

Ricardo Amorim Einsfeld

*Simulação Numérica de Fraturamento em Estruturas de Concreto
Combinando os Processos Discreto e Distribuído*

Tese apresentada ao Departamento de
Engenharia Civil da PUC-Rio como parte
dos requisitos para obtenção do título de
Doutor em Engenharia Civil: Estruturas.
Orientador: Luiz Fernando C. R. Martha

Departamento de Engenharia Civil
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro, 6 de junho de 1997

Glendower: I can call spirits from the vast deep.

Hostpur: Why, so can I, or so can any man;
But will they come when you do call for them ?

Henry IV, Part I

*À minha esposa
Helena*

Meus agradecimentos

- ao Professor Luiz Fernando Martha, orientador da tese, pelo incentivo, apoio e confiança depositada.
- aos Professores Alaa Elwi e David Murray, supervisores do trabalho na Universidade de Alberta, no Canadá, pela orientação durante o estágio naquela universidade.
- à direção e aos professores da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), pela licença que me foi concedida através do Programa de Capacitação Docente (PROCAD/SR-2).
- ao amigo Luiz Tarcísio Souza, pelos conselhos e sugestões extremamente úteis para o desenvolvimento deste trabalho.
- ao Professor Paulo Correa de Mello, do Departamento de Química da PUC-Rio, pelo uso da estação de trabalho Calvin, sem o que seria impossível concluir a tempo os exemplos aqui apresentados.
- ao colega Evandro Parente Jr., por ter cedido o pós-processador NLPOS para visualização dos resultados da análise numérica.
- aos Professores da PUC-Rio pelos conhecimentos ministrados. Aos colegas pela amizade e pelo apoio em todos os momentos.
- ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela ajuda financeira recebida durante o curso.

Resumo

O presente trabalho consiste na elaboração de um modelo para simulação numérica do fraturamento em estruturas de concreto utilizando-se o Método dos Elementos Finitos e conceitos da Mecânica da Fratura aplicada ao concreto.

A característica mais importante deste modelo está na transição do processo de fraturamento distribuído para o processo discreto à medida em que as deformações se localizam em uma certa região da estrutura. Com isto, pode-se tirar proveito das principais vantagens apresentadas pelos dois processos, ao mesmo tempo em que se eliminam algumas de suas maiores desvantagens.

A simulação é suportada por um pré-processador para geração automática da malha de elementos finitos e por uma sofisticada estrutura de dados topológica que assegura a consistência da malha gerada. A fissura discreta é inserida em uma região de comportamento plástico selecionada pelo programa, e somente esta região é rediscretizada após a inserção e propagação da fissura. Todo o processo é monitorado pelo usuário através da mesma interface gráfica.

A análise pelo processo distribuído é desenvolvida através de um modelo plástico não-associado e algumas dificuldades numéricas são encontradas na tentativa de representar o comportamento da estrutura nas proximidades da carga máxima e no regime pós-pico. Um procedimento numérico é proposto para contornar estas dificuldades.

Abstract

This work consists of the development of a model for numerical fracture simulation of concrete structures using the Finite Element Method and concepts of Fracture Mechanics applied to concrete.

The most important characteristic of the simulation is the transition from the smeared to the discrete approach as the strain localizes in a certain region of the structure. With this method it is possible to take advantage of the main characteristics of the two approaches and, at the same time, eliminate some of their disadvantages.

The simulation is supported by a pre-processor for automatic finite element mesh generation and by a sophisticated topology-based data structure that assures mesh consistency. The discrete crack is introduced into a plastic region selected by the program, and only this region is remeshed after crack propagation. All the process is monitored through the same user interface.

The smeared analysis is developed through a non-associated plastic model which poses some numerical difficulties when tracing the behavior of the structure close to the peak and in the post-peak regime. A numerical solution is proposed to avoid these difficulties.

Sumário

<i>Lista de Figuras e Tabelas</i>	VI
<i>Lista de Abreviaturas e Símbolos</i>	X
1. Introdução	1
1.1 Modelos de Análise para Concreto com Considerações de Fraturamento	2
1.2 Níveis Hierárquicos para Análise de Estruturas de Concreto	7
1.3 Objetivo e Escopo do Trabalho de Tese	8
1.4 Organização deste Trabalho	10
2. Análise por EF com o Uso de Computação Gráfica Interativa	11
2.1 Introdução	11
2.2 Interface Gráfica com o Usuário	12
2.3 Geração Automática de Malhas	13
2.4 Estrutura de Dados	14
2.5 Mecânica da Fratura do Concreto	14
2.6 Modelos Constitutivos para Concreto	15
2.7 Análise por Elementos Finitos	16
2.8 Interligação dos Itens Anteriores	16
3. Mecânica da Fratura do Concreto	19
3.1 Introdução	19
3.2 Localização das Deformações e Zona de Fraturamento	20
3.3 Valores Característicos do Fraturamento no Concreto	23
3.4 Efeito de Escala das Estruturas	24
3.5 Modelos de Análise com Uso da Energia de Fraturamento	26
4. Formulação do Modelo de Pramono e Willam	29
4.1 Introdução	29
4.2 Formulação Geral dos Modelos Baseados na Teoria da Plasticidade	29

4.3 O Critério de Ruptura de Leon	32
4.4 O Comportamento Pré-pico	33
4.5 O Comportamento Pós-pico	35
4.6 Espaçamento Equivalente das Fissuras	40
5. Formulação do Problema pelo MEF	41
5.1 Introdução	41
5.2 Formulação por Elementos Finitos	42
5.3 Bifurcação e Ponto Limite	50
5.4 Considerações sobre a Dimensão do Elemento Finito	51
5.5 Tipo de Elemento e Ordem de Integração	52
6. Inserção e Propagação da Fissura Discreta a Partir do Processo de Fraturamento Distribuído	55
6.1 Introdução	55
6.2 Eliminação da Dependência da Malha com o Uso da Energia de Fraturamento	57
6.3 Um Critério de Energia para Inserção da Fissura Discreta	61
6.4 Metodologia para Inserção e Propagação da Fissura Discreta	63
6.5 Atualização das Variáveis na Região Rediscretizada	66
6.6 Estabilização do Processo Numérico	70
6.7 Implementação do Modelo Numérico FRACT	74
7. Exemplos de Aplicações do Modelo Numérico	78
7.1 Introdução	78
7.2 Exemplo 1: Viga à Flexão com Entalhe	79
7.3 Exemplo 2: Viga com Modo Combinado de Fraturamento com Um Entalhe	90
8. Conclusões e Recomendações	102
8.1 Introdução	102
8.2 Conclusões	103
8.3 Recomendações para Trabalhos Futuros	105
<i>Referências Bibliográficas</i>	108

Lista de Figuras e Tabelas

Figuras

Capítulo 2:

- 2.1 - Organização do programa por camadas. 17

Capítulo 3:

- 3.1 - Forma da zona não-linear (N) e da zona de processamento da fratura (F). 21
- 3.2 - Curvas tensão x deslocamento, tensão x deformação e tensão x abertura da fissura para um ensaio completo à tração. 22
- 3.3 - Resposta na fase pós-pico para estruturas de concreto e efeito da escala na tensão nominal. 25
- 3.4 - Valores teóricos para a razão entre o módulo de ruptura f_r e a resistência à tração f'_t . 26

Capítulo 4:

- 4.1 - Envelope de ruptura triaxial. 33
- 4.2 - Superfície de carregamento para modelo isotrópico com encruamento. 34
- 4.3 - Modos de ruptura triaxial. 36
- 4.4 - Decréscimo das tensões em tração simples. 37

Capítulo 5:

- 5.1 - Formulação geral para as equações de restrição. 47
- 5.2 - Método de N-R com restrição. 48
- 5.3 - Método do plano normal. 49
- 5.4 - Método do plano normal atualizado. 49

Capítulo 6:

- 6.1 - Barra submetida a esforço axial. 58
- 6.2 - Diagrama tensão-deformação. 58
- 6.3 - Resposta da estrutura em termos da deformação média. 60

6.4 - Inserção da fissura discreta.	64
6.5 - Propagação da fissura discreta.	65
6.6 - Atualização das variáveis nos pontos de Gauss da nova malha utilizando-se a superfície de suavização.	67
6.7 - Atualização das variáveis pela técnica de triangulação dos pontos de Gauss.	68
6.8 - Região rediscretizada sobreposta à triangulação dos pontos de Gauss da malha antiga.	69
6.9 - Atualização dos deslocamentos para a nova malha.	70
6.10 - Controle de Abertura da Fissura.	73
6.11 - Modelo numérico FRACT: Interligação das rotinas.	76

Capítulo 7:

7.1 - Exemplo 1: Modo I de fraturamento. Geometria da viga e condições de apoio e carregamento. Dimensões em mm.	80
7.2 - Exemplo 1: Modo I de fraturamento. Malha de EF.	80
7.3 - Exemplo 1: Curva Carga x Deflexão pelo processo distribuído.	81
7.4 - Exemplo 1: Curva Carga x Deflexão para inserção e propagação da fissura discreta com atualização das variáveis pelas superfícies de suavização.	82
7.5 - Exemplo 1: Configuração das tensões principais máximas após inserção da fissura discreta inicial (a) e propagação da fissura (b), obtida com atualização dos valores pelas superfícies de suavização.	84
7.6 - Exemplo 1: Curva Carga x Deflexão para inserção e propagação da fissura discreta com interpolação das variáveis pela triangulação dos pontos de Gauss.	85
7.7 - Exemplo 1: Tensões principais máximas antes da inserção da fissura discreta inicial.	86
7.8 - Exemplo 1: Configuração das tensões principais máximas após inserção da fissura discreta inicial (a) e propagação da fissura (b), obtida com interpolação dos valores pela triangulação dos pontos de Gauss.	88
7.9 - Exemplo 1: Inserção da fissura inicial.	89
7.10 - Exemplo 1: Deformada da viga (fator de amplificação = 500).	90
7.11 - Exemplo 2: Modo combinado de fraturamento. Geometria da viga e condições de apoio e carregamento. Dimensões em mm.	91
7.12 - Exemplo 2: Modo combinado de fraturamento. Malha de EF.	91

7.13 - Exemplo 2: Curvas Carga x CMSD obtidas por alguns autores.	92
7.14 - Exemplo 2: Parâmetro CMSD.	92
7.15 - Exemplo 2: Modo combinado de fraturamento. Curva Carga x CMSD pelo processo distribuído.	93
7.16 - Exemplo 2: Modo combinado de fraturamento. Curva Carga x Deslocamento no ponto A pelo processo distribuído.	93
7.17 - Exemplo 2: Modo combinado de fraturamento. Configuração deformada (fator de amplificação = 500) nas fases de pico (<i>a</i>) e pós-pico (<i>b</i>) de carregamento pelo processo distribuído.	94
7.18 - Exemplo 2: Modo combinado de fraturamento. Curva Carga x Deslocamento combinando os processos discreto e distribuído, considerando como critério para inserção da fissura a energia de fraturamento.	95
7.19 - Exemplo 2: Modo combinado de fraturamento. Curva Carga x CMSD combinando os processos discreto e distribuído, considerando como critério para inserção da fissura a tensão limite do material.	96
7.20 - Exemplo 2: Modo combinado de fraturamento. Curva Carga x Deslocamento no ponto A combinando os processos discreto e distribuído, considerando como critério para inserção da fissura a tensão limite do material.	97
7.21 - Exemplo 2: Modo combinado de fraturamento. Configuração deformada (fator de amplificação = 500) para os modos de deslizamento (<i>a</i>) e abertura (<i>b</i>) combinando os processos discreto e distribuído.	98
7.22 - Exemplo 2: Modo combinado de fraturamento. Caminhamento da fissura discreta.	99
7.23 - Representação do fraturamento pelo processo distribuído, Rots (1985).	100
7.24 - Exemplo 2: Modo espúrio de deformação mostrando as faces da fissura se cruzando.	101
7.25 - Exemplo 2: Modo espúrio de deformação mostrando o deslocamento excessivo do nó.	101

Tabelas***Capítulo 4:***

4.1 - Parâmetros do material para concreto comum.	39
4.2 - Parâmetros do material para concreto de alta resistência.	39

Lista de Abreviaturas e Símbolos

Abreviaturas:

CMSD	Crack Mouth Sliding Displacement
COD	Crack Opening Displacements
EF	Elementos Finitos
IDC	Indirect Displacement Control
MEF	Método dos Elementos Finitos
MFLE	Mecânica da Fratura Linear Elástica
N-R	Newton-Raphson

Símbolos:

Escalares:

A_e	área do elemento finito
A_h, B_h, C_h	parâmetros de ductilidade do material
A_s, B_s	parâmetros da energia de fraturamento do material
c_0	parâmetro de coesão na ruptura
c_s	parâmetro de coesão durante o regime pós-pico
d	dimensão característica da estrutura
e	dimensão do elemento finito
E	módulo de elasticidade
f_c'	tensão limite à compressão
f_t'	tensão limite à tração
G_f	energia de fraturamento
G_f^I	energia correspondente ao modo I de fraturamento
G_f^{II}	energia correspondente ao modo II de fraturamento
h	espaçamento equivalente das fissuras
h_c	espaçamento equivalente das fissuras em casos diferentes do de tração simples
h_e	dimensão característica do elemento finito
h_t	altura do corpo de prova para teste à tração simples
k	parâmetro de encruamento

k_0	parâmetro de encruamento inicial
l_{ch}	comprimento característico (propriedade do material)
l_c	comprimento característico do elemento finito
l_f	comprimento da fissura
L	comprimento total da barra
m	número de elementos da malha
m_0	parâmetro de fricção na ruptura
m_r	parâmetro de fricção no envelope residual
m_s	parâmetro de fricção durante o regime pós-pico
n	fator multiplicador para determinação da deformação de ruptura
r	módulo de deterioração do material
R	residual que corresponde à projeção do vetor de atualização sobre o vetor tangencial
u_f	deslocamento correspondente à abertura da fissura w
u_r	deslocamento de ruptura
w	abertura da fissura
w_c	abertura limite da fissura
α	parâmetro para determinação da dimensão característica do elemento
β	fator que reflete a influência do fator de carga na restrição
χ_p	parâmetro do material que considera a influência do confinamento no encruamento
ε^e	deformação elástica
ε_f	deformação equivalente de fraturamento à tração
ε^i	deformação na fase pós-pico
ε_p	comprimento da trajetória da deformação plástica
ε_u	deformação de ruptura
$\bar{\varepsilon}$	deformação média
$\Delta\bar{\varepsilon}$	incremento da deformação média
η	coeficiente que relaciona o comprimento da fissura ao comprimento característico do elemento
$d\lambda$	constante de proporcionalidade para os incrementos de deformações plásticas

μ	fator de carga total
$d\mu$	incremento total do fator de carga
$\Delta\mu$	incremento do fator de carga
σ	tensão
σ_r	tensão radial
σ_z	tensão longitudinal
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	tensões principais
$\Delta\sigma$	incremento de tensão
<i>Vetores:</i>	
\mathbf{a}	deslocamentos nodais
$\bar{\mathbf{a}}$	deslocamentos nodais selecionados
$\dot{\mathbf{a}}$	derivada em relação ao tempo do vetor de deslocamentos
$d\mathbf{a}$	incrementos totais dos deslocamentos nodais
$d\bar{\mathbf{a}}$	incrementos totais dos deslocamentos nodais selecionados
$\Delta\mathbf{a}$	incremento do vetor de deslocamentos nodais
$\Delta^I\mathbf{a}$	incremento de deslocamentos obtido através das cargas desbalanceadas
$\Delta^{II}\mathbf{a}$	incremento de deslocamentos obtido na direção da tangente
$\Delta^I\bar{\mathbf{a}}$	incremento dos deslocamentos selecionados obtido através das cargas desbalanceadas
$\Delta^{II}\bar{\mathbf{a}}$	incremento dos deslocamentos selecionados obtido na direção da tangente
\mathbf{b}	forças de massa
\mathbf{F}	forças concentradas
\mathbf{g}	forças desequilibradas
\mathbf{L}	operador diferencial
\mathbf{m}	normal à superfície potencial no espaço das tensões principais
\mathbf{n}	vetor de atualização
\mathbf{q}	cargas generalizadas
\mathbf{q}^*	vetor de referência das cargas externas
\mathbf{s}	forças de superfície
\mathbf{t}	vetor tangencial à configuração de equilíbrio
\mathbf{u}	deslocamentos internos ao elemento finito

$\delta \mathbf{u}$	variação do vetor de deslocamentos
$\delta \Delta \mathbf{u}$	variação do vetor de deslocamentos incremental
$\Delta \mathbf{u}$	incremento dos deslocamentos internos ao elemento finito
$\boldsymbol{\varepsilon}$	deformações totais
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$	derivada do vetor de deformações em relação ao tempo
$d\delta \boldsymbol{\varepsilon}$	variação do vetor de deformações
$d\boldsymbol{\varepsilon}_e$	incrementos de deformações elásticas
$d\boldsymbol{\varepsilon}_p$	incrementos de deformações plásticas
$\delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$	variação do vetor de deformações incremental
$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$	incremento de deformações
$\boldsymbol{\sigma}$	tensões
$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$	derivada do vetor de tensões em relação ao tempo
$d\boldsymbol{\sigma}$	incrementos totais de tensão

Matrizes:

B	matriz que relaciona as deformações com os deslocamentos nodais
D	matriz constitutiva elástica
D_t	matriz constitutiva tangente
D_{ep}	matriz constitutiva incremental elasto-plástica
K	matriz de rigidez global
N	matriz que relaciona os deslocamentos no elemento com os deslocamentos nodais

Funções:

f	função de restrição
F	função de escoamento
F_s	superfície de ruptura no estágio pós-pico
G	função residual
m_Q	função de fricção para regra não-associada
Q	potencial plástico

Capítulo 1

Introdução

A simulação numérica do comportamento de estruturas de concreto, em seus casos genéricos, exige que se considere o comportamento plástico, a deterioração e o fraturamento do material, além de outros efeitos como temperatura, retração e deformação lenta. Os procedimentos de análise pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), por sua vez, exigem um maior refinamento em regiões de concentração de tensões e, ainda, uma redefinição sistemática da malha quando o objetivo é simular o desenvolvimento de uma fissura discreta. Neste sentido, a utilização de técnicas de geração automática de malhas se apresenta como ferramenta indispensável à análise.

A conjugação destes aspectos conduz à criação de um modelo numérico consistente para análise genérica de estruturas de concreto, onde são consideradas as principais características do comportamento do material. A utilização de uma interface gráfica para visualização das etapas de entrada de dados, definição da malha e obtenção dos resultados da análise, propicia rapidez na modelagem da estrutura e na avaliação do seu comportamento.

A simulação do comportamento estrutural através de um modelo numérico com as características acima, traz como principal vantagem a possibilidade de se testar a estrutura projetada, ou parte dela, sob várias condições de utilização a um custo relativamente insignificante. Embora os experimentos de laboratório representem um papel significativo nas pesquisas relacionadas às estruturas de concreto, a sua realização é cara e, muitas vezes, economicamente inviável, principalmente quando se torna necessária a obtenção de uma grande quantidade de dados com modelos de dimensões variadas, submetidos a inúmeras condições de carregamento. Neste caso, uma análise paramétrica por elementos finitos se torna uma alternativa bastante atraente sob o ponto de vista econômico.

Vários modelos para análise de estruturas de concreto vêm sendo propostos nos últimos 30 anos. No entanto, pela sua própria especificidade, estes modelos parecem restritos aos centros de pesquisa e poucos benefícios são usufruídos diretamente pelos engenheiros projetistas de estruturas. Na última década, com o desenvolvimento de computadores mais velozes, com maior capacidade de memória e melhor resolução gráfica em seus terminais, o desenvolvimento destes modelos foi acelerado. Procurou-se então dar um sentido mais prático a estas aplicações, com propostas de modificações das normas que visavam a introdução dos conceitos desenvolvidos diretamente no dimensionamento e detalhamento das estruturas. A possibilidade dos modelos de prever a resposta completa das estruturas, desde a fase elástica até a carga de ruptura e em toda fase de comportamento pós-pico, encontrou aplicações no desenvolvimento de concretos de alta-resistência, de comportamento extremamente frágil, e no desenvolvimento de concreto reforçado com fibras, de comportamento mais dúctil.

A introdução dos conceitos da mecânica da fratura aplicados ao concreto, também contribuiu significativamente para o desenvolvimento destes modelos numéricos. Alguns autores estão convictos de que a utilização destes conceitos diretamente no projeto das estruturas de concreto irá produzir uma revolução comparável ao advento da análise limite plástica durante os anos 30-70, revertendo-se em melhoria das condições de confiabilidade, segurança e economia destas estruturas, Bazant (1990). Um importante aspecto do uso destes conceitos foi a possibilidade de simular numericamente o chamado efeito de escala das estruturas (*size effect*), de acordo com os resultados obtidos em ensaios práticos de laboratório.

Um resumo da evolução destes modelos é mostrado no item seguinte, onde procura-se enfatizar os seus aspectos mais significativos. A conjugação de alguns destes aspectos servirá de base para definição do modelo proposto neste trabalho.

1.1 Modelos de Análise para Concreto com Considerações de Fraturamento

Nos modelos desenvolvidos para análise de estruturas de concreto por elementos finitos, a zona de fraturamento é tratada ou como uma fissura discreta, com possibilidade de transmissão de tensões entre as faces opostas da fissura dentro de uma relação caracterizada por um comportamento de deterioração do material, ou como uma faixa de dimensão finita, caracterizada por uma relação tensão x deformação equivalente com curva descendente (ou pós-pico). Os

modelos que se enquadram dentro dessa última categoria se denominam *modelos de fraturamento distribuído (smeared crack approach)*, enquanto os primeiros se denominam *modelos de fraturamento discreto (discrete crack approach)*.

Modelos de fraturamento discreto

A primeira análise por elementos finitos com a finalidade de modelar o fraturamento do concreto foi realizada na década de 60 por Ngo e Scordelis (1967) através de um modelo de fraturamento discreto. Nesta análise, a configuração possível das fissuras era determinada *a priori* e coincidia com as fronteiras dos elementos. O efeito restritivo dos agregados nos deslocamentos por cisalhamento (*aggregate interlock*) foi simulado com o uso de elementos de ligação introduzidos através das fissuras. A análise foi linear-elástica e foram utilizados elementos de interpolação linear. Neste modelo, como em vários outros que se seguiram, foram utilizados os conceitos da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE).

Uma generalização deste processo, onde a inclusão da fissura podia ser feita em qualquer parte da estrutura, mas ainda seguindo a fronteira dos elementos, foi desenvolvida em seguida por Nilson (1968). Neste modelo, todos os nós da malha eram duplicados, de modo a permitir a inclusão da fissura onde fosse solicitado pela análise. Esta duplicação significava uma limitação do processo, face à quantidade de memória necessária para armazenar estes dados.

Apoiado por uma estrutura de dados para tratar das relações de adjacências da malha, Ngo (1975) desenvolveu um modelo no qual os nós eram duplicados apenas quando da introdução da descontinuidade, o que representou uma considerável economia de memória. A fim de permitir uma numeração dos novos nós em sequência com os já existentes, o Método Frontal (*Frontal Solution Method*) desenvolvido por Irons (1970) foi implementado no programa para solução do sistema de equações.

Subsequentemente, Hillerborg, Modéer e Petersson (1976) aplicaram pela primeira vez o conceito de balanço energético ao decrescer gradualmente a relação tensão x deslocamento entre as faces da fissura, Bazant (1985). A aplicação deste conceito de energia de fraturamento foi novamente utilizado por Hillerborg (1978) em seu modelo de fraturamento fictício (*fictitious crack model*). Neste modelo, a localização da fissura era pré-determinada. Os nós eram

duplicados na posição correspondente à fissura e mantidos coincidentes por uma força inter-nodal até que se atingisse uma tensão limite correspondente. Após se atingir esta tensão, a força inter-nodal era gradativamente relaxada à medida que crescia o deslocamento relativo entre os nós.

Durante os anos 80, com o rápido crescimento da capacidade de memória dos computadores e produção de terminais com melhor resolução gráfica, desenvolveram-se várias técnicas de geração automática de malhas, apoiadas por estruturas de dados poderosas, capazes de gerenciar com toda segurança a geração e alteração local de uma malha de elementos finitos. Com o uso destas técnicas Ingraffea e Saouma (1985) desenvolveram dois modelos, um linear e outro não-linear, nos quais a descontinuidade podia ser inserida em qualquer elemento do domínio, sem necessariamente ter que seguir a suas fronteiras. Somente a região na vizinhança da fissura era modificada, e toda estrutura de adjacências da malha era reformulada em função desta alteração. O modelo linear estava baseado no programa FEFAP (*Finite Element Fracture Analysis Program*) anteriormente desenvolvido por Saouma (1981). No modelo não-linear, a tensão pós-pico foi introduzida na fissura através de elementos de interface.

Também com base no programa FEFAP, Wawrzynek (1987) desenvolveu o programa FRANC (*Fracture Analysis Code*), onde técnicas de Computação Gráfica Interativa foram exaustivamente utilizadas. O programa permitia a inserção da descontinuidade em qualquer ponto do domínio, sendo a região no entorno da fissura totalmente rediscretizada. Ao usuário era permitido alterar a nova malha de modo a impedir a formação de elementos mal condicionados. As alterações na malha eram gerenciadas pela estrutura de dados Arestas Aladas (*Winged Edge*), Baumgart (1975). Como no programa FEFAP, o modelo estava baseado na MFLE. Subsequentemente, Wawrzynek, Martha e Ingraffea (1988) desenvolveram uma nova versão do programa, denominada FRANC3D, para análise de modelos tri-dimensionais, Martha (1989).

Modelos de fraturamento distribuído

O processo de fraturamento distribuído foi primeiramente introduzido por Rashid (1968) também na década de 60, como os modelos discretos, e desde esta época tem merecido a preferência dos analistas, principalmente pela possibilidade de simular o processo de fraturamento sem necessidade de uma constante redefinição da malha. Neste processo, o

comportamento do concreto fissurado é introduzido na relação constitutiva do material, preservando-se a topologia da malha inicial. No modelo de Rashid, a simulação da fissura era feita substituindo-se a relação constitutiva isotrópica inicial por uma relação ortotrópica que eliminava a rigidez do material ao cisalhamento e na direção normal à fissura.

Devido principalmente aos problemas numéricos surgidos pelo mal condicionamento da matriz constitutiva, vários autores incorporaram à relação ortotrópica de Rashid o módulo de cisalhamento multiplicado por um fator de redução. O uso deste fator, denominado *fator de retenção*, contribuiu para que os modelos simulassem mais realisticamente o efeito restritivo dos agregados nos deslocamentos por cisalhamento. Do mesmo modo, para ser mais fiel ao observado nos ensaios de laboratório, foi incorporado ao modelo o módulo normal com um fator de redução que visava simular a gradual perda de rigidez naquela direção. Finalmente, a inclusão do efeito de Poisson deu as feições finais à matriz constitutiva ortotrópica, incluindo os termos fora da diagonal que relacionavam os módulos de rigidez normal e tangencial, possibilitando ao modelo simular os efeitos de contração e expansão lateral.

Esta matriz ortotrópica foi utilizada por Bazant e Oh (1983) para desenvolver o que denominaram de *crack band model*. Os autores se inspiraram no trabalho pioneiro de Hillerborg, Modéer e Petersson (1976) ao utilizar um balanço de energia para simular o gradual decréscimo da relação tensão x deslocamento, Bazant (1985). O modelo baseou-se em outro desenvolvido anteriormente por Bazant e Cedolin (1979) para propagação de fraturamento em concreto.

Modelos distribuídos como os referenciados acima consideram que a relação ortotrópica é inserida com uma direção fixa para a fissura, não permitindo a sua rotação durante a análise, o que provoca um acréscimo inesperado de rigidez no modelo numérico. A possibilidade de variar o ângulo de inclinação da fissura foi originalmente proposto por Cope *et al.* (1980). A grande diferença em relação aos modelos em que o ângulo é fixo reside no fato de que a maior tensão principal e a direção normal à fissura permanecem alinhadas durante todo o processo de análise, o que permite a obtenção de resultados com muito melhor aproximação dos resultados reais.

Uma constatação feita ao se usar os modelos distribuídos é a instabilidade numérica do processo à medida que as deformações começam a se localizar. Este assunto foi investigado em detalhes por Crisfield (1982, 1983) onde procedimentos como o controle de deslocamentos por comprimento-de-arco (*arc-length*) com busca linear foram propostos para solucionar o problema. Ainda com o objetivo de controlar o processo numérico, De Borst (1986) introduziu o chamado

controle indireto dos deslocamentos, onde apenas os graus de liberdade correspondentes à localização das deformações eram selecionados para compor a equação de restrição. Este procedimento foi adotado por vários autores, Rots (1988), Feenstra (1993), com sucesso.

Uma classificação à parte é dada aos modelos distribuídos baseados na teoria da plasticidade (*plasticity-based models*). Capazes de simular realisticamente o comportamento plástico não-linear do material durante a fase pré-pico, além de outros fenômenos não-lineares, estes modelos foram aos poucos sendo modificados de modo a permitir uma melhor representação da fase pós-pico de comportamento do material. Uma de suas grandes vantagens está na facilidade de representação dos vários aspectos do comportamento do concreto com uma relativamente pequena quantidade de parâmetros de entrada, o que pode ser creditado aos postulados da teoria da plasticidade. Durante a última década, as pesquisas se direcionaram no sentido de introduzir os conceitos da mecânica da fratura nestes modelos, como nos trabalhos de Bazant e Kim (1979), Han e Chen (1985) e Pramono e Willam (1989).

O modelo desenvolvido por Pramono e Willam, em particular, se propõe a ser de aplicação genérica para simulação do comportamento do concreto simples, cobrindo todo o espectro do comportamento do material à tração e compressão. O modelo considera um comportamento plástico não-associado com encruamento no regime pré-pico, e um comportamento baseado na energia de fraturamento para a fase pós-pico. Esse modelo foi aferido por testes de laboratório e testado numericamente com sucesso na Universidade do Colorado, nos Estados Unidos, e na Universidade de Alberta, no Canadá.

Mais recentemente uma nova classe de modelos vem sendo utilizada para desenvolvimento de novos materiais compostos de concreto. O termo *concreto numérico* foi introduzido por Roelfstra (1989) para os modelos destinados ao estudo do comportamento das estruturas ao nível do material. Um exemplo são os modelos treliçados (*lattice type models*) utilizados por Schlangen e Van Mier (1992) para simulação de fraturamento.

À parte da classificação que se procura dar aos modelos discretos e distribuídos, uma distinção importante deve ser feita entre os modelos que tratam especificamente do comportamento do material e da interação entre seus componentes, e os que tratam do comportamento da peça estrutural como um todo. Com esta finalidade são introduzidos níveis hierárquicos conforme descrito no item seguinte.

1.2 Níveis Hierárquicos para Análise de Estruturas de Concreto

A adoção de níveis hierárquicos para categorizar os modelos numéricos destinados à análise de estruturas de concreto visa a introdução de uma metodologia de pesquisa nesta área. A sistemática de analisar comportamentos específicos do material através de modelos reduzidos e, depois, aplicar o resultado desta análise na adequação do modelo constitutivo para análise global da estrutura, apresenta-se como a metodologia mais adequada para o desenvolvimento dos modelos numéricos, uma vez que a inclusão de todas as heterogeneidades do concreto na análise de uma peça de dimensões convencionais inviabilizaria todo o processo, tal a magnitude que este modelo iria adquirir. Os níveis hierárquicos introduzidos por Wittmann (1983) para observação de materiais de concreto podem, então, ser estendidos aos modelos de análise numérica. Os níveis são os de *micro*, *meso* e *macro estrutura*, de acordo com o critério apresentado por Van Mier (1995).

No nível de *macro estrutura*, a estrutura do material não é definida e todas as características mecânicas do comportamento não-linear e heterogêneo do concreto fazem parte do modelo constitutivo adotado para sua representação. O contínuo equivalente pode, por exemplo, ser discretizado para análise pelo MEF, com os elementos de dimensão tal que englobe as heterogeneidades principais.

No nível de *meso estrutura* pode-se identificar os agregados graúdos e a argamassa de cimento e areia. A interação entre estes componentes, e também entre estes componentes e a armadura de aço, pode então ser estudada através de uma discretização que considera o contínuo equivalente de cada um destes elementos.

Naturalmente, os níveis de observação podem ir se sucedendo à medida que forem sendo identificadas mais particularidades na composição do material. O estudo do comportamento em cada um destes níveis irá requerer diferentes parâmetros de entrada, que se tornarão mais complexos à medida que se avance no nível microscópico das partículas. Os níveis *macro* e *meso estrutura* descritos acima, no entanto, parecem atender às necessidades de desenvolvimento dos modelos atuais de análise, não havendo necessidade, até o momento, de se descer a níveis mais detalhistas.

A identificação das partículas de cimento e areia poderia ser considerada na caracterização do nível de *micro estrutura*, mas esta representação nos parece por enquanto fora de propósito, considerando o estágio atual de desenvolvimento dos modelos numéricos.

1.3 Objetivo e Escopo do Trabalho de Tese

O objetivo deste trabalho consiste na simulação numérica do comportamento de estruturas de concreto pelo MEF com considerações de fraturamento e deterioração do material. O desenvolvimento do modelo de análise numérica foi feito no nível descrito acima como de *macro estrutura*, onde as não-linearidades inerentes ao material estão consideradas dentro do modelo constitutivo adotado. Foi adotada uma metodologia que permite a visualização em tela das etapas de entrada de dados, discretização do domínio, geração da malha de elementos finitos, análise e apresentação dos resultados, baseada em técnicas atuais de pré-processamento, pós-processamento e armazenamento de dados.

Este enfoque integrado de análise numérica e visualização gráfica considera os recentes avanços no campo de *hardware* dos computadores pessoais e estações de trabalho, com aumento na capacidade de memória, velocidade de processamento e resolução em tela, atualmente ao alcance da grande maioria dos projetistas de estruturas.

Procedeu-se, portanto, à interligação dos seguintes tópicos:

- Computação Gráfica Interativa
- Geração Automática de Malhas
- Estrutura de Dados
- Mecânica da Fratura do Concreto
- Modelos Constitutivos para Concreto
- Análise por Elementos Finitos

A principal característica do modelo desenvolvido neste trabalho está na representação do processo de fraturamento envolvendo a combinação dos modelos discreto e distribuído. No modelo aqui proposto a análise se desenvolve através do processo distribuído e as fissuras discretas são inseridas à medida em que as deformações se localizam. Com isto, pode-se tirar

proveito das principais vantagens apresentadas pelos dois processos, ao mesmo tempo em que se eliminam algumas de suas maiores desvantagens, como será visto em capítulo posterior.

Deve-se ressaltar que a utilização do processo de fraturamento discreto em problemas onde ocorre o aparecimento de múltiplas fissuras, como numa viga de concreto armado de dimensões usuais, por exemplo, não tem significado prático no nível hierárquico de macro estrutura. Os problemas para os quais o modelo aqui proposto se aplica, portanto, são aqueles relativos a peças de concreto simples, peças subarmadas e estruturas com grande massa de concreto, onde possa ocorrer forte localização das deformações.

O presente trabalho se restringe à modelagem de estruturas em duas dimensões. Os deslocamentos são assumidos como sendo pequenos em relação às dimensões da estrutura. As deformações são consideradas como infinitesimais, ou seja, o estado indeformado é considerado como configuração inicial para as configurações de equilíbrio seguintes. Esta situação, embora não seja de caráter geral, engloba a maioria dos casos onde se utilizam estruturas de concreto. Os efeitos de temperatura e deformação lenta estão fora do escopo deste desenvolvimento.

1.4 Organização deste Trabalho

No capítulo 2 é oferecida uma visão conjunta do modelo desenvolvido, com ênfase no aspecto interativo do programa.

No capítulo 3 procura-se dar uma descrição geral da aplicação dos conceitos de mecânica da fratura ao concreto. Essa descrição considera os desenvolvimentos obtidos na última década, que conduziram à elaboração de vários modelos capazes de simular mais realisticamente o comportamento das estruturas de concreto.

No capítulo 4 apresenta-se o modelo constitutivo de Pramono e Willam, adotado nesse trabalho para simulação do processo de fraturamento distribuído.

A formulação básica do problema pelo MEF é apresentada no capítulo 5, juntamente com considerações sobre os problemas de instabilidade numérica que surgem durante a análise não-linear de um modelo não-associado.

No capítulo 6 apresenta-se a proposta de combinação dos processos de fraturamento discreto e distribuído dentro de um modelo único. As principais características destes processos são relacionadas de modo a se ter uma visão das vantagens que podem ser obtidas através desta combinação. É proposto um critério para inserção da fissura discreta a partir do modelo de fraturamento distribuído.

No capítulo 7 são apresentados alguns exemplos de aplicações do modelo desenvolvido. Os testes de viga à flexão com entalhe, padronizado para determinação da energia de fraturamento, e viga com um entalhe, submetida a uma combinação dos modos I e II de fraturamento, visam demonstrar a capacidade do modelo em simular a propagação de fissuras em peças de concreto simples.

Finalmente, no capítulo 8 são apresentadas as conclusões finais deste trabalho e sugestões para desenvolvimentos futuros dentro desta linha de pesquisa.

Capítulo 2

Análise por EF com o Uso de Computação Gráfica Interativa

2.1 Introdução

O método dos elementos finitos se apresenta atualmente como uma ferramenta numérica de uso bastante difundido entre pesquisadores e engenheiros, principalmente pela sua confiabilidade e grande versatilidade, com aplicações em uma vasta gama de problemas de mecânica computacional. Por outro lado, a aplicação da Computação Gráfica Interativa vem se tornando fundamental na análise de estruturas pelo MEF com algumas vantagens práticas. A possibilidade de visualizar o modelo estrutural na tela representa para o analista considerável economia de tempo na avaliação do comportamento da estrutura, na geração e na aferição dos dados de entrada fornecidos ao programa. Nos últimos anos, várias rotinas gráficas, como técnicas de geração automática de malhas e visualização de tensões por isofaixas, por exemplo, foram desenvolvidas no sentido de propiciar ao analista facilidade e confiabilidade na discretização de domínios complexos e visualização dos resultados.

As rotinas gráficas são usualmente divididas naquelas de *pré-processamento*, onde se definem a geometria e os atributos da estrutura a ser analisada, e *pós-processamento*, onde o projetista pode visualizar os resultados da análise. As rotinas de pré-processamento, principalmente no que se refere à geração automática de malhas de EF, eliminam grande parte de um trabalho tedioso e altamente sujeito a erros, além de propiciarem uma efetiva interação do usuário com o programa. Com as ferramentas de pós-processamento, o projetista pode visualizar os resultados de sua análise, e extrair estes resultados de determinadas regiões de seu interesse, sem ter que manusear páginas e páginas de listagem. Estas rotinas se apoiam em uma estrutura de dados que garante a consistência do modelo, permitindo, de modo bastante eficiente, que se possa manipular toda informação necessária para gerar o modelo estrutural, proceder à sua análise e visualizar os resultados obtidos.

Para desenvolvimento do modelo proposto neste trabalho, foi considerada ainda a utilização dos conceitos da mecânica da fratura do concreto nos modelos constitutivos para análise pelo MEF. Estes conceitos têm proporcionado mais precisão e realismo aos modelos numéricos desenvolvidos desde a última década. Uma descrição dos tópicos aqui mencionados, e como devem ser interligados, é apresentada adiante, visando a criação de um programa de análise que se comunique com o usuário através de um ambiente gráfico interativo.

2.2 Interface Gráfica com o Usuário

A interação com o programa se faz através da interface com o usuário, que consiste numa coleção de rotinas que acionam determinados trechos escolhidos pelo analista. Este deve apenas selecionar um botão no menu para acionar a função de seu interesse. As tarefas constantes da interface gráfica se dividem em pré-processamento, análise e pós-processamento. As rotinas de pré-processamento e análise estão encapsuladas dentro da mesma interface gráfica gerada através do programa IntGraf, desenvolvido pelo TeCGraf (Grupo de Tecnologia em Computação Gráfica/PUC-Rio).

As tarefas de pré-processamento, neste trabalho, consistem na representação e discretização da estrutura, de modo a permitir a sua análise pelo MEF. O pré-processador MTOOL, desenvolvido pelo TeCGraf para ser utilizado como interface para geração de malhas de EF em 2D, foi adaptado para permitir a rediscritização da parte do domínio afetada pelo processo de fraturamento do material.

Para as tarefas de análise a interface gráfica chama as rotinas do programa FEPARCS, Elwi (1992), desenvolvido na Universidade de Alberta, no Canadá. Este programa foi adaptado de modo a permitir a contínua rediscritização do domínio afetado pela inserção e propagação da fissura. O arquivo de dados inicial lido pelo programa é gerado interativamente através da interface gráfica, com a escolha pelo usuário do tipo de análise desejado. As modificações impostas pelas alterações de geometria são gerenciadas por rotinas específicas criadas dentro do programa FEPARCS.

As tarefas de pós-processamento consideraram a indicação do comportamento da estrutura e indicação da resposta quantitativa do problema. A indicação do comportamento da estrutura

permite ao analista a verificação qualitativa da resposta do sistema dentro das hipóteses de carregamento que foram consideradas. A obtenção de informações quantitativas sobre o problema permite ao analista extrair respostas específicas, de determinadas localizações do modelo, sem ser incomodado pelo grande volume de informações que uma análise por EF é capaz de produzir, Wawrzynek (1987).

Para visualização dos resultados obtidos ao final da análise e durante as etapas intermediárias, é utilizado o pós-processador NLPOS desenvolvido por Parente Jr.(1997).

2.3 Geração Automática de Malhas

O pré-processador MTOOL comporta várias opções para geração automática de malhas em duas dimensões. Pode-se escolher aquela mais conveniente dentre as técnicas por mapeamento transfinito, triangulação automática e decomposição espacial hierárquica usando a estrutura *quadtree*. O programa permite a geração de malhas com elementos triangulares e retangulares, lineares e quadráticos.

Dentre as técnicas utilizadas, os algoritmos de decomposição espacial hierárquica, usando as estruturas *quadtree* e *octree*, têm mostrado grande versatilidade e uma organização que torna atraente a sua utilização pelos métodos de geração automática de malhas. Em função das propriedades de uma árvore quaternária, a utilização da técnica *quadtree* em estruturas 2D faz com que estes algoritmos sejam mais rápidos do que os demais, além de criar uma boa transição entre regiões com diferentes graus de refinamento da malha.

A geração de malhas com elementos triangulares se apresenta como a mais conveniente quando o domínio é irregular, o que torna este processo bastante interessante quando há necessidade de rediscretização para inserção ou propagação de fissuras discretas. Uma combinação das técnicas de *quadtree* e de triangulação de Delaunay, Vianna (1992), se encontra implementada no pré-processador MTOOL, sendo utilizada para rediscretização do domínio na região da fissura.

2.4 Estrutura de Dados

O armazenamento da malha de EF em uma estrutura de dados topológica completa tem a grande vantagem de oferecer ao usuário condições de editar a malha localmente após a sua geração. A consistência do modelo é continuamente testada pela estrutura de dados, que gerencia não só a elaboração do modelo inicial, como também todas as alterações locais da malha que possam ocorrer ao longo da análise. As informações completas de adjacências entre entidades topológicas permite que estas alterações locais sejam feitas de modo eficiente. Este aspecto é de extrema importância quando se pretende simular o processo de fraturamento pelo método discreto.

A estrutura de dados conhecida como arestas aladas (*Winged-Edge*), Baumgart (1975), foi originalmente desenvolvida para modelagem sólida B-Rep (*Boundary Representation of Solid Modeling*), mas serve perfeitamente para representação de malhas de EF. Ela contém três entidades topológicas: vértices, arestas e faces. Os vértices correspondem aos nós dos EF e as faces representam os elementos. Sua principal característica é que cada elemento topológico contém informações sobre suas adjacências, ou seja, cada entidade aponta para, pelo menos, uma entidade topologicamente adjacente. Foi projetada de modo que as informações solicitadas sejam obtidas com base nos dados armazenados para as arestas.

A estrutura de dados *Half-Edge* foi desenvolvida por Mantyla (1988) segundo os mesmos princípios da estrutura *Winged-Edge*, apenas considerando dois usos para as arestas (ou duas semi-arestas). Nesse caso, cada face reporta-se a um conjunto de semi-arestas que definem o *loop* correspondente e propiciam acesso a toda estrutura de adjacências. Essa estrutura de dados se encontra incorporada ao pré-processador MTOOL.

2.5 Mecânica da Fratura do Concreto

A ruptura de materiais como o concreto envolve a propagação de microfissuras através da argamassa, apresentando um comportamento de deterioração do material caracterizado por uma relação tensão x deformação com curva descendente (*strain-softening*). As microfissuras na argamassa aumentam acentuadamente durante o processo de ruptura levando a uma descontinuidade geométrica que separa o material. Esta descontinuidade é chamada de fissura.

Os conceitos de mecânica da fratura do concreto foram desenvolvidos a partir do trabalho pioneiro de Hillerborg, Modéer e Petersson (1976), onde foi utilizado pela primeira vez o conceito de balanço energético para decrescer gradualmente a relação tensão x deslocamento entre as faces da fissura. O desenvolvimento conseguido nesta área durante a última década, fez com que vários pesquisadores direcionassem os seus esforços no sentido de introduzir estes conceitos nos modelos constitutivos para concreto, a fim de obter uma melhor representação do comportamento do material.

O modelo constitutivo adotado neste trabalho considera a utilização destes conceitos, tendo apresentado bom desempenho nos trabalhos desenvolvidos na Universidade do Colorado, em Boulder, e na Universidade de Alberta, no Canadá, conforme descrito a seguir.

2.6 Modelos Constitutivos para Concreto

Embora o MEF tenha hoje em dia uma grande diversidade de aplicações nas várias áreas de engenharia, a modelagem inadequada dos materiais constitui-se frequentemente num fator limitador da análise estrutural. Este fato é especialmente verdadeiro no caso do concreto, onde não existem equações constitutivas que descrevam adequadamente as características básicas do material e que sejam aceitas de modo geral. No entanto, uma grande variedade de modelos tem sido proposta nos últimos anos, visando caracterizar o comportamento tensão x deformação e a ruptura do concreto submetido a um estado de tensões multidimensional. Todos estes modelos possuem vantagens e desvantagens que dependem, em larga escala, das particularidades de determinada aplicação.

O modelo desenvolvido por Pramono e Willam (1989) na Universidade do Colorado, Boulder, se propõe a ser uma formulação de aplicação genérica para simulação do comportamento do concreto. O modelo considera um comportamento plástico não-associado com encruamento no regime pré-pico e um comportamento baseado na energia de fraturamento para a fase pós-pico. Este modelo foi aferido por testes de laboratório na Universidade do Colorado e testado numericamente com sucesso por Xie *et al.* (1994) na Universidade de Alberta, no Canadá, tendo sido adotado no desenvolvimento deste trabalho de tese.

2.7 Análise por Elementos Finitos

O programa FEPARCS, Elwi (1992), foi desenvolvido pelos Professores Alaa Elwi e David Murray na Universidade de Alberta, no Canadá, com a finalidade de se tornar um programa de múltiplos propósitos, projetado para solucionar problemas lineares e não-lineares, com matriz de rigidez simétrica ou não-simétrica. A análise não-linear pode ser conduzida por controle de carga, controle de deslocamentos e comprimento-de-arco. Estas ferramentas numéricas se tornam essenciais no caso da utilização de um modelo não-associado como o de Pramono e Willam, conforme será visto no capítulo 5.

Algumas modificações foram feitas no programa FEPARCS de modo a possibilitar a sua interligação com a interface gráfica e com o modelo constitutivo adotado. Foram incorporados ao programa elementos triangulares lineares e quadráticos, de modo a se poder usufruir das técnicas de triangulação de domínios existentes no pré-processador MTOOL. O programa também foi adaptado de modo a permitir a contínua discretização do domínio afetado pela inserção e propagação da fissura discreta.

2.8 Interligação dos Itens Anteriores

A interligação dos tópicos mencionados acima conduz a um programa coerente, flexível e de fácil utilização por parte do usuário. A integração é obtida colocando-se em camadas as várias partes do programa. Estas camadas isolam as rotinas funcionais de alto nível dos detalhes funcionais de armazenamento e manipulação de dados.

O núcleo do programa é a Estrutura de Dados, que se constitui no repositório de todas as informações usadas pelas várias partes do programa e somente pode ser acessada através de rotinas específicas. Todas as rotinas de alto nível devem ser apenas de dois tipos, rotinas de modificação e de consulta, para guardar e retirar informações da estrutura de dados. Esta técnica é denominada de *data hiding*, Wawrzynek (1987), e separa os detalhes de armazenamento real de dados da abstração usada pelas rotinas de alto nível.

A camada acima da Estrutura de Dados é uma coleção de rotinas que implementam a funcionalidade computacional do programa, da qual fazem parte as rotinas de Geração de Malhas

(Pré-processamento e Rediscretização), Análise por EF, Modelo Constitutivo, Mecânica da Fratura do Concreto e Pós-processamento de Análise por EF.

Encapsulando as rotinas funcionais está a Interface com o Usuário, que se constitui numa coleção de menus e rotinas de apresentação em tela que permitem ao analista interagir com o programa. Na Figura 2.1, adaptada de Wawrzynek (1987), está representada a organização por camadas utilizada no programa. Nesta implementação, as rotinas de Pós-processamento não se encontram sob a mesma interface gráfica das restantes, e as tarefas de visualização dos resultados são executadas via arquivo neutro gerado durante a análise por EF.

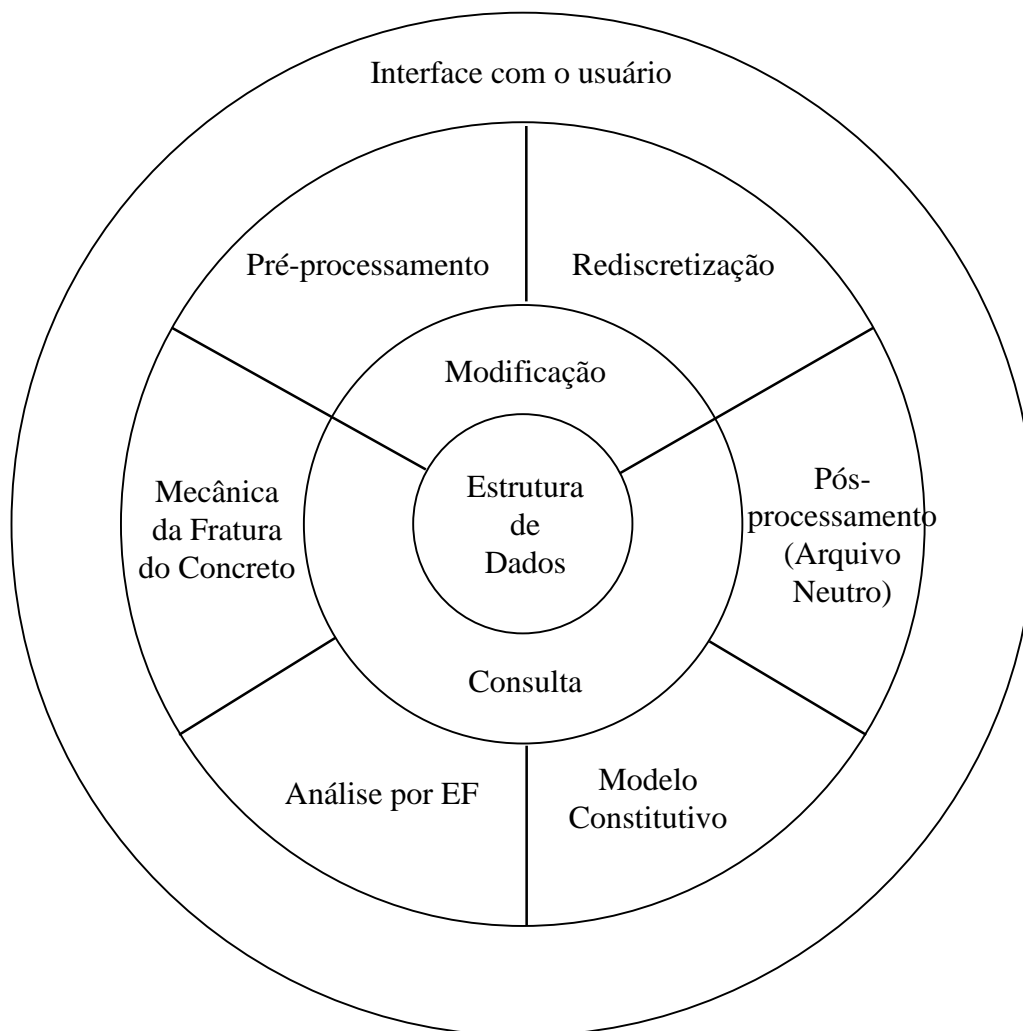


Figura 2.1 - Organização do programa por camadas.

Capítulo 3

Mecânica da Fratura do Concreto

3.1 Introdução

A utilização da mecânica da fratura nos projetos de estruturas de concreto apenas recentemente vem recebendo a consideração de alguns organismos internacionais responsáveis pela normalização destes projetos. Nenhum dos códigos atualmente em uso utiliza os conceitos de mecânica da fratura e isto não surpreende, uma vez que o processo pelo qual as fissuras se desenvolvem no concreto não era conhecido até recentemente. Durante muitos anos tentou-se aplicar os conceitos da mecânica da fratura linear elástica a um material de comportamento limite não-linear, e verificou-se que os resultados numéricos se desviavam dos resultados experimentais tanto quanto aqueles que utilizavam a tensão limite como critério de fraturamento, Bazant (1985). Tornou-se necessário, então, o desenvolvimento de um modelo teórico que possibilitasse a análise deste tipo de material. Durante os anos 80 o desenvolvimento deste modelo propiciou um sem número de trabalhos de pesquisa em centros de excelência internacionais. Pode-se supor, em função do número de trabalhos publicados e pesquisas direcionadas para esta área, que a mecânica da fratura certamente fará parte da revisão dos vários códigos de dimensionamento de estruturas de concreto nos próximos anos, uma vez que suas bases estão praticamente consolidadas por experimentos e modelos teóricos adequados.

Com o objetivo de transformar em ganho prático todo investimento dispendido em pesquisas teóricas e experimentais, o comitê 446 do ACI (*American Concrete Institute*) vem patrocinando nos últimos anos seções técnicas com o propósito de difundir entre os engenheiros projetistas os recentes avanços obtidos nesta área, Gerstle e Bazant (1992). Nestes encontros, algumas revisões vem sendo propostas ao código ACI 318 considerando, principalmente, o efeito

de escala da estrutura (*size effect*), que só pode ser teoricamente explicado e convenientemente implementado nos modelos numéricos através da energia de fraturamento.

Duas tendências na indústria de construção civil justificam o interesse atual na mecânica da fratura do concreto, Li (1989). Primeiramente, com o avanço das técnicas de construção, tornou-se possível a execução de peças de dimensões cada vez maiores. Um dos motivos é a possibilidade de aumentar a distância entre apoios de modo a se obter um melhor aproveitamento dos espaços internos em edificações, permitindo uma melhor circulação de veículos em pátios de estacionamento, por exemplo. Em segundo lugar, verifica-se que o concreto de alta resistência vem aos poucos substituindo o concreto comum em certos casos, devido à possibilidade de se obter uma tensão de compressão relativamente bem mais elevada do que a usual. Novamente, pode-se citar como exemplo um melhor aproveitamento dos espaços internos de uma edificação com o uso de pilares de menor seção transversal. Esta tendência, no entanto, conduz a um tipo de estrutura de comportamento mais frágil do que a usual, seja pelo efeito de escala das estruturas, no caso de estruturas de maiores dimensões, seja pela utilização do concreto de alta resistência no lugar do concreto comum.

Torna-se necessária, portanto, a determinação da resposta completa das estruturas com a utilização dos conceitos da mecânica da fratura do concreto, de modo a aferir o seu grau de ductilidade, ou fragilidade, e introduzir coeficientes de segurança adequados. As idéias básicas dos modelos teóricos para consideração de fraturamento em estruturas de concreto, desenvolvidas a partir do trabalho de Hillerborg, Modéer e Petersson (1976), são apresentadas nos itens seguintes.

3.2 Localização das Deformações e Zona de Fraturamento

Algumas características distinguem o processo de fraturamento no concreto daquele desenvolvido nos metais, onde se concentram a maioria dos estudos e aplicações de mecânica da fratura. Os metais geralmente apresentam um longo patamar de escoamento antes de fraturar, o que significa que grandes deformações por cisalhamento ocorrem, envolvendo grandes tensões e deformações laterais, que se tornam fatores complicadores para a descrição teórica do comportamento durante o processo de fraturamento. No concreto, por outro lado, as microfissuras se desenvolvem em macrofissuras sem que ocorram valores significativamente altos

para as tensões ou deformações laterais. Isto significa que a diferença entre o estado plano de tensões e o estado plano de deformações é desprezível. Neste caso, as curvas tensão x deformação (σ - ϵ) e tensão x abertura da fissura (σ - w) são independentes da espessura da amostra, podendo ser consideradas como uma propriedade do material, fornecendo uma descrição geral de seu comportamento, Petersson (1981). Pode-se assumir, também, que as tensões de tração são as causas dominantes do fraturamento, Hillerborg (1985).

Nos metais, à frente da extremidade da fissura, existe uma grande zona de comportamento plástico em que o material está escoando, mas sem apresentar deterioração de tensões (*strain-softening*). O comportamento plástico com *strain-softening* se concentra em uma pequena área à frente da fissura, que podemos denominar de *zona de processamento da fissura* ou, simplificada, *zona de fraturamento*. No concreto, por outro lado, a zona de fraturamento ocupa a maior parte da área de comportamento inelástico, como pode ser visto na Figura 3.1, Bazant (1985). Pode-se considerar, como uma simplificação, que o concreto apresenta apenas a zona de fraturamento e, fora dessa região, o material se comporta dentro do regime elástico, Bazant (1985).

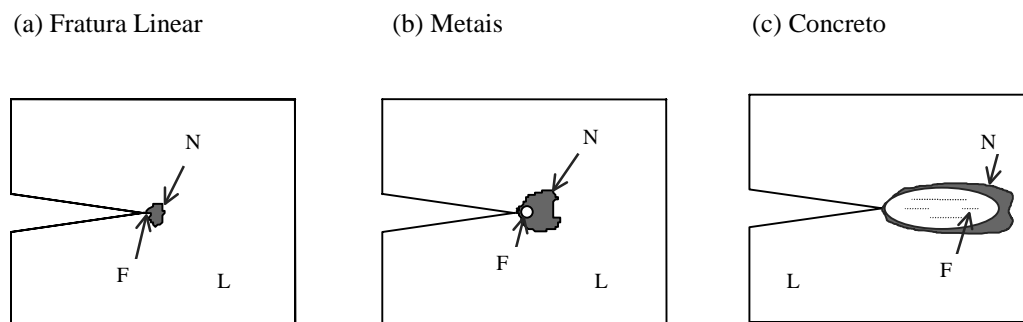


Figura 3.1 - Forma da zona não-linear (N) e da zona de fraturamento (F).

A zona de fraturamento apresenta dimensões características, de acordo com observações e medidas experimentais, apresentando-se como uma região alongada, de largura da ordem do tamanho do maior agregado gráudo e comprimento de 100-200 mm ou mais. Nessa região se concentra uma razoável quantidade de microfissuras, algumas das quais irão se juntar para compor a fissura final que irá descontinuar o material naquele trecho, Hillerborg (1985).

A concentração das microfissuras dentro de determinada região da estrutura e a localização das deformações dentro deste trecho podem ser observadas procedendo-se a um teste à tração simples. Neste teste é possível traçar a curva completa do diagrama tensão x deformação, inclusive a parte descendente do diagrama até o ponto em que as tensões se anulam. O comportamento pós-pico se apresenta a partir da formação da zona de fraturamento, ou *zona de dano*, conforme mostrado na Figura 3.2, Hillerborg (1989). Neste estágio, as deformações crescentes ocorrem apenas dentro dessa zona, ou seja, quando se inicia o processo de *strain-softening* do material as deformações se *localizam* dentro dessa pequena faixa da estrutura, enquanto o material fora desse trecho apresenta um estado de descarregamento com deformações decrescentes, conforme mostrado nos diagramas, Hillerborg (1991).

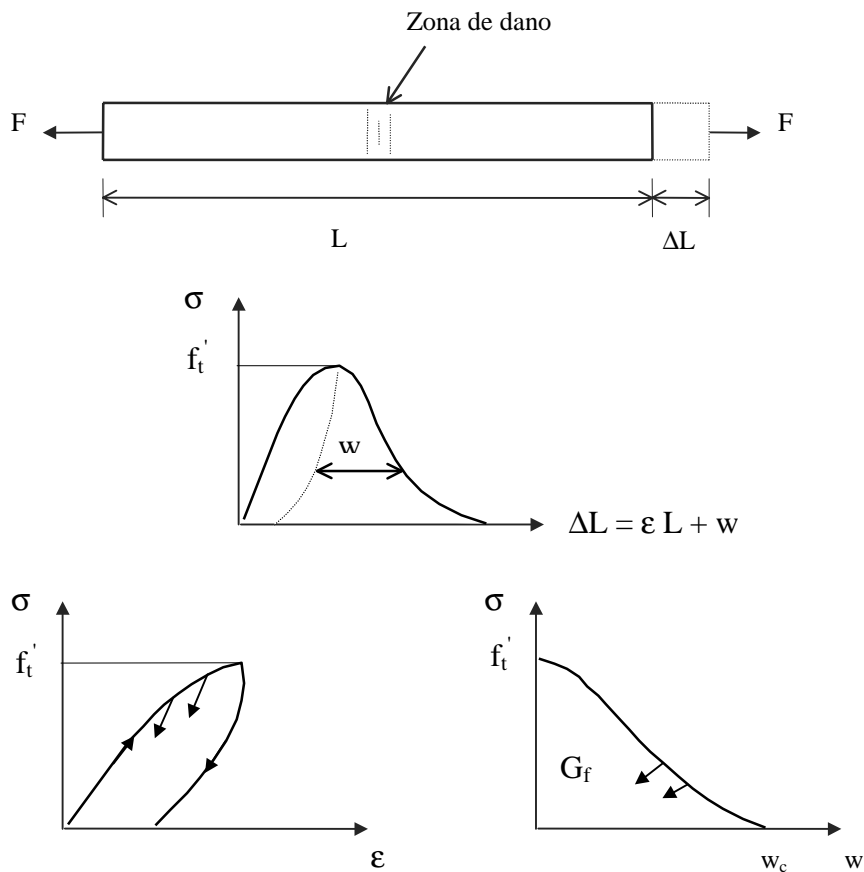


Figura 3.2 - Curvas tensão x deslocamento, tensão x deformação e tensão x abertura da fissura para um ensaio completo à tração.

Ao contrário dos metais, a análise utilizando as considerações da MFLE não se aplica às estruturas mais convencionais em concreto devido às consideráveis dimensões da zona de

fraturamento em relação às dimensões da peça estrutural, Hillerborg (1985). Apenas no caso de estruturas com uma significativa massa, como no caso de barragens, por exemplo, onde as dimensões da zona de fraturamento se tornam insignificantes em relação às dimensões da estrutura, pode-se considerar a aplicabilidade da MFLE. A implicação destas considerações na variação da resistência das estruturas, o chamado *efeito de escala*, será visto mais adiante.

3.3 Valores Característicos do Fraturamento no Concreto

Observando-se a curva tensão x deformação no caso do concreto em tração simples, verifica-se que a não-linearidade no regime pré-pico pode ser considerada insignificante em relação à apresentada no regime pós-pico. Pode-se considerar, portanto, que a tenacidade do material depende basicamente das propriedades da curva *tensão x deformação* no regime pós-pico, que se relaciona diretamente com a curva *tensão x abertura da fissura*, Hillerborg (1991).

Uma propriedade importante é a área sob essa curva (ver Figura 3.2), denominada energia de fraturamento do material, e definida como a energia consumida para a formação da fissura por unidade de área no plano de fraturamento. Essa energia pode, então, ser calculada pela expressão

$$G_f = \int_0^{w_c} \sigma dw \quad (3.1)$$

As propriedades da curva σ - w podem ser divididas em três partes: a tensão limite à tração, f'_t , a área sob a curva, G_f , e o seu formato.

Procedendo à realização de vários testes, Petersson (1980) (1981) concluiu que a forma da curva era aproximadamente a mesma para diferentes tipos de concreto. Várias outras curvas foram obtidas por diferente laboratórios sem que os resultados pudessem contradizer esta afirmativa. Pode-se, portanto, assumir que a forma é constante, o que simplifica sobremaneira a análise, uma vez que as propriedades da curva passam a ser definidas apenas por dois parâmetros, G_f e f'_t . Como a tensão limite f'_t é uma propriedade convencional do concreto, e pode ser assumido como um parâmetro conhecido, o único valor não convencional que deve ser determinado é a energia de fraturamento G_f , Hillerborg (1991).

A razão entre as deformações inelásticas e elásticas do material é denominada de *comprimento característico*. A relação G_f / f'_t pode ser tomada como um valor para as

deformações inelásticas, assim como podemos tomar o valor de f'_t / E para as deformações elásticas, onde E é o módulo de elasticidade. Assim,

$$l_{ch} = \frac{EG_f}{f_t^2} \quad (3.2)$$

Para concreto comum os valores de l_{ch} se situam entre 0,1-1,0 m, com um valor médio da ordem de 0,4 m, Hillerborg (1991). Se considerarmos d como uma dimensão característica da estrutura, a tenacidade do material pode ser caracterizada pela razão l_{ch}/d . O inverso desse valor é freqüentemente denominado de *índice de fragilidade (brittleness number)*.

3.4 Efeito de Escala das Estruturas

O efeito de escala na resistência das estruturas, conhecido como *size effect*, pode ser explicado pela redistribuição das tensões devido à liberação de energia causada pelo fraturamento do concreto. Considere-se o caso de duas estruturas iguais, de mesma proporção geométrica, apenas com dimensões diferentes. Para a estrutura com maiores dimensões a energia é liberada por um maior volume de material, e poderia-se pensar que, nesta estrutura, a energia necessária para gerar uma fissura de comprimento unitário seria maior do que na estrutura de menores dimensões. No entanto, já se verificou que essa energia de fraturamento é uma propriedade do material, sendo independente das dimensões da estrutura. Conclui-se que, no caso dessas duas estruturas de mesmas proporções, a tensão nominal necessária para a formação da fissura unitária deve ser menor na estrutura de maiores dimensões, de modo que a energia liberada para formação desta fissura seja a mesma que na estrutura de menores dimensões, Bazant (1990).

Em todas as teorias nas quais o critério de ruptura é estabelecido em termos de tensões e deslocamentos, como a análise no limite plástico ou análise elástica com tensão limite (nas quais se incluem todas as formulações de código atuais), não se considera o efeito de escala. Este efeito pode ser naturalmente incluído na análise quando se passa a utilizar os princípios de mecânica da fratura, Bazant (1990). Na Figura 3.3, Bazant (1990), pode-se observar o efeito de escala em relação às teorias citadas. Nos testes usuais de laboratório, as estruturas a serem ensaiadas são preferencialmente moldadas com as menores dimensões possíveis com respeito ao tamanho do agregado. A maioria dos testes, portanto, fornecerá resultados que se aproximam da reta

horizontal mostrada na figura. Pode-se observar, também, que os resultados obtidos com o uso da teoria linear da mecânica da fratura somente se aproximam dos resultados corretos, obtidos com a teoria não-linear, para estruturas de grandes dimensões. Para as estruturas de dimensões correntes, as diferenças entre as teorias linear e não-linear são bastante acentuadas.

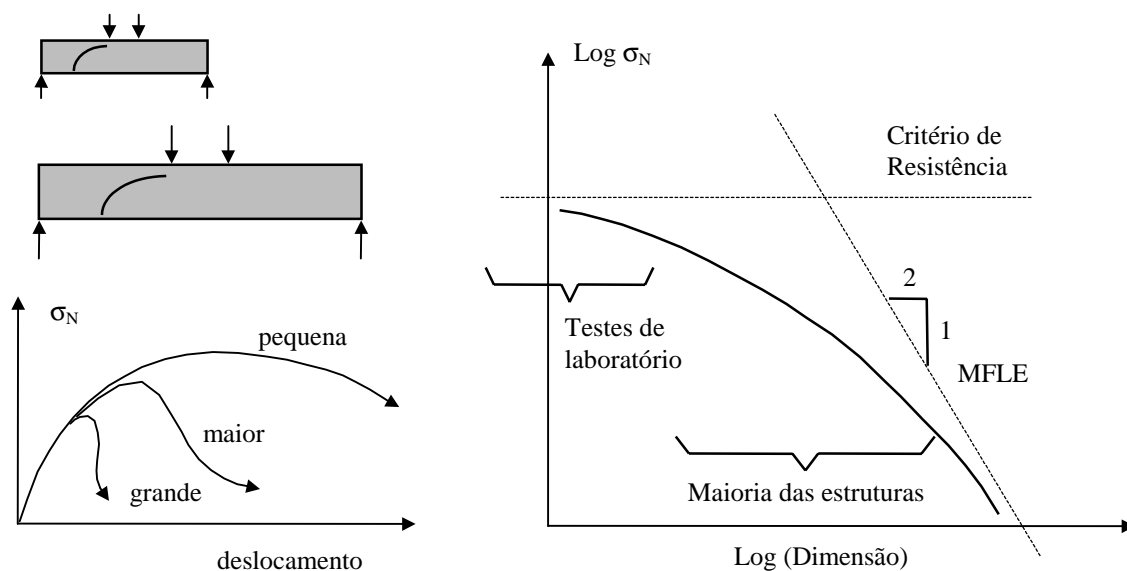


Figura 3.3 - Resposta na fase pós-pico para estruturas de concreto e efeito da escala na tensão nominal.

Um exemplo para o caso do módulo de ruptura à flexão é apresentado na Figura 3.4, Hillerborg (1989), onde pode-se verificar o decréscimo do valor desse módulo à medida que se aumenta a dimensão característica d . Se considerarmos uma viga de altura 40 cm, bastante usual, $d/l_{ch} = 1.0$ e observa-se que a diferença entre os resultados apresentados pelos modelos teóricos pode ser bastante significativa.

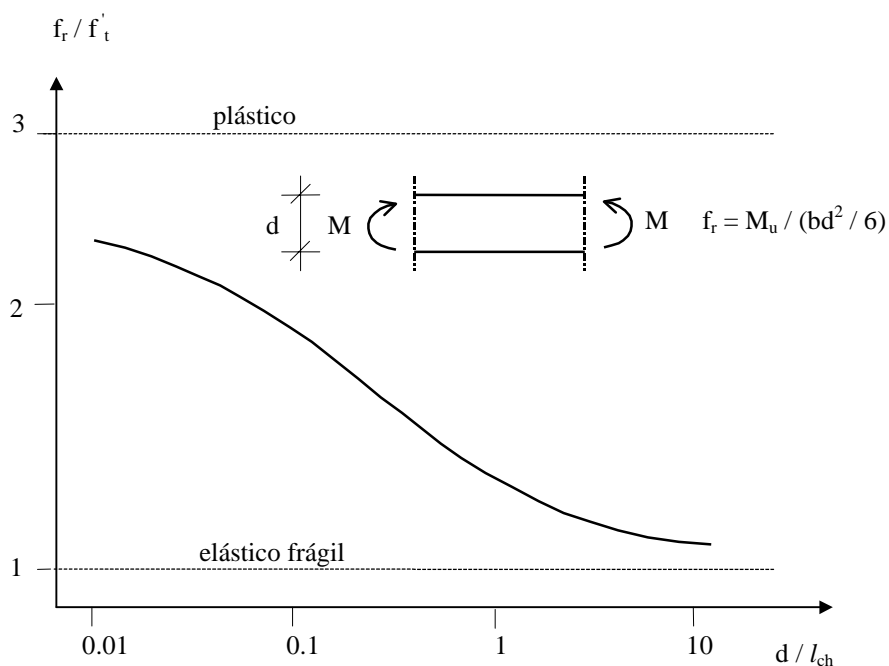


Figura 3.4 - Valores teóricos para a razão entre o módulo de ruptura f_r e a resistência à tração f'_t .

3.5 Modelos de Análise com Uso da Energia de Fraturamento

Como foi visto anteriormente, para que se possa simular realisticamente o comportamento do concreto, os modelos devem necessariamente se enquadrar dentro da teoria não-linear, refletindo o fato de que a zona de fraturamento possui uma tensão limite f'_t e uma configuração característica alongada, onde exibe um comportamento de deterioração do material no lugar do patamar de escoamento característico dos metais.

Nos modelos desenvolvidos para análise por elementos finitos com o uso da energia de fraturamento, a zona de fraturamento é tratada, ou como uma fissura discreta com possibilidade de transmissão de tensões entre as faces opostas, dentro de uma relação caracterizada por um comportamento de deterioração do material (modelo originalmente desenvolvido por Hillerborg (1978) e denominado *fictitious crack model*), ou por uma faixa de dimensão finita, caracterizada por uma relação tensão-deformação equivalente com *strain-softening* (como no modelo desenvolvido por Bazant e Cedolin (1979), denominado *crack band model*). Os modelos que se enquadram dentro dessa última categoria se denominam *modelos de fraturamento distribuído*, enquanto os primeiros se denominam *modelos de fraturamento discreto*.

Alguns autores, Balakrishnan e Murray (1986), Bazant (1985), Budan e Murray (1992), Ingraffea e Saouma (1985), procuram enfatizar as vantagens de um processo em relação ao outro na simulação mais realista do fraturamento do concreto. No entanto, a escolha de um ou outro tem sido apenas uma questão de conveniência computacional. As dificuldades encontradas para elaboração de modelos de fraturamento discreto recaem no fato de que a morfologia das fissuras deve ser estimada *a priori*, além do processo exigir uma contínua redefinição da malha durante a análise. Nesse aspecto, os modelos de fraturamento distribuído oferecem uma vantagem em relação aos de fraturamento discreto, uma vez que a topologia da malha é mantida durante todo o processo de análise e a rotação dos eixos principais durante o processo de *strain-softening* pode ser permitida. As vantagens do modelo discreto parecem se concentrar na capacidade de modelar mais naturalmente determinados tipos de comportamento no nível de meso estrutura, como o efeito da interface entre o concreto e o aço (*tension stiffening*) e também o efeito restritivo dos agregados nos deslocamentos por cisalhamento (*aggregate interlock*).

Um outro aspecto que deve ser considerado é com relação à distribuição das fissuras numa peça de concreto armado. Sabe-se que, para uma peça que não esteja subarmada, as fissuras se distribuem ao longo da região solicitada seguindo um determinado espaçamento. Nesta situação torna-se improdutiva a análise com representação discreta destas múltiplas fissuras no nível de macro estrutura, sendo estas melhor representadas induzindo-se a anisotropia nas regiões correspondentes do contínuo. No caso de estruturas com uma razoável massa de concreto, com uma pequena porcentagem de armadura utilizada apenas para compor a peça, as trincas podem se nuclear numa única fissura dominante e a representação mais adequada, naturalmente, seria através do conceito de fraturamento discreto.

Os modelos de fraturamento distribuído têm merecido a preferência e a confiança da comunidade científica, principalmente pela possibilidade de simular o processo de fraturamento sem necessidade de uma constante redefinição da malha. Com o surgimento de técnicas avançadas para geração automática de malhas nos anos 80, apoiadas por poderosos gerenciadores da estrutura de dados, a vantagem oferecida pelos modelos distribuídos, de manutenção da topologia durante a análise, tornou-se sem significado e alguns autores passaram a contestar a superioridade da simulação distribuída em relação aos modelos de fraturamento discreto, Rots (1988).

Acredita-se que, à medida que as técnicas computacionais e a própria capacidade de armazenamento de dados e velocidade de processamento das máquinas mais modernas se tornem mais acessíveis, os modelos com simulação de fissura discreta passem a ser mais utilizados.

Uma combinação das duas técnicas discutidas acima foi sugerida por Feenstra e De Borst (1995) na conferência sobre métodos computacionais aplicados a problemas de plasticidade realizada em Barcelona, Espanha, em 1995. Os autores, embora sem apresentar nenhum método específico, sugerem um enfoque no qual as fissuras dentro de um modelo distribuído possam evoluir gradualmente para uma fissura discreta através de processos adaptativos.

Capítulo 4

Formulação do Modelo de Pramono e Willam

4.1 Introdução

Nos últimos anos, considerável progresso vem sendo obtido no desenvolvimento de modelos constitutivos que possam representar corretamente o comportamento do concreto. A partir da publicação do texto de autoria de Chen (1982), um grande número de modelos baseados no comportamento plástico triaxial do concreto foram desenvolvidos. A maioria das propostas, no entanto, se concentra na solução de problemas específicos, e poucas apresentam uma formulação de caráter genérico.

O modelo apresentado por Pramono e Willam (1989) se propõe a ser de utilização genérica, capaz de cobrir todo o espectro do comportamento triaxial do concreto, nos regimes de tração e compressão do material. O modelo considera uma regra não-associada de plasticidade, com encruamento no regime pré-pico e deterioração do material (fase pós-pico) baseada na energia de fraturamento, conforme será descrito mais adiante.

Os parâmetros constitutivos foram calibrados em função de uma série de resultados experimentais, que incluem testes em tração direta e compressão triaxial em diferentes níveis de confinamento.

4.2 Formulação Geral dos Modelos Baseados na Teoria da Plasticidade

Os modelos baseados na teoria da plasticidade pressupõem a definição de uma superfície de ruptura, além da definição de regras para encruamento e escoamento do material. Os principais aspectos destes modelos são apresentados adiante.

A simulação do comportamento, considerando o encruamento do material, leva a uma função de escoamento da forma

$$F(\boldsymbol{\sigma}, k) = 0 \quad (4.1)$$

onde k é o parâmetro de encruamento.

A regra de escoamento relaciona os incrementos da deformação plástica $d\boldsymbol{\epsilon}_p$ ao potencial plástico $Q(\boldsymbol{\sigma}, k)$

$$d\boldsymbol{\epsilon}_p = \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\lambda \quad (4.2)$$

onde $d\lambda$ é uma constante de proporcionalidade. Se o parâmetro k não for constante, a função F se torna a função de carregamento. De acordo com a condição de consistência, tem-se

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} d\sigma_1 + \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} d\sigma_2 + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0 \quad (4.3)$$

No caso de material com encruamento, o parâmetro k representa a quantidade de trabalho plástico durante o estágio de deformação. Tem-se, portanto, que

$$dk = \boldsymbol{\sigma}^t d\boldsymbol{\epsilon}_p \quad (4.4)$$

Para um incremento infinitesimal das tensões, os incrementos de deformação podem ser divididos em elásticos e plásticos

$$d\boldsymbol{\epsilon} = d\boldsymbol{\epsilon}_e + d\boldsymbol{\epsilon}_p \quad (4.5)$$

Os incrementos elásticos de deformação se relacionam aos incrementos de tensão através de uma matriz constitutiva elástica e simétrica \mathbf{D} . Substituindo-se a equação (4.2) em (4.5), tem-se

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \left[d\boldsymbol{\epsilon} - \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\lambda \right] \quad (4.6)$$

Substituindo-se a equação (4.4) em (4.3),

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^t d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial k} \boldsymbol{\sigma}^t d\boldsymbol{\varepsilon}_p = 0 \quad (4.7)$$

Substituindo-se $d\boldsymbol{\varepsilon}_p$ da equação (4.2),

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^t d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial k} d\lambda \boldsymbol{\sigma}^t \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad (4.8)$$

Substituindo-se $d\boldsymbol{\sigma}$ da equação (4.6),

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^t \mathbf{D} d\boldsymbol{\varepsilon} - d\lambda \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^t \mathbf{D} \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + d\lambda \frac{\partial F}{\partial k} \boldsymbol{\sigma}^t \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad (4.9)$$

Resolvendo-se para $d\lambda$,

$$d\lambda = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^t \mathbf{D} d\boldsymbol{\varepsilon}}{\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^t \mathbf{D} \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial F}{\partial k} \boldsymbol{\sigma}^t \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \quad (4.10)$$

Substituindo-se $d\lambda$ na equação (4.6),

$$d\boldsymbol{\sigma} = \left[\mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^t \mathbf{D}}{\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^t \mathbf{D} \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial F}{\partial k} \boldsymbol{\sigma}^t \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \right] d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_{ep} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.11)$$

O termo dentro dos colchetes é a matriz constitutiva incremental elasto-plástica. No caso em que $F=Q$, temos a chamada plasticidade associada, onde a matriz constitutiva \mathbf{D}_{ep} é simétrica. No caso de não associatividade, $F \neq Q$, e alguns problemas numéricos surgem pelo fato da matriz constitutiva ser assimétrica, conforme será mostrado em capítulo posterior.

4.3 O Critério de Ruptura de Leon

A resistência triaxial do concreto pode ser descrita pelo critério de ruptura de Leon, Romano (1969), proposto originalmente em 1936 com base na resistência ao cisalhamento do concreto

quando submetido a tensões combinadas de tração e compressão. A formulação combina o critério de dois parâmetros de Mohr-Coulomb com o critério de um parâmetro de Rankine. No caso do modelo de Leon, apenas dois parâmetros são necessários para definir a ruptura do material. Esse critério tem sido bastante usado no campo de mecânica das rochas, onde é conhecido sob os nomes de Hoek e Brown (1980).

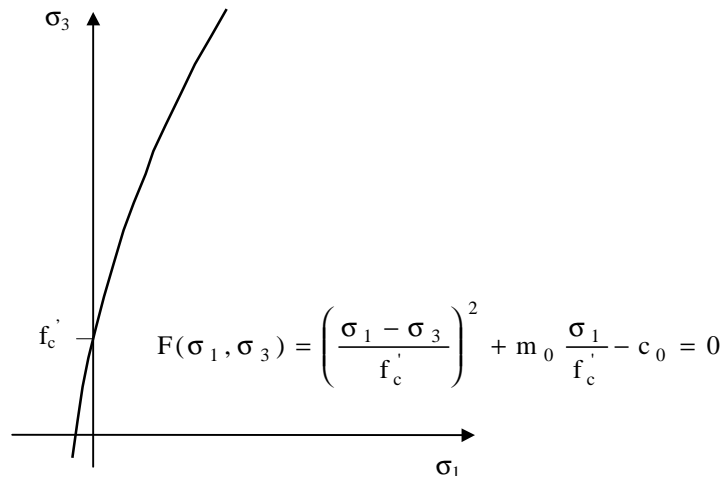
O critério de ruptura é expresso em termos da maior e menor tensão principal

$$F(\sigma) = F(\sigma_1, \sigma_3) = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{f'_c} \right)^2 + m_0 \frac{\sigma_1}{f'_c} - c_0 = 0 \quad (4.12)$$

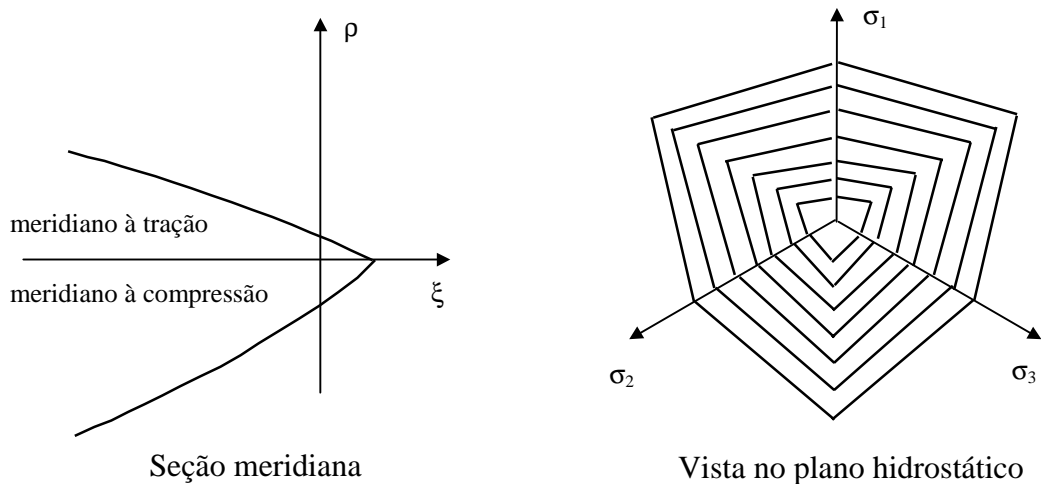
onde considera-se tração com sinal positivo e a coesão $c_0 = 1$ na ruptura, sendo f'_c a tensão limite a compressão. O parâmetro de fricção m_0 pode ser obtido considerando-se o caso de tração uniaxial

$$m_0 = \frac{c_0 f'_c{}^2 - f'_t{}^2}{f'_t f'_c} \quad (4.13)$$

A superfície de ruptura está plotada na Figura 4.1, Pramono (1988). Na vista da superfície de ruptura segundo a direção das tensões hidrostáticas pode-se verificar que, para o caso de tração e compressão com pouco confinamento, o modelo se aproxima do envelope triangular do critério de Rankine. À medida que aumenta a pressão hidrostática o modelo se aproxima da representação hexagonal que caracteriza o critério de Coulomb. Esse comportamento característico da superfície de ruptura do concreto pode ser observado em ensaios experimentais, Chen (1982).



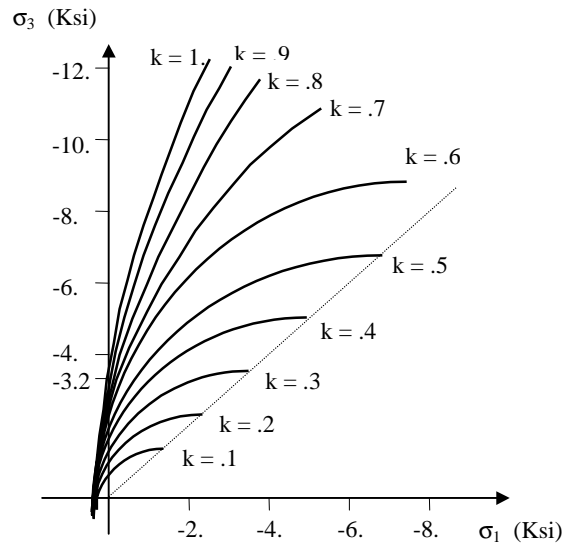
Seção correspondente às tensões principais

**Figura 4.1** - Envelope de ruptura triaxial.

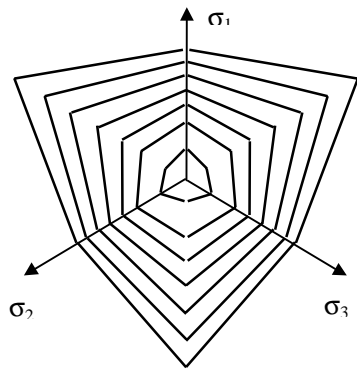
4.4 O Comportamento Pré-Pico

Durante a fase de encruamento do material, o modelo considera que o limite elástico se expande isotropicamente com o aumento das deformações plásticas, na forma de uma superfície fechada na região de compressão, conforme mostrado na Figura 4.2, Pramono (1988). A posição corrente da superfície de escoamento é dada em função do parâmetro de encruamento k , cujo valor pode variar de zero a um, de acordo com a expressão

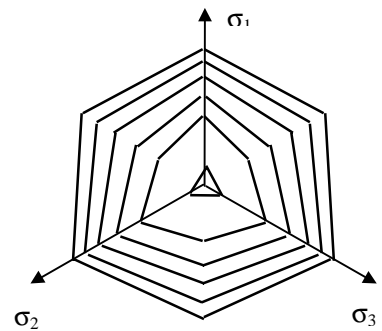
$$F(\sigma_1, \sigma_3, k) = \left[(1-k) \frac{\sigma_1^2}{f'_c} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{f'_c} \right]^2 + k^2 m_0 \frac{\sigma_1}{f'_c} - k^2 c_0 = 0 \quad (4.14)$$



Vista na seção das tensões principais



Vista no plano desviador

Vista de superfície com $k=\text{constante}$ **Figura 4.2** - Superfície de carregamento para modelo isotrópico com encruamento.

O parâmetro de encruamento é expresso como uma função da variação da deformação plástica $k = \bar{k}(\epsilon_p, \chi_p)$, onde χ_p considera a influência do confinamento na taxa de variação do encruamento do material e ϵ_p corresponde ao comprimento da trajetória das deformações plásticas. Assim,

$$k = k_0 + \frac{1 - k_0}{\chi_p} \sqrt{2\epsilon_p \chi_p - \epsilon_p^2} \quad \text{e,} \quad (4.15)$$

$$\chi_p = A_h \left(\frac{\sigma_1}{f'_c} \right)^2 + B_h \frac{\sigma_1}{f'_c} + C_h \quad (4.16)$$

Os parâmetros de ductilidade A_h , B_h e C_h são calibrados através de testes de laboratório para três níveis de confinamento, como tração pura e compressão com níveis de confinamento alto e baixo. O parâmetro de encruamento k_0 corresponde à superfície inicial de carregamento.

Uma lei não-associada é utilizada para se levar em conta a variação de volume durante a deformação plástica do concreto. Nesse caso, a expressão do potencial plástico é similar à definida para a superfície de carregamento

$$Q(\sigma_1, \sigma_3, k, m_Q) = \left[(1-k) \frac{\sigma_1^2}{f'_c} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{f'_c} \right]^2 + k^2 \frac{m_Q}{f'_c} - k^2 c_0 = 0 \quad (4.17)$$

O parâmetro de fricção m_Q é definido em função da maior tensão principal. Assim,

$$\frac{\partial m_Q}{\partial \sigma_1} = D \exp \left[E \left(\frac{-\sigma_1 + f'_t}{f'_c} \right) \right] + F \quad (4.18)$$

onde os parâmetros D, E e F são calibrados através de testes experimentais em que as medidas de dilatação são obtidas para diferentes níveis de confinamento.

4.5 O Comportamento Pós-Pico

O comportamento pós-pico do modelo se baseia em conceitos energéticos de mecânica da fratura. A área sob a curva descendente do diagrama tensão x abertura da fissura, denominada de energia de fraturamento, é atualmente aceita como uma propriedade do material e caracteriza o comportamento pós-pico do concreto para o Modo I de fraturamento.

O modelo pode ser enquadrado dentro dos conceitos de fraturamento distribuído, onde as fissuras discretas são representadas de modo equivalente dentro de determinado contínuo. Devido ao seu caráter isotrópico, no entanto, a deterioração do material com direções estabelecidas para as fissuras (como nos modelos onde a anisotropia é induzida) é substituída pela noção de fissuras com possibilidade de rotação durante a evolução da análise.

O regime de *strain-softening* é delimitado pelo envelope residual, que se une à superfície limite de escoamento no ponto TP, conforme mostrado na Figura 4.3, Pramono (1988). A transição entre as duas superfícies é obtida variando-se os coeficientes de fricção, m_s , e coesão,

c_s , de tal modo que no envelope residual os valores se tornam, respectivamente, $m_s = m_r$ e $c_s = 0$. Portanto, para o estágio pós-pico tem-se a seguinte expressão para a superfície de ruptura

$$F_s(\sigma_1, \sigma_3) = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{f'_c} \right)^2 + m_s \frac{\sigma_1}{f'_c} - c_s = 0 \quad (4.19)$$

com os valores intermediários dos coeficientes de fricção e coesão dados por

$$m_s = m_r - (m_r - m_0)c_s \quad \text{e} \quad c_s = \frac{\sigma_t}{f'_t} \quad (4.20)$$

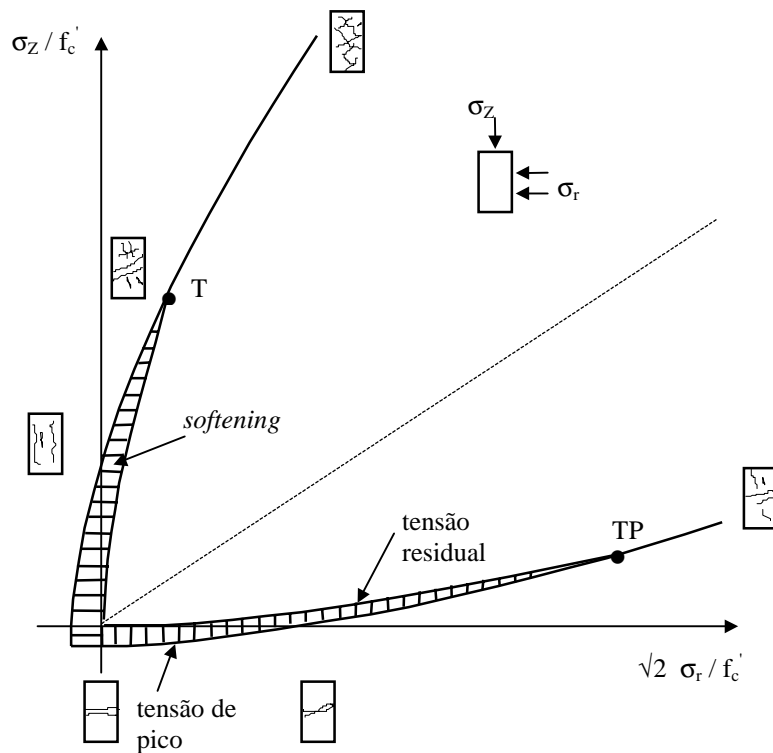


Figura 4.3 - Modos de ruptura triaxial.

A descrição do comportamento de *strain-softening* do material é fornecida por uma curva exponencial, que possui boa aproximação com os testes de Hurlbut (1985) realizados para o caso de tração simples. Assim,

$$\sigma_t = f'_t \exp\left(-5 \frac{u_f}{u_t}\right) \quad (4.21)$$

onde u_f é o deslocamento que corresponde à abertura da fissura, e u_r é o deslocamento de ruptura, que corresponde à abertura da fissura quando não há mais possibilidade de transmissão de esforço entre as superfícies opostas.

A energia de fraturamento corresponde à área sob a curva mostrada na Figura 4.4, Pramono (1988). Tem-se, portanto

$$G_f^I = \int_0^{u_r} \sigma_t du_f \quad (4.22)$$

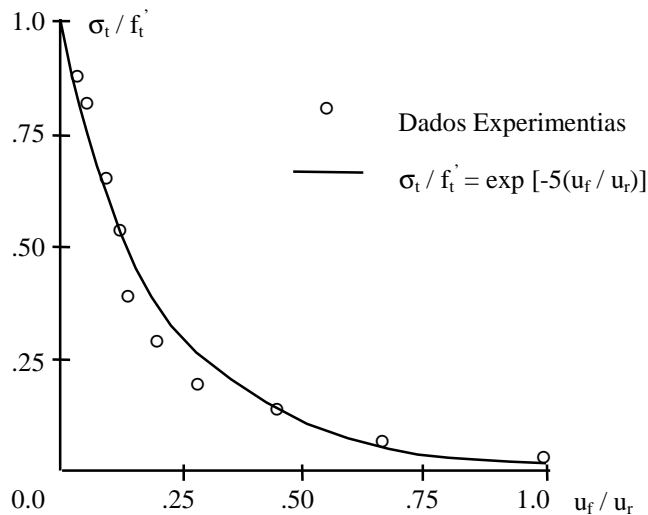


Figura 4.4 - Decréscimo das tensões em tração simples.

O modelo adota uma deformação equivalente de fraturamento à tração ϵ_f , que monitora a deterioração da envoltória triaxial. A relação entre os incrementos de ϵ_f e u_f é dada pela expressão

$$\Delta u_f = h \Delta \epsilon_f \quad (4.23)$$

onde h , o chamado *espaçamento equivalente das fissuras*, é obtido em função da dimensão característica do elemento, h_e , no caso de tração simples, e igualado a h_c nos outros casos, conforme expressão (4.24) adiante.

Esses espaçamentos representam, portanto, um papel fundamental na conexão entre a abertura da fissura e as deformações equivalentes no contínuo, dentro do conceito de

fraturamento distribuído. O modelo define o espaçamento equivalente h_c usando um enfoque energético, que se baseia no fato de que a energia de deformação no regime de tração simples é equivalente à energia no caso de ruptura à compressão. Uma expressão empírica é proposta por Pramono e Willam

$$\frac{G_f^{\text{II}}}{G_f^{\text{I}}} = \frac{h_t}{h_c} = A_s \left(\frac{\sigma_1}{f_c'} - \frac{f_t'}{f_c'} \right)^4 + B_s \left(\frac{\sigma_1}{f_c'} - \frac{f_t'}{f_c'} \right)^2 + 1 \quad (4.24)$$

onde A_s e B_s são parâmetros internos do material determinados experimentalmente e h_t é a altura do corpo de prova utilizado no teste de tração simples, usado como um comprimento de referência.

Essa expressão, no entanto, não foi capaz de reproduzir os resultados experimentais para os casos de concreto de alta resistência sem confinamento ou com um baixo nível de confinamento, de acordo com testes numéricos realizados na Universidade de Alberta. A energia de fraturamento para o concreto a compressão é superestimado nessa expressão, o que torna o modelo numérico mais rígido do que o real.

Baseado em resultados de testes realizados para concreto de alta resistência, Xie, Elwi e MacGregor (1994) propõem uma nova definição para a relação entre as energias de deformação, de acordo com as expressões abaixo

$$\frac{h_t}{h_c} = A_s \sqrt{1 + B_s \frac{\sigma_1}{f_c'}} \quad \text{quando } \sigma_1 < 0 \quad (4.25a)$$

$$\frac{h_t}{h_c} = 1 - (1 - A_s) \left(1 - \frac{\sigma_1}{f_t'} \right)^2 \quad \text{quando } 0 \leq \sigma_1 \leq f_t' \quad (4.25b)$$

Um resumo dos parâmetros usados por Pramono e Willam é apresentado na Tabela 4.1, Pramono (1989), enquanto na Tabela 4.2, Xie *et al.* (1994), são apresentados os resultados obtidos na Universidade de Alberta, que devem ser usados com as expressões (4.25) no lugar da expressão (4.24).

Tabela 4.1 - Parâmetros do material para concreto comum.

$A_h = -0.00117$
$B_h = -0.014$
$C_h = 0.0018$
$A_s = 4.15$
$B_s = 30.5$
$D = 9.9 + 3.9 \exp [-5 (1 - k)]$
$E = -14.7 + 6.7 \exp [-5 (1 - k)]$
$F = -2.0$

Tabela 4.2 - Parâmetros do material para concreto de alta resistência.

Tipo de concreto	A	B	C
E (MPa)	26110	31930	35870
f'_c (MPa)	60.2	92.2	119.0
f'_t (MPa)	4.95	6.36	7.44
G_f' (N/mm)	0.152	0.171	0.191
A_h	0.02142	0.00745	0.01792
B_h	-0.032	-0.036	-0.036
C_h	0.0025	0.0025	0.0022
A_s	24.0	24.0	24.0
B_s	-4	-4	-4

As deformações inelásticas são obtidas pela lei não-associada

$$d\varepsilon_f = m d\lambda \quad \text{onde } m = \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (4.26)$$

O potencial plástico é dado pela expressão

$$Q(\sigma_1, \sigma_3, m_Q) = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{f'_c} \right)^2 + \frac{m_Q}{f'_c} - c_s = 0 \quad (4.27)$$

4.6 Espaçamento Equivalente das Fissuras

Para o modelo de Pramono e Willam o deslocamento limite u_f é ajustado de acordo com a curva da Figura 4.4, de modo que se obtenha a energia de deformação correta para o concreto especificado. A relação entre as deformações plásticas obtidas para o elemento e o deslocamento (ou abertura da fissura) correspondente é dado pela expressão

$$u_f = h \varepsilon_f \quad (4.28)$$

Verifica-se, portanto, ser de fundamental importância a perfeita definição do espaçamento equivalente das fissuras h , para que se tenha um ajuste perfeito da energia de deformação liberada para formação da fissura. Este ajuste deve ser feito para cada elemento da malha no caso de uma discretização automática, onde não há controle direto do analista sobre as dimensões obtidas pelo processo. Pode-se esperar um comportamento mais dúctil da estrutura se o valor h for sub-estimado, e um comportamento mais frágil em caso contrário.

No caso de tração simples o valor de h pode ser obtido em função da dimensão característica do elemento, h_e , enquanto nos outros casos um ajuste é feito para se obter h com base na relação entre as energias de fraturamento para os Modos I e II, conforme descrito no item anterior. Para obtenção de h_e , uma sugestão seria obter o seu valor proporcionalmente à área do elemento finito, o que seria bastante razoável no caso de uma malha bem condicionada, condição que se espera obter através de um bom processo de discretização automática. Pode-se, portanto, adotar para dimensão característica do elemento

$$h_e = \alpha \sqrt{A_e} \quad (4.29)$$

onde o valor de α é igual a 1.0 para elementos quadráticos e igual a $\sqrt{2}$ para elementos lineares, e A_e corresponde à área do elemento, Feenstra (1993).

O espaçamento equivalente das fissuras deve então ser estimado em função de h_e , considerando ainda o tipo e a forma do elemento utilizado, o esquema de integração numérica empregado e o tipo de problema analisado, Feenstra (1993).

Capítulo 5

Formulação do Problema pelo MEF

5.1 Introdução

Na simulação numérica do comportamento de estruturas de concreto alguns aspectos se destacam na formulação do problema pelo método dos elementos finitos. Considerando-se o interesse em obter uma resposta completa do comportamento de determinada estrutura, torna-se de fundamental importância a utilização de procedimentos numéricos que mantenham a estabilidade e convergência da solução, mesmo no regime pós-pico, ou seja, além da carga limite da estrutura.

Para o sistema de equações não-linear um procedimento incremental-iterativo é utilizado para solucionar o problema. Usualmente utiliza-se o método de Newton-Raphson, que lineariza o sistema de equações de equilíbrio a cada incremento de carga. Este método apresenta algumas deficiências e se mostra incapaz de ultrapassar o ponto limite da resposta carga x deslocamento da estrutura. Estas deficiências podem ser superadas com a utilização de técnicas especiais que asseguram a convergência do método. Uma importante incorporação à técnica foi a restrição imposta aos incrementos de deslocamentos, o que resultou no método de comprimento-de-arco (*arc-length*), conforme será visto adiante. Com esta técnica foi possível ultrapassar o ponto limite da resposta carga x deslocamento da estrutura.

Além da estabilidade da solução numérica, deve-se procurar também a convergência dos resultados para a solução analítica do problema que corresponda ao comportamento real da estrutura. Portanto, outros aspectos importantes se referem à obtenção de uma discretização adequada do contínuo e à escolha do elemento finito a ser utilizado. A precisão dos resultados obtidos, além de sensível ao grau de discretização empregado, depende também do tipo e grau do polinômio de interpolação, assim como da ordem da integração numérica utilizada. Estes

aspectos serão tratados adiante com base nos experimentos numéricos desenvolvidos por alguns autores.

5.2 Formulação por Elementos Finitos

Quando se utiliza uma análise incremental, a resposta da estrutura é obtida através de um processo em que a carga total é aplicada em um determinado número de passos. Neste caso uma variável do tempo t é introduzida de tal modo que se possa descrever convenientemente o regime de carregamento e deslocamentos da estrutura. O conceito de tempo é utilizado apenas para que se possa ordenar a seqüência de eventos, uma vez que o comportamento independente do tempo será assumido nesse trabalho.

Assim, considere-se o equilíbrio de um corpo no tempo $t + \Delta t$ expresso em termos dos deslocamentos virtuais. Pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais, a condição necessária e suficiente para o equilíbrio é que o trabalho virtual externo das forças de massa e forças de superfície seja igual ao trabalho virtual interno, para qualquer campo de deslocamentos cinematicamente compatível. Sendo as forças de massa no volume do corpo V dadas por \mathbf{b} , as forças na superfície S representadas por \mathbf{s} e as forças concentradas dadas por \mathbf{F} , tem-se que

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV + \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{s} dS + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} \quad (5.1)$$

onde $\delta \mathbf{u}$ representa o vetor de deslocamentos virtuais admissíveis e $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ a variação do vetor de deformações.

Não havendo equilíbrio, o residual G dado pela expressão abaixo é diferente de zero

$$G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV - \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{s} dS - \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} \quad (5.2)$$

onde \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos com respeito a uma determinada configuração

A solução do problema de equilíbrio $G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = 0$ é obtida através do método de Newton-Raphson, onde uma seqüência de equações linearizadas no intervalo Δt é resolvida até que o residual G se anule dentro de uma precisão pré-estabelecida

$$\frac{\partial G({}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(i)}, \delta \mathbf{u})}{\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(i)}} \Delta \mathbf{u}^{(i+1)} = -G({}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(i)}, \delta \mathbf{u}) \quad (5.3)$$

A notação ${}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(i)}$ denota uma quantidade na iteração de equilíbrio (i) durante o estágio de carregamento $t+\Delta t$. O vetor de deslocamentos é atualizado com o vetor de deslocamentos incremental, o que resulta em

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(i+1)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(i)} + \Delta \mathbf{u}^{(i+1)} \quad (5.4)$$

Diferenciando-se (5.2) e substituindo-se no trecho à esquerda de (5.3), resulta em

$$\frac{\partial G({}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(i)}, \delta \mathbf{u})}{\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(i)}} \Delta \mathbf{u}^{(i+1)} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i)}}{\partial {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}} \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}}{\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(i)}} dV \Delta \mathbf{u}^{(i+1)} \quad (5.5)$$

Pode-se definir a matriz constitutiva tangente como

$${}^{(t+\Delta t)} \mathbf{D}_t^{(i)} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i)}}{\partial {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}} \quad (5.6)$$

e, portanto, o método de N-R pode ser escrito substituindo-se (5.6) e (5.5) em (5.3)

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{D}_t^{(i)} (\mathbf{L} \Delta \mathbf{u}^{(i+1)}) dV = -G({}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(i)}, \delta \mathbf{u}) \quad (5.7)$$

onde \mathbf{L} é o operador diferencial que relaciona as deformações aos deslocamentos.

O vetor incremental de deformações pode ser definido como

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(i+1)} = {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i+1)} - {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} \quad (5.8)$$

podendo ainda ser escrito como

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(i+1)} = \mathbf{L} \Delta \mathbf{u}^{(i+1)} \quad (5.9)$$

Com a substituição de (5.2) e (5.9) em (5.7) e considerando ainda os incrementos de deformações $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ e deslocamentos $\Delta \mathbf{u}$, obtém-se a expressão para o equilíbrio do sistema no tempo $t+\Delta t$

$$\begin{aligned} \int_V \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^T{}^{t+\Delta t} \mathbf{D}_t^{(i)} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(i+1)} dV = \\ - \int_V \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^T{}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i)} dV + \int_V \delta \Delta \mathbf{u}^T{}^{t+\Delta t} \mathbf{b} dV + \int_S \delta \Delta \mathbf{u}^T{}^{t+\Delta t} \mathbf{s} dS + \delta \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} \end{aligned} \quad (5.10)$$

A formulação por elementos finitos é aplicada nesse ponto a fim de aproximar o campo contínuo de deslocamentos no elemento, \mathbf{u} , pelos deslocamentos nodais discretos, representados pelo vetor \mathbf{a} . Os incrementos dos deslocamentos dos nós se relacionam com os incrementos de deslocamentos no elemento através da matriz de interpolação \mathbf{N} , que depende do tipo de elemento que está sendo utilizado. Essa relação é dada por

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \Delta \mathbf{a} \quad (5.11)$$

A relação entre o vetor de deformações incrementais e os incrementos de deslocamentos nodais é feita através da matriz $\mathbf{B} = \mathbf{LN}$, que depende assim da descrição específica do elemento, dada por \mathbf{N} , e da configuração das deformações, dada por \mathbf{L} . Tem-se, portanto

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \Delta \mathbf{a} \quad (5.12)$$

Com (5.11) e (5.12), a equação de equilíbrio (5.10) fica

$$\begin{aligned} \int_V \delta \Delta \mathbf{a}^T \mathbf{B}^T{}^{t+\Delta t} \mathbf{D}_t^{(i)} \mathbf{B} \Delta \mathbf{a}^{(i+1)} dV = \\ - \int_V \delta \Delta \mathbf{a}^T \mathbf{B}^T{}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i)} dV + \int_V \delta \Delta \mathbf{a}^T \mathbf{N}^T{}^{t+\Delta t} \mathbf{b} dV + \int_S \delta \Delta \mathbf{a}^T \mathbf{N}^T{}^{t+\Delta t} \mathbf{s} dS + \delta \Delta \mathbf{a}^T \mathbf{N}^T \mathbf{F} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Como o equilíbrio deve ser mantido para qualquer incremento de deslocamento virtual, as equações de equilíbrio iterativas fornecidas pelo método de N-R para um sistema não-linear discretizado pelo método dos elementos finitos são dadas por

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i)} \Delta \mathbf{a}^{(i+1)} = - \int_V \mathbf{B}^T{}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i)} dV + {}^{t+\Delta t} \mathbf{q} \quad (5.14)$$

onde \mathbf{q} é o vetor de cargas generalizadas

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{q} = \int_V \mathbf{N}^T{}^{t+\Delta t} \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{N}^T{}^{t+\Delta t} \mathbf{s} dS + \mathbf{N}^T \mathbf{F} \quad (5.15)$$

e \mathbf{K} é a matriz de rigidez incremental global dada por

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i)} = \int_V \mathbf{B}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{D}_t^{(i)} \mathbf{B} dV \quad (5.16)$$

A expressão (5.14) pode ainda ser escrita da forma

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i)} \Delta \mathbf{a}^{(i+1)} = -{}^{t+\Delta t} \mathbf{g}^{(i)} \quad (5.17)$$

onde \mathbf{g} é o vetor de cargas desequilibradas dado por

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{g}^{(i)} = \int_V \mathbf{B}^T {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i)} dV - {}^{t+\Delta t} \mathbf{q} \quad (5.18)$$

O vetor de cargas total é aplicado de modo incremental em várias etapas, e o equilíbrio é obtido dentro de cada etapa através de um processo iterativo. O método de N-R pode ser descrito

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i)} \Delta \mathbf{a}^{(i+1)} = {}^{t+\Delta t} \Delta \mu^{(i+1)} \mathbf{q}^* + \mathbf{p}^{(i)} \quad (5.19)$$

com ${}^{t+\Delta t} \Delta \mu^{(i+1)}$ correspondendo ao fator de carga incremental na iteração $(i+1)$, em relação a um vetor de referência das cargas externas \mathbf{q}^* . O vetor \mathbf{p} é definido como

$$\mathbf{p}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mu^{(i)} \mathbf{q}^* - \int_V \mathbf{B}^T {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i)} dV \quad (5.20)$$

com ${}^{t+\Delta t} \mu^{(i)}$ sendo o fator de carga total ao final da iteração i .

Uma parte crucial do procedimento incremental-iterativo corresponde à escolha do fator de carga inicial, que deve se adaptar ao comportamento específico da estrutura. Se a escolha é feita de modo adequado, a convergência do método é em geral quadrática. O procedimento padrão do método, através do controle de carga onde os fatores de carga iniciais são mantidos constantes durante as iterações de equilíbrio, não é muito eficiente e falha antes de alcançar o ponto limite. A fim de superar essa deficiência, uma restrição foi imposta às equações não-lineares de equilíbrio, com a forma

$$f(\beta \Delta \mu, \Delta \mathbf{a}) = 0 \quad (5.21)$$

onde o fator escalar β reflete a influência do fator de carga na restrição.

Essa técnica, introduzida por Riks (1970) e Wempner (1971) e denominada de comprimento-de-arco, possibilita ultrapassar o ponto limite e prosseguir na análise mesmo quando ocorre o comportamento de *snap-back*, ou seja, mesmo quando a um decréscimo do carregamento corresponde também um decréscimo nos deslocamentos. Na formulação geral deve-se distinguir entre o vetor tangencial à configuração de equilíbrio $\mathbf{t}^{(i)}$ e o vetor de atualização $\mathbf{n}^{(i+1)}$. As expressões para os dois vetores, conforme pode ser visto na Figura 5.1, são

$$\begin{aligned}\mathbf{t}^{(i)} &= (\mathbf{d}\mathbf{a}^{(i)}, \beta d\mu^{(i)})^T \\ \mathbf{n}^{(i+1)} &= (\Delta\mathbf{a}^{(i+1)}, \beta\Delta\mu^{(i+1)})^T\end{aligned}\quad (5.22)$$

onde $\mathbf{d}\mathbf{a}$ corresponde ao vetor de incrementos totais de deslocamentos, atualizado de acordo com

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{d}\mathbf{a}^{(i+1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{d}\mathbf{a}^{(i)} + \Delta\mathbf{a}^{(i+1)} \quad (5.23)$$

e $\Delta\mu$ corresponde à variação do fator de carga da iteração i para a iteração $i+1$, obtido por

$${}^{t+\Delta t}\Delta\mu^{i+1} = {}^{t+\Delta t}d\mu^{i+1} - {}^{t+\Delta t}d\mu^i \quad (5.24)$$

O produto escalar entre o vetor tangencial e o vetor de atualização fornece o residual $\mathbf{R}^{(i+1)}$, que pode ser interpretado como a projeção de \mathbf{n} em \mathbf{t} , conforme mostrado na Figura 5.1. Assim,

$$\mathbf{R}^{(i+1)} = \mathbf{d}\mathbf{a}^{(i)}\Delta\mathbf{a}^{(i+1)} + \beta^2 d\mu^{(i)}\Delta\mu^{(i+1)} \quad (5.25)$$

Na resolução do sistema utilizando-se um controle dos deslocamentos, uma simplificação bastante útil foi introduzida por Batoz e Dhett (1979) quando o vetor de deslocamentos incrementais foi decomposto em duas partes

$$\begin{aligned}\Delta^I\mathbf{a}^{(i+1)} &= \mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}^{(i)} \\ \Delta^{II}\mathbf{a}^{(i+1)} &= \mathbf{K}^{-1}\mathbf{q}^*\end{aligned}\quad (5.26)$$

o que resulta em

$$\Delta\mathbf{a}^{(i+1)} = \Delta^I\mathbf{a}^{(i+1)} + {}^{t+\Delta t}\Delta\mu^{(i+1)}\Delta^{II}\mathbf{a}^{(i+1)} \quad (5.27)$$

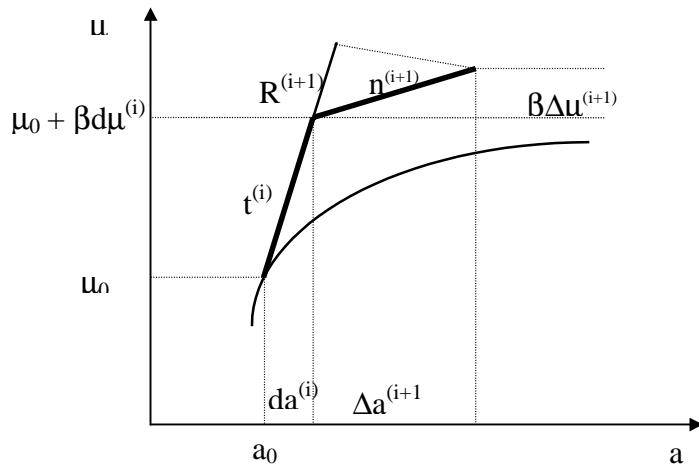


Figura 5.1 - Formulação geral para as equações de restrição.

Essa técnica foi introduzida simultaneamente por Crisfield (1981) e Ramm (1981) no algoritmo de Riks e Wempner que assumiu assim uma forma apropriada para o método dos EF, uma vez que preserva a estrutura em banda do sistema de equações.

Considerando-se a expressão (5.27) em (5.25), obtém-se

$${}^{t+\Delta t} \Delta \mu^{(i+1)} = \frac{\mathbf{R}^{(i+1)} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{d}\mathbf{a}^{(i)T} \Delta \mathbf{a}^{(i+1)}}{{}^{t+\Delta t} \mathbf{d}\mathbf{a}^{(i)T} \Delta \mathbf{a}^{(i+1)} + \beta^2 d\mu^{(i)}} \quad (5.28)$$

A Figura 5.2 esclarece a notação utilizada nessa explanação. O fator escalar β , que reflete a influência do fator de carga na restrição, foi demonstrado como tendo pouca influência na convergência dos resultados, podendo então ser desconsiderado e assumido como igual a zero.

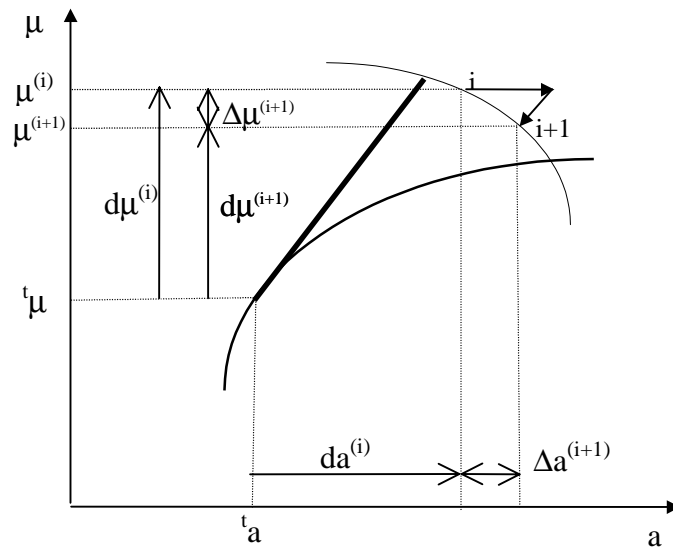


Figura 5.2 - Método de N-R com restrição.

Diferentes formulações para o residual R na equação (5.28) foram propostas na literatura. No método proposto por Ramm (1981), baseado na ortogonalidade entre o vetor tangente e o vetor que atualiza os incrementos de deslocamentos, $R=0$ e, portanto, o incremento do fator de carga fica

$${}^{t+\Delta t}\Delta\mu^{(i+1)} = -\frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{da}^{(i)T} \Delta^I \mathbf{a}^{(i+1)}}{{}^{t+\Delta t}\mathbf{da}^{(i)T} \Delta^II \mathbf{a}^{(i+1)}} \quad (5.29)$$

Este caso de ortogonalidade é possível em dois casos; (i) o vetor \mathbf{n} permanece ortogonal ao vetor tangente inicial, denominado *método do plano normal*, conforme exemplificado na Figura 5.3 e (ii) o vetor \mathbf{n} é ortogonal ao vetor tangente atualizado a cada interação, denominado *método do plano normal atualizado*, conforme mostrado na Figura 5.4.

No caso de uma localização muito forte de deformações, esse processo pode ainda falhar devido ao fato de que as equações de restrição são baseadas nos deslocamentos atribuídos a todos os graus de liberdade da estrutura. Para superar esse problema, De Borst (1986) propôs restringir o número de deslocamentos utilizados na equação de restrição, o que foi denominado de *método de controle indireto dos deslocamentos*. Esse método foi utilizado com sucesso em análises com considerações de propagação de fissuras distribuídas. Uma desvantagem de sua utilização reside no fato de que os graus de liberdade dominantes devem ser escolhidos *a priori*, e fica assim dependente do problema em estudo.

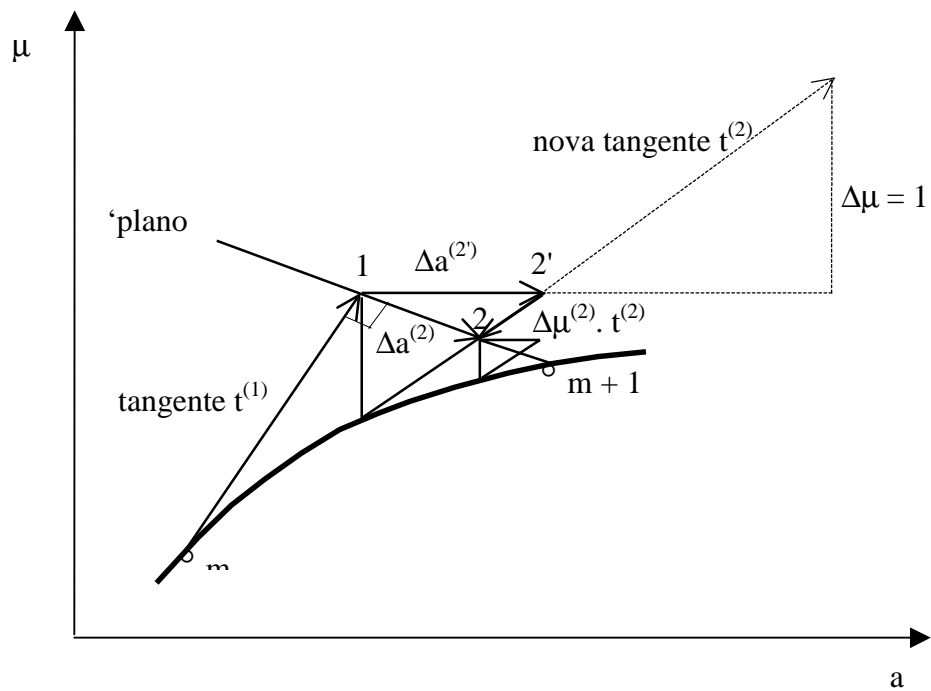


Figura 5.3 - Método do plano normal.

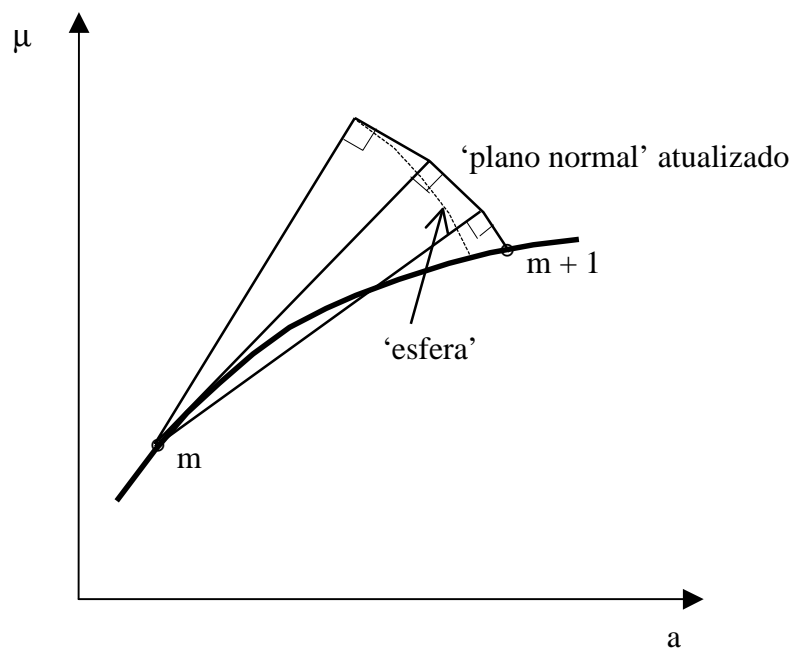


Figura 5.4 - Método do plano normal atualizado.

5.3 Bifurcação e Ponto Limite

Uma estrutura pode ser definida como em estado de equilíbrio estável enquanto é verdadeira a condição abaixo para todos os vetores $\dot{\mathbf{e}}$ cinematicamente admissíveis

$$\int_V \dot{\mathbf{e}}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} dV > 0 \quad (5.30)$$

O ponto sobre a variável significa a derivada em relação ao tempo.

No caso da expressão acima ser igual a zero para, pelo menos, um dos vetores $\dot{\mathbf{e}}$, o sistema é dito em estado crítico de equilíbrio neutro. Pode-se escrever a integral (5.30) da seguinte forma

$$\int_V \dot{\mathbf{e}}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} dV = \int_V \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \dot{\mathbf{a}} dV = \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{a}} \quad (5.31)$$

Assim, o sistema discreto se encontra em estado de equilíbrio estável se a condição abaixo for satisfeita para todos os vetores $\dot{\mathbf{a}}$

$$\dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{a}} > 0 \quad (5.32)$$

e se encontra em estado crítico de equilíbrio neutro no caso dessa expressão ser igual a zero, ou seja

$$\dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{a}} = 0 \quad (5.33)$$

para, pelo menos, um vetor $\dot{\mathbf{a}}$ admissível. Uma condição suficiente para que a equação seja satisfeita seria, portanto

$$\det(\mathbf{K}) = 0 \quad (5.34)$$

que corresponde a se atingir o ponto limite, ou capacidade máxima de carregamento da estrutura, obtido no espaço carga x deslocamento.

De modo equivalente, a condição (5.34) é obtida quando pelo menos um dos autovalores de \mathbf{K} se anula. Procedendo-se à análise incremental do sistema, é extremamente improvável que se obtenha o ponto exato onde a matriz de rigidez se torna singular. O mais provável é que se ultrapasse esse ponto limite, quando então é possível observar que o menor autovalor terá se tornado negativo. A partir deste estágio, a carga deverá ser subsequentemente decrementada de modo a que se possa traçar a curva descendente do diagrama carga x deslocamento, Rots (1988).

Um valor negativo para o autovalor de \mathbf{K} não implica necessariamente que se tenha ultrapassado o ponto limite, o que é verdadeiro apenas no caso de uma matriz simétrica. Este valor negativo pode também sinalizar que se ultrapassou um ponto de bifurcação, a partir do qual o sistema passa a apresentar uma variada possibilidade de configurações de equilíbrio. Em alguns casos esta bifurcação é explicada a partir do modelo constitutivo utilizado em conjunto com as condições de contorno do problema, enquanto em outros casos pode ser atribuída ao comportamento espúrio dos elementos finitos, Rots (1988).

No caso de matrizes não-simétricas a instabilidade do sistema de equações pode ocorrer antes que se obtenha um autovalor menor do que zero. O tipo de instabilidade para a qual (5.31) é verdadeira para, pelo menos, um determinado vetor $\hat{\mathbf{a}}$, mas todos os autovalores permanecem positivos, pode ser chamada de instabilidade tipo oscilante (*flutter*), e não corresponde necessariamente a uma bifurcação ou a um comportamento instável pós-pico. De Borst (1986) demonstra em seu trabalho que a possibilidade de se obter a condição (5.31) com todos os autovalores positivos é perfeitamente possível no caso de sistemas não-simétricos, e que essa condição realmente ocorre para alguns modelos de plasticidade com uma lei não-associada.

5.4 Considerações sobre a Dimensão do Elemento Finito

Na teoria dos materiais aleatoriamente não-homogêneos, como no caso do concreto, as tensões e deformações podem ser tratados como em um contínuo homogêneo adotando-se uma média das microtensões e microdeformações sobre o volume correspondente. Esse volume deve ser suficientemente grande comparado com o tamanho das não-homogeneidades, ou seja, deve ser

várias vezes maior do que o tamanho do maior agregado graúdo empregado na mistura, Bazant (1985).

Na análise por EF, portanto, não faz sentido se utilizarem elementos menores do que várias vezes o tamanho do agregado graúdo, de modo que se possa obter uma representação adequada do contínuo correspondente. Também não faz sentido se procurar um maior refinamento da malha na região da fissura, uma vez que a propagação da fissura depende essencialmente do fluxo de energia na zona de fraturamento, o que é uma característica da estrutura como um todo, e depende muito pouco da distribuição detalhada das tensões e deformações nessa região, Bazant (1985).

Em função das características da zona de fraturamento, com sua forma alongada onde exhibe um comportamento plástico com deterioração do material e tensão máxima não superior a f'_t , verifica-se que não há necessidade de se usarem elementos singulares para representação do campo de tensões nessa região. O uso de elementos singulares somente faz sentido se o elemento for, pelo menos, 20 vezes o tamanho do agregado, que é uma dimensão muito grande para a maioria das aplicações, por não representar corretamente a espessura da zona de fraturamento, Bazant (1985).

A definição de uma dimensão adequada para os elementos torna-se importante dentro dos processos baseados no conceito de fissura distribuída. Para o modelo idealizado por Bazant e Cedolin (1979), ao se otimizarem os resultados obtidos concluiu-se que o valor ideal para a espessura da zona de fraturamento se situava em torno de três vezes o diâmetro do agregado, o que corresponderia à dimensão ideal do elemento finito utilizado nessa região. Esse valor, para o qual a área sobre a curva tensão x deformação fornecia o valor correto de energia necessária para desenvolvimento da fissura, se mostrou aplicável para todos os testes realizados, fazendo com que os valores obtidos pela análise numérica correspondessem mais precisamente aos resultados experimentais.

5.5 Tipo de Elemento e Ordem de Integração

A escolha do tipo de elemento e ordem de integração a ser adotada na análise mereceu a consideração de vários autores. Vários elementos foram testados por De Borst (1986) e Rots (1988) e um resumo das conclusões obtidas nesses estudos é apresentado adiante.

Na comparação entre elementos quadriláteros e triangulares, alguns autores parecem motivados pelo uso de elementos triangulares pela completude dos polinômios de interpolação nestes elementos, uma vez que a interpolação nos elementos quadriláteros envolve termos suplementares que podem levar a deformações espúrias.

Modos de deformação espúrios em problemas utilizando modelos de fraturamento distribuído com consideração de *strain-softening* foram identificados inicialmente para elementos quadriláteros com ordem de integração reduzida, o que foi possível corrigir ao se usar o mesmo elemento com ordem de integração completa. Mais recentemente, modos espúrios foram reportados mesmo com a utilização de uma ordem de integração plena, Rots e De Borst (1987), De Borst e Blaauwendraad (1988). No trabalho de Rots, esse mesmo problema foi identificado para elementos triangulares lineares com um ponto de integração e também para elementos quadráticos com seis nós e sete pontos de integração.

De acordo com as experiências desenvolvidas por Rots, os modos espúrios parecem mais suscetíveis ao modelo constitutivo utilizado do que propriamente ao elemento finito empregado na análise. Neste caso, a declividade empregada no diagrama *strain-softening*, a orientação das fissuras e a ocorrência de deterioração multidirecional parecem representar o papel mais importante. Nos casos onde se usou o conceito de fraturamento distribuído com direção fixa das fissuras o problema se mostrou mais sensível do que no caso desse mesmo modelo com possibilidade de rotação das fissuras. Isso é explicado pelo fato de que, ao se fixar a direção de *softening*, fixa-se também os modos espúrios. Ao se permitir a rotação das fissuras, um modo espúrio que aparece em determinada etapa da análise pode vir a desaparecer em um estágio posterior do processo devido à contínua mudança na direção da deterioração do material.

A conclusão de Rots é pela necessidade da utilização de técnicas que estabilizem o processo de análise. De acordo com suas experiências, os problemas com modos espúrios diminuem à medida que cresce a razão entre o número de pontos de integração utilizados e o número de graus de liberdade do sistema.

Nos testes numéricos processados por De Borst chega-se à mesma conclusão acima, obtida por Rots. Em alguns testes realizados não se conseguiu obter a convergência do sistema mesmo se impondo pequenos incrementos de deslocamento, o que só foi possível corrigir com a utilização de uma ordem de integração completa. Outros testes indicam que comportamentos espúrios de *snap-back* e divergência na solução numérica gradualmente desaparecem à medida que a malha se torna mais refinada.

Capítulo 6

Inserção e Propagação da Fissura Discreta a Partir do Processo de Fraturamento Distribuído

6.1 Introdução

Os modelos numéricos de análise pelo MEF que consideram o fraturamento de estruturas de concreto podem ser divididos naqueles denominados de *fraturamento discreto*, onde uma descontinuidade geométrica é inserida na malha, e naqueles denominados de *fraturamento distribuído*, onde múltiplas fissuras são supostas de ocorrerem em um contínuo correspondente. Os modelos discretos tratam o processo de fraturamento adaptando a geometria da estrutura enquanto mantêm o seu interior linear-elástico. Os modelos distribuídos, por outro lado, mantêm a geometria fixa e simulam o processo de fraturamento inteiramente através da lei constitutiva, Feenstra e De Borst (1995). Os dois processos são usualmente encarados como linhas de pesquisa distintas, e cada um deles possui defensores ardorosos dentro da comunidade científica, que procuram enfatizar vantagens de um em relação ao outro na simulação mais realista do processo de fraturamento. O que se argumenta, de modo geral, é que, enquanto a natureza das fissuras é violada pelo processo distribuído, a implementação do MEF é dificultada pelo processo discreto quando se impõem modificações na topologia da malha. As principais vantagens e desvantagens de ambos os processos estão relacionadas a seguir.

Processo de Fraturamento Discreto

Vantagens:

- Modela realisticamente o processo de fraturamento.
- Efeitos como a ancoragem do aço no concreto e as restrições impostas pelos agregados nos deslocamentos por cisalhamento podem ser considerados de modo mais natural.

Desvantagens:

- Exige uma constante modificação na topologia da malha.
- É necessária uma reestruturação do sistema de equações e uma completa reavaliação no campo de tensões e deformações, em função das alterações feitas na malha.
- A direção e o comprimento das fissuras devem ser estimados *a priori* e mantidos constantes durante as etapas de análise.

*Processo de Fraturamento Distribuído**Vantagens:*

- A topologia da malha não é alterada, mantendo-se a continuidade do campo de deslocamentos durante todo o processo, o que vem ao encontro da própria natureza do MEF.
- A rotação dos eixos principais da fissura durante a análise pode ser permitida.

Desvantagens:

- Não é capaz de modelar a superfície correspondente à fissura.
- Dependendo do critério adotado para simular o comportamento de *strain-softening*, o processo de análise fica dependente da malha utilizada.
- No caso de se utilizar o conceito de balanço energético, o espaçamento equivalente das fissuras, conforme (4.23), deve ser controlado de modo a se ter uma liberação de energia que corresponda à formação da fissura discreta.

Uma combinação dos dois processos através de um modelo onde a análise se desenvolve com fraturamento distribuído, e possibilita a inserção de fissuras discretas à medida que as deformações se localizam, pode não incorporar simultaneamente as vantagens por eles apresentadas, mas algumas desvantagens podem ser eliminadas. A rotação dos eixos da fissura durante a fase pós-pico, por exemplo, pode ser mantida até a inserção da descontinuidade na malha, eliminando-se uma das desvantagens do processo discreto que mantém fixa a direção da fissura inserida no início da etapa de análise.

As outras desvantagens alegadas para o processo discreto, ou sejam, a necessidade de uma constante redefinição da malha, da reestruturação do sistema de equações e de uma completa reavaliação do campo de tensões e deformações, perdem a sua importância face às técnicas de

geração automática de malhas e gerenciamento de dados desenvolvidas nos últimos anos, Martha (1989), Bittencourt *et al.* (1996).

A principal desvantagem alegada para o processo de fraturamento distribuído, ou seja, a impossibilidade de modelar a superfície correspondente à fissura pode ser eliminada com a combinação dos dois processos. A dependência da malha pode ser eliminada utilizando-se um critério de deterioração do material baseado na energia de fraturamento e um controle efetivo sobre o espaçamento equivalente das fissuras com base em experimentos numéricos.

Uma outra desvantagem do processo distribuído se refere ao bloqueio das tensões quando ocorre a localização das deformações, conforme constatado por Rots (1988). Este bloqueio ocorre devido à compatibilidade de deslocamentos e é induzida pelo elemento onde as deformações se localizam para os elementos vizinhos. A introdução da descontinuidade promove o alívio das tensões nos elementos vizinhos às faces da fissura e quebra a propagação dos modos espúrios de deformação.

Como já foi ressaltado no capítulo inicial deste trabalho, a utilização do processo de fraturamento discreto em problemas de macro estrutura onde ocorre o aparecimento de múltiplas fissuras, como numa viga de concreto armado de dimensões e detalhamento usuais, por exemplo, não tem significado prático. Os problemas para os quais o modelo aqui proposto se aplica, portanto, seriam aqueles relativos a peças de concreto simples, peças sub-armadas ou com singularidades não protegidas por armadura e estruturas com grande massa de concreto, onde possa ocorrer forte localização das deformações.

6.2 Eliminação da Dependência da Malha com o Uso da Energia de Fraturamento

A eliminação da dependência da malha, ao se utilizar um critério de deterioração do material baseado na energia de fraturamento, pode ser mostrado através do exemplo apresentado por De Borst (1986). Neste exemplo, uma barra submetida a uma carga axial de tração é dividida em m elementos, como mostrado na Figura 6.1. O diagrama tensão x deformação referente a cada elemento é apresentado na Figura 6.2.

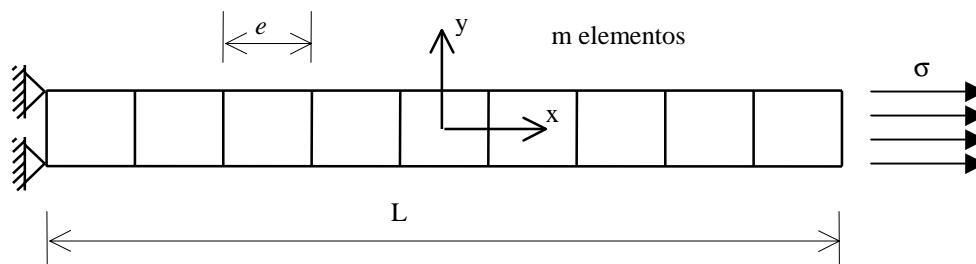


Figura 6.1 - Barra submetida a esforço axial.

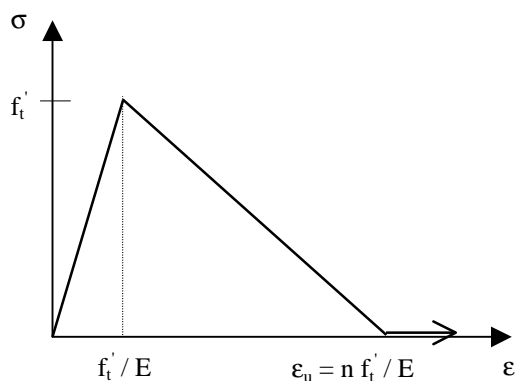


Figura 6.2 - Diagrama tensão x deformação.

Na fase pré-pico, correspondente à fase elástica, a relação tensão x deformação é dada por

$$\sigma = E\varepsilon^e \quad (6.1)$$

e, portanto

$$\varepsilon^e = E^{-1}\sigma \quad (6.2)$$

onde ε^e corresponde à deformação elástica, recuperada pelo sistema ao se descarregar a estrutura, e E o módulo de elasticidade do material.

Para a fase pós-pico, a deformação é dada por

$$\varepsilon^i = r^{-1}(\sigma - f_t') \quad (6.3)$$

onde r é o módulo de deterioração do material (*softening modulus*) dado por

$$r = -\frac{f'_t}{\varepsilon_u} \quad (6.4)$$

Nesta última expressão ε_u corresponde à deformação de ruptura do material, igual a n vezes a deformação elástica correspondente a f'_t . Tem-se portanto

$$\varepsilon_u = n \frac{f'_t}{E} \quad (6.5)$$

Supondo-se que um dos elementos tenha uma tensão limite ligeiramente inferior a f'_t , ao se atingir esta tensão o processo de deterioração se inicia neste elemento, enquanto os restantes apresentam um descarregamento dentro do regime elástico. Neste caso, a deformação média é dada por

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon^e + \frac{\varepsilon^i}{m} \quad (6.6)$$

Substituindo-se (6.2) e (6.3) na expressão acima, tem-se

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma - f'_t}{mr} \quad (6.7)$$

Considerando-se agora as relações (6.4) e (6.5) em (6.7), obtém-se

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sigma}{E} + \frac{n(f'_t - \sigma)}{mE} \quad (6.8)$$

A declividade no regime pós-pico pode, então, ser obtida através da expressão acima. Assim,

$$\frac{\Delta \bar{\varepsilon}}{\Delta \sigma} = \frac{1}{E} - \frac{n}{mE} \quad (6.9)$$

Como pode ser observado, a declividade pós-pico é dependente do número m de elementos na malha. Esta dependência é mostrada na Figura 6.3, onde a curva descendente se torna mais inclinada à medida que cresce o número de elementos na malha. No caso de um número infinito de elementos, esta curva coincidirá com a curva ascendente correspondente ao regime elástico, o que implica na ruptura do material sem que haja dissipação de energia.

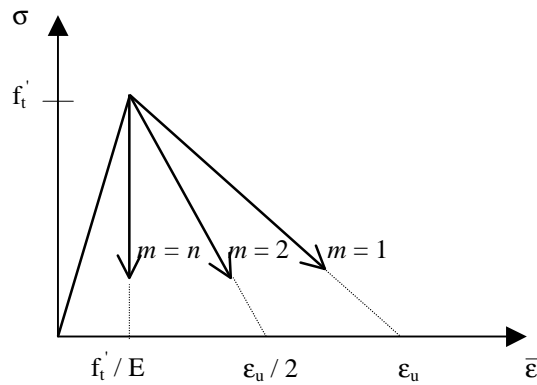


Figura 6.3 - Resposta da estrutura em termos da deformação média.

A área sob a curva da Figura 6.2, no entanto, pode ser considerada como uma propriedade do material. Esta área, multiplicada pela largura da zona de fraturamento, corresponde à energia necessária para formação de uma superfície de fissura de área unitária. Considerando-se a curva para o regime pós-pico conforme a Figura 6.2, obtém-se então a expressão para a energia de fraturamento

$$G_f = \frac{f'_t \epsilon_u e}{2} \quad (6.10)$$

onde e é a dimensão do elemento mostrada na Figura 6.1, correspondente à largura da zona de fraturamento.

A inclinação pós-pico, repetindo (6.4), é então dada por

$$r = -\frac{f'_t}{\epsilon_u} \quad \text{ou} \quad (6.11)$$

$$r = -\frac{f_t'^2 e}{2G_f} \quad (6.12)$$

Observando-se pela Figura 6.1 que $e = L/m$, onde L é o comprimento total da barra, temos para r a seguinte expressão

$$r = -\frac{f_t'^2 L}{2mG_f} \quad (6.13)$$

A deformação média, repetindo (6.7), é dada por

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma - f_t'}{mr} \quad (6.14)$$

Após a substituição de (6.13) na expressão acima, obtém-se

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sigma}{E} + \frac{(f_t' - \sigma)2G_f}{f_t'^2 L} \quad (6.15)$$

Observe-se que, agora, a deformação média independe do número de elementos m . Obtém-se, então, para a declividade pós-pico a seguinte expressão

$$\frac{\Delta \bar{\varepsilon}}{\Delta \sigma} = \frac{1}{E} - \frac{2G_f}{f_t'^2 L} \quad (6.16)$$

A introdução da energia de fraturamento na formulação eliminou a dependência da malha, conforme pode ser visto ao se comparar as expressões (6.9) e (6.16). Por outro lado, a declividade da curva descendente passa agora a depender da dimensão L da estrutura. Introduziu-se, assim, o chamado efeito das dimensões da estrutura (*size effect*), que corresponde ao observado nos ensaios experimentais.

6.3 Um Critério de Energia para Inserção da Fissura Discreta

A utilização dos conceitos desenvolvidos por Hillerborg, Modéer e Petersson (1976) para a mecânica da fratura não-linear do concreto possibilitou o desenvolvimento de vários modelos numéricos, capazes de simular com bastante precisão o comportamento de peças estruturais de concreto simples e armado de dimensões usuais. Anteriormente a estes desenvolvimentos, tentou-se, sem sucesso para estes casos, a utilização dos conceitos da mecânica da fratura linear elástica, que previam a liberação das tensões nas faces da fissura uma vez atingida a tensão limite do material, enquanto os ensaios mostravam um diagrama não-linear caracterizado por uma curva fortemente descendente no início do comportamento pós-pico e uma longa cauda no final do diagrama, conforme mostrado anteriormente na Figura 3.2, Bazant (1985).

Como já foi visto no item 3.1, a área sob o diagrama da Figura 3.2 é denominada de energia de fraturamento e representa a energia consumida para formação da fissura por unidade de área no plano de fraturamento. Repetindo-se a expressão (3.1)

$$G_f = \int_0^{w_c} \sigma dw \quad (6.17)$$

Um critério para se escolher o momento de inserir a fissura discreta nos pontos de localização das deformações, pode tomar como parâmetro esta energia de fraturamento. Considerando-se G a energia dissipada por deterioração do material, as situações são as seguintes:

- a) $G < G_f \rightarrow$ Formação de microfissuras. Prossegue-se com a análise com fraturamento distribuído.
- b) $G = G_f \rightarrow$ As microfissuras se juntam para formar uma microfissura. Inserção e propagação da fissura discreta.

Observe-se que, teoricamente, a instabilidade só ocorre para $G > G_f$. A situação $G = G_f$ corresponderia ao estado metaestável.

A fissura discreta, com total liberação das tensões de tração entre as suas faces, pode então ser relacionada aos pontos de Gauss que atingem o estágio b) acima. O comprimento da fissura pode ser obtido em função da dimensão característica do elemento correspondente. Para a direção da descontinuidade pode ser usado o critério de Erdogan e Sih (1963), segundo o qual a fissura se desenvolve na direção perpendicular à máxima tensão principal. Um histórico das últimas inclinações da tensão principal, antes de se atingir a completa deterioração do material, determina a direção a ser adotada.

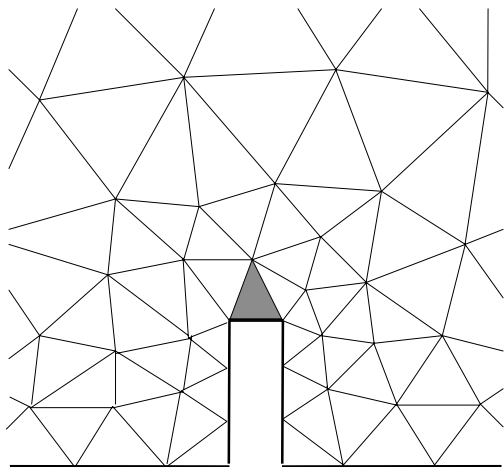
Deve ser enfatizado que a situação onde a energia de fraturamento G se iguala a G_f corresponde à situação em que não existe tensão normal de tração entre as faces da fissura. A metodologia detalhada para inserção e propagação da fissura discreta, proposta com base neste critério, é apresentada no item seguinte.

6.4 Metodologia para Inserção e Propagação da Fissura Discreta

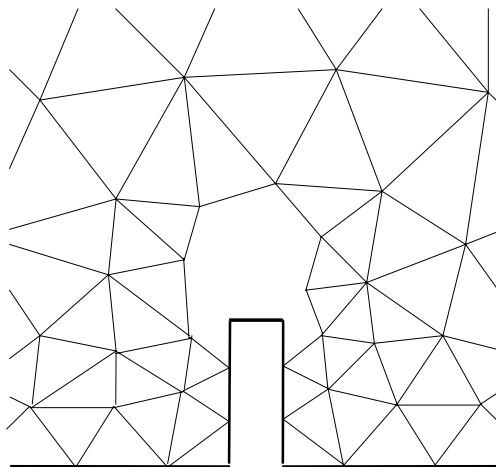
A inserção ou propagação da fissura discreta implica na rediscritização de um trecho do domínio, na atualização do campo de tensões e deformações e parâmetros plásticos dependentes da história do carregamento, e também na reestruturação do sistema de equações para prosseguimento da análise. A seqüência de inserção da fissura inicial é apresentada a seguir e exemplificada na Figura 6.4 para o caso do elemento triangular linear T3.

- a) Identificação do elemento (ponto de Gauss) onde as tensões de tração se anulam no regime pós-pico de comportamento do material.
- b) Eliminação do elemento identificado e de todos os elementos no seu entorno. Determinação da região a ser rediscritizada.
- c) Inserção da fissura discreta correspondente ao elemento identificado. A direção da fissura é obtida pelo histórico das tensões principais. Com esta direção, traça-se pelo ponto de Gauss identificado uma reta e determina-se a sua interseção no contorno do modelo estrutural. O nó do contorno mais próximo desta interseção é escolhido como nó de partida da fissura. O comprimento da fissura é determinado em função da dimensão característica do elemento.
- d) Rediscritização da região no entorno da fissura.
- e) Atualização do campo de tensões e deformações e parâmetros plásticos nesta região. Reestruturação do sistema de equações.
- f) Prosseguimento da análise.

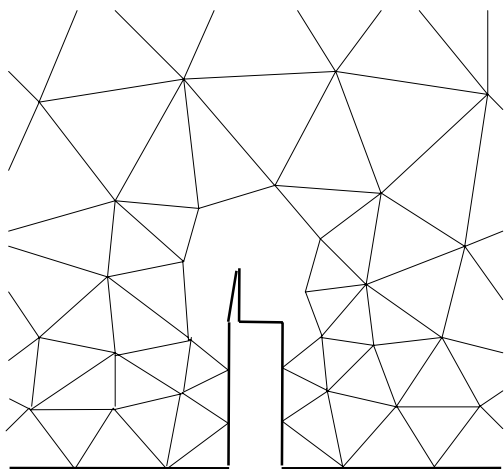
Para propagação da fissura a metodologia é a mesma apresentada acima para inserção. Apenas, neste caso, o posicionamento da extensão da fissura fica condicionado ao nó do elemento identificado que corresponde à extremidade da fissura existente. A Figura 6.5 exemplifica o que foi dito, com a propagação da fissura em seqüência à inserção mostrada na Figura 6.4.



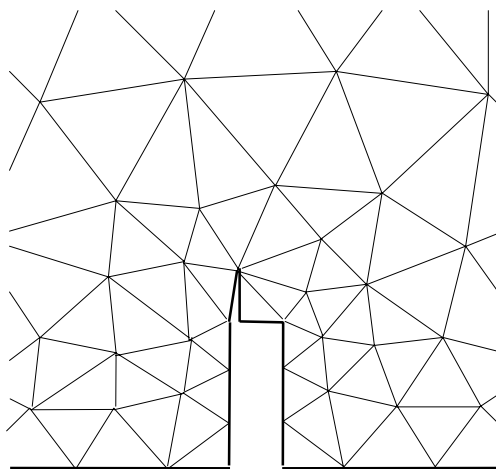
a) **Identificação do elemento** (ponto de Gauss) onde as tensões se anulam.



b) **Eliminação do elemento identificado** e de todos os elementos no seu entorno. Determinação da região a ser discretizada.

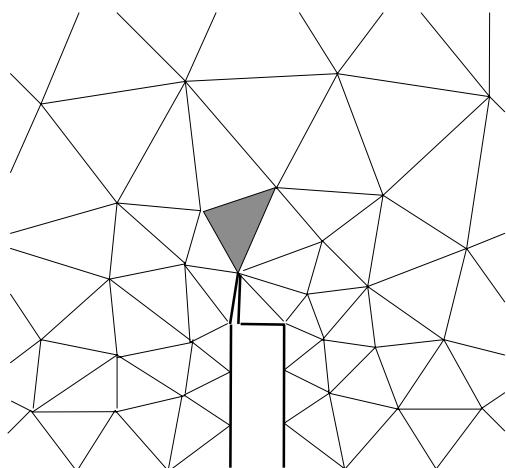


c) **Inserção da fratura discreta:** Direção obtida pelo histórico das tensões principais. Posição obtida em função do ponto de Gauss. Comprimento determinado em função da dimensão característica do elemento.

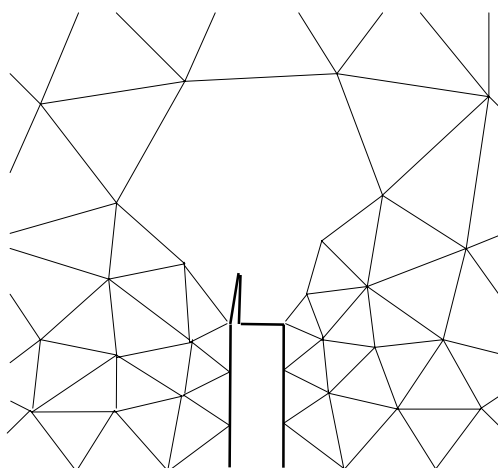


d) **Rediscretização** da região no entorno da fissura.

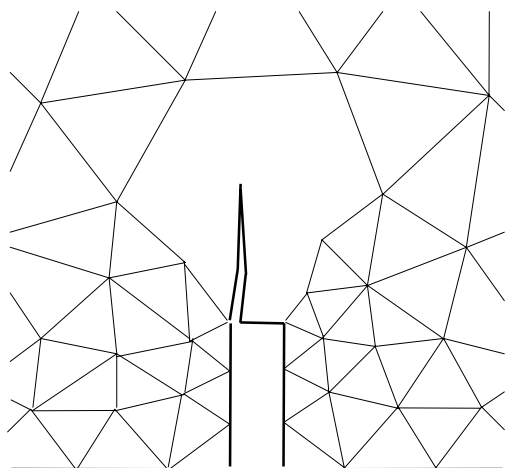
Figura 6.4 - Inserção da fissura discreta.



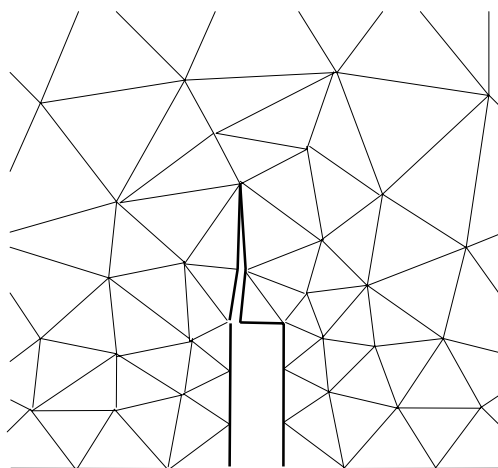
a) **Identificação do elemento** (ponto de Gauss) onde as tensões se anulam.



b) **Eliminação do elemento identificado e de todos os elementos no seu entorno.** Determinação da região a ser rediscritizada.



c) **Propagação da fratura discreta:** Direção obtida pelo histórico das tensões principais. Posição obtida em função do ponto de Gauss. Comprimento determinado em função da dimensão característica do elemento.



d) **Rediscritização** da região no entorno da fissura.

Figura 6.5 - Propagação da fissura discreta.

A dimensão característica do elemento para determinação do comprimento da fissura pode ser adotada igual à raiz quadrada da área do elemento. Para elementos com mais de um ponto de Gauss, a situação mais provável é que a localização não ocorra em todos os pontos simultaneamente. Neste caso, a dimensão característica deve ser multiplicada por um fator que considera o número de pontos de Gauss no elemento, a fim de se obter o comprimento da fissura correspondente. Tem-se assim que

$$l_c = \sqrt{A_e} \quad e, \quad (6.18)$$

$$l_f = \eta l_c = \eta \sqrt{A_e} \quad (6.19)$$

onde l_c é a dimensão característica (ou comprimento característico) do elemento, l_f é o comprimento da fissura, A_e é a área do elemento e η é estimado em função da distribuição dos pontos de Gauss no elemento.

A combinação dos processos de fraturamento discreto e distribuído, conforme a metodologia descrita cima, elimina as principais desvantagens destes métodos, que seriam, respectivamente, a estimativa a priori da morfologia da fissura e a incapacidade de modelar a superfície correspondente à descontinuidade.

6.5 Atualização das Variáveis na Região Rediscretizada

Neste trabalho são apresentadas duas técnicas para atualização das variáveis nos pontos de Gauss da nova malha. Na primeira, o mapeamento do estado de tensões e deformações plásticas equivalentes, da malha antiga para a atual na região rediscretizada, é feito para cada ponto de Gauss da nova malha utilizando-se um ajuste por elemento no sentido dos erros mínimos quadráticos sobre os pontos de integração da malha antiga. Para cada novo ponto de Gauss, localiza-se na malha antiga o elemento correspondente e a interpolação é feita com base nos valores das tensões e deformações nos pontos de Gauss deste elemento. As funções para interpolação são as mesmas que definem a superfície de suavização utilizada para extrapolação das tensões dos pontos de Gauss para os nós dos elementos. Este processo está exemplificado na Figura 6.6 para o caso do elemento triangular quadrático T6. Pode-se observar, por esta figura, que ocorrem situações onde os valores dos pontos de Gauss da malha antiga são interpolados e

situações onde estes valores são extrapolados. As aproximações conseguidas por extrapolação não foram boas, conforme será visto nos exemplos de aplicação, principalmente para as tensões e deformações plásticas equivalentes na região de comportamento pós-pico do material.

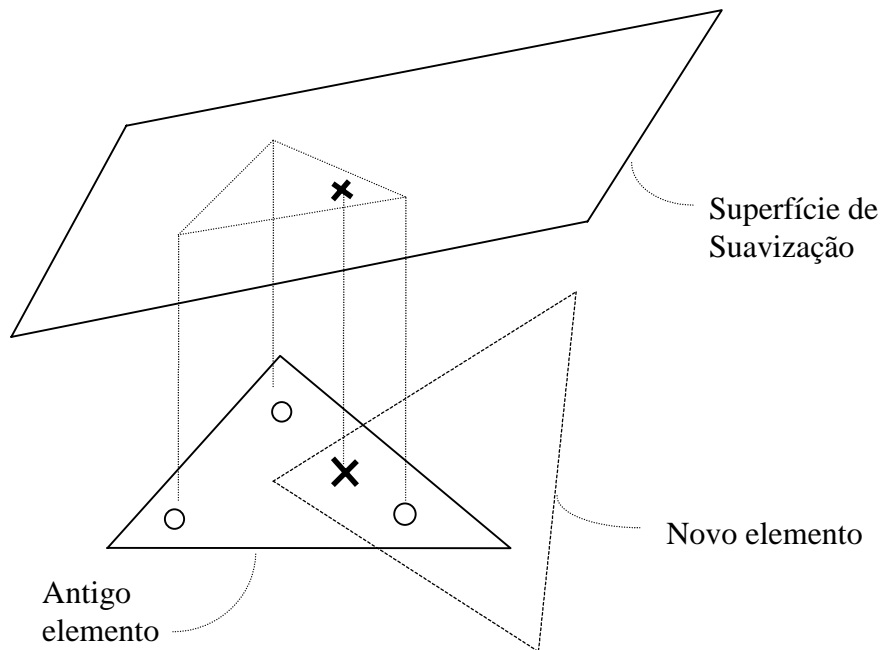


Figura 6.6 - Atualização das variáveis nos pontos de Gauss da nova malha, utilizando-se a superfície de suavização.

Na outra técnica desenvolvida, foi utilizada uma malha auxiliar gerada pela triangulação dos pontos de Gauss dos antigos elementos, a fim de se evitar a extrapolação de valores. Os elementos, cujos pontos de Gauss são utilizados para compor esta triangulação, correspondem ao elemento onde ocorre a localização mais os elementos situados no seu entorno em duas camadas. A primeira camada é determinada pelos elementos vizinhos ao elemento onde ocorre a localização. A segunda camada é determinada pelos elementos vizinhos situados externamente à primeira camada. Para cada ponto de Gauss dos novos elementos, localiza-se na triangulação gerada pelos pontos de Gauss o triângulo correspondente, e os novos valores das tensões e deformações plásticas equivalentes são obtidos por interpolação dos valores das tensões e deformações atribuídos aos vértices deste triângulo. A interpolação é feita com base nas coordenadas paramétricas do triângulo. Este processo está exemplificado nas Figuras 6.7 e 6.8. Na Figura 6.7 é mostrada a geração da triangulação dos pontos de Gauss da malha antiga e a região rediscretizada a ser atualizada. Na Figura 6.8 a nova malha de elementos finitos é superperposta à malha gerada pelos pontos de Gauss e exemplificada a obtenção dos valores nos

novos pontos de Gauss. Nesta figura, para o elemento assinalado, a atualização das variáveis no ponto de Gauss representado pela cruz é feita por interpolação dos valores nos pontos de Gauss da malha antiga, representados pelos pontos brancos.

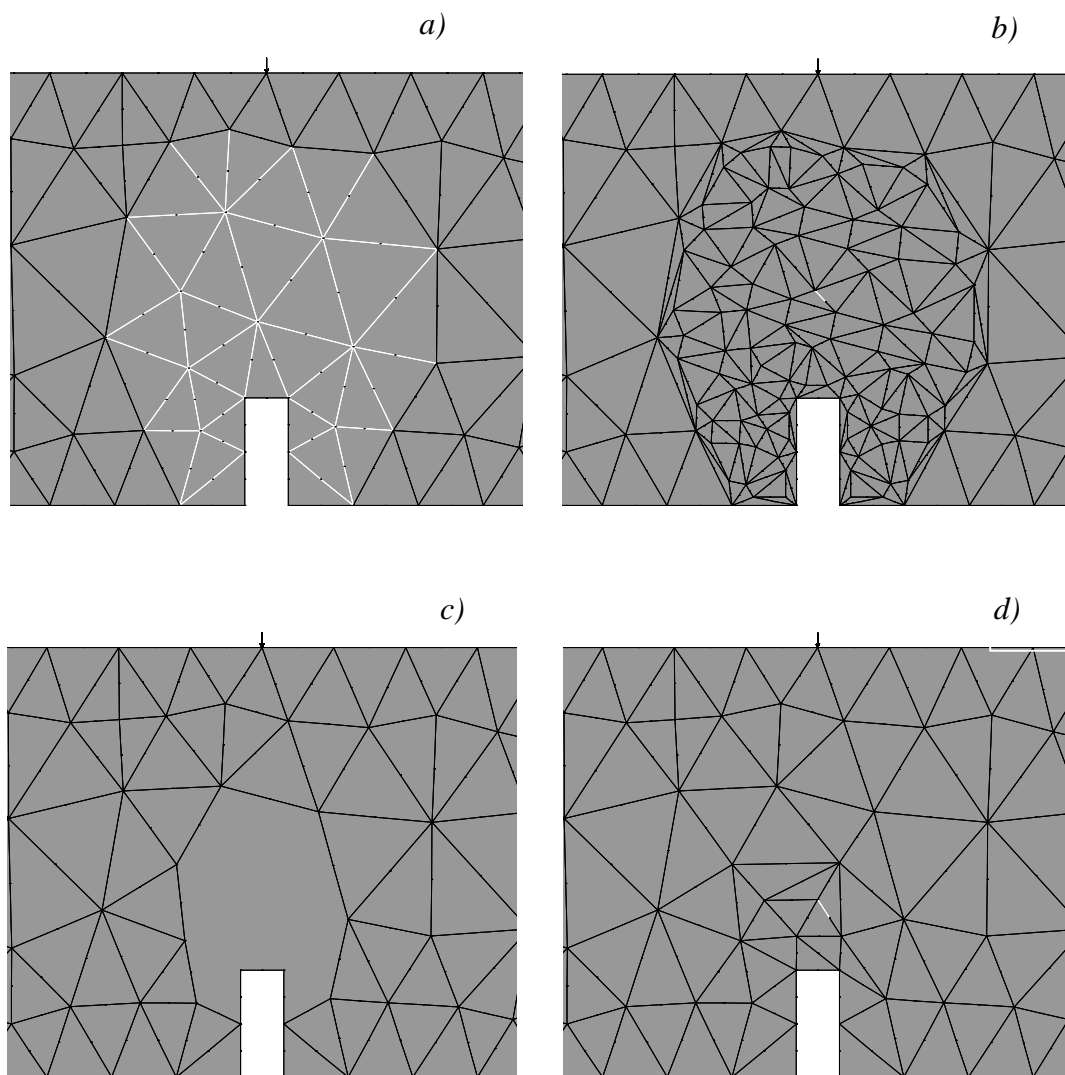


Figura 6.7 - Atualização das variáveis por triangulação dos pontos de Gauss: *a)* Elementos da malha antiga selecionados. *b)* Triangulação gerada considerando os pontos de Gauss da malha antiga como vértices dos triângulos. *c)* Região a ser discretizada para inserção da fissura discreta. *d)* Nova malha gerada, cujas variáveis nos pontos de Gauss devem ser atualizadas.

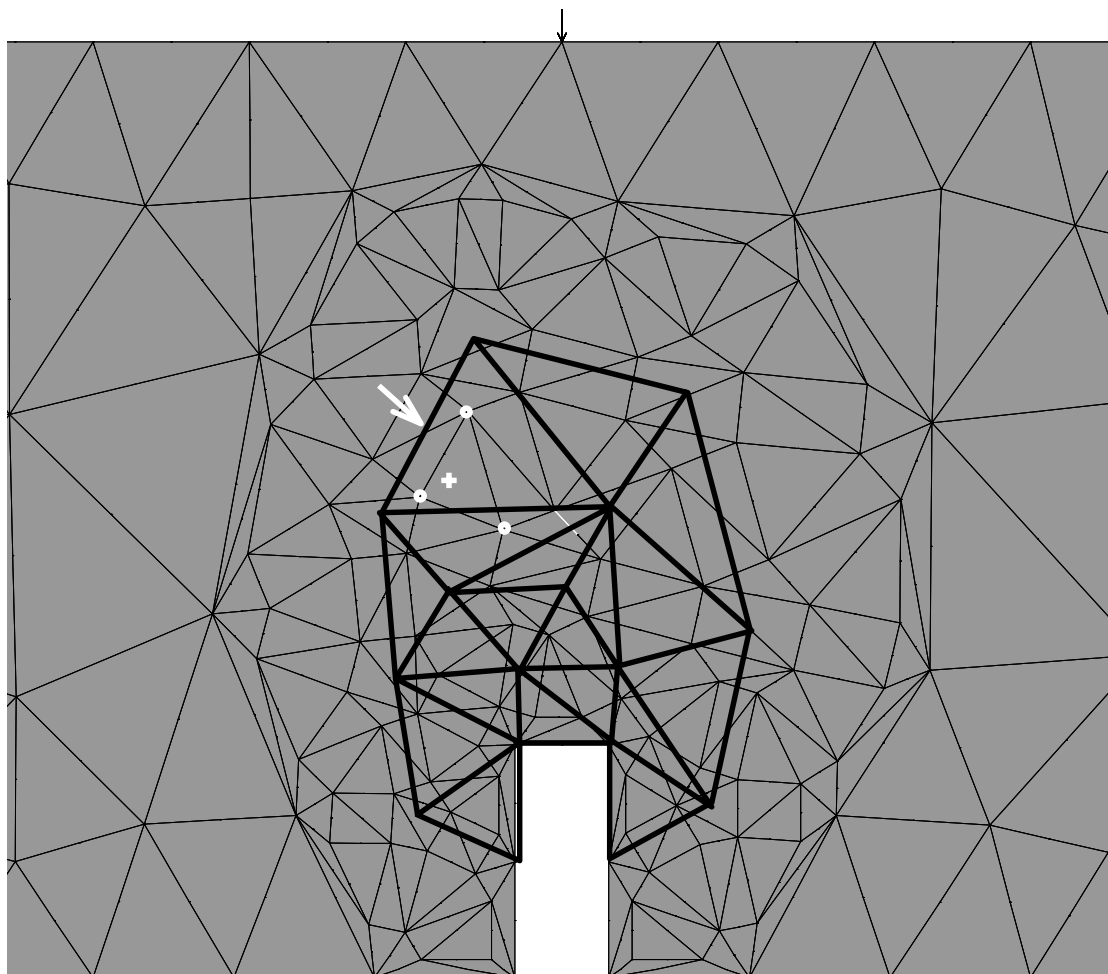


Figura 6.8 - Região rediscritizada sobreposta à triangulação dos pontos de Gauss da malha antiga.

Deve-se observar a vantagem de adotar uma estrutura de dados topológica completa como descrito no item 2.3 do capítulo 2. Tanto a definição do contorno da região da malha que está sendo rediscritizada, quanto a definição da triangulação auxiliar de pontos de Gauss exploram esta ferramenta de modelagem para implementar estas técnicas de forma eficiente.

As deformações totais nos novos pontos de Gauss são obtidas a partir dos deslocamentos dos nós da nova malha. Estes deslocamentos são obtidos mapeando-se os valores dos nós da malha antiga para a atual, na região rediscritizada. Para cada nó da nova malha localiza-se na malha antiga o elemento correspondente e a interpolação é feita com base nos valores dos

deslocamentos dos nós deste elemento. A interpolação é feita utilizando-se as funções de forma do antigo elemento. Este processo está exemplificado na Figura 6.9 para o caso do elemento T3.

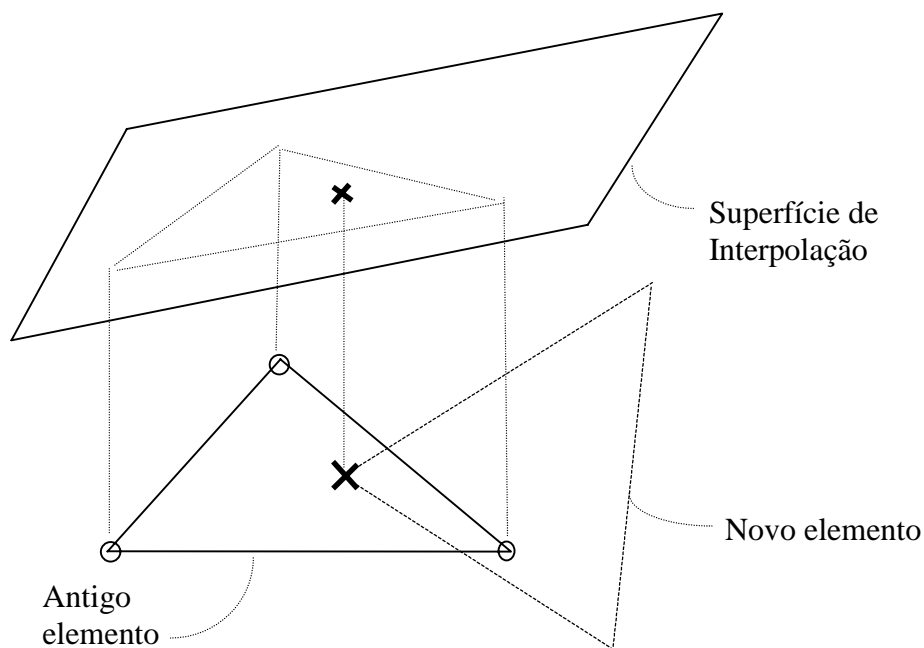


Figura 6.9 - Atualização dos deslocamentos para a nova malha.

Com o estado de tensões e as deformações plásticas equivalentes mapeado para a malha rediscretizada, é feita uma atualização dos parâmetros do modelo constitutivo para esta região da malha que foi modificada. A superfície de plastificação é atualizada para cada ponto de Gauss da nova malha, o que possibilita a retomada da análise dentro do processo de fraturamento distribuído com a geometria do modelo alterada pela inserção da fissura discreta. É necessário fazer uma correlação entre as tensões e os parâmetros plásticos, dependentes da história do carregamento, de modo a se assegurar a consistência dos valores atualizados.

6.6 Estabilização do Processo Numérico

O procedimento para resolução do sistema de equações com controle de deslocamentos por comprimento-de-arco, conforme descrito no capítulo 5, tem sido usado com bastante sucesso na resolução de problemas com não linearidade geométrica. Todavia, quando aplicado a problemas com não-linearidade física, vários autores, De Borst (1986), Rots (1988), Feenstra (1993),

reportam que o método freqüentemente falha pelo fato de que, neste tipo de problema, a ruptura ou a bifurcação dos modos de equilíbrio são altamente localizados. Neste caso, apenas alguns poucos nós contribuem para a norma dos incrementos de deslocamentos e a ruptura não é corretamente detectada por esta norma global. Um remédio para isto seria aplicar diferentes pesos para os diversos graus de liberdade ou simplesmente omitir alguns das equações de restrição, De Borst (1986). Este processo foi denominado de *controle indireto dos deslocamentos*, ou abreviadamente *IDC (Indirect Displacement Control)*, tendo sido usado com sucesso nos problemas com não-linearidade física.

Uma desvantagem do processo descrito acima é a perda de generalidade do método, que se torna dependente do tipo de estrutura sendo analisada. Para se evitar a perda de generalidade, pode-se proceder a uma análise dos autovalores, conforme Napoleão, Elwi e Murray (1992). Uma outra alternativa seria identificar a região da estrutura submetida ao regime não-linear e seleccionar apenas os graus de liberdade dentro desta região para compor a equação de restrição. Uma vez que as não-linearidades usualmente se concentram em uma pequena parte da estrutura, apenas os poucos graus de liberdade que apresentam um valor alto do gradiente de deformações seriam considerados, o que concorreria para a estabilização do processo numérico.

Pode-se, então, reescrever a expressão (5.30) considerando apenas os deslocamentos $\bar{\mathbf{a}}$ correspondentes aos graus de liberdade seleccionados dentro da região não-linear

$${}^{t+\Delta t}\Delta\boldsymbol{\mu}^{(i+1)} = -\frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{d}\bar{\mathbf{a}}^{(i)T}\Delta^I\bar{\mathbf{a}}^{(i+1)}}{{}^{t+\Delta t}\mathbf{d}\bar{\mathbf{a}}^{(i)T}\Delta^{II}\bar{\mathbf{a}}^{(i+1)}} \quad (6.20)$$

O procedimento para determinação da região não-linear é de acordo com a sequência apresentada adiante:

- a) O controle indireto de deslocamentos é ativado assim que algum elemento apresente estado de *strain-softening* durante determinada etapa da análise.
- b) No passo seguinte procede-se à primeira iteração após o que, todos os elementos que se encontrem nos estados plástico e de *strain-softening*, assim como todos os elementos no entorno destes são seleccionados, definindo a região não-linear.

- c) Nos passos seguintes mais elementos apresentam comportamento plástico e de *strain-softening* e a região inelástica se expande. A região não-linear é então redefinida após a primeira iteração dentro do passo.
- d) O elemento selecionado com comportamento de *strain-softening* esgotou a sua capacidade de resistência. A fissura discreta é inserida e toda região no entorno deste elemento é discretizada, conforme o procedimento para inserção da fissura descrito no item 6.3.
- e) Após a inserção da fissura discreta alguns elementos sofrem um processo de descarregamento com retorno ao comportamento elástico. O processo de convergência numérica passa então a ser controlado pelo deslocamento de abertura da fissura, conforme será exposto adiante.

Durante a análise numérica com controle indireto dos deslocamentos, pode ocorrer que algum elemento previamente selecionado por apresentar comportamento plástico ou de *strain-softening* apresente um estado de descarregamento, e se encontre momentaneamente na fase elástica. Este elemento deverá ser mantido selecionado, ou seja, a região não-elástica deverá estar sempre em processo de expansão.

Nas etapas de inserção e propagação da fissura discreta, a convergência pode ser obtida selecionando-se os graus de liberdade correspondentes aos nós de abertura de fissura. Neste caso são selecionados os deslocamentos correspondentes aos nós de canto dos elementos que caracterizam a abertura da fissura, conforme exemplificado na Figura 6.10. Subtraindo-se estes componentes é possível definir a abertura da fissura como um novo grau de liberdade, que passa então a controlar o processo de convergência numérica. Considerando-se na expressão (6.20) este deslocamento de abertura da fissura, mais conhecido como COD (*Crack Opening Displacements*), tem-se então

$${}_{t+\Delta t}\Delta\mathbf{u}^{(i+1)} = -\frac{\Delta^I\mathbf{COD}^{(i+1)}}{\Delta^II\mathbf{COD}^{(i+1)}} \quad (6.21)$$

Este controle de abertura da fissura, ou simplesmente, *COD Control*, pode então ser introduzido a partir da inserção da fissura inicial e mantido durante as etapas posteriores da análise até o colapso da estrutura.

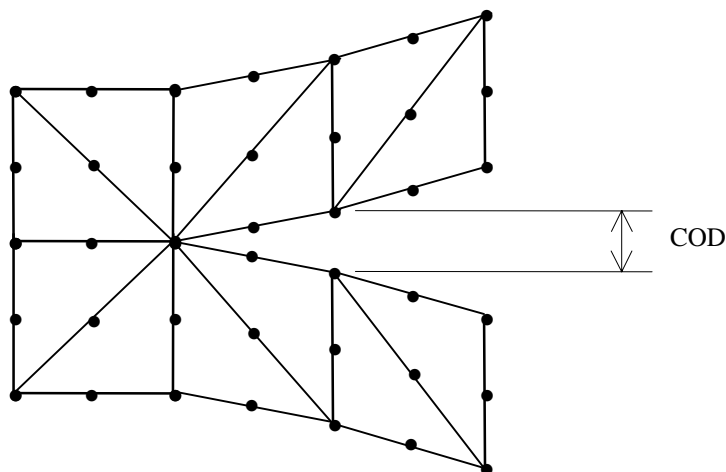


Figura 6.10 - Controle de Abertura da Fissura.

No exemplo de aplicação envolvendo o Modo II de fraturamento, tornou-se interessante controlar o deslizamento da fissura, conhecido como CMSD (*Crack Mouth Sliding Displacement*), a fim de ultrapassar a carga de pico da estrutura. Considerando-se na expressão (6.20) este deslizamento da fissura, tem-se então

$${}^{t+\Delta t}\Delta\mu^{(i+1)} = -\frac{\Delta^I \text{CMSD}^{(i+1)}}{\Delta^II \text{CMSD}^{(i+1)}} \quad (6.22)$$

Os procedimentos descritos acima foram implementados com sucesso dentro das rotinas de resolução do sistema de equações, permitindo o prosseguimento da análise a partir da localização das deformações e da inserção da descontinuidade geométrica no modelo. Além do controle indireto de deslocamentos, a utilização do método de Newton-Raphson pleno (*full N-R*) desde os passos iniciais, combinado com o uso de rotinas de busca-linear, Crisfield (1991), também contribuiu para estabilização do processo numérico.

A combinação de busca-linear com o método do comprimento-de-arco foi introduzida por Crisfield (1983) e utilizada como fator importante na estabilização do processo numérico por Feenstra (1993). Crisfield observa que, ao se utilizar o método de N-R pleno, não há garantias de que a matriz de rigidez seja positiva definida e que o sentido de busca seja para a energia potencial mínima em determinada iteração, uma vez que os deslocamentos não estão relacionados a um estado de convergência de equilíbrio. Uma alternativa é a utilização do método de N-R modificado, quando é possível constatar que, invariavelmente, a direção de busca se encontra no sentido da energia mínima. Apesar disso, Crisfield recomenda fortemente a

utilização de busca-linear com o método de N-R pleno sempre que a direção de busca se encontre no sentido correto, Crisfield (1984).

Neste trabalho, a busca-linear foi utilizada em casos de incrementos de carga onde havia grande dificuldade de convergência e apenas onde o fator de relaxação podia ser obtido por interpolação. Para não onerar o tempo de processamento, o fator obtido na iteração inicial foi mantida nas seguintes com resultados bastante satisfatórios.

6.7 Implementação do Modelo Numérico FRACT

Na implementação do modelo numérico aqui proposto procedeu-se à interligação de rotinas de computação gráfica interativa, para visualização do modelo estrutural, e rotinas de análise para simulação numérica do seu comportamento. Estas rotinas se comunicam com o usuário através da interface gráfica, que permite a interação com as várias etapas do programa dentro do mesmo ambiente de trabalho.

As rotinas gráficas permitem, primeiramente, a elaboração do modelo estrutural e atribuição de propriedades e, em seguida, a inserção e propagação da fissura, a redefinição automática da malha de EF e a visualização dos resultados obtidos pela análise numérica. Estas rotinas são usualmente classificadas como de *pré-processamento*, onde estão aquelas que permitem a elaboração da configuração inicial do modelo, e de *pós-processamento*, onde se enquadram aquelas que permitem a visualização dos resultados da análise na tela. As rotinas intermediárias, com a função de inserir a fissura discreta no domínio, promover a redefinição da malha na região da fissura e preparar o modelo estrutural para as etapas seguintes da análise, serão chamadas nesse trabalho de *rotinas de remalhamento*.

Para elaboração do modelo estrutural inicial foram usadas as rotinas do pré-processador MTOOL desenvolvido pelo TeCGraf (Grupo de Tecnologia em Computação Gráfica/PUC-Rio), enquanto para inserção e propagação da fissura discreta foram elaboradas rotinas específicas. A estrutura de dados Half-Edge (HED), incorporada ao pré-processador, garante a consistência do modelo estrutural. Para visualização dos resultados da análise foi utilizado o pós-processador NLPOS, Parente Jr. (1997). Nesta implementação, as rotinas de pós-processamento não se

encontram sob a mesma interface gráfica das restantes, e as tarefas de visualização dos resultados são executadas via arquivo neutro, gerado durante a análise por EF.

Para análise por EF foram anexadas as rotinas do programa FEPARCS, desenvolvido na Universidade de Alberta (UofA). Estas rotinas foram adaptadas para permitir a contínua rediscretização do domínio afetado pela inserção e propagação da fissura. Foram também acrescentados ao programa elementos triangulares, de modo a se poder usufruir das técnicas de triangulação de domínios existentes no pré-processador MTOOL. A implementação do modelo constitutivo de Pramono e Willam foi incorporado ao programa a partir do trabalho de Xie *et al.* (1994) na Universidade de Alberta.

A elaboração do modelo de análise numérica, portanto, compreendeu a interligação das rotinas mencionadas de acordo com a seguinte organização:

- Rotinas de pré-processamento: MTOOL (TeCGraf)
- Rotinas de pós-processamento: NLPOS (PUC-Rio)
- Rotinas de remalhamento:
 - Inserção e propagação da fissura discreta
- Rotinas de análise por EF:
 - FEPARCS (UofA)
 - Modelo constitutivo (UofA)

Estas rotinas foram encapsuladas dentro da mesma interface gráfica utilizada pelo pré-processador MTOOL, gerada através do programa IntGraf (TeCGraf). Para facilitar as futuras referências em relação ao modelo aqui desenvolvido, ao programa formado por esta coleção de rotinas gráficas e de análise decidiu-se denominar FRACT (de FRACTure). O esquema de interligação da rotinas mencionadas para implementação do modelo numérico pode ser visto na Figura 6.11.

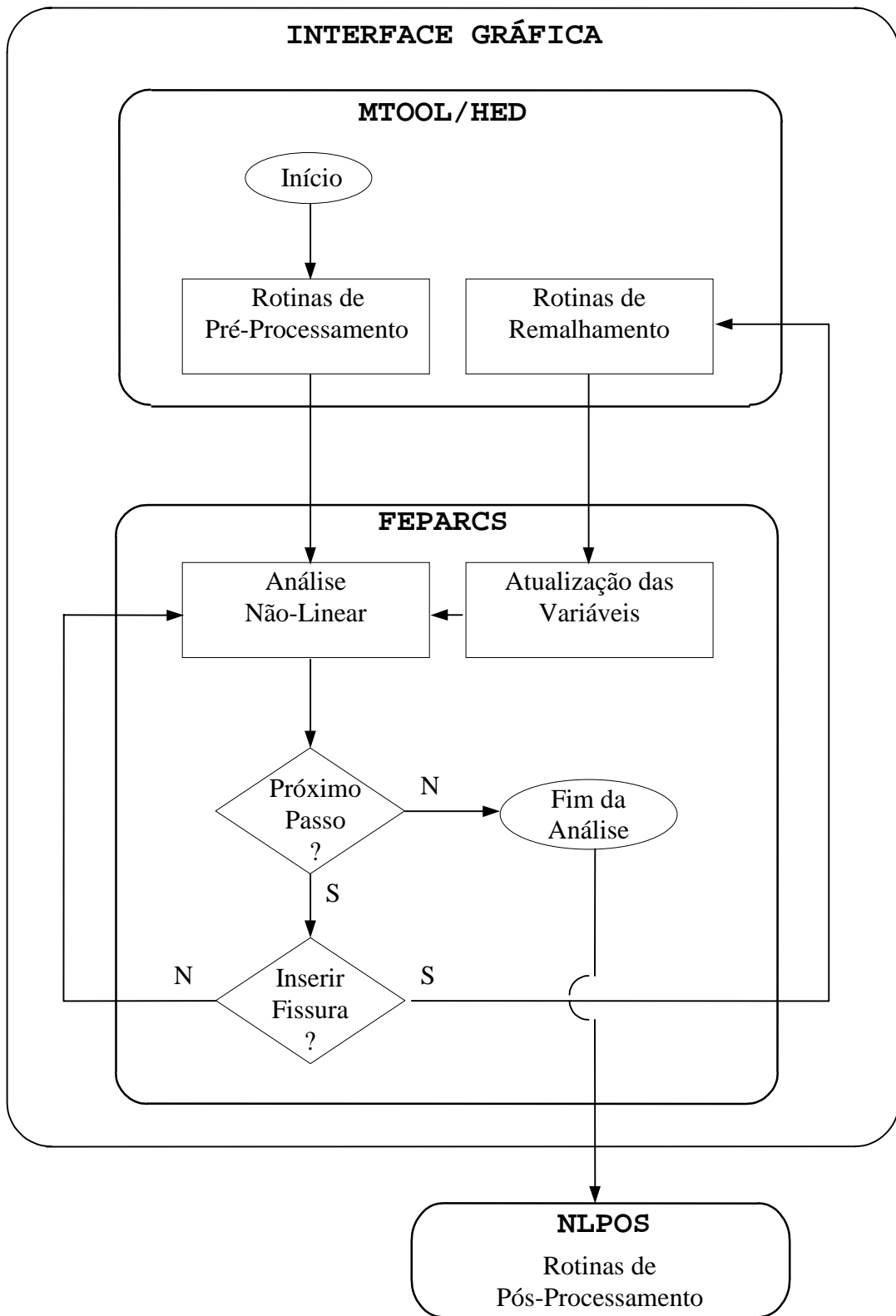


Figura 6.11 - Modelo numérico FRACT: Interligação das rotinas.

A plataforma utilizada para desenvolvimento do trabalho, tanto no Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio quanto na Universidade de Alberta, consistiu de estações de trabalho SUN Spark com 24 ou 36 Mb de memória RAM. Estações como SUN Spark 1, 1+ e 2 se mostraram satisfatórias para desenvolvimento do trabalho de implementação. Durante a geração dos exemplos numéricos, no entanto, tornou-se interessante a utilização de uma máquina mais veloz, tendo sido utilizada a estação SUN Spark 20 localizada no Departamento de Química da PUC-Rio.

As rotinas gráficas de remalhamento foram implementadas em linguagem C, como as existentes no pré-processador MTOOL. As rotinas de complementares de análise foram implementadas em FORTRAN 77, como as existentes no programa FEPARCS original. A compilação do programa fez-se através do gcc e f77 residentes no sistema operacional e cuidados especiais foram tomados na transferência de variáveis entre C e FORTRAN. Variáveis indexadas, por exemplo, foram transferidas exclusivamente por vetores.

Capítulo 7

Exemplos de Aplicações do Modelo Numérico

7.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados exemplos que ilustram as aproximações obtidas através da estratégia proposta neste trabalho. Foram realizadas simulações numéricas considerando os casos de viga à flexão com entalhe (*three-point bend test*) e viga com modo combinado de fraturamento com um entalhe (*mixed-mode single-edge-notch test*). Os resultados foram comparados com os obtidos em testes analíticos e ensaios experimentais selecionados na literatura.

Através destes exemplos, demonstra-se que o modelo numérico permite a localização e inserção da fissura discreta a partir do desenvolvimento da análise através do enfoque distribuído. Verifica-se que é possível identificar a posição e direção da fissura discreta, estimar o comprimento desta fissura através de um critério baseado no comprimento característico do elemento finito, e traçar de modo aproximado o comportamento pós-pico das estruturas. A técnica desenvolvida permite representar mais realisticamente o processo de fraturamento do material, o que não é possível quando a análise se desenvolve unicamente pelo processo distribuído. No entanto, vários obstáculos devem ser transpostos na transição do modelo distribuído para uma representação discreta das fissuras.

Quando da inserção da fissura discreta, as aproximações feitas na região rediscretizada foram determinantes para a seqüência da análise. A solução numérica se mostrou bastante sensível em relação ao processo de mapeamento dos valores das tensões e deformações, da antiga malha para a nova malha, nesta região. Para comprovar isto, as vigas foram testadas utilizando-se as técnicas descritas no capítulo 6, de atualização dos valores pelas superfícies de suavização dos elementos antigos e por interpolação da triangulação dos pontos de Gauss da malha antiga. Os resultados obtidos através de cada uma destas técnicas foram comparados. A solução numérica

também se mostrou sensível em relação ao nível de discretização utilizado na região restaurada e ao impacto provocado pela inserção da fissura discreta, com a geometria do modelo sendo alterada de um sistema contínuo para um sistema descontínuo pela duplicação dos nós dos elementos. Além disso, foi também necessário adaptar o processo de convergência numérica, alterando-se o controle de convergência de acordo com a situação do problema e tipo de comportamento da estrutura, para que se pudesse prosseguir com a análise além da carga de pico.

No caso da viga à flexão com entalhe, a combinação das técnicas do comprimento-de-arco com controle indireto de deslocamentos (*IDC*), durante a etapa anterior à inserção da fissura discreta, e controle de abertura da fissura (*COD Control*), a partir da inserção da fissura discreta, demonstrou ser eficiente em prosseguir com a análise além do ponto limite. No caso da viga com modo combinado de fraturamento, a solução foi possível adotando-se o controle de deslizamento da fissura (*CMSD Control*) desde os passos iniciais da análise. Conforme demonstrado por De Borst (1988), para este tipo de problema as tentativas de solução sem o controle através do *CMSD* falham nas proximidades da carga de pico, principalmente ao se tentar controlar os deslocamentos nos pontos de aplicação das cargas, que apresentam forte comportamento de retorno (*snap-back*).

Outras técnicas, como a utilização eventual do algoritmo de busca linear e a relaxação da tolerância de convergência da norma do carregamento, aplicada a partir de determinada etapa, permitiram o prosseguimento da análise e convergência da solução numérica além da carga de pico.

7.2 Exemplo 1: Viga à Flexão com Entalhe

O modelo de viga bi-apoiada com uma carga concentrada e entalhe no meio do vão foi especificado pelo comitê RILEM 50-FMC (1985) para determinação da energia correspondente ao modo I de fraturamento. Vários ensaios práticos foram realizados com este modelo de viga por Petersson (1981), quando foi possível aferir os valores da energia de fraturamento e resistência à tração e observar o comportamento característico do material na zona de fraturamento.

O exemplo apresentado adiante foi resolvido analiticamente por Petersson (1981) através do modelo de fraturamento fictício (*fictitious crack model*). Na Figura 7.1 apresenta-se a

geometria da viga e as condições de apoio e carregamento. Os parâmetros do material são os seguintes: resistência à tração $f'_t = 3 \text{ MPa}$, módulo de elasticidade $E = 30000 \text{ MPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.2$ e energia de fraturamento com curva exponencial $G_f = 75 \text{ N/m}$. A malha de elementos finitos foi gerada arbitrariamente utilizando-se elementos triangulares isoparamétricos quadráticos (T6), como mostrado na Figura 7.2.

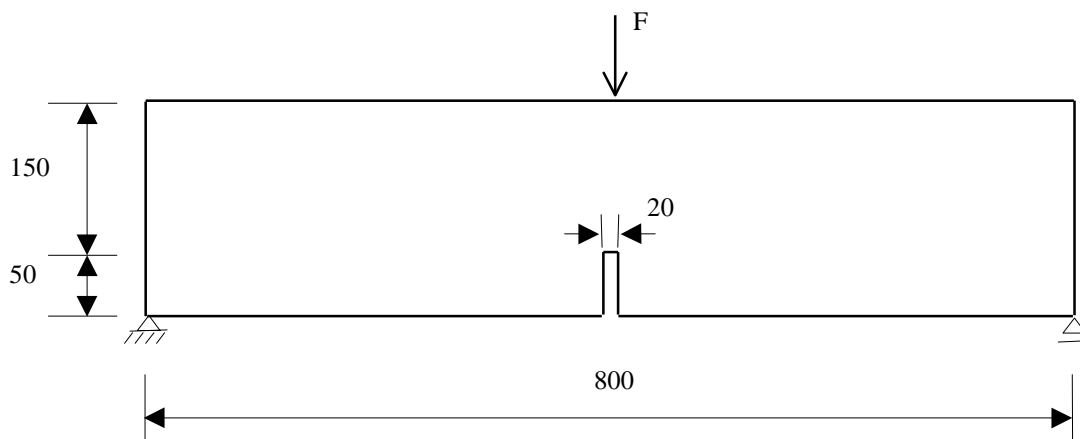


Figura 7.1 - Exemplo 1: Modo I de fraturamento. Geometria da viga e condições de apoio e carregamento. Dimensões em mm.

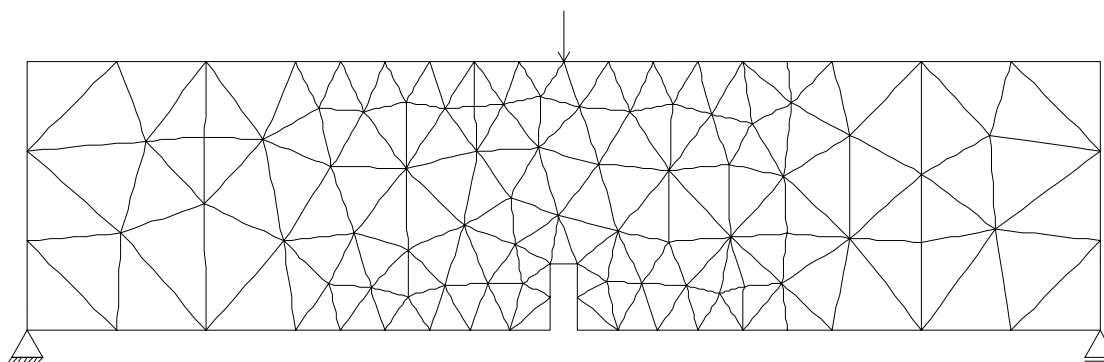


Figura 7.2 - Exemplo 1: Modo I de fraturamento. Malha de EF.

Na Figura 7.3 são apresentados os resultados obtidos pelo programa FRACT para a curva Carga x Deflexão no ponto de aplicação da carga, através do processo distribuído, comparados com os resultados obtidos por Petersson através do modelo de fraturamento fictício. Os resultados representam um comportamento mais frágil em relação àqueles obtidos por Petersson.

Isto pode ser explicado pela relação linear no diagrama *tensão x abertura da fratura* utilizado por Petersson, que leva a uma resposta da estrutura que situa-se externamente à faixa de resultados experimentais obtidos em laboratório, Rots *et al.*(1985).

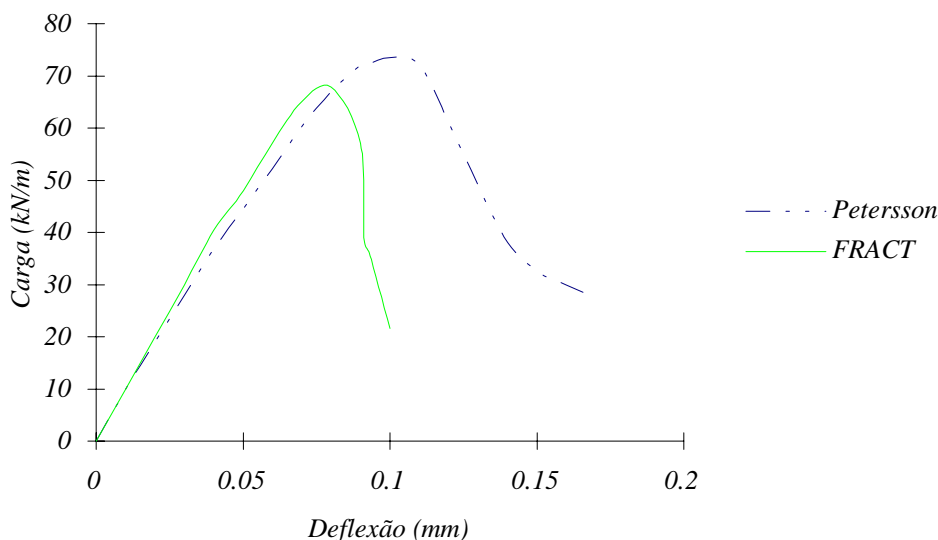


Figura 7.3 - Exemplo 1: Curva Carga x Deflexão pelo processo distribuído.

Em seguida aos resultados obtidos unicamente com o modelo distribuído, procedeu-se à inserção da fissura discreta no modelo estrutural de acordo com a técnica proposta neste trabalho. Considerando a atualização do campo de tensões e deformações e dos parâmetros plásticos do material na região rediscretizada, foram obtidos resultados pela técnica de atualização das tensões e deformações pelas superfícies de suavização dos elementos antigos e pela técnica que interpola estes valores da triangulação dos pontos de Gauss da malha antiga.

Os resultados em termos da curva Carga x Deflexão no ponto de aplicação da carga, usando-se as superfícies de suavização para mapear os valores dos antigos pontos de Gauss para a nova malha, são apresentados na figura 7.4. Os resultados obtidos pelo programa FRACT pelo processo distribuído e também os obtidos por Petersson através do modelo de fraturamento fictício foram representados na figura para efeito de comparação. Os resultados obtidos pelo modelo FRACT são basicamente os mesmos com e sem inserção da fissura discreta. No entanto, a singularidade introduzida no modelo estrutural após a inserção da fissura discreta (pontos A e B da curva) provoca saltos no diagrama, com descarregamento elástico na região de fraturamento. Este tipo de comportamento foi encontrado para diferentes configurações da malha na região

restaurada e pode ser considerado como característico na transição do processo distribuído para o discreto na região plástica. Duas causas principais podem ser atribuídas a este tipo de comportamento:

- A instabilidade devida à abrupta transição de uma representação contínua para descontínua, com cargas desbalanceadas ainda presentes nos nós desconectados.
- As aproximações feitas no mapeamento dos valores da antiga para a nova malha, redefinindo o campo de tensões e deformações.

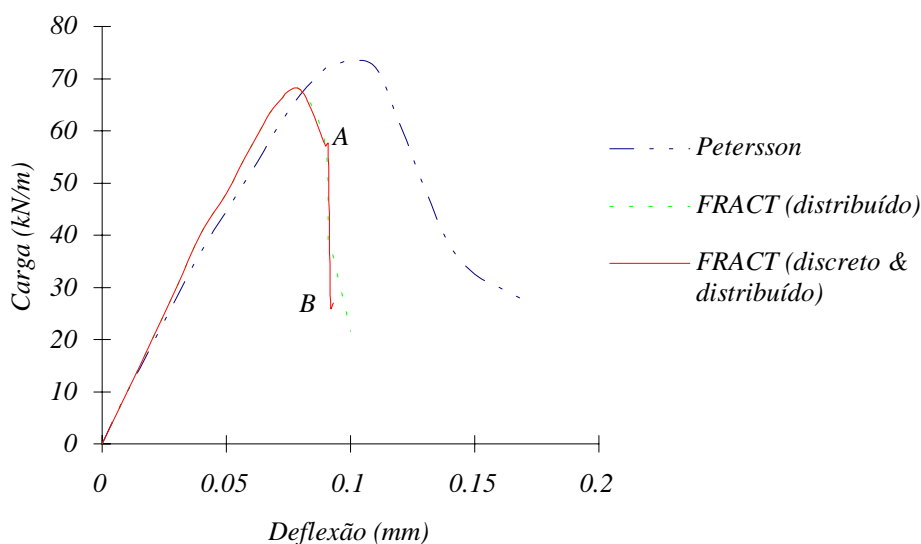
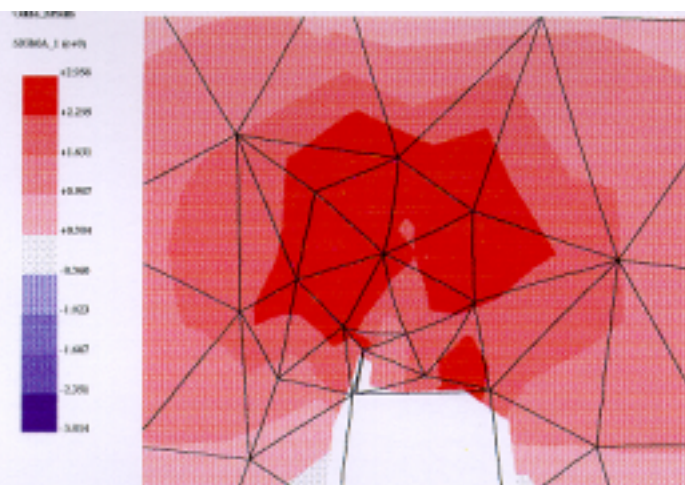


Figura 7.4 - Exemplo 1: Curva Carga x Deflexão para inserção e propagação da fissura discreta com atualização das variáveis pelas superfícies de suavização.

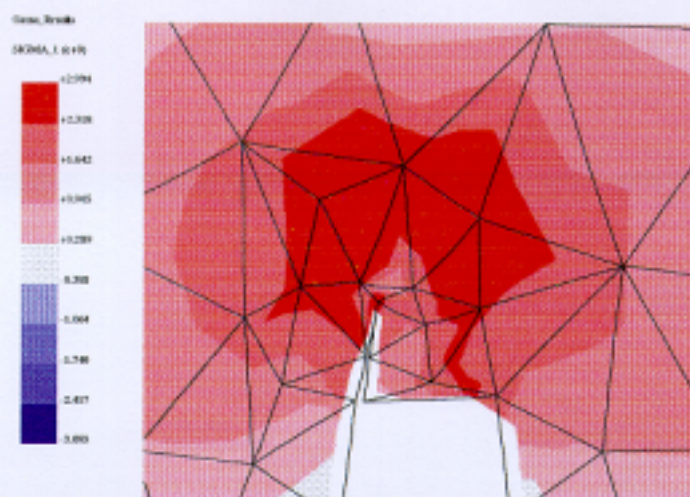
As cargas desbalanceadas remanescentes e as aproximações feitas no campo de tensões e deformações provocam a uma redistribuição de tensões na região rediscretizada, fazendo com que o sistema procure uma nova configuração de equilíbrio, o que leva ao comportamento instável representado na curva Carga x Deflexão. Uma vez que é impossível recompor a história do carregamento nos novos pontos de Gauss, as variáveis plásticas são atualizadas em função das aproximações obtidas para as tensões e deformações plásticas equivalentes. A solução numérica se mostra bastante sensível ao grau de aproximação obtido, principalmente para as variáveis na região de comportamento pós-pico do material. Como foi descrito no capítulo 6, pela técnica que utiliza as superfícies de suavização dos elementos para atualização destas variáveis, pode haver

interpolação ou extrapolação dos valores dos pontos de Gauss da malha antiga para o novo ponto de Gauss. A interpolação ocorre quando o novo ponto de Gauss se encontra dentro do triângulo formado pelos pontos de Gauss do elemento antigo. Quando o novo ponto de Gauss se localiza no elemento, mas fora deste triângulo, a atualização das variáveis é feita por extrapolação. Quando as tensões nos pontos de Gauss da malha antiga estão sobre, ou mesmo próximas, à superfície limite de escoamento, uma extrapolação pode significar posicionar as tensões nos novos pontos de Gauss fora desta superfície. As tensões devem, então, ser relaxadas para a nova superfície de escoamento. Como, em uma determinada região, a área correspondente à extrapolação é cerca de três vezes maior do que a correspondente à interpolação, as aproximações por extrapolação ocorrem com mais frequência e levam a uma configuração irreal do campo de tensões atualizado. Este erro de aproximação é agravado quando as tensões em alguns pontos de Gauss se encontram na superfície de *softening*, inviabilizando a análise numérica. A configuração das tensões principais máximas na região da fissura discreta pode ser vista na Figura 7.5 para a fissura inicial e sua propagação.

O comportamento instável, conforme descrito acima, foi diminuído ao se utilizar a técnica de mapear os valores para os novos pontos de Gauss usando a interpolação através da triangulação dos pontos de Gauss da malha antiga. Neste caso não há extrapolação de valores e uma melhor aproximação do estado de tensões é obtida. Os resultados em termos da curva Carga x Deflexão no ponto de aplicação da carga são apresentados na figura 7.6. Os resultados obtidos pelo programa FRACT pelo processo distribuído e também os obtidos por Petersson foram representados na figura para efeito de comparação. Os resultados obtidos pelo modelo FRACT são basicamente os mesmos com e sem inserção da fissura discreta. No entanto, após alguma instabilidade provocada pela inserção da fissura discreta inicial (ponto A no diagrama), o sistema recuperou a sua configuração de equilíbrio e pode prosseguir sem saltos no diagrama até atingir o critério de propagação da fissura (ponto B no diagrama). Após a inserção da descontinuidade referente à propagação da fissura, as aproximações obtidas e a redistribuição das tensões levou o sistema a apresentar uma recuperação de rigidez até a situação de colapso, onde não foi mais possível se chegar a uma configuração de equilíbrio.



a) Fissura inicial.



b) Propagação da fissura.

Figura 7.5 - Exemplo 1: Configuração das tensões principais máximas após inserção da fissura discreta inicial (a) e propagação da fissura (b), obtida com atualização dos valores pelas superfícies de suavização.

De acordo com o relato de Petersson, na posição correspondente à carga máxima, a zona de fraturamento se estende em uma faixa estreita por uma distância de 50 mm à frente da extremidade do entalhe, resultado que também foi observado em testes de laboratório. Uma fissura real, ou seja, uma fissura discreta com as superfícies livres de qualquer tensão normal, não se propaga até que a posição 1 (ver Figura 7.6) seja alcançada. Finalmente, na posição 2, uma fissura discreta terá avançado até uma distância de 30 mm da extremidade do entalhe.

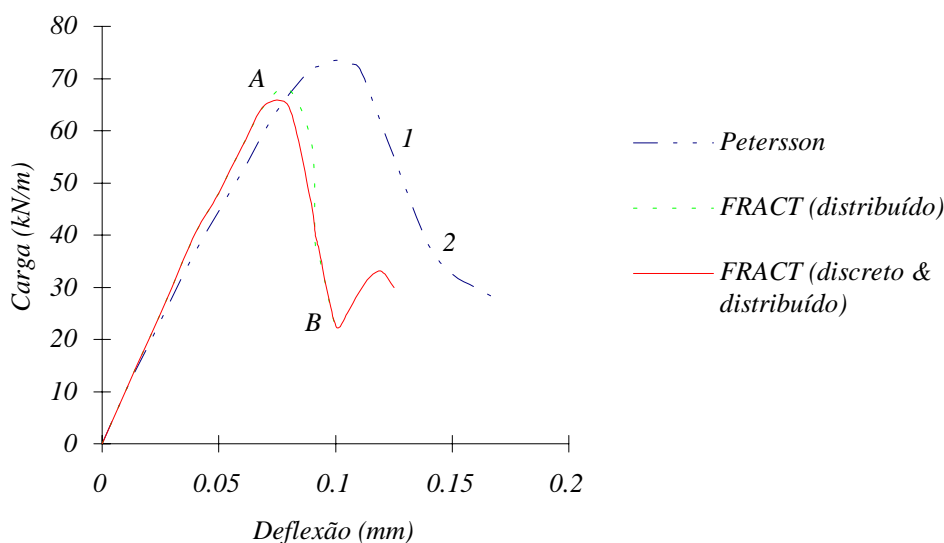


Figura 7.6 - Exemplo 1: Curva Carga x Deflexão para inserção e propagação da fissura discreta com interpolação das variáveis pela triangulação dos pontos de Gauss.

Nos resultados obtidos pelo programa FRACT para esta mesma viga, comparados com os obtidos por Petersson, ao se atingir a carga limite os elementos próximos da extremidade do entalhe já apresentam um comportamento de deterioração do material, o que caracteriza uma zona de fraturamento e comportamento não-linear com aproximadamente 40 mm de altura e 50 mm de largura, conforme pode ser visto na Figura 7.7, onde é mostrado o estado de tensões principais máximas na região do entalhe antes da inserção da fissura discreta inicial. Este resultado não coincide com as observações experimentais feitas neste estágio de carregamento, que prevêem uma zona alongada, como descrito no parágrafo anterior. Nesta posição, as deformações plásticas localizadas no elemento imediatamente acima da extremidade do entalhe começam a ser fortemente induzidas para os elementos vizinhos, resultando numa zona de fraturamento mais larga e menos extensa do que a observada nos ensaios. Na posição A da curva

representada na Figura 7.6, os pontos de Gauss próximos à extremidade do entalhe apresentam uma certa decoesão e, neste ponto da análise, foi inserida a fratura inicial com 15,7 mm de comprimento. Finalmente, a propagação da fissura ocorreu ao se atingir a posição *B*, quando foram acrescentados mais 16,1 mm à sua extensão, totalizando 31,8 mm, valor aproximadamente igual aos 30 mm previstos por Petersson.

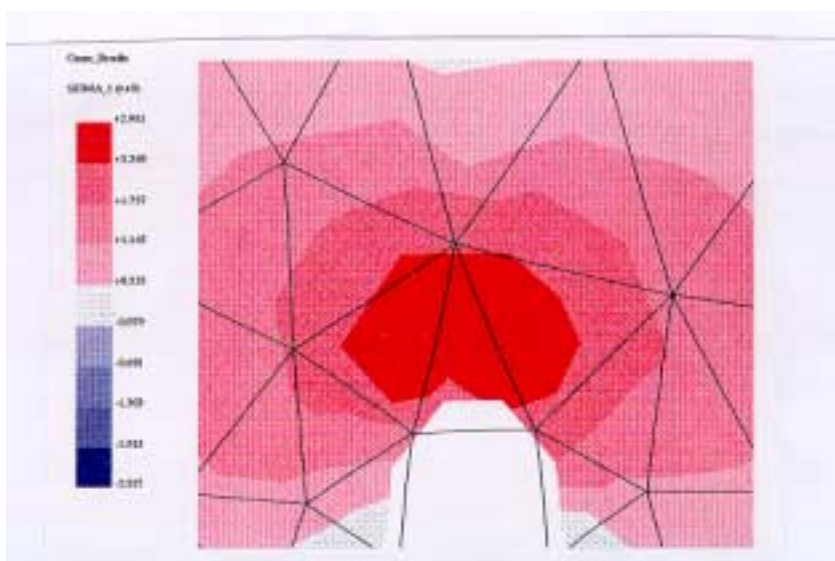


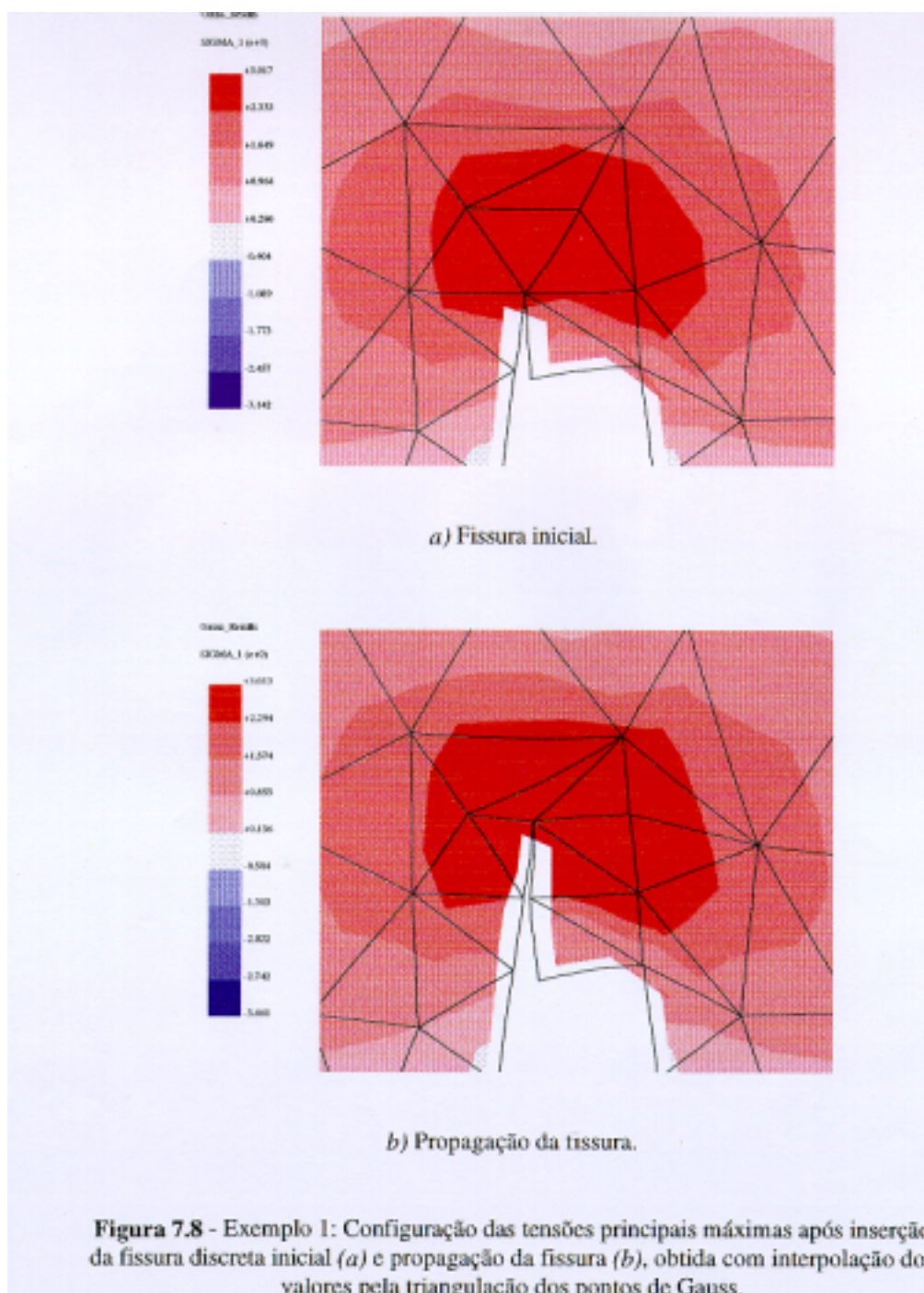
Figura 7.7 - Exemplo 1: Tensões principais máximas antes da inserção da fissura discreta inicial.

O critério previamente estabelecido para a inserção da fissura discreta, que considera a total dissipação da energia de fraturamento, é difícil de ser atingido na simulação numérica. A análise pelo processo distribuído induz o comportamento plástico sobre uma relativamente larga região da estrutura e causa dificuldades em concentrar a localização das deformações em alguns poucos pontos de Gauss. Assim, a fissura discreta foi inserida assim que se atingiu uma certa decoesão no ponto de Gauss correspondente e o critério para determinação do comprimento da fissura foi baseado não só na extensão da zona de fraturamento e comportamento não-linear, mas também na magnitude das cargas desbalanceadas remanescentes. A fissura discreta pode então ser considerada como um dano introduzido no modelo estrutural e a região à frente da extremidade

da fissura caracterizada como a zona de fraturamento onde a simulação do processo de fraturamento prossegue através das equações constitutivas.

A configuração das tensões principais máximas na região plástica pode ser vista na Figura 7.8 para a fissura inicial e sua propagação. Estes resultados podem, então, ser comparados com os apresentados na Figura 7.5, quando o mapeamento das variáveis para a nova malha de Gauss foi feito através das superfícies de suavização. É possível observar, através desta comparação, a melhor conformação das isoformas das tensões quando a atualização das variáveis é feita com base na interpolação da triangulação dos pontos de Gauss da malha antiga. Esta melhor aproximação traduz-se em uma melhor representação do comportamento mecânico da estrutura e um comportamento mais estável na fase pós-pico do carregamento. A sequência de inserção da fissura inicial, de acordo com a metodologia proposta neste trabalho, é mostrada na Figura 7.9. A deformada da viga, após a propagação da fissura discreta, é apresentada na Figura 7.10.

Apesar dos experimentos numéricos terem sido feitos com o modelo pouco discretizado na região do entalhe, foi possível retornar a uma configuração de equilíbrio do sistema após a inserção da fissura discreta. No entanto, a fim de se obter um melhor controle das cargas desbalanceadas devido à abrupta transição de uma representação contínua para descontínua, e também uma melhor representação do comportamento coesivo do material na sua fase pós-pico, a aplicação de elementos de interface e utilização de malha mais refinada apresentariam perspectivas interessantes para desenvolvimentos futuros.



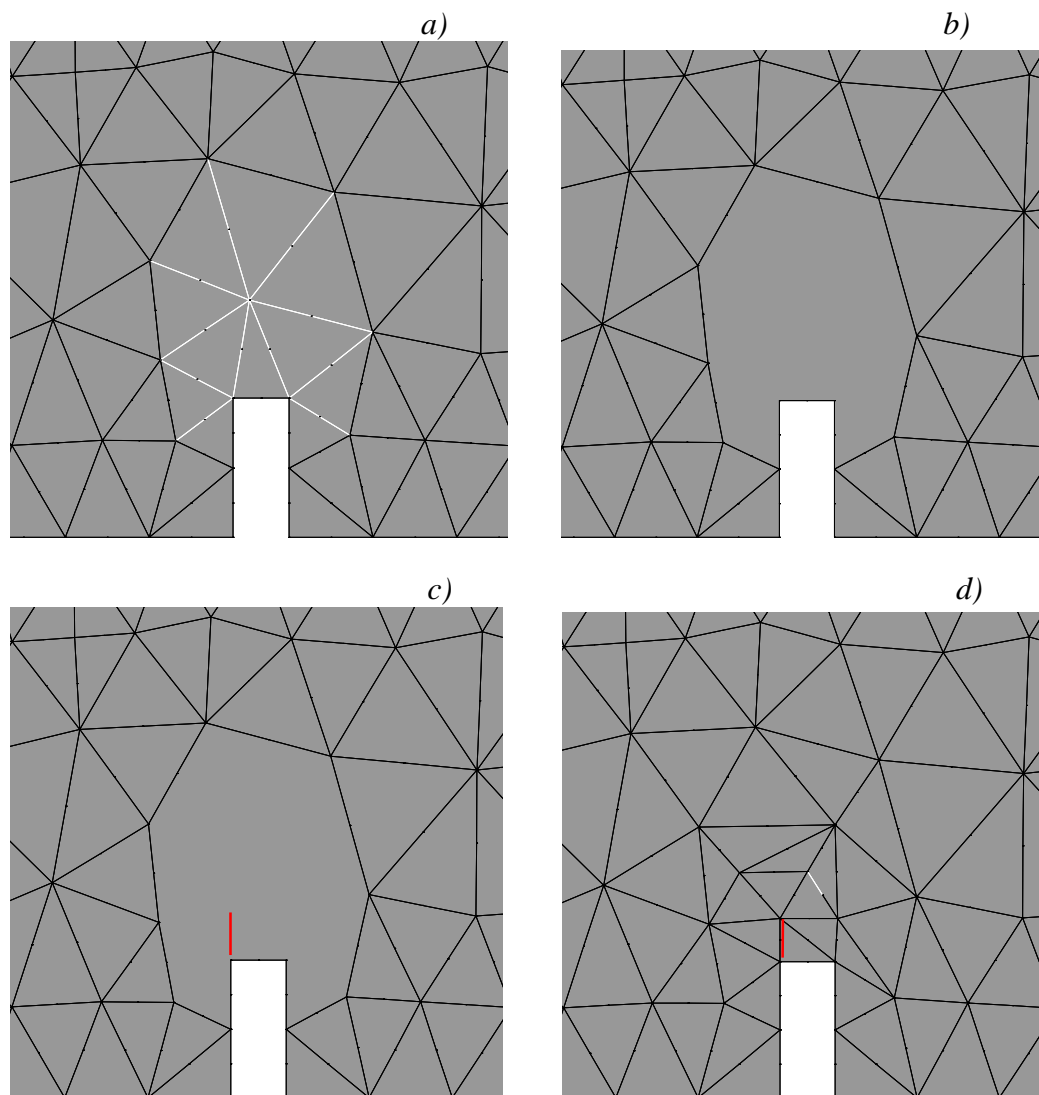


Figura 7.9 - Exemplo 1: Inserção da fissura inicial. *a)* Identificação do elemento onde ocorre decoesão e dos elementos no seu entorno. *b)* Eliminação dos elementos identificados. *c)* Inserção da fissura discreta. *d)* Rediscretização da região no entorno da fissura.

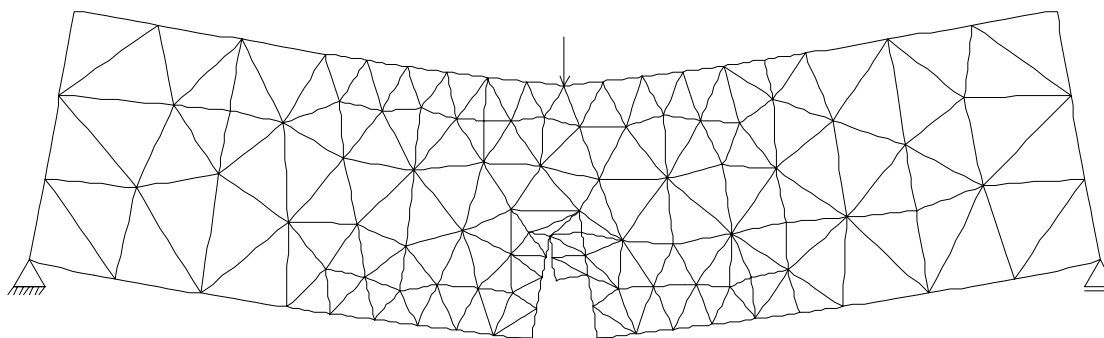


Figura 7.10 - Exemplo 1: Deformada da viga (fator de amplificação = 500).

7.3 Exemplo 2: Viga com Modo Combinado de Fraturamento com Um Entalhe

No exemplo anterior a direção de propagação da fissura é bastante previsível, seguindo uma direção aproximadamente vertical com abertura apenas de acordo com o modo I de fraturamento. Neste segundo exemplo, o objetivo é demonstrar a capacidade do modelo em simular a propagação de uma fissura curva. Neste modelo, a viga com entalhe é submetida a condições de contorno e carregamento que levam a um comportamento mecânico que combina os modos I e II de fraturamento.

Para este exemplo foi utilizado o modelo do texto de Arrea e Ingraffea (1982), onde as curvas Carga x CMSD foram obtidas numérica e experimentalmente. Na Figura 7.11 apresenta-se a geometria da viga e as condições de apoio e carregamento. A espessura da viga é 156 mm. Os parâmetros do material são os seguintes: tensão limite $f'_t = 2.8$ MPa, módulo de elasticidade $E = 24800$ MPa, energia de fraturamento $G_f = 55$ N/m e coeficiente de Poisson $\nu = 0.18$. A malha de elementos finitos foi gerada arbitrariamente utilizando-se elementos triangulares isoparamétricos quadráticos (T6), como mostrado na Figura 7.12.

A partir do trabalho de Arrea e Ingraffea, as simulações numéricas e experimentos de laboratório com este tipo de viga vêm sendo realizados por vários autores durante a última década, como De Borst (1986) e Rots (1988) e, mais recentemente, Schlangen (1993) e Feenstra (1993). As curvas Carga x CMSD obtidas por alguns autores são mostradas na Figura 7.13. O

parâmetro CMSD (*Crack Mouth Sliding Displacement*) corresponde ao deslocamento relativo dos pontos A e B, conforme mostrado na figura 7.14.

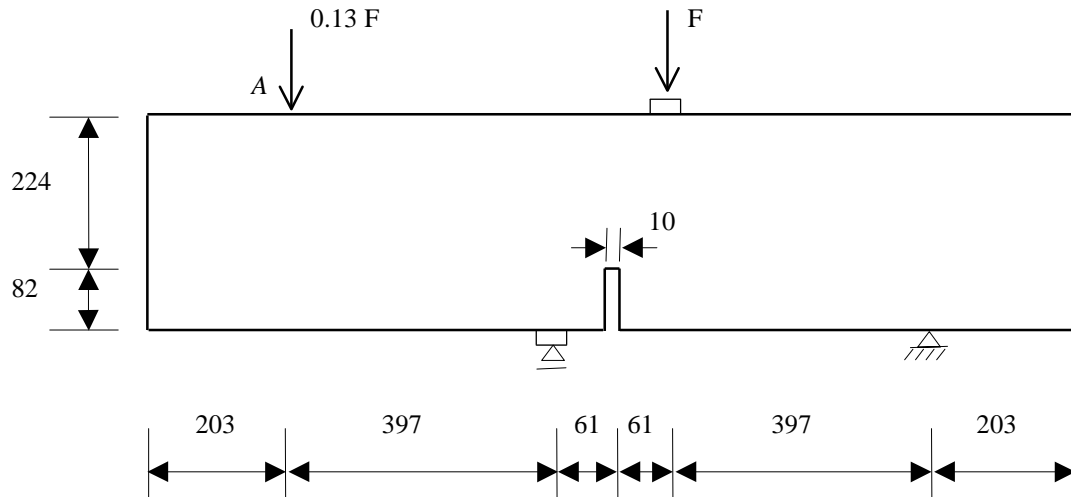


Figura 7.11 - Exemplo 2: Modo combinado de fraturamento. Geometria da viga e condições de apoio e carregamento. Dimensões em mm.

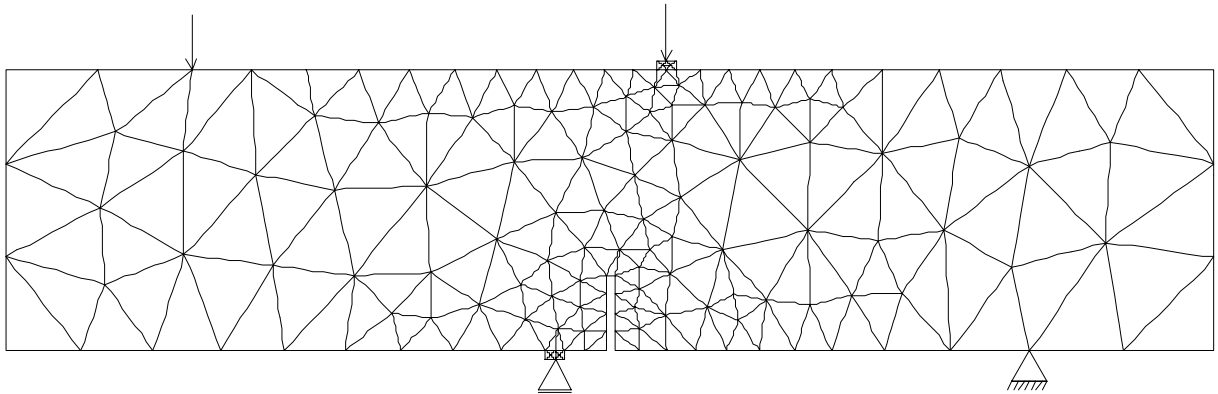


Figura 7.12 - Exemplo 2: Modo combinado de fraturamento. Malha de EF.

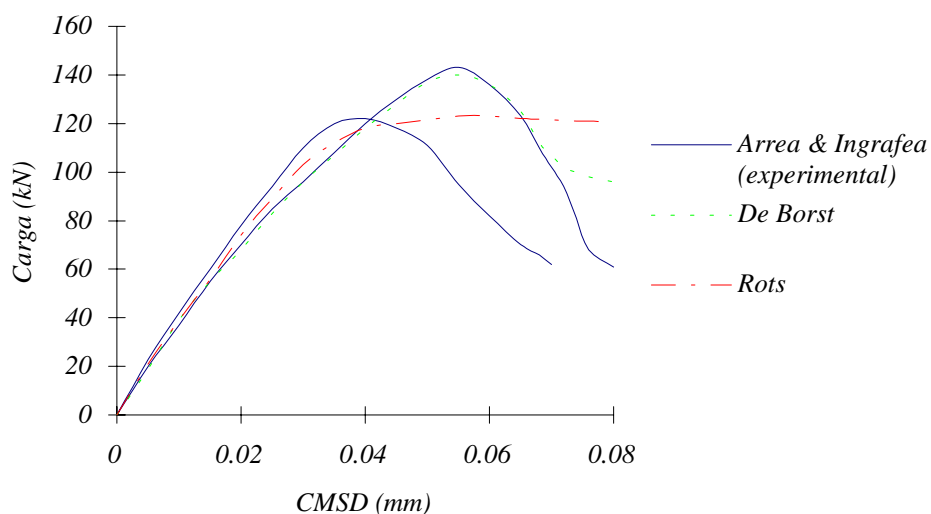


Figura 7.13 - Exemplo 2: Curvas Carga x CMSD obtidas por alguns autores.

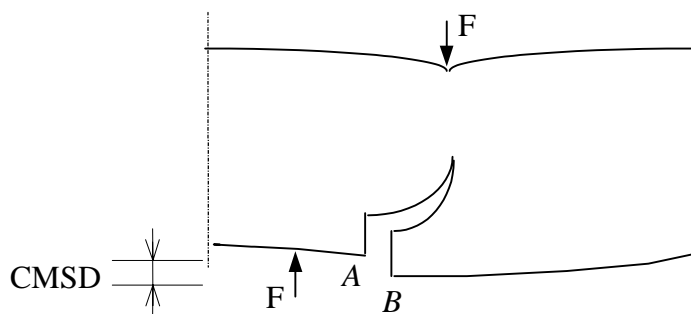


Figura 7.14 - Exemplo 2: Parâmetro CMSD.

Na Figura 7.15 são apresentados os resultados obtidos pelo programa FRACT para a curva Carga x CMSD, considerando a análise se desenvolvendo através do processo distribuído. Estes resultados são comparados com os resultados experimentais obtidos por Arrea e Ingrafea. Na Figura 7.16 é apresentada a curva Carga x Deslocamento do ponto A de aplicação de carga mostrado na Figura 7.11. Esta curva caracteriza o comportamento mecânico para este modelo de viga, onde o modo de deslizamento ocorre até se atingir a carga de pico e é sucedido pelo modo de abertura na fase pós-pico. O resultado é comparado com o obtido numericamente por De Borst (1986) e apresenta um decréscimo de carregamento bem mais acentuado em relação ao obtido por aquele autor. O comportamento mecânico do modelo é correto, como pode ser visto

na Figura 7.17, onde estão representados os modos de deslizamento e abertura, correspondentes à carga de pico e pós-pico.

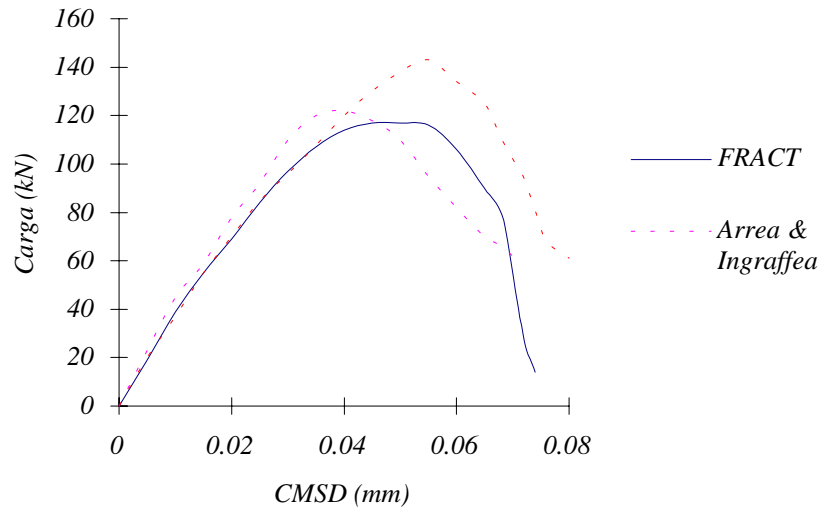


Figura 7.15 - Exemplo 2: Modo combinado de fraturamento. Curva Carga x CMSD pelo processo distribuído.

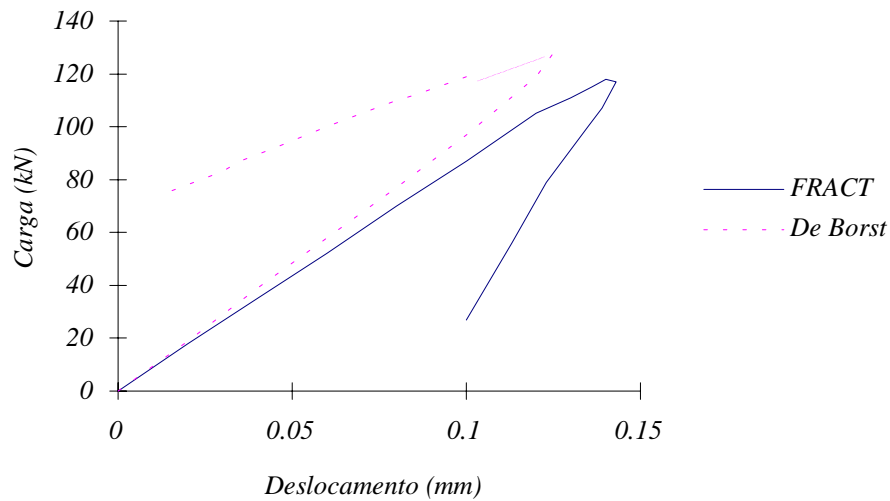
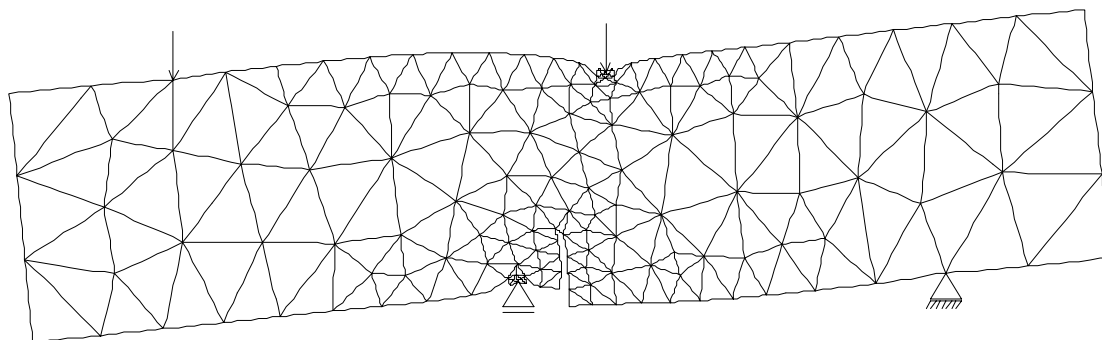
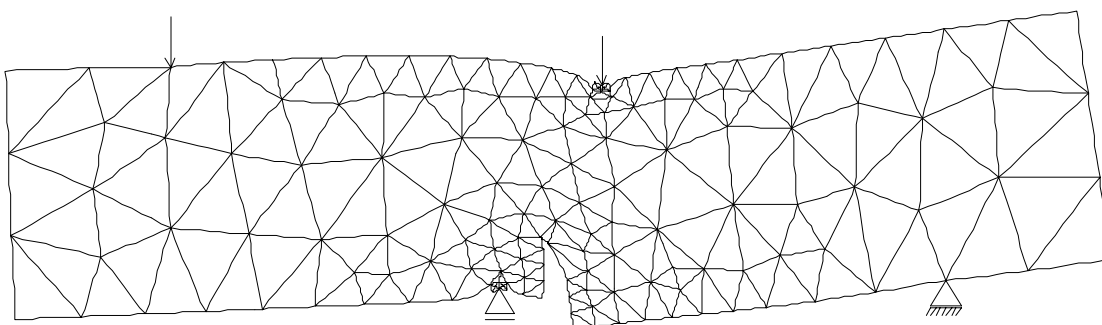


Figura 7.16 - Exemplo 2: Modo combinado de fraturamento. Curva Carga x Deslocamento no ponto A pelo processo distribuído.



a) Modo de deslizamento.



b) Modo de abertura.

Figura 7.17 - Exemplo 2: Modo combinado de fraturamento. Configuração deformada (fator de amplificação = 500) nas fases de pico (*a*) e pós-pico (*b*) de carregamento, pelo processo distribuído.

Em seguida aos resultados obtidos com o enfoque distribuído, procedeu-se à análise combinando os processos discreto e distribuído, de acordo com a técnica proposta neste trabalho. Neste exemplo, a inserção da fissura discreta usando-se o critério de dissipação de energia não apresentou resultados satisfatórios. O problema se mostrou bastante sensível com relação à atualização dos parâmetros plásticos do material na fase pós-pico. A sucessiva atualização destes parâmetros, em função da propagação da fissura discreta, provoca um erro de aproximação que inviabiliza a solução numérica do problema.

Ao se utilizar a técnica de mapeamento das tensões e deformações para a nova malha pelas superfícies de suavização, não foi possível obter convergência da solução numérica

imediatamente após a primeira etapa de propagação da fissura discreta. No entanto, a convergência nesta etapa foi possível ao se usar a técnica de interpolação por triangulação dos pontos de Gauss da malha antiga, embora não tenha sido possível prosseguir com a análise até a segunda etapa de propagação. Deste modo, como no exemplo anterior, foi possível verificar que a técnica de mapeamento usando a triangulação dos pontos de Gauss da malha antiga propicia uma melhor aproximação para as variáveis atualizadas nos novos pontos de Gauss, embora a aproximação conseguida seja ainda insuficiente quando várias etapas de propagação são necessárias para descrever todo o comportamento pós-pico do modelo estrutural. As aproximações obtidas para a curva Carga x CMSD estão mostradas na Figura 7.18.

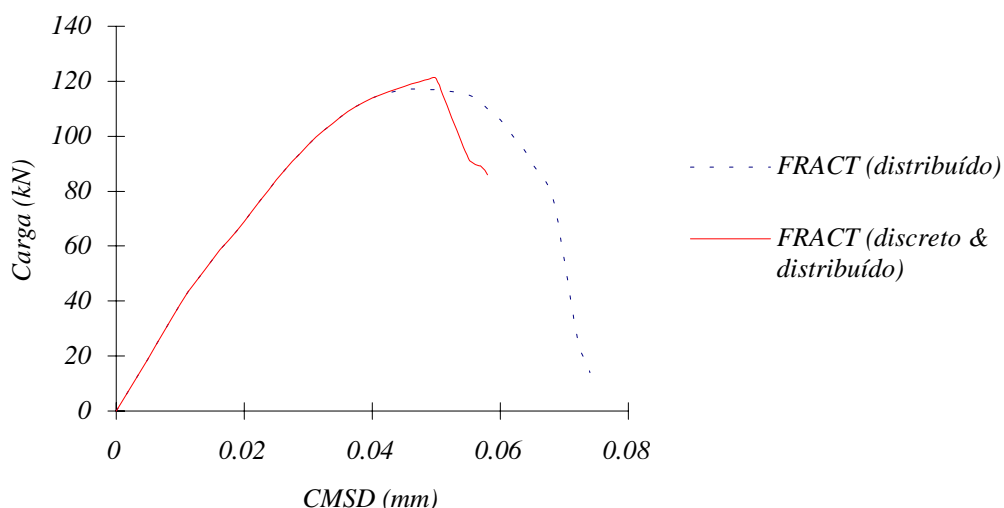


Figura 7.18 - Exemplo 2: Modo combinado de fraturamento. Curva Carga x Deslocamento combinando os processos discreto e distribuído, considerando como critério para inserção da fissura a energia de fraturamento.

A fim de se verificar a influência dos parâmetros plásticos pós-pico do material na solução numérica do problema, o critério de inserção e propagação da fissura discreta a partir da dissipação da energia de fraturamento foi substituído pelo critério de Erdogan e Sih (1963), que estabelece a tensão principal máxima como parâmetro para propagação. Deste modo, ao invés de se esperar até que material apresente uma certa decoesão, a fissura discreta foi inserida assim que a tensão máxima no ponto de Gauss se aproximou da tensão limite de tração do material. Através desta técnica, foi possível inserir a fissura inicial e prosseguir durante as várias etapas de propagação, sem que houvesse uma descontinuidade do processo por falta de convergência da solução numérica.

Na Figura 7.19 são apresentados os resultados obtidos pelo programa FRACT para a curva Carga x CMSD, considerando como critério para inserção e propagação da fissura discreta a tensão limite do material, comparados com os resultados experimentais obtidos por Arrea e Ingraffea.

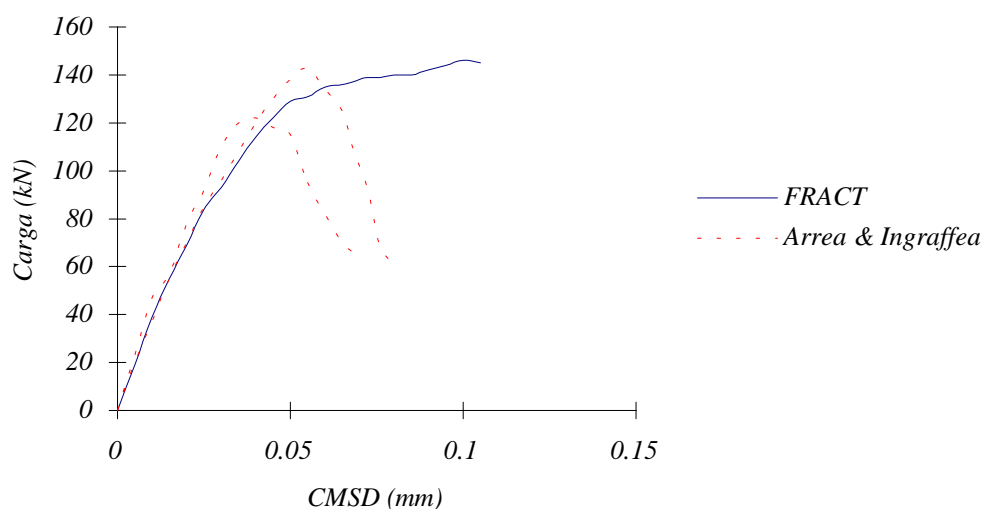


Figura 7.19 - Exemplo 2: Modo combinado de fraturamento. Diagrama Carga x CMSD combinando os processos discreto e distribuído, considerando como critério para inserção da fissura a tensão limite do material.

Nesta curva, dois aspectos são observados:

- É possível captar a carga limite e o comportamento mecânico do sistema estrutural, mas a curva Carga x CMSD não representa o estado de comportamento pós-pico da estrutura. Isto pode ser explicado pela redistribuição das tensões na zona de localização após a inserção da fissura discreta. Toda vez que a solução numérica se aproxima da etapa de desestabilização do material, a fissura se propaga e há uma nova redistribuição das tensões na zona de localização. O processo se repete de tal modo que o material nunca se desestabiliza na zona de localização e, portanto, não há possibilidade de representação do comportamento pós-pico.

- A cada inserção da fissura discreta, com total liberação das ligações entre as suas faces, ocorre um deslocamento excessivo na estrutura, provocando um abatimento da curva e um longo patamar de escoamento no diagrama, a partir da fissura inicial. Acredita-se que a manutenção de uma ligação entre as faces da fissura discreta através de elementos de interface, simulando o

comportamento pós-pico do material, poderia controlar esse deslocamento e levar a uma melhor representação do comportamento da estrutura.

Na Figura 7.20 é apresentada a curva Carga x Deslocamento do ponto A de aplicação de carga mostrado na Figura 7.11. Como já dito, este diagrama caracteriza o comportamento mecânico deste modelo de viga. O resultado é comparado com o obtido numericamente por De Borst (1986) e, uma vez que não foi possível desestabilizar o material por esse processo, o diagrama não apresenta o decréscimo de carregamento obtido por aquele autor.

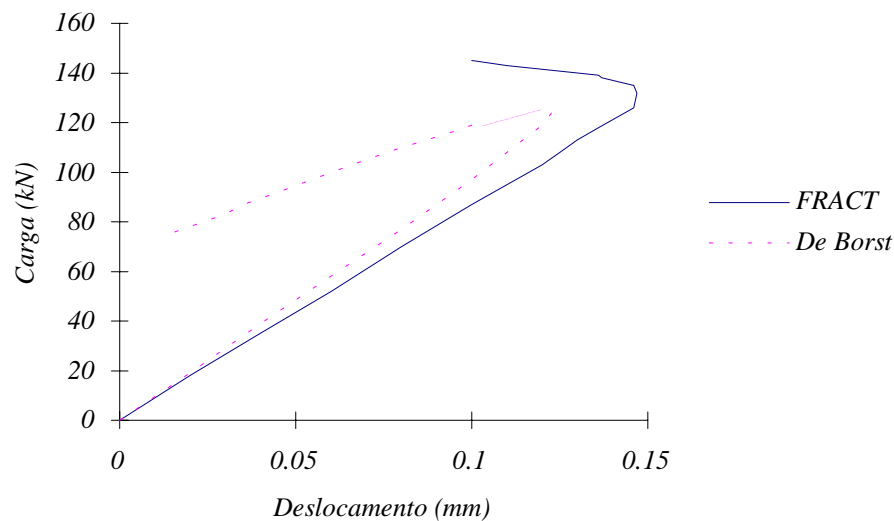
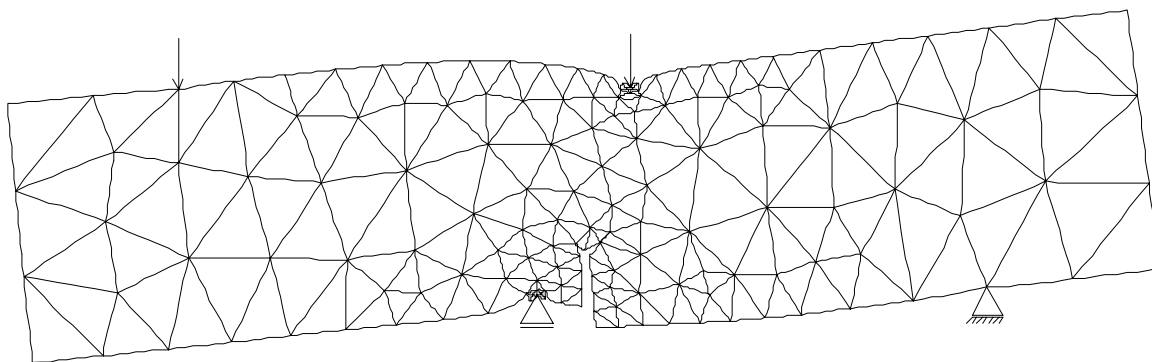
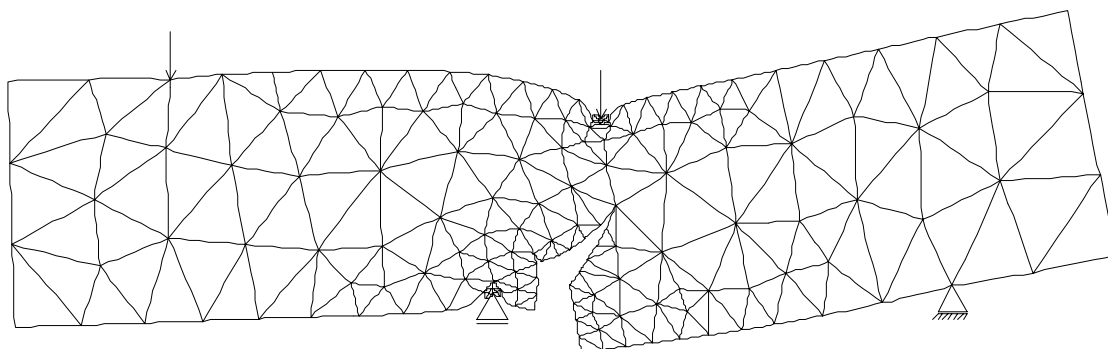


Figura 7.20 - Exemplo 2: Modo combinado de fraturamento. Diagrama carga x Deslocamento no ponto A combinando os processos discreto e distribuído, considerando como critério para inserção da fissura a tensão limite do material.

Assim como nos resultados obtidos unicamente pelo processo distribuído, o comportamento mecânico do modelo é correto, como pode ser visto na Figura 7.21, onde estão representados os modos de deslizamento e abertura da fissura.



a) Modo de deslizamento.



b) Modo de abertura.

Figura 7.21 - Exemplo 2: Modo combinado de fraturamento. Configuração deformada (fator de amplificação = 500) para os modos de deslizamento (a) e abertura (b) combinando os processos discreto e distribuído.

Através deste exemplo é possível verificar a principal vantagem do processo discreto em relação ao processo distribuído, que reside na melhor representação do processo de fraturamento do material. O caminhamento da fissura encontrado neste exemplo é representada pela linha pontilhada na Figura 7.22, onde estão reproduzidas também as fissuras encontradas nos ensaios experimentais realizados por Arrea e Ingraffea. É interessante notar que a fissura se inicia com um ângulo de aproximadamente 45° pelo canto direito do entalhe, conforme resultados obtidos em laboratório. A conformação curva obtida na propagação da fissura também reproduz os ensaios de laboratório e só foi possível de ser obtida através da representação discreta. Como foi observado por Rots (1988), esta configuração curva, que ultrapassa a linha de carregamento e termina à direita desta linha, não é possível de ser representada quando a análise se desenvolve

unicamente através do enfoque distribuído. Neste caso, uma representação do processo de fraturamento é obtida na direção reta que une a extremidade do entalhe aos elementos à esquerda do carregamento, conforme mostrado na Figura 7.23, Rots *et al.* (1985). Esta representação reta também foi encontrada por outros autores, como De Borst (1986) e Feenstra (1993), quando utilizaram o processo distribuído.

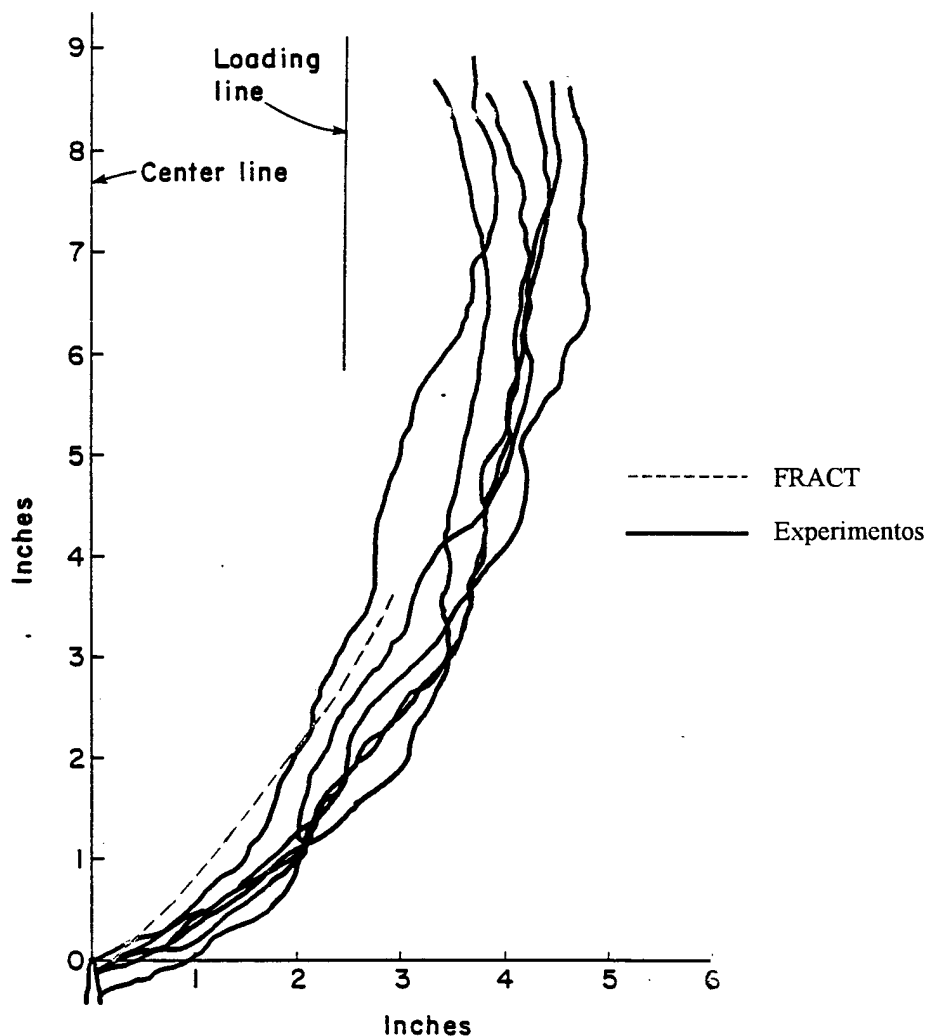


Figura 7.22 - Exemplo 2: Modo combinado de fraturamento.
Caminhamento da fissura discreta.

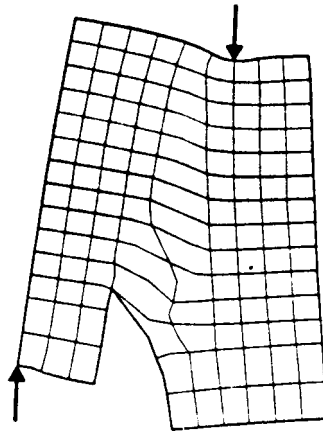


Figura 7.23 - Representação do fraturamento pelo processo distribuído, Rots (1985).

Pelos exemplos apresentados, é possível constatar a instabilidade numérica provocada pelas aproximações feitas no mapeamento dos valores da antiga malha para a nova malha, redefinindo o campo de tensões e deformações. As aproximações obtidas, principalmente para as tensões e deformações na fase pós-pico de comportamento do material, não são boas, e levam o sistema a situações de equilíbrio com modos espúrios de deformação, inviabilizando a análise numérica. Alguns destes modos espúrios, encontrados durante a tentativa de resolução deste Exemplo 2, são apresentados adiante nas Figuras 7.24 e 7.25. Nos dois casos mostrados, a situação de instabilidade foi superada através de uma melhor aproximação das variáveis pós-pico de comportamento do material, permitindo que análise prosseguisse até a etapa de propagação da fissura.

O modo espúrio representado na Figura 7.24 mostra as superfícies da fissura se cruzando, e foi obtido nas tentativas de resolução do Exemplo 2 usando-se o critério de energia para inserção e propagação da fissura discreta. As variáveis nos pontos de Gauss foram atualizadas através das superfícies de suavização dos elementos antigos. A situação foi corrigida ao se utilizar a técnica de mapeamento das variáveis usando a triangulação dos pontos de Gauss da malha antiga. Na Figura 7.25, o modo espúrio representado mostra o deslocamento excessivo obtido para o nó intermediário do elemento vizinho à superfície da fissura, e foi obtido usando-se o critério que estabelece a tensão principal máxima como parâmetro para propagação. A situação foi corrigida

ajustando-se parâmetro de propagação, de modo a evitar que o ponto de Gauss junto à extremidade da fissura entrasse no estado de comportamento pós-pico do material.

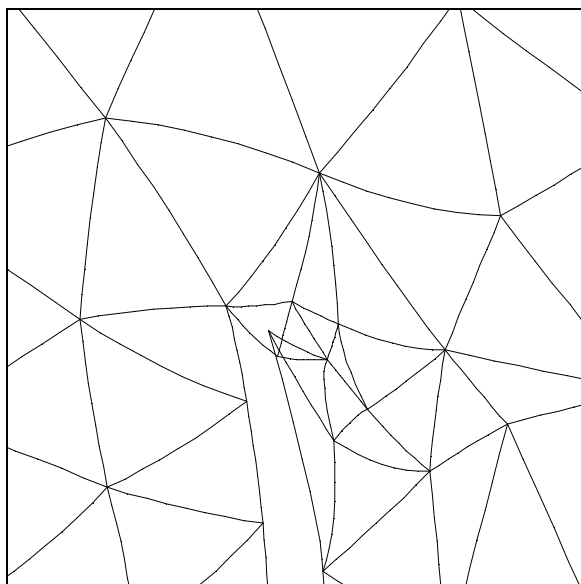


Figura 7.24 - Exemplo 2: Modo espúrio de deformação mostrando as faces da fissura se cruzando.

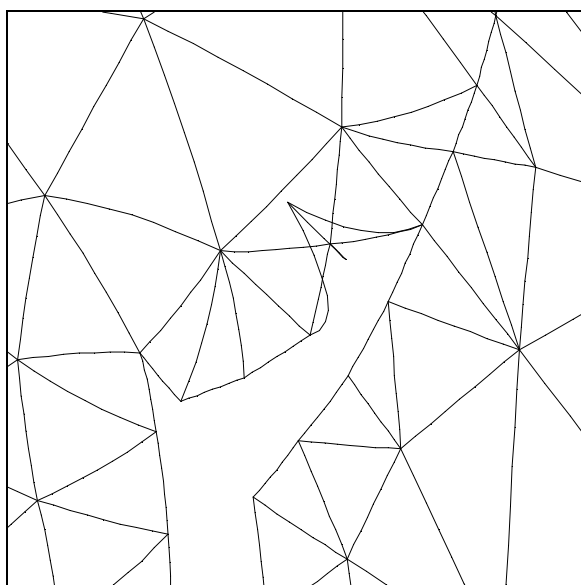


Figura 7.25 - Exemplo 2: Modo espúrio de deformação mostrando o deslocamento excessivo do nó.

Capítulo 8

Conclusões e Recomendações

8.1 Introdução

Neste trabalho foi desenvolvido um modelo para simulação numérica do comportamento de estruturas de concreto combinando os processos de fraturamento discreto e distribuído. Neste modelo foram incorporadas as vantagens inerentes a cada um destes processos, enquanto algumas desvantagens foram eliminadas. Procurou-se estabelecer um critério para inserção da fissura discreta, a partir do desenvolvimento da análise pelo processo distribuído. Este critério considera o fato de que, devido à compatibilidade dos deslocamentos nos nós dos elementos finitos, a análise pelo processo distribuído induz o comportamento plástico sobre uma relativamente larga região da estrutura, e causa dificuldades em concentrar a localização das deformações em alguns poucos pontos de Gauss. Deste modo, o critério previamente estabelecido, que considera a dissipação total da energia de fraturamento para inserção da fissura discreta, é difícil de ser atingido na prática. A fissura discreta é inserida assim que se atinge um certo grau de decoesão no ponto de Gauss correspondente. Uma vez que a energia de fraturamento não é inteiramente dissipada, o comprimento da fissura discreta é estabelecido com base não só na extensão da zona de fraturamento, mas também na magnitude das cargas desbalanceadas remanescentes nos nós desconectados. Por este critério, a fissura discreta pode ser considerada como um dano introduzido no modelo estrutural, e a região à frente da extremidade da fissura caracterizada como a zona de fraturamento, onde a simulação do processo de fraturamento se desenvolve através das equações constitutivas.

A técnica mostra um grande potencial de desenvolvimento visando uma representação mais realística do processo de fraturamento. No entanto, o processo é bastante sensível em relação ao nível de discretização na região no entorno da fissura e à técnica de mapeamento das variáveis

nos pontos de Gauss, da antiga malha para a nova. Nos exemplos, as aproximações conseguidas para estas variáveis foram determinantes para a seqüência da análise, e ainda insuficientes quando várias etapas de propagação foram necessárias para descrever todo comportamento pós-pico do modelo estrutural. Para a seqüência da análise, foi também necessário adaptar o processo de convergência numérica às condições do problema, de modo que se pudesse prosseguir com a análise além da carga de pico. Para solução do problema da viga submetida ao Modo I de fraturamento, foi desenvolvido um procedimento numérico que permite o uso do *controle indireto dos deslocamentos* durante a etapa de análise onde ocorre a localização das deformações, e controle da abertura da fissura nas etapas subseqüentes de inserção e propagação da fissura discreta. Os graus de liberdade selecionados para controle de convergência da solução numérica são obtidos automaticamente pelo programa, que seleciona a região de comportamento não-linear para uso no *IDC*, e os nós próximos à extremidade da fratura para uso no *COD-Control*. A combinação destes processos, se mostrou eficiente em traçar todas as fases de comportamento da estrutura. Para a viga submetida ao modo combinado de fraturamento, o controle do deslizamento da fissura, ou *CMSD Control*, se mostrou mais eficiente.

Os critérios para inserção e determinação do comprimento e direção da fissura foram testados nos exemplos para viga à flexão com entalhe e viga com modo combinado de fraturamento com um entalhe. Os resultados obtidos foram comparados com resultados teóricos e experimentais apresentados na literatura, e permitem uma série de conclusões que podem levar ao melhor desenvolvimento da técnica.

8.2 Conclusões

Com base no desempenho apresentado pelo modelo nos exemplos de aplicação, algumas conclusões podem ser tiradas no sentido de validar a técnica desenvolvida e orientar futuros desenvolvimentos dentro desta linha de pesquisa.

- 1) É possível inserir a fissura discreta, com total liberação de tensões entre as suas faces, a partir do modelo distribuído. O sistema de equações consegue se equilibrar após a inserção da descontinuidade na malha, apesar das cargas desbalanceadas ainda presentes nos nós desconectados.

- 2) O modelo constitutivo utilizado se mostrou bastante eficiente em localizar as deformações e determinar a posição, direção e comprimento da fissura discreta a ser inserida no contínuo.
- 3) Não é possível esperar que a energia de fraturamento se dissipe totalmente em determinado ponto de Gauss para então inserir a fissura discreta correspondente. Essa situação de completa dissipação de energia não vai ocorrer durante a análise devido à compatibilidade dos deslocamentos nos nós dos elementos, que induz modos espúrios de deformação nos elementos vizinhos à localização. Uma taxa de decoesão do material deve ser adotada como parâmetro para inserção da descontinuidade.
- 4) Quando se insere a fissura discreta e a malha de EF é atualizada, há um razoável erro de aproximação no mapeamento das variáveis nos pontos de Gauss que correspondem ao estado de *strain-softening*. Esses erros se acumulam após cada atualização da malha até o ponto de impedir o prosseguimento da análise.
- 5) Os erros de aproximação no mapeamento das variáveis nos pontos de Gauss são menores ao se fazer a interpolação dos valores pela triangulação dos pontos de Gauss da malha antiga, embora esta técnica ainda tenha se mostrado ineficiente quando um número maior de atualizações é necessário para descrever todo o processo de fraturamento.
- 6) A inserção da fissura discreta considerando como critério a tensão limite do material, sem permitir que o ponto de Gauss na extremidade da fissura entre no estado de *strain-softening*, não apresenta problemas numéricos de convergência, permitindo a propagação da fissura até a situação de colapso. Neste caso é possível captar a carga limite e o comportamento mecânico do sistema estrutural, mas o diagrama carga x deslocamento não representa o estado de comportamento pós-pico da estrutura.
- 7) Uma vez que a fissura é inserida sem que haja total dissipação de energia, há uma razoável indicação, nos exemplos resolvidos, de que o uso de elementos de interface poderia promover uma melhor transição para o processo descontínuo, evitando a abrupta liberação das tensões entre as faces da fissura e controlando as cargas desbalanceadas remanescentes.
- 8) Os procedimentos de *controle indireto dos deslocamentos (IDC)*, *controle de abertura da fissura (COD Control)* e *controle de deslizamento da fissura (CMSD Control)* se mostraram eficientes na estabilização do processo numérico, considerando as condições desfavoráveis

apresentados por este modelo. Não custa lembrar que o modelo constitutivo representa uma não-linearidade física, não-associada, o que gera uma matriz de rigidez não-simétrica. Além disto, o processo introduz uma descontinuidade na malha que implica em reequilibrar o sistema de equações com as forças desbalanceadas geradas em função deste procedimento.

- 9) As rotinas gráficas baseadas em estruturas de dados topológicas foram essenciais em várias etapas do desenvolvimento da análise, como na geração do modelo inicial, inserção e propagação da fissura discreta, seleção da região de comportamento inelástico para atualização do campo de tensões e deformações, seleção dos graus de liberdade para uso nos procedimentos numéricos e visualização do comportamento da estrutura.
- 10) Finalmente, o modelo numérico permitiu simular corretamente o comportamento mecânico das estruturas testadas, embora a resposta em termos dos diagramas carga x deslocamento gerados ainda dependa das aproximações conseguidas na atualização das variáveis atribuídas aos pontos de Gauss quando da discretização da região de propagação da fissura discreta. Também os critérios para inserção e propagação da fissura devem ser melhor estudados e, nesse sentido, algumas recomendações são feitas no item seguinte.

8.3 Recomendações para Trabalhos Futuros

O desempenho apresentado pelo modelo numérico nos exemplos de aplicação, permite concluir pela viabilidade de se combinar os processos de fraturamento discreto e distribuído dentro de um modelo numérico único. Assim sendo, este trabalho abre um vasto campo de pesquisas no sentido de melhorar a técnica desenvolvida, e algumas recomendações para trabalhos futuros estão enumeradas a seguir.

- 1) Desenvolver uma técnica de mapeamento das variáveis nos pontos Gauss, nas etapas de discretização por inserção e propagação da fissura discreta, que permita uma melhor aproximação destes valores, principalmente aqueles que se encontram na fase pós-pico de comportamento do material. Um grau de refinamento adequado da região discretizada deve ser estudado. Uma outra sugestão seria promover a atualização das tensões para a nova malha ajustando localmente os pontos superconvergentes pelo método dos mínimos quadrados,

como proposto por Zienkiewics e Zhu (1992). Este processo fornecerá um novo campo de tensões suavizado e deverá melhorar as condições de convergência do problema.

- 2) Usar elementos de interface na fissura discreta, de modo a se ter um melhor controle da dissipação de energia durante o regime de *strain-softening* e se ter uma transição mais suave do processo distribuído para a representação discreta.
- 3) Utilizar processos autoadaptativos para uma melhor configuração da malha na região da fissura. Estes processos permitirão uma sensível otimização da análise numérica, uma vez que o refinamento na região de localização das deformações será feito automaticamente de acordo com critério previamente estabelecido.
- 4) Introduzir termos adicionais na descrição do contínuo, de modo a captar as modificações que ocorrem na micro estrutura durante o processo de deterioração do material. Este procedimento vem sendo utilizado nos chamados *modelos gradiente* e trata de modo mais elegante a eliminação da dependência da malha, uma vez que a largura da zona de fraturamento fica contida na descrição matemática do contínuo.
- 5) No procedimento incremental-iterativo para solução do sistema não-linear, utilizar estimadores do tamanho do passo necessário nas etapas seguintes, com possibilidade de reiniciação automática da análise toda vez que se ultrapassar um número máximo de iterações.
- 6) Utilizar outros procedimentos numéricos que possam acelerar a velocidade de convergência dos resultados e propiciem uma melhor estabilidade numérica ao longo da análise. Uma sugestão seria a utilização de processos Quasi-Newton, como BFGS, por exemplo, já testado em problemas com não linearidade física com considerável economia de tempo de processamento, De Borst (1986).
- 7) Explorar a possibilidade do modelo de introduzir múltiplas fissuras em regiões diferentes da estrutura, uma vez que a localização das deformações é obtida durante a análise e a fissura discreta introduzida automaticamente. Na implementação atual, a localização foi permitida em um elemento por vez e foram testados modelos com uma única região de concentração de tensões.

- 8) Estender o modelo para aplicação em concreto armado. Mesmo com a introdução da armadura principal, a localização pode ocorrer em regiões da estrutura com singularidades e não protegidas, como furos e cantos sem armadura de reforço.

Referências Bibliográficas

- Arrea, M. and Ingraffea, A.R. (1982) - "Mixed-Mode Crack Propagation in Mortar and Concrete", Report 81-13, Cornell University, Ithaca, New York, USA.
- Balakrishnan, S. and Murray, D.W. (1986) - "Finite Element Prediction of Reinforced Concrete Behavior", Structural Engineering Report No.138, Department of Civil Engineering, University of Alberta, Canada.
- Baumgart, B.G. (1975) - "A Polyhedron Representation for Computer Vision", AFIPS Proc., Vol.44, pp.589-596.
- Batoz, J.L. and Dhatt, G. (1979) - "Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems", IJNME, No.14, pp.1262-1267.
- Bazant, Z.P. and Cedolin, L. (1979) - "Blunt Crack Band Propagation in Finite Element Analysis", J. Eng. Mech. Div. ASCE, Vol.105, No.EM2, pp.297-315.
- Bazant, Z.P. and Kim, S.S. (1979) - "Plastic-Fracturing Theory for Concrete", Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.15, No.EM3, pp.407-428.
- Bazant, Z.P. and Oh, B.H. (1983) - "Crack Band Theory for Fracture of Concrete", RILEM Materials and Structures, Vol.16, pp.155-177.
- Bazant, Z.P. (1985) - "Mechanics of Fracture in Progressive Cracking in Concrete Structures" in Fracture Mechanics of Concrete, G.C.Sih and A.DiTommaso, Martinus Nijhoff Publishers.
- Bazant, Z.P. (1990) - "Fracture Mechanics of Concrete: Concepts, Models and Determination of Material Properties, ACI 466.1R-XX", Concrete International, Dec. 90, pp.67-70.
- Bittencourt, T.N., Wawrzynek, P.A., Ingraffea, A.R. and Souza, J.L. (1996) - "Quasi-Automatic Simulation of Crack Propagation for 2D LEFM Problems", Engineering Fracture Mechanics, Vol.55, No.2, pp.321-334.

- Budan, Y. and Murray, D.W. (1992) - "Finite Element Analysis of Distributed Discrete Concrete Cracking", Structural Engineering Report No.179, Department of Civil Engineering, University of Alberta, Canada.
- Chen, W.F. (1982) - "Plasticity in Reinforced Concrete", McGraw Hill, New York, N.Y.
- Cope, R.J., Rao, P.V., Clark, L.A. and Norris, P. (1980) - "Modelling of Reinforced Concrete Behaviour for Finite Element Analysis of Bridge Slabs" in Numerical Methods for Non-Linear Problems 1, Pineridge Press, Swansea, pp. 457-470.
- Crisfield, M.A. (1981) - "A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles Snap-Through", Computer Structures, 13(1/3), pp.55-62.
- Crisfield, M.A. (1982) - "Local Instabilities in Non-Linear Analysis of Reinforced Concrete Beams and Slabs". Proceeding Institution of Civil Engineers, Part 2, No.73, pp.135-145.
- Crisfield, M.A. (1983) - "An Arc-length Method Including Line-Searchs and Accelerations", IJNME, Vol.19, pp.1269-1289.
- Crisfield, M.A. (1984) - "Overcoming Limit Points with Material Softening and Strain Localisation", in Numerical Methods for Nonlinear Problems, Vol.2, Ed. C.Taylor et al., Pineridge, Swansea, pp.244-277.
- Crisfield, M.A. (1991) - "Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures", Volume 1, John Wiley & Sons Ltd., England.
- De Borst, R. (1986) - "Non-Linear Analysis of Frictional Materials", Ph.D. Dissertation, Delft University of Technology.
- De Borst, R. and Blaauwendraad, J. (1988) - "Stability and Spurious Kinematic Modes in Strain-Softening Concrete" in Computational Mechanics'88, Proc. Int. Conf. on Computational Engineering Science, Eds. S.N. Atluri and G.Yagawa, Vol.1, Springer-Verlag, Berlin.
- Elwi, A.E. (1992) - "FEPARCS 92 - A Description and User's Manual", Dep. of Civil Engineering, University of Alberta.
- Erdogan, F. and Sih, G.C. (1963) - "On the Crack Extension in Plates under Plane Loading and Transverse Shear", ASME Journal of Basic Engineering, Vol.85, pp.519-527.

- Feenstra, P.H. (1993) - "Computational Aspects of Biaxial Stres in Plain and Reinforced Concrete", Ph.D. Dissertation, Delft University of Technology.
- Feenstra, P.H. and DeBorst, R. (1995) - "A Survey of Plasticity and Damage-Based Crack Models for F.E. Analysis and Fracture in Concrete" in Computational Plasticity, Part 2, Fundamentals and Applications, Eds. D.R.J. Owen, E.Oñate, E.Hinton, Pineridge Press, Swansea, UK.
- Gerstle, W. and Bazant, Z.P. (1992) - "Concrete Design Based on Fracture Mechanics", ACI SP-134.
- Han, D.J. and Chen, W.F. (1985) - "A Non-Uniform Hardening Plasticity Model for Concrete Materials", Mechanics of Materials, 4, pp.283-302.
- Hillerborg, A., Modéer, M. and Petersson, P.E. (1976) - "Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements", Cement and Concrete Research, Vol.6, pp.773-782.
- Hillerborg, A. (1978) - "A Model for Fracture Analysis", Report TVBM-3005, University of Lund, Sweden.
- Hillerborg, A. (1985) - "Numerical Methods to Simulate Softening and Fracture in Concrete Structures" in Fracture Mechanics of Concrete, G.C.Sih and A.DiTommaso, Martinus Nijhoff Publishers.
- Hillerborg, A. (1989) - "Fracture Mechanics and the Concrete Codes", in Concrete Design Based on Fracture Mechanics, ACI, Eds. Victor C. Li and Zdenek P. Bazant.
- Hillerborg, A. (1991) - "Reliance upon Concrete Tensile Strength", IABSE Reports, Vol.62, 589-604, IABSE Colloquium, Stuttgart.
- Hoek, E. and Brown, E.T. (1980) - "Empirical Strength Criterion for Rock Masses", J. Geotech. Eng., ASCE, 106(GT9), pp.1013-1035.
- Hurlbut, B.J. (1985) - "Experimental and Computational Investigation of Strain-Softening in Concrete", M.Sc. Thesis, University of Colorado, Boulder.

- Ingraffea A.R. and Saouma, V. (1985) - "Numerical Modelling of Discrete Crack Propagation in Reinforced and Plain Concrete" in *Fracture Mechanics of Concrete*, G.C.Sih and A.DiTommaso, Martinus Nijhoff Publishers.
- Irons, B.M. (1970) - "A Frontal Solution Program for Finite Element Analysis", *IJNME*, Vol.2, pp.119-130.
- Li, V.C. (1989) - "Technological Implications of Concrete Fracture Research - An Overview of Tensile Failure in Cementitious Materials and Structures", in *Concrete Design Based on Fracture Mechanics*, ACI, Eds. Victor C. Li and Zdenek P. Bazant.
- Mantyla, M. (1988) - "Introduction to Solid Modeling", Computer Science Press, Rockville, MD.
- Martha, L.F. (1989) - "Topological and Geometrical Modeling Approach to Numerical Discretization and Arbitrary Fracture Simulation in Three Dimensions", Ph.D.Thesis, Cornell University, Ithaca, N.Y.
- Napoleão, J., Elwi, A.E. and Murray, D.W. (1992) - "An Eigenvector-based Strategy for the Analysis of Inelastic Structures", *Computer & Structures*, Vol.4, No.5, pp.833-848.
- Ngo, O. and Scordelis, A.C. (1967) - "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams", *ACI Journal*, Vol.64, No.3, pp.152-163.
- Ngo, D. (1975) - "A Network-Topological Approach for the Finite Element Analysis of Progressive Crack Growth in Concrete Members", Ph.D. Dissertation, Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California, Berkeley, UC-SESM.
- Nilson, A.H. (1968) - "Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete by the Finite Element Method", *ACI Journal*, Vol.65, No.9, pp.757-766.
- Parente Jr., E. (1997) - "Otimização de Forma de Estruturas Planas Considerando o Efeito da Não-Linearidade Geométrica", Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio (em preparação).

- Petersson, P.E. (1980) - "Fracture Energy of Concrete: Method of Determination" and "Fracture Energy of Concrete: Practical Performance and Experimental Results", *Cement and Concrete Research*, Vol.10, pp.78-89 and pp.91-101.
- Petersson, P.E. (1981) - "Crack Growth and Development of Fracture Zones in Plain Concrete and Similar Materials". Report TVBM-1006, Div. of Building Materials, Lund Institute of Technology.
- Pramono, E. (1988) - "Numerical Simulation of Distributed and Localized Failure in Concrete", Ph.D.Thesis, University of Colorado, Boulder.
- Pramono, E. and Willam, K. (1989) - "Fracture Energy-Based Plasticity Formulation of Plain Concrete", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.115, No.6, pp.1183-1204.
- Ramm, E. (1981) - "Strategies for Tracing Nonlinear Response Near Limit Points" in *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, Eds. W.Wunderlich et al., Springer Verlag, Berlin, pp.63-89.
- Rashid, Y.R. (1968) - "Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels", *Nuclear Engineering and Design*, Vol.7, No.4, pp.334-344.
- Riks, E. (1970) - "On the Numerical Solution of Snapping Problems in the Theory of Elastic Stability", Dissertation, Stanford University.
- RILEM Technical Committee 50 (1985) - "Determination of the Fracture Energy of Mortar and Concrete by Means of Three-Point Load Tests on Notched Beams", RILEM Draft Recommendation, *Materiaux et Constructions*, V.18, No.106, pp.285-290.
- Roelfstra, P.E. (1989) "Simulation of Failure in Computer Generated Structures" in *Fracture Toughness and Fracture Energy*, Balkema, Rotterdam, pp.313-324.
- Romano, M. (1969) - "On Leon's Criterion", *Meccanica*, pp.48-66.
- Rots, J.G., Nauta, P., Kursters, M.A. and Blaauwendraad, J. (1985) - "Smeared Crack Approach and Fracture Localization in Concrete", *HERON*, Vol.30, No.1.
- Rots, J.G. and de Borst, R. (1987) - "Analysis of Mixed-Mode Fracture in Concrete", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 113(11), pp.1739-1758.

- Rots, J.G. (1988) - "Computational Modeling of Concrete Fracture", Ph.D. Dissertation, Delft University of Technology.
- Saouma, V.E. (1981) - "Finite Element Analysis of reinforced Concrete: A Fracture Mechanics Approach", Ph.D. Dissertation, School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University.
- Schlagen, E. and Van Mier, J.G.M. (1992) - "Experimental and Numerical Analysis of Micro-Mechanisms of Fracture of Cemented-Based Composites", *Cement & Concrete Composites*, 14, pp.105-114.
- Schlagen, E. (1993) - "Experimental and Numerical Analysis of Fracture Processes in Concrete", Dissertation, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands.
- Van Mier, J.G.M. (1995) - "Fracture Mechanis of Concrete: Will Applications Start to Emerge ?", *HERON*, Vol.40, No.2.
- Vianna, A.C. (1992) - "Modelagem Geométrica Estendida para Modelos Bidimensionais de Elementos Finitos", Dissertação de Mestrado, PUC-Rio.
- Wawrzynek, P. (1987) - "Interactive Finite Element Analysis of Fracture Processes: An Integrated Approach", Ph.D. Thesis, Department of Structural Engineering, Cornell University.
- Wawrzynek, P., Martha, L.F. and Ingraffea (1988) - "A Computational Environment for the Simulation of Fracture Processes in Three Dimensions", *The Joint ASME/SES Applied Mechanics and Engineering Science Conference*, Vol.91, pp.321-327.
- Wempner, G.A. (1971) - "Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solids", *IJNME*, 7, pp.1581-1599.
- Wittmann, F.H. (1983) - "Structure of Concrete with Respect to Crack Formation" in *Fracture Mechanics of Concrete*, Ed. Folker H.Wittmann, Elsevier Science Publisher, B.V., Chapter 2, pp.43-74.
- Xie, J., Elwi, A.E. and MacGregor, J.G. (1994) - "Numerical Investigation of Excentrically Loaded Tied High Strength Concrete Columns", Ph.D. Thesis, University of Alberta.

Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z. (1992) - "The Superconvergent Patch Recovery and a posteriori Error Estimates. Part 1: The Recover Thechnique" and "Part 2: Error Estimates and Adaptivity", IJNME, 33, pp.1331-1364 and 1365-1382.