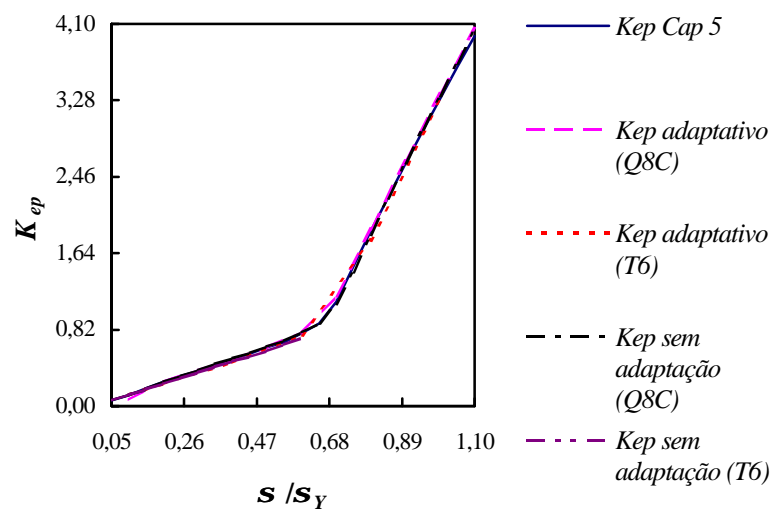


Fig. 6.33. Fator de intensidade de tensão elastoplástico normalizado do Exemplo 5.2.3.

O detalhe do arredondamento da trinca é mostrado na Fig. 6.34, tanto para a roseta de elementos T6 como para a de elementos Q8C. Na primeira, o alto refinamento na ponta da trinca sugere um ligeiro arredondamento da mesma, enquanto que na segunda ocorre um arredondamento próximo a ponta da trinca.

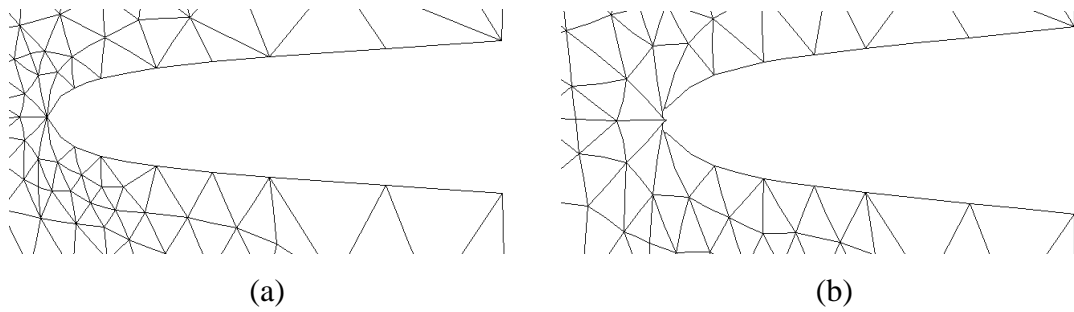


Fig. 6.34. Detalhes do arredondamento da ponta da trinca. (a) Roseta T6 - malha refinada; (b) Roseta Q8C - malha refinada.

## CAPÍTULO 7

### CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho propõe um sistema auto-adaptativo para análise de elementos finitos de problemas de fraturamento linear e não linear, bidimensional, com modo misto de carregamento e pressão uniforme nas faces da trinca. O objetivo deste sistema é assegurar que as tensões do modelo sejam calculadas com um erro mínimo de aproximação, capturando as regiões de concentração de tensões (singularidade) e de escoamento.

O procedimento desenvolvido inclui um gerador de malha, uma técnica de transferência das variáveis de solução entre as diversas malhas do processo adaptativo e três estimadores de erro baseados em resultados de tensão.

A geração de novas malhas é feita quando uma trinca é introduzida, ou propagada, no modelo e quando do refinamento da malha no processo adaptativo. A princípio, a malha é gerada somente para elementos isoparamétricos T6, apesar de estarem disponíveis no sistema os elementos isoparamétricos quadrilaterais. Rosetas de elementos especiais (QP45, QP40, QP30 e Q8C) podem ser inseridas em torno das pontas das trincas. O cálculo do tamanho característico dos elementos da roseta, na estratégia de refinamento, pode ser feito considerando a ordem do polinômio da função de interpolação dos elementos ou a intensidade da singularidade.

O estimador de erro para análise adaptativa de problemas de elementos finitos elásticos lineares [20] é baseado na norma de energia [90], enquanto que para análise de problemas plásticos em geral os estimadores são baseados em tensão efetiva [52] ou na razão do trabalho plástico [64]. Estes estimadores são aplicados, segundo o seu caso específico, a todos os elementos da malha indistintamente.

Os parâmetros de fratura são calculados utilizando três métodos diferentes, o método de correlação dos deslocamentos [77], o método de fechamento da trinca modificado [66] e o método da integral de domínio equivalente [59]. Os três métodos são utilizados para calcular os fatores de intensidade de tensão, enquanto que a integral  $J$ , como parâmetro de fraturamento não linear, é calculada somente pelo terceiro método.

## 7.1. CONCLUSÕES

Um dos objetivos deste trabalho é assegurar que os parâmetros de fratura sejam calculados eficientemente, independentemente do tipo de análise que esteja sendo efetuada. Com os exemplos do capítulo 5, procura-se avaliar estes métodos e realizar um estudo qualitativo das diversas rosetas para representação da singularidade das tensões na ponta da trinca.

Dos exemplos analisados, conclui-se que os três métodos de cálculo implementados apresentam resultados consistentes para os fatores de intensidade de tensão, inclusive para os diferentes níveis de carregamento de modo misto. Os resultados dos métodos FTM e IDE podem ser considerados exatos, o que implica que o uso da fórmula simplificada e dos campos associados, respectivamente, torna-os bem mais confiáveis. Mesmo o método TCD, considerado por muitos autores um método de baixa precisão, apresentou margens de erro satisfatórias (inferiores a 5%, para o fator de intensidade de tensão em que o carregamento é dominante, e menores do que 10% no carregamento não dominante).

As rosetas de elementos QP45, QP40 e QP30 apresentam ótimos resultados, com margens de erro inferiores a 2%, não havendo diferença entre o uso das rosetas QP40 e QP30. A alta precisão destes resultados era esperada principalmente porque, por definição, cada um destes elementos apresenta singularidade tanto em seu interior, como em seu contorno. Contudo, a roseta formada pelos elementos T6 é a que apresenta maiores margens de erro em suas respostas, para todos os métodos. Porém, estes erros ainda são inferiores a 5%, o que é perfeitamente aceitável para problemas de engenharia.

Para análise de problemas elastoplásticos com fraturamento, os resultados da integral  $J$ , calculados pelo método IDE sem considerar os campos associados, apresentam uma boa concordância com aqueles encontrados na literatura. A roseta de elementos Q8C em torno das pontas das trincas tem um melhor comportamento do que a roseta de elementos T6, além de permitir o arredondamento da ponta da trinca.

A principal vantagem de qualquer processo adaptativo é iniciar a análise de um modelo, trincado ou não, com uma malha inicial grosseira e, através dos vários passos adaptativos, segundo um critério de erro estabelecido, obter automaticamente uma malha final ‘ótima’ cujas soluções aproximam-se dos valores exatos. Os exemplos apresentados neste trabalho mostram a eficiência do processo aqui proposto em refinar e desrefinar o domínio, ressaltando-se, principalmente, sua capacidade em localizar as regiões de concentração de tensões (singularidade), as quais não são identificadas *a priori*, bem como as de escoamento. Contudo, algumas conclusões a seguir podem ser observadas.

O processo adaptativo proposto para fraturamento linear demonstrou capturar eficientemente a singularidade da trinca, mesmo quando as rosetas de elementos singulares são utilizadas na ponta da trinca. Estes elementos não têm sido considerados, nestes casos, por outros autores [2, 27, 54, 92]. A afirmativa de Liebowitz *et al.* [54] de que esta singularidade não interfere no processo, quando a malha é dita ‘ótima’, é comprovada. Neste trabalho, esta assertiva é estendida aos elementos *quarter-points* (QP45, QP40 e QP30). Contudo, as malhas finais, obtidas quando a análise considera a intensidade da singularidade ( $I$ ), apresentam um maior grau de refinamento do que as malhas obtidas considerando  $p$ . Com isso, a primeira análise necessita de menos iterações no processo adaptativo.

O erro final na norma de energia, obtido considerando  $I$ , é bem mais reduzido do que o obtido quando  $p$  é considerado. Apesar disso, os valores calculados para os parâmetros de fraturamento deste último são bem melhores do que os do primeiro. O gerador de malha, no entanto, não gera elementos bem formados na ponta da trinca, acarretando, com isso, problemas numéricos na análise.

O método FTM não necessita de malhas tão refinadas para obter os fatores de intensidade de tensão, principalmente, se as rosetas singulares estão presentes, confirmando as observações feitas por Raju [66].

No processo adaptativo elastoplástico, o estimador de erro na razão do trabalho plástico apresenta um melhor desempenho do que o estimador em tensão efetiva. Este último, além de refinar as regiões plastificadas, também refina as regiões que ainda estão em regime elástico. As malhas finais obtidas pelo segundo estimador (ES) são mais refinadas do que as obtidas pelo primeiro (PW). Contudo, a diferença entre as malhas não interfere na qualidade dos resultados obtidos pelo estimador PW, convergindo ambos para os resultados analíticos. Outro fator que não interfere nos resultados é o valor do incremento de carga utilizado.

Não é aconselhável a utilização do estimador em tensão efetiva para a análise adaptativa dos problemas de fraturamento. Este estimador pode requerer, um refinamento indefinido na ponta da trinca, independentemente do tipo do elemento que forma a roseta. Na verdade, Lee e Bathe [52] recomendam que os elementos com singularidade devem ser retirados da análise, principalmente, porque estes podem apresentar erros relativamente altos. As malhas obtidas por este estimador não são tão uniformes quanto as malhas obtidas por PW.

O valor da tolerância, necessária para interromper a análise incremental de problemas com fraturamento, interfere no processo auto-adaptativo, principalmente quando a roseta de elementos colapsados está presente. Quando o valor é muito pequeno, estes elementos tornam-se excessivamente pequenos e, portanto, totalmente plastificados (deformações finitas), impedindo assim a convergência da análise das tensões. Sugere-se então que este valor seja fixado entre 20% e 50%, independente do tipo de estimador de erro utilizado.

O processo adaptativo para problemas elastoplásticos, usando a roseta de elementos Q8C na ponta da trinca, pode fazer com que os valores da integral  $J$  diverjam dos resultados obtidos por outros autores, principalmente, se o domínio de integração cair dentro da zona de processamento (deformações finitas). Portanto, este processo depende não só do grau de refinamento da malha, especificado pelo valor da tolerância, mas também do tipo de problema

e da malha inicial utilizada. Já o uso da roseta de elementos T6, faz com que os valores de  $J$  sempre tendam a convergir para os resultados obtidos por outros autores.

Vale ainda ressaltar que a técnica utilizada para interpolar as variáveis de solução entre a malha original e a refinada, no processo adaptativo não linear, não apresentou nenhum problema, nem mesmo quando trincas estão presentes no modelo, sendo portanto uma técnica bastante eficiente.

Finalmente, observou-se a necessidade de um estimador de erro para o passo de carga da análise incremental, permitindo assim uma automação completa do processo adaptativo não linear. Neste trabalho, quando da execução dos exemplos de plasticidade, o processo foi literalmente interrompido para que o incremento atual fosse modificado. O valor do incremento, que possibilitasse a convergência da análise, foi encontrado por tentativa, ou seja, a determinação de quanto o valor atual do incremento deveria ser aumentado ou diminuído foi feita de forma empírica.

## **7.2. SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS**

Este trabalho insere-se nas linhas de pesquisa do DEC da PUC-Rio. A fim de que haja um adequado desenvolvimento do presente trabalho, sugere-se a seguir os seguintes temas.

Como dito anteriormente, um estimador de erro para avaliar a qualidade do incremento do passo de carga, após o refinamento da malha, deve ser concebido. Com isso, deseja-se atingir um sistema adaptativo mais automatizado e, conseqüentemente, mais eficiente.

Sugere-se um estudo mais aprofundado do processo adaptativo não linear de problemas de fratura, considerando outras possibilidades, tais como, mudança na ordem de integração dos elementos, análise com diferentes valores de intervalos de carga, e a consideração de outro domínio de integração na técnica IDE, dando a possibilidade de intervenção pelo usuário.



A propagação de trincas em meio elastoplástico é um problema que vem sendo estudado por outros autores e pode ser introduzido no presente sistema. Outros parâmetros, além da integral  $J$ , que auxiliam na predição da propagação da trinca, podem ser calculados. Pode-se citar o CTOD, CTOA e o módulo de separação (*tearing module*), os quais permitem que a curva de resistência  $J_R$  seja obtida.

Neste trabalho, é utilizado o critério de escoamento de von Mises, com encruamento isotrópico linear. O programa computacional, FEMOOP, utilizado para a análise dos modelos, possibilita somente a utilização de uma inclinação da curva tensão-deformação que descreve o encruamento (Fig. 2.1). Sugere-se, portanto, que seja incluída, neste programa, a possibilidade de se considerar outros tipos de curvas tensão-deformação, ou seja, vários valores de encruamento para um mesmo material. Além disso, sabe-se que outros tipos de materiais estão disponíveis neste programa de análise. Um estudo considerando estes tipos de materiais, Drucker-Prager por exemplo, para a análise de problemas de fraturamento, bem como para a análise auto-adaptativa de problemas plásticos em geral, seria bastante interessante.

Por fim, sugere-se estender o processo adaptativo de problemas plásticos, com ou sem fratura, para análise de problemas em três dimensões.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ANDERSON, T. L., *Fracture mechanics: fundamentals and applications*, CRC Press, Inc., Florida, 1991.
2. ANDERSSON, B., FALK, U., BABUŠKA, I. and PETERSDORFF, T. VON, *Reliable stress and fracture mechanics analysis of complex components using a h-p version of FEM*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 38, 2135-2163, 1995.
3. ATLURI, S. N., *Path-independent integrals in finite elasticity and inelasticity, with body forces, inertia, and arbitrary crack-face conditions*, Engineering Fracture Mechanics, 16, 341-364, 1982.
4. ATLURI, S. N., NISHIOKA, T. and NAKAGAKI, M., *Incremental path-independent integrals in inelastic and dynamic fracture mechanics*, Engineering Fracture Mechanics, 20, 209-244, 1984.
5. BABUSKA, I. and RHEIMBOLDT, W. C., *Analysis of optimal finite element meshes in  $R^1$* , Mathematics of Computations, 33, 435-463, 1976.
6. BAEHMANN, P. L., *Automated finite element modeling and simulation*, Ph. D. Thesis, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy-New York, 1989.
7. BAEHMANN, P. L., WITTCHEN, S. L., SHEPHARD, M. S., GRICE, K. R. and YERRY, M. A., *Robust geometrically based, automatic two-dimensional mesh generation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 24, 1043-1078, 1987.

8. BANKS-SILLS, L. and SHERMAN, D., *Comparison of method for calculating stress intensity factors with quarter-point elements*, International Journal of Fracture Mechanics, 32, 127-140, 1986.
9. BANKS-SILLS, L. and SHERMAN, D., *On the computation of stress intensity factors for three-dimensional geometries by means of the stiffness derivative and J-integral methods*, International Journal of Fracture, 53, 1-20, 1992.
10. BANTHIA, V., *Singularity of collapsed Q-8 finite element*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 21, 959-965, 1985.
11. BARSOUM, R. S., *On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 10, 25-37, 1976.
12. BARSOUM, R. S., *Triangular quarter-point elements as elastic and perfectly-plastic crack tip elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 11, 95-98, 1977.
13. BARSOUM, R. S., *Author's reply to the discussion by Tracey*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 11, 402-403, 1977.
14. BATHE, K. J., *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1982.
15. BITTENCOURT, T. N., BARRY, A. and INGRAFFEA, A. R., *Comparison of mixed-mode stress-intensity factors obtained through displacement correlation, J-integral formulation, and modified crack-closure integral*, Fracture Mechanics: Twenty-second Symposium (volume II), ASTM-STP 1131, Edited by S. N. Atluri, J. C. Newman, Jr., I. S. Raju and J. S. Epstein, 69-82, 1992.

16. BITTENCOURT, T. N. and SOUSA, J. L. A. O., *A numerical implementation of J-integral for elasto-plastic fracture mechanics*, XVI CILAMCE, 1, 263-272, 1995.
17. BITTENCOURT, T. N., WAWRZYNEK, P. A., INGRAFFEA, A. R. and SOUSA, J. L., *Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2D LEFM problems*, Engineering Fracture Mechanics, 55, 321-334, 1996.
18. BUI, H. D., *Associated path independent J-integrals for separating mixed modes*, Journal of Mechanics and Physics of Solids, 31, 439-448, 1983.
19. CARVALHO, C. V. A., *Simulação bidimensional adaptativa por elementos finitos de processos de fraturamento por fadiga*, Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, 1998.
20. CAVALCANTE NETO, J. B., *Simulação auto-adaptativa baseada em enumeração espacial recursiva em modelos bidimensionais de elementos finitos*, Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, 1994.
21. CAVALCANTE NETO, J. B., CARVALHO, M. T. M. e MARTHA, L. F., *Sistema gráfico integrado auto-adaptativo para análise de modelos bidimensionais de elementos finitos*, XV CILAMCE, 1, 513-522, 1994.
22. CHAN, S. K., TUBA, I. S. and WILSON, W. K., *On the finite element method in linear fracture mechanics*, Engineering Fracture Mechanics, 2, 1-17, 1970.
23. CHEN, C.-S., WAWRZYNEK, P. A., and INGRAFFEA, A. R., *Elastic-plastic crack growth simulation and residual strength prediction of thin plates with single and multiple cracks*, Submitted for publication ASTM 29<sup>th</sup> National Symposium on Fatigue and Fracture Mechanics, June 1997.
24. CHEN, W. F. and HAN, D. J., *Plasticity for structural engineers*, Springer-Verlag New York, 1988.

25. CHEW, L. P., *Constrained Delaunay triangulation*, *Algorithmic*, 4, 97-108, 1989.
26. COOK, R. D., *Concepts and applications of finite element analysis*, John Wiley & Sons, Inc., Singapore, 3<sup>th</sup> edition, 1989.
27. COOREVITS, P., LADEVÈZE, P. and PELLE, J. P., *An automatic procedure with a control of accuracy for finite element analysis in 2D elasticity*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 121, 91-120, 1995.
28. DE FLORANI, L. and PUPPO, E., *An on-line algorithm for constrained Delaunay triangulation*, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 54, 290-300, 1992.
29. DELORENZI, H. G., *Energy release rate calculations by the finite element method*, *Engineering Fracture Mechanics*, 21, 129-143, 1985.
30. DODDS, R. H. and VARGAS, P. M., *Numerical evaluation of domain and contour integrals for nonlinear fracture mechanics: formulation and implementation aspect*, Report N<sup>o</sup> UIULU-ENG-88-2006, Department of Civil Engineering, University of Illinois, Urbana, Illinois, 1988.
31. ERDOGAN, F. and SIH, G. C., *On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear*, *Report ASME Journal of Basic Engineering*, 85, 519-527, 1963.
32. FEENSTRA, P. H. and SCHELLEKENS, *Self-adaptive solution algorithm for a constrained Newton-Raphson method*, Report N<sup>o</sup> 25.2-91-2-13, Department of Civil Engineering, Delft University of Technology, Delft, Netherlands, 1991.
33. FIGUEIREDO, L. H. e CARVALHO, P. C. P., *Introdução à Geometria Computacional*, 18<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1991.

34. GALLIMARD, L., LADEVÈZE, P. and PELLE, J. P., *Error estimation and adaptivity in elastoplasticity*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 39, 189-217, 1996.
35. GUIMARÃES, L. G. S., *Disciplina de programação orientada a objetos para análise e visualização bidimensional de modelos de elementos finitos*, Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, 1992.
36. HABRAKEN, A. M. and CESCOTTO, S., *An automatic remeshing technique for finite element simulation of forming processes*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 30, 1503-1525, 1990.
37. HARROP, L. P., *The optimum size of quarter-point crack tip elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 17, 1101-1103, 1982.
38. HELLEN, T. K., *A novel approach to crack-tip singularity solutions*, Computers & Structures, 22, 743-747, 1986.
39. HELLEN, T. K., *Virtual crack extension methods for non-linear materials*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28, 929-942, 1989.
40. HENSHELL, R. D. and SHAW, K. G., *Crack tip finite elements are unnecessary*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 9, 495-507, 1975.
41. HINTON, E. and CAMPBELL, J. S., *Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using least squares method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 8, 461-480, 1974.
42. HUSSAIN, M. A., PU, S. L. and UNDERWOOD, J., *Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II*, Fracture Analysis, ASTM STP 560, 2-28, 1974.

43. HUTCHINSON, J. W., *Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material*, Journal of Mechanics and Physics of Solids, 16, 13-31, 1968.
44. HUTCHINSON, J. W., *A course on nonlinear fracture mechanics*, Department of Solid Mechanics, The Technical University of Denmark.
45. HUTCHINSON, J. W. and PARIS, P. C., *Stability analysis of J-controlled crack growth*, Elastic-Plastic Fracture, ASTM STP668, 37-64, 1979.
46. INGRAFFEA, A. R. and MANU, C., *Stress-intensity factor computation in the three dimensions with quarter-point elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 15, 1427-1445, 1980.
47. JOHNSON, C. and HANSBO, P., *Adaptive finite element methods in computational mechanics*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 101, 143-181, 1992.
48. KANNINEN, M. F., *Advanced fracture mechanics*, Oxford University Press, New York, 1985.
49. KNOWLES, J. K. and STERNBERG, E., *On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics*, Archives for Rational Mechanics & Analysis, 44, 187-211, 1972.
50. LADEVÈZE, P., COFFIGNAL, G. and PELLE, J. P., *Accuracy of elastoplasticity and dynamic analysis*, Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations, Edited by I. Babuska, O. C. Zienkiewicz, I. Gago, and E. R. de A. Oliveira, 181-203, 1986.
51. LAS CASAS, E. B., *Um processo adaptativo misto global para o método dos elementos finitos*, Revista Brasileira de Engenharia, 6, 11-51, 1990.

52. LEE, N. S. and BATHE, K. J., *Error indicators and adaptive remeshing in large deformation finite element analysis*, Finite Elements in Analysis and Design, 16, 99-139, 1994.
53. LI, L.-Y. and BETTESS, P., *Notes on mesh optimal criteria in adaptive finite element computations*, Communications in Numerical Methods in Engineering, 11, 911-915, 1995.
54. LIEBOWITZ, H., SANDHU, J. S., MENANDRO, F. C. M. and LEE, J. D., *Smart computational fracture of materials and structures*, Advances in fracture resistance and structural integrity: selected papers from the 8<sup>th</sup> International Conference on Fracture, 1993/editors V. V. Panasyuk *et al.*, 1<sup>st</sup> edition, 117-143, 1994.
55. LIN, S. C. and ABEL, J. F., *Variational approach for a new direct-integration form of the virtual crack extension method*, International Journal of Fracture, 38, 217-235, 1988.
56. LO, S. H., *Delaunay triangulation of non-convex planar domains*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28, 2695-2707, 1989.
57. LYNN, P. P. and INGRAFFEA, A. R., *Transition elements to be used with quarter-point crack-tip elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 12, 1031-1036, 1978.
58. MARTHA, L. F., MENEZES, I. F. M., LAGES, E. M., PARENTE Jr., E. and PITANGUEIRA, R. L., *An OOP class organization for materially nonlinear FE analysis*, XVII CILAMCE, Venice, Italy, 229-232, 1996.
59. NIKISHKOV, G. P. and ATLURI, S. N., *Calculation of fracture mechanics parameters for an arbitrary three-dimensional crack, by the "equivalent domain integral" method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 24, 1801-1821, 1987.



60. NIKISHKOV, G. P. and ATLURI, S. N., *An analytical-numerical alternating method for elastic-plastic analysis of cracks*, Computational Mechanics, 13, 427-442, 1994.
61. OWEN, D. R. J. and FAWKES, A. J., *Fracture Mechanics*, Pineridge Press Ltd., Swansea, U. K., 1983.
62. PARIS, P. C., TADA, H., ZAHOOOR, A. and ERNST, H., *Instability of the tearing mode of elastic-plastic crack growth*, ASTM STP 668, 5-36, 1979.
63. PERAIRE, J., VAHDATI, M., MORGAN, K. and ZIENKIEWICZ, O. C., *Adaptive remeshing for compressible flow computations*, Journal of Computational Physics, 72, 449-466, 1987.
64. PERIC, D., YU, J. and OWEN, D. R., *On error estimates and adaptivity in elastoplastic solids: applications to the numerical simulation of strain localization in classical and cosserat continua*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37, 1351-1379, 1994.
65. POTYONDY, D. O., WAWRZYNEK, P. A. and INGRAFFEA, A. R., *An algorithm to generate quadrilateral or triangular element surface meshes in arbitrary domains with applications to crack propagation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 38, 2677-2701, 1995.
66. RAJU, I. S., *Calculation of strain-energy release rates with higher order and singular finite elements*, Engineering Fracture Mechanics, 28, 251-274, 1987.
67. RICE, J. R., *A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks*, Journal of Applied Mechanics, 35, 379-386, 1968.

68. RICE, J. R. and ROSENGREN, G. F., *Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material*, Journal of Mechanics and Physics of Solids, 16, 1-12, 1968.
69. RUGGIERO, M. A. G. e LOPES, V. L. R., *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*, Makron Books, São Paulo, 2<sup>a</sup> edição, 1997.
70. RYBICKI, E. F. and KANNINEN, M. F., *A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral*, Engineering Fracture Mechanics, 9, 931-938, 1977.
71. SAMET, H., *The quadtree and related hierarchical data structures*, ACM Computer Surveys, 16, 2, 187-260, 1984.
72. SANDHU, J. S. and LIEBOWITZ, H., *Examples of adaptive FEA in plasticity*, Engineering Fracture Mechanics, 50, 947-956, 1995.
73. SAOUMA, E. V. and SCHWEMMER, D., *Numerical evaluation of the quarter-point crack tip element*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 20, 1629-1641, 1984.
74. SHAW, R. D. and PITCHEN, R. G., *Modifications to the Suhara-Fukuda method of network generation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 12, 93-99, 1978.
75. SHEPHARD, M. S., *Adaptive finite elements and CAD, accuracy estimates and adaptive refinements in finite elements computations*, I. Babuška *et al.* edited, John Wiley & Sons, 205-225, 1986.
76. SHIH, C. F., *Relationships between the J-integral and the crack opening displacement for stationary and extending cracks*, Journal of Mechanics and Physics of Solids, 29, 305-326, 1981.

77. SHIH, C. F., DE LORENZI, H. G. and GERMAN, M. D., *Crack extension modeling with singular quadratic isoparametric elements*, International Journal of Fracture, 12, 647-651, 1976.
78. SIH, G. C., *Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems*, International Journal of Fracture, 10, 305-321, 1974.
79. SIMO, J. C. e HUGHES, T. J. R., *Computational Inelasticity*, Springer Verlag, New York, 1998.
80. TRACEY, D. M., *Finite elements for determination of crack tip elastic stress intensity factors*, Engineering Fracture Mechanics, 3, 255-265, 1971.
81. TRACEY, D. M., *Discussion of 'On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics' by R. S. Barsoum*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 11, 401-402, 1977.
82. VALENTE, S., *Bifurcation phenomena in cohesive crack propagation*, Computers & Structures, 44, 55-62, 1992.
83. VAZ Jr., M., DUTKO, M. and OWEN, D. R. J., *Adaptive strategy for ductile fracture analysis in damaged elastoplastic solids*, IV World Congress on Computational Mechanics (versão final em CD-rom), Buenos Aires, Argentina, 1998.
84. WANG, L. and ATLURI, S. N., *Recent advances in the alternating method for elastic and inelastic fracture analyses*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 137, 1-58, 1996.
85. WAWRZYNEK, P.A. and INGRAFFEA, A. R., *Interactive finite element analysis of fracture processes: an integrated approach*, Theories & Applied Fracture Mechanics, 1987.

86. YEHIA, N. A. B. and SHEPHARD, M. S., *On the effect of quarter-point element size on fracture criteria*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 21, 1911-1924, 1985.
87. ZHU, W. X. and SMITH, D. J., *On the use of displacement extrapolation to obtain crack tip singular stress and stress intensity factors*, Engineering Fracture Mechanics, 51, 391-400, 1995.
88. ZIENKIEWICZ, O. C., HUANG, G. C. and LIN, Y. C., *Adaptive FEM computation of forming processes – application to porous and non-porous materials*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 30, 1527-1553, 1990.
89. ZIENKIEWICZ, O. C. and ZHU, J. Z., *A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 24, 337-357, 1987.
90. ZIENKIEWICZ, O. C. and ZHU, J. Z., *The three R's of engineering analysis and error estimation and adaptivity*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 82, 95-113, 1990.
91. ZIENKIEWICZ, O. C. and ZHU, J. Z., *The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1. The recovery technique*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 33, 1331-1364, 1992.
92. ZIENKIEWICZ, O. C., ZHU, J. Z. and GONG., N. G., *Effective and practical h-p-version adaptive analysis procedures for the finite element method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28, 879-891, 1989.

## APÊNDICE A

Arquivo de primitivas do Exemplo 5.2.1 – Modelo A, antes da introdução da trinca.

```
:w -32.5069 32.5069 -27.5 27.5

:l -10 -25 -10 25 'ID 0 SUPPORT_NODAL -10.000 -25.000 1 0 0 0 0 0
SUPPORT_NODAL -10.000 25.000 1 0 0 0 0 0 TOL 1e-05'
:l 10 -25 -10 -25 'ID 1 FORCE_CURVE 0.000-100.000 0.000 0.000 0.000
0.000 0 SUPPORT_NODAL -10.000 -25.000 1 0 0 0 0 0 TOL 1e-05'
:l 10 25 10 -25 'ID 2 TOL 1e-05'
:l -10 25 10 25 'ID 3 FORCE_CURVE 0.000 100.000 0.000 0.000 0.000
0.000 0 SUPPORT_NODAL -10.000 25.000 1 0 0 0 0 0 TOL 1e-05'
```

Arquivo de primitivas do Exemplo 5.2.1 – Modelo A, depois da introdução da trinca.

```
:l -10 -25 -10 25 'ID 0 TOL 1e-05 SUPPORT_NODAL -10 25
1 0 0 0 0 0 SUPPORT_NODAL -10 -25 1
0 0 0 0 0'
:l 10 -25 -10 -25 'ID1 TOL 1e-05 FORCE_CURVE 0 -100
0 0 0 0 0 SUPPORT_NODAL -10 -25 1 0
0 0 0 0'
:l 10 25 10 -25 'ID2 TOL 1e-05'
:l -10 25 10 25 'ID 3 TOL 1e-05 FORCE_CURVE 0 100
0 0 0 0 0 SUPPORT_NODAL -10 25 1 0
0 0 0 0'
:f 0 0 -4 0 'ID 4 TOL 1e-05'
:f 0 0 4 0 'ID 5 TOL 1e-05'
```