



PUC

ARLINDO CARDARETT VIANNA

MODELAGEM GEOMÉTRICA ESTENDIDA
PARA MODELOS BIDIMENSIONAIS DE ELEMENTOS FINITOS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Departamento de Engenharia Civil
PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

Rio de Janeiro, Agosto de 1992

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO
RUA MARQUÊS DE SÃO VICENTE, 225 – CEP 22453
RIO DE JANEIRO – BRASIL

N. Chamada: 624 / V617 / TESE UC

Título: Modelagem geométrica estendida para mode



0 0 9 1 3 6 1 9029

Ex 1-CENTRAL

Arlindo Cardarett Vianna

**MODELAGEM GEOMÉTRICA ESTENDIDA PARA MODELOS
BIDIMENSIONAIS DE ELEMENTOS FINITOS**

**Dissertação apresentada ao Departamento
de Engenharia Civil da PUC-Rio como par-
te dos requisitos para obtenção do título de
Mestre em Ciências em Engenharia Civil:
Estruturas.**

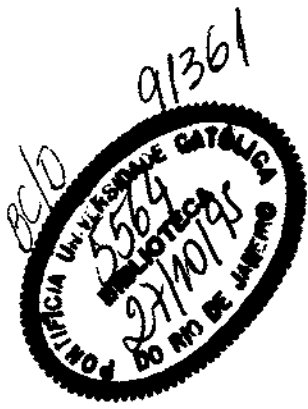
Orientador : Luiz Fernando C. R. Martha

**Departamento de Engenharia Civil
ICAD - Laboratório de CAD Inteligente**

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro, 28 de Agosto de 1992

62608



10-12-1995

624
V617
TESE UC

Dedico este trabalho à minha mãe,
ao meu pai (onde quer que ele esteja)
e ao meu filho Luciano.

Agradecimentos

- Aos meus pais pela minha formação .
- Ao professor e amigo Luiz Fernando pela orientação , apoio, incentivo e ensinamentos recebidos ao longo deste trabalho.
- À todos amigos da PUC e em especial à Anselmo, Eduardo, Gil, João e Remo pela grande amizade e companheirismo.
- Aos professores e funcionários do departamento e em especial ao Professor Marcelo Gattass, que de uma forma indireta participou da orientação deste trabalho.
- Ao Laboratório de CAD Inteligente (ICAD), pela utilização das estações de trabalho.
- Ao Peter pelas fotografias apresentadas na defesa e suporte das estações de trabalho.
- Ao apoio financeiro dado pela PROMON Engenharia, CAPES e IBM (num convênio durante um período de elaboração deste trabalho, conseguido através do Prof. Sérgio Fontoura).

O presente trabalho consiste em um pré-processador que apresenta um ambiente gráfico e interativo que seja propício para geração de dados para análise de meios elásticos bidimensionais por elementos finitos.

A representação dos dados, é baseada em um modelo geométrico completo da estrutura que engloba dois importantes aspectos, a saber :

- Definição completa e inequívoca da geometria que compreende a geometria propriamente dita e sua topologia, isto é, as definições das relações entre as entidades geométricas envolvidas.
- Definição de todos os atributos físicos referentes ao modelo geométrico, ou seja, material, solicitações e condições de contorno (suportes).

Esta característica do presente pré-processador é fundamentalmente diferente do que é feito normalmente em outros programas, onde os atributos físicos são definidos nos elementos e nós de uma malha que é um mero artefato matemático. A vantagem do enfoque deste trabalho é que todos estes atributos não precisam ser redefinidos quando houver uma mudança da malha.

A estrutura de dados utilizada confere ao pré-processador um modo eficiente e organizado de armazenar e manipular todas as informações inerentes aos modelos gerados, chegando-se ao uso de Estruturas de Dados Topológicas.

Finalmente é abordada a utilização de uma técnica de geração de malhas usando-se triangulação com pontos internos gerados com princípios de *quadtree*. Esta técnica se mostra eficiente e gera malhas de boa conformidade e é indicada quando se tem formas geométricas complicadas ou se deseja o refinamento em algumas regiões da malha, uma vez que o algoritmo implementado tem a propriedade de discretizar mais as regiões que sejam próximas a um contorno mais discretizado.

Abstract

This work involves the development of an interactive, computer graphics program for generating bidimensional finite element models for elasticity problems.

This pre-processor is based on a complete geometric representation. In this context, the notion of geometry not only represents the mathematical forms that describes individual curves that comprises an object but also includes the following aspects:

- Complete and unambiguous geometric description of the problem that involves a combination of geometry and topology, i. e., the relationship information among the individual geometric entities;
- Complete attribute information attached to the geometric model, i. e., material properties, loads and restraints.

This characteristic is very different from the one adopted by other similar programs, in which attributes are usually attached directly to the nodes and elements of a mesh. The greatest advantage of using this geometry based representation is that there is no need to redefine the attributes when the mesh changes.

The topological data structure adopted in this system is very suited for this type of interactive-graphics program. This is due to the efficient way this data representation scheme stores and manipulates all model information.

Finally, it is implemented a technique for triangular mesh generation whose inner points are generated by a recursive spatial decomposition approach. The generated meshes generally presents good well shaped elements, i. e., elements which are reasonably good for the numerical analysis. This technique is recommended for complex geometry objects or when it is desirable a higher degree of mesh refinement in a specified region.

Sumário

1. Introdução	1
1.1 Escopo e Objetivos	1
1.2 Histórico	3
1.3 Organização do trabalho	4
2. Decomposição Hierárquica para Geração de Malhas	5
2.1 Modelos Hierárquicos	6
2.2 Definição de um problema a ser resolvido por E. F.	7
2.3 Extração de Dados para Análise Numérica	10
3. Representação de Modelos através de Estruturas de Dados	
Topológicas	11
3.1 Relações de Adjacência	11
3.2 Estruturas de Dados Topológicas e Subdivisão Planar	13
3.3 Características e Vantagens de Estruturas de Dados Topológicas	16
3.4 Estruturas de Dados Topológicas Baseadas em Arestas	17
3.5 Estrutura de Dados “Face-aresta modificada” - FEDm	18
3.6 Organização do Sistema	21
4. Hierarquia e Atributos	23
4.1 Hierarquia	23
4.2 Atributos	28
4.2.1. Propriedades Físicas	28
4.2.2. Restrições de Apoio	30
4.2.3. Carregamentos	31
5. Geração Automática de Malhas	33
5.1 Triangulação	33

5.2 Decomposição Espacial Recursiva - DER	35
5.3 Geração de Nós Internos a partir da DER	37
6. Exemplos	41
7. Conclusões e Sugestões	47
Referências Bibliográficas	49

Lista de Figuras

Figura 2.1	Hierarquia dos modelos topológicos.....	7
Figura 2.2	Definição do modelo geométrico.	8
Figura 2.3	Definição de dois modelos para sub-região. No modelo da esquerda são criadas 4 regiões e no modelo da direita 6 regiões.....	8
Figura 2.4	Modelos da subdivisão com o n ^o de subdivisões indicado, razão 1:1 e linear.....	9
Figura 2.5	Malha de elementos finitos para o 1 ^o modelo (elementos T3 na parte superior e Q4 na parte inferior gerados com mapeamento bilinear)....	9
Figura 2.6	Malha de elementos finitos (T3) com utilização de mapeamento bilinear e trilinear.	10
Figura 3.1	Relações de adjacência.	12
Figura 3.2	As nove relações de adjacência entre faces, arestas e vértices (Weiler, 1985).....	12
Figura 3.3	Um tetraedro e sua representação por um modelo planar.	13
Figura 3.4	Subdivisão planar e elementos topológicos.....	14
Figura 3.5	Operadores de Euler (Wawrzynek, Ingraffea, 1987 b).	15
Figura 3.6	Relação entre Rapidez e Armazenamento (Woo, 1985).....	16
Figura 3.7	Entidades topológicas adjacentes a uma aresta.....	18
Figura 3.8	Representação esquemática das entidades topológicas da FEDm.	19
Figura 3.9	Faces e ciclos.	20
Figura 3.10	Aresta-uso e vértice-uso.....	20
Figura 3.11	Organização do sistema.....	21
Figura 4.1	Comunicação dos modelos hierárquicos.	24
Figura 4.2	Ligação hierárquica entre faces dos modelos da Geometria e Malha. .	25
Figura 4.3	Informações hierárquicas armazenadas na área de atributos das entidades topológicas.	25

Figura 4.4	Comunicação hierárquica com os níveis adjacentes.	26
Figura 4.5	Exemplo de tipos de ponteiros ascendentes.	27
Figura 4.6	Tipos de ponteiros ascendentes.	27
Figura 4.7	Representação esquemática da área de atributos de uma face da geometria.	28
Figura 4.8	Estrutura FEDm e Lista de Materiais.	29
Figura 4.9	Restrições acumulativas entre a geometria e a malha.	30
Figura 4.10	Representação esquemática da área de atributos de uma aresta da geometria.	31
Figura 4.11	Representação esquemática da área de atributos de um vértice da malha.	31
Figura 4.12	Cargas equivalentes nodais para elementos lineares.	32
Figura 4.13	Cargas equivalentes nodais para elementos quadráticos.	32
Figura 5.1	Triangulação por contração do contorno.	34
Figura 5.2	Representação esquemática do critério do ângulo utilizado na triangulação por contração do contorno.	35
Figura 5.3	Procedimentos de DER para regiões triangulares e quadrangulares. ...	36
Figura 5.4	DER de uma determinada região.	36
Figura 5.5	<i>Quadtree</i> correspondente da Figura 5.4.	37
Figura 5.6	Processo de Refinamento da DER.	39
Figura 5.7	Pontos Internos gerados pelo processo de DER.	39
Figura 5.8	Malha de elementos finitos gerada utilizando-se técnica de triangulação. Na parte (a) a malha gerada com os pontos definidos pelo processo de DER (Figura 5.7). Na parte (b) após a suavização das coordenadas. ...	40
Figura 6.1	Representação da análise de uma escavação subterrânea em um solo estratificado.	41
Figura 6.2	Carregamentos aplicados em um suporte metálico.	42
Figura 6.3	Malhas referentes ao modelo da Figura 6.2, onde a carregamento aplicado na geometria é herdado pelos nós da malha.	42

Figura 6.4	Modelos utilizados para geração de malhas usando técnicas de mapeamento bilinear e trilinear. Na parte inferior esquerda aparece o modelo da subdivisão apenas por uma questão didática.	43
Figura 6.5	Modelo para análise de uma barragem com as restrições de suportes representadas.	43
Figura 6.6	Malha de elementos finitos gerada para representação do modelo da Figura 6.5 com as restrições nodais representadas.	44
Figura 6.7	Malha de elementos finitos de uma viga-parede com as solicitações e restrições representadas.	44
Figura 6.8	Malha de elementos finitos para uma peça mecânica gerada por triangulação com pontos internos gerados por princípios de <i>quadtrees</i>	45
Figura 6.9	Detalhe da Figura 6.8, onde há uma maior discretização do contorno e conseqüentemente uma maior concentração de elementos.	45
Figura 6.10	Malha de um trecho da parede de um cilindro. Na figura da esquerda é mostrada a numeração dos nós, e na figura da direita a numeração dos elementos.	46

A utilização de pré e pós-processadores gráficos tornou mais eficiente a análise de estruturas pelo Método dos Elementos Finitos. Pelo processo convencional, sem interface gráfica, a definição de um modelo a ser analisado, bem como a posterior interpretação dos resultados através de consulta de inúmeras folhas de listagens, consomem a maior parte do tempo da análise.

A grande maioria dos pré-processadores existentes adota como representação básica de dados do modelo a mesma representação utilizada na análise numérica, ou seja, a própria discretização da estrutura. Entretanto, o emprego desta filosofia de trabalho gera uma série de limitações e uma grande ineficiência quando da redefinição de malhas ou atributos referentes a estas.

Este trabalho propõe um pré-processador gráfico que tem a representação dos dados baseada em um modelo geométrico completo da estrutura. Como resultado, obtém-se de uma forma eficiente, padronizada e natural a malha de elementos finitos a ser analisada.

Entenda-se aqui por modelo geométrico completo não só o modelo concebido geometricamente (formado por curvas que limitam a estrutura como um todo), como também mais dois importantes aspectos, a saber :

- Definição completa e inequívoca da geometria, que compreende a geometria propriamente dita e a sua topologia, isto é, as definições das relações entre as entidades geométricas envolvidas.
- Definição de todos os atributos físicos referentes ao modelo geométrico, ou seja, material, solicitações e condições de contorno (suportes).

1.1 *Escopo e Objetivos*

Este trabalho compõe, com o trabalho de Guimarães (1992), um sistema integrado para problemas de elasticidade plana. O sistema é integrado na medida em que as diversas etapas de simulação – modelagem (pré-processamento), análise numérica (processamento) e visualização dos resultados (pós-processamento) – se comunicam dentro

de uma única interface, de forma transparente para o usuário. Um dos principais objetivos deste sistema integrado é o ensino de modelagem pelo Método dos Elementos Finitos.

O objetivo principal deste trabalho, dentro deste sistema integrado, é desenvolver um ambiente gráfico e interativo que seja propício para geração de dados para análise de meios elásticos bidimensionais por elementos finitos. A presente implementação gera modelos para análise de estados planos, não existindo, porém, nenhuma limitação para outros tipos de análises planas, como por exemplo, a análise de placas submetidas à flexão.

Este pré-processador conta com um modelador geométrico onde, a partir da construção de linhas (retas, círculos, arcos de círculo e curvas de bezier), as regiões criadas são identificadas automaticamente.

Com base no modelo geométrico, pode-se atribuir às regiões criadas propriedades físicas dos materiais que formam o meio elástico a ser analisado (isotrópico ou ortotrópico). Pode-se também definir as solicitações externas atuantes, bem como as condições de contorno do problema. As solicitações e restrições são atribuídas, de uma forma geral, às linhas do modelo geométrico.

Esta característica do presente pré-processador é fundamentalmente diferente do que é feito normalmente em outros programas, onde os atributos físicos (material, solicitações e suportes) são definidos nos elementos e nós de uma malha que é um mero artefato matemático. A vantagem do enfoque deste trabalho é que todos estes atributos físicos não precisam ser redefinidos quando houver uma mudança da malha. Entretanto, como em alguns casos é desejável, este pré-processador é flexível a ponto de permitir carregamentos e restrições nodais aplicados diretamente na malha gerada.

A geração de malhas é feita através de um processo de decomposição hierárquica do domínio, iniciada por Martha (1987) e Campos (1991), e aprimorada neste trabalho. Este processo propicia a utilização de técnicas de geração de malhas de mapeamento transfinito (Haber et. al., 1981; Gattass et. al., 1991), triangulação regular (Shaw, Pitchen, 1978) e triangulação utilizando princípios de *quadtree* (Samet, 1984; Wawrzynek, 1991).

Ainda como objetivo deste trabalho pode-se destacar a preocupação de minimizar o armazenamento da estrutura de dados utilizada. Utilizando o trabalho apresentado por Campos (1991) como base, observou-se que se pode promover uma redução do armazenamento da estrutura de dados sem perda de performance.

1.2 Histórico

A estrutura de dados convencional adotada em uma análise numérica de elementos finitos, baseada na incidência dos elementos em uma lista de nós (vértices), não é muito adequada para um ambiente interativo, pois não propicia rapidez e eficiência na geração e manipulação dos dados. As principais razões disso são a imposição de regiões com topologia fixa (os elementos), a inexistência da representação explícita dos bordos dos elementos e a falta de informação de incidência dos nós na lista de elementos.

Sendo assim, buscou-se uma estrutura de dados que conferisse ao pré-processador um modo eficiente e organizado de armazenar e manipular todas as informações inerentes aos modelos gerados, chegando-se ao uso de Estruturas de Dados Topológicas.

O uso deste tipo de estrutura de dados aplicada à análise de elementos finitos é recente e relativamente pouco explorado. Experiências neste campo de aplicação iniciaram em Cornell em 1985 (Wawrzynek, 1986; Wawrzynek, Ingraffea, 1987 a b) com trabalhos para análise de propagação de trincas, utilizando uma estrutura proposta por Baumgart (1975), conhecida como *winged-edge*.

Outros trabalhos utilizando estruturas de dados topológicas aplicadas a elementos finitos, com geração automática de malhas (sem intervenção do usuário), foram propostos e, em particular, os desenvolvidos em *Rensselaer Polytechnic Institute* e *General Electric* (Shepard, 1985; Baehmann, et. al., 1987; Finnigan, et. al., 1989) merecem ser mencionados.

A geração de malhas de elementos finitos (com intervenção do usuário) utilizando uma decomposição hierárquica do domínio a partir de um modelo geométrico foi inicialmente desenvolvido por Martha (1989) e por Campos (1991). Estes trabalhos utilizaram estruturas de dados topológicas concebidas por Weiler (1985, 1986) e por Martha (1987).

Um outro trabalho do mesmo grupo de pesquisa da PUC-Rio, porém com caráter mais formal, foi desenvolvido por Cavalcanti (1992). Neste trabalho foi generalizada a idéia de utilizar estrutura de dados topológicas para qualquer tipo de subdivisão espacial. Em duas dimensões foi utilizada a estrutura *half-edge* concebida por Mäntylä (1988) e em três dimensões a estrutura *radial-edge* idealizada por Weiler (1988).

1.3 Organização do Trabalho

O processo de decomposição hierárquica do domínio para geração de malhas é descrito no capítulo 2. Um problema genérico bidimensional a ser resolvido pelo Método de Elementos Finitos também é apresentado. São vistos os dados necessários para análise numérica e como estes dados são tratados pelo programa proposto. Para um melhor entendimento de todo o processo de modelagem, são apresentadas as etapas intermediárias que se fazem necessárias, até que se obtenha a malha de elementos finitos propriamente dita.

No capítulo 3 é apresentada a estrutura de dados topológica adotada no programa. São também abordados as entidades e os conceitos topológicos usados, bem como as principais vantagens no uso deste tipo de estrutura de dados para representação dos dados de elementos finitos. Por fim é apresentada de forma esquemática a organização do sistema.

As ligações entre os três modelos hierárquicos e a definição de todos os atributos necessários para análise de um modelo de elementos finitos são vistas no capítulo 4. Entenda-se aqui atributos como sendo as propriedades dos materiais, restrições impostas e carregamentos aplicados. Cada tipo de atributo é explicado com detalhe desde a sua filosofia de funcionamento até a sua implementação na estrutura de dados.

O capítulo 5 aborda a técnica de geração de malhas usando-se triangulação com pontos internos gerados, utilizando princípios de *quadtrees* (Samet, 1984; Wawrzynek, 1991). Esta técnica se mostra eficiente e gera malhas geralmente de boa conformidade, embora o tempo de execução não seja ótimo na presente implementação. É indicada a utilização desta técnica quando se tem formas geométricas complicadas, ou então muito recortadas, e se deseja o refinamento em algumas regiões da malha, uma vez que o algoritmo implementado tem a propriedade de discretizar mais as regiões que sejam próximas a um trecho do contorno mais discretizado.

No capítulo 6, são enumerados alguns exemplos genéricos de funcionamento do pré-processador, e finalmente, no capítulo 7, são apresentadas as conclusões do presente trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

DECOMPOSIÇÃO HIERÁRQUICA PARA GERAÇÃO DE MALHAS

O pré-processador desenvolvido neste trabalho adota como ambiente de modelagem uma representação geométrica completa da estrutura, onde são definidos atributos (materiais, solicitações e suportes) e a partir da qual se obtém malhas de elementos finitos para posterior análise numérica.

Todo o processo executado até a obtenção da malha de elementos finitos é feito de forma natural e intuitiva, isto é, como se o engenheiro, a partir da estrutura ou meio a ser analisado, lançasse a malha no papel, passo a passo. Este processo é definido como Decomposição Hierárquica do Domínio (Campos, 1991) e é descrito a seguir.

O processo se inicia pela decomposição do modelo geométrico em regiões. Cada região está associada a uma técnica de geração de malha. De um modo geral, o objetivo desta decomposição é o de adotar técnicas de mapeamento que geram malhas, geralmente, de melhor qualidade. A exploração mais intensa destas técnicas de mapeamento constitui a maior vantagem do processo de decomposição hierárquica. Entretanto, como nem sempre isto é possível ou desejável, a malha pode ser obtida também a partir do uso de uma técnica de triangulação.

Uma vez determinadas todas as regiões que constituem o modelo geométrico, faz-se uma subdivisão do contorno destas regiões. A subdivisão do contorno de uma região deve ser compatível com a técnica de geração de malha objetivada para esta região. Além disso, é a partir desta subdivisão que será determinado o grau de refinamento da malha a ser gerada.

Finalmente, após a discretização de todas as regiões do modelo, escolhe-se a melhor técnica de geração que se adapta a cada região e, após gerar a malha para cada região independentemente, se obtém a malha completa do modelo de elementos finitos a ser analisado numericamente.

2.1 Modelos Hierárquicos

O ambiente computacional idealizado para geração de malhas é tal que, até a definição da malha de elementos finitos propriamente dita, uma série de etapas e tarefas bem definidas são efetuadas, resultando em uma plataforma de trabalho didática e amigável.

Este objetivo foi alcançado ao se desenvolver três modelos hierárquicos independentes, responsáveis por uma série de procedimentos específicos no processo, sendo que, no entanto, cada modelo é limitado geométrica e topologicamente por modelos hierarquicamente superiores.

No trabalho definido por Campos (1991), a decomposição era feita por quatro modelos (Geometria, Sub-região, Subdivisão e Malha). Neste trabalho, para minimizar o armazenamento da estrutura de dados utilizada (ponto crítico do uso deste tipo de estrutura), concentraram-se as informações do modelo da subdivisão, responsável pela discretização do contorno das regiões, no modelo da sub-região. Entretanto, na presente implementação, o modelo da subdivisão foi mantido na interface do sistema, pois esta distinção auxilia na interação com o usuário.

Os modelos utilizados (Figura 2.1) podem ser definidos da seguinte forma:

- **Geometria:** modelo que é superior na hierarquia sendo responsável pela definição geométrica da estrutura. A definição da geometria é feita com o auxílio de um modelador geométrico bidimensional que pode gerar linhas retas, curvas e circulares. Com base nas regiões automaticamente criadas, pode-se definir os tipos de materiais que constituem a estrutura a ser analisada, bem como a presença de furos nesta.
- **Sub-região:** modelo que *herda* toda a definição geométrica e é responsável pela decomposição em sub-regiões e posterior discretização dos contornos destas regiões, de modo a possibilitar o uso dos diversos algoritmos de geração de malhas, principalmente os algoritmos de mapeamento transfinito. É interessante notar que para cada região definida nesta etapa pode-se gerar uma malha de elementos finitos independentemente das outras.
- **Malha:** modelo que *herda* todas as regiões subdivididas do modelo anterior e é responsável pela geração de malha de elementos finitos a ser analisada. Todos os elementos gerados herdam as propriedades dos materiais definidas no modelo da geometria.

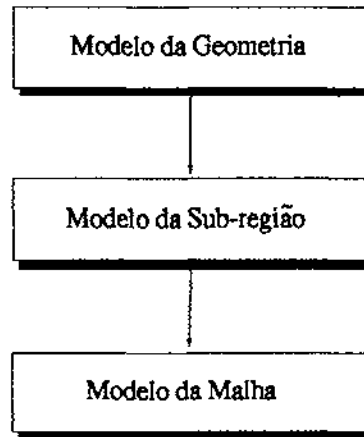


Figura 2.1: Hierarquia dos modelos topológicos.

Dois fatos devem ser observados quando da definição destes modelos. Primeiro, a discretização dos contornos das regiões antes da geração da malha garante que trechos de malha de duas regiões adjacentes sejam compatíveis. Segundo, as condições de contorno (restrições) e carregamentos podem ser aplicados no modelo da geometria, bem como no modelo da malha, onde os nós da malha herdam as definições feitas na geometria.

2.2 Definição de um Problema a Ser Resolvido por *E. F.*

Define-se agora um problema físico a ser estudado com o intuito de exemplificar os modelos hierárquicos definidos anteriormente. O meio bidimensional a ser analisado é uma chapa retangular, composta por dois tipos de materiais diferentes, com um orifício central, submetida a um carregamento uniforme de compressão nas extremidades. Apresenta-se o modelo geométrico (Figura 2.2) e duas variações do modelo da sub-região (Figura 2.3) com diferentes malhas geradas.

A partir dos dois modelos da sub-região gerados anteriormente efetuou-se a discretização do contorno conforme mostrado na Figura 2.4. Por motivos didáticos é mostrada a subdivisão dos contornos das regiões em um modelo separado do modelo da sub-região. Pode-se discretizar o contorno das sub-regiões em um número qualquer de subdivisões, podendo-se definir uma razão entre o primeiro e o último segmento destas subdivisões, podendo-se definir uma subdivisão para geração de elementos quadráticos ou lineares.

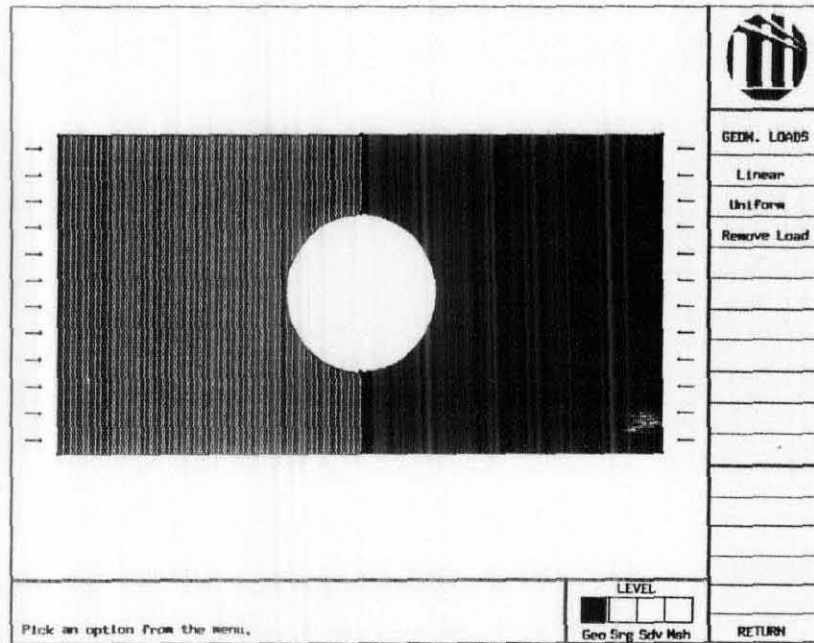


Figura 2.2: Definição do modelo geométrico.

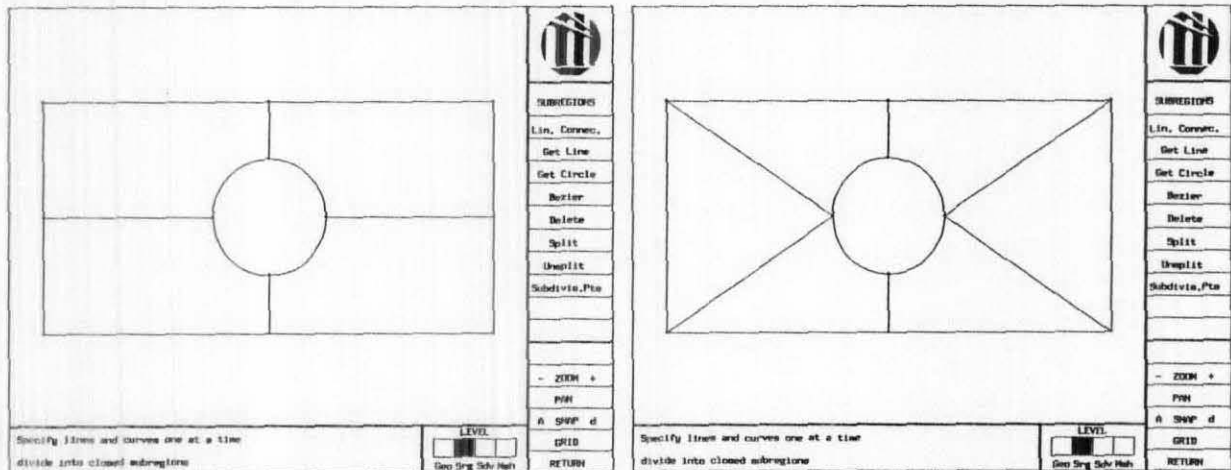


Figura 2.3: Definição de dois modelos para sub-região. No modelo da esquerda são criadas 4 regiões e no modelo da direita 6 regiões.

Pode-se gerar malhas com quatro tipos de elementos: T3 e Q4 (elementos lineares com três e quatro nós respectivamente) e T6 e Q8 (elementos quadráticos com seis e oito nós respectivamente), utilizando-se para tal os seguintes algoritmos (Figuras 2.5 e 2.6): mapeamento bilinear, mapeamento bilinear degenerado, mapeamento trilinear (Haber, et. al., 1981; Gattass, et. al., 1991), tecelagem triangular com geração de pontos regulares (Shaw, Pitchen, 1978) e tecelagem triangular com pontos internos gerados por um procedimento do tipo *quadtrees* (Samet, 1984; Wawrzynek, 1991).

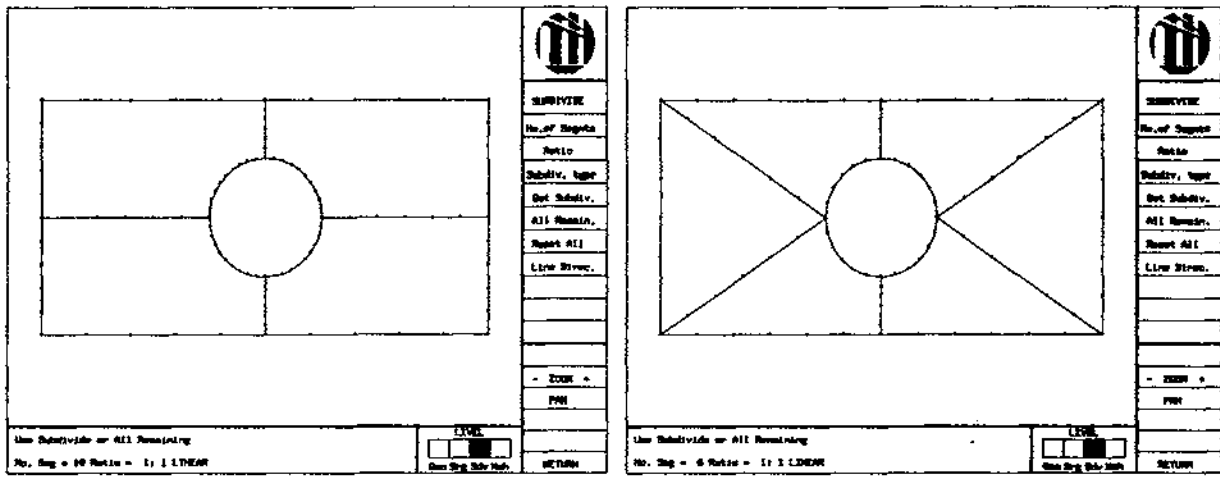


Figura 2.4: Modelos da subdivisão com o nº de subdivisões indicado, razão 1:1 e linear.

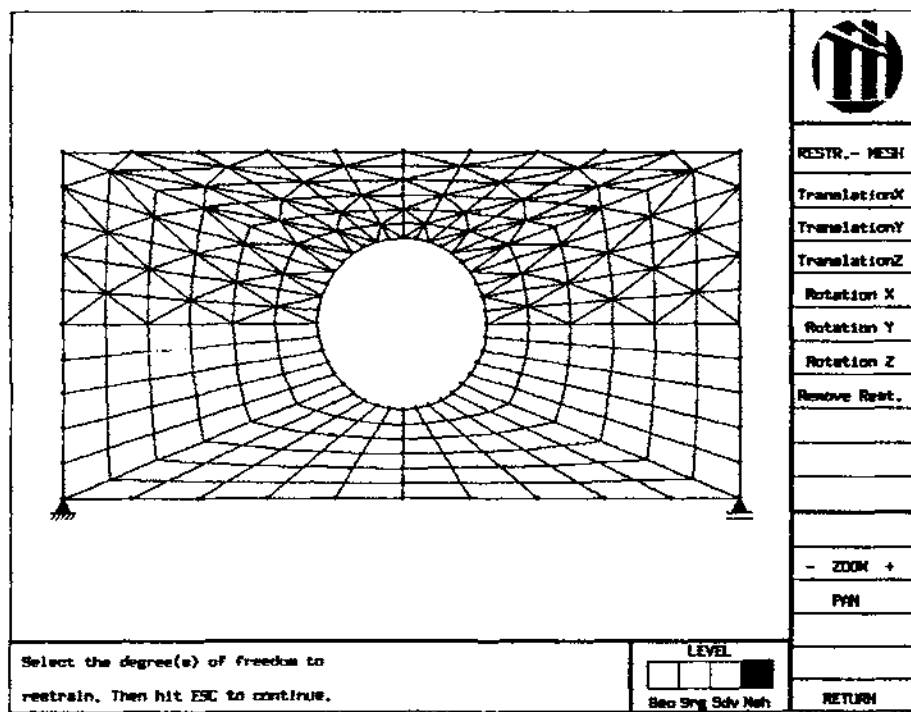


Figura 2.5: Malha de elementos finitos para o 1º modelo (elementos T3 na parte superior e Q4 na parte inferior gerados com mapeamento bilinear).

Analisando-se as malhas de elementos finitos geradas nas Figuras 2.5 e 2.6 conclui-se que :

- Todos os elementos herdam as propriedades dos materiais definidas no modelo geométrico;
- Os nós herdam os carregamentos aplicados nas arestas do modelo geométrico;
- Os nós da malha foram restringidos para evitar hipostaticidade da estrutura (impedimento do movimento de corpo rígido), uma vez que o carregamento aplicado é auto-equilibrado.

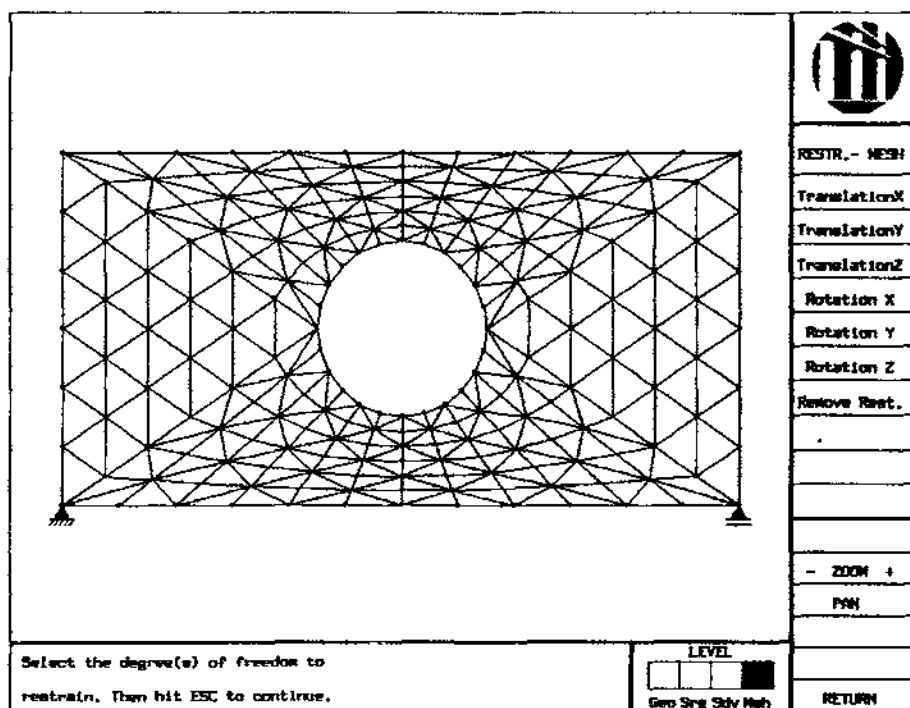


Figura 2.6: Malha de elementos finitos (T3) com utilização de mapeamento bilinear e trilinear.

2.3 Extração de Dados para Análise Numérica

Ao se definir a malha de elementos finitos (tal como apresentado nas Figuras 2.5 e 2.6), a extração de dados para análise numérica do problema é feita automaticamente. Na presente versão, encontram-se disponíveis saídas para *Arquivo Neutro* (arquivo desenvolvido na PUC-Rio para comunicação de programas de pré, pós e processamento de elementos finitos), arquivo para o programa *FRANC* (Wawrzynek, 1986) (programa para análise de meios bidimensionais fraturados da Universidade de Cornell) e arquivo para o programa *SAP90* (Wilson, Habibullaw, 1988).

REPRESENTAÇÃO DE MODELOS ATRAVÉS DE ESTRUTURAS DE DADOS TOPOLÓGICAS

No contexto da modelagem geométrica, a topologia trata de modo eficiente as relações de adjacência entre as entidades geométricas envolvidas, ou seja, faces, arestas e vértices. Na aplicação a elementos finitos, estas entidades são identificadas com os elementos, os seus lados e os nós, respectivamente.

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos básicos de topologia de adjacência, as principais vantagens na sua utilização e o modo de organizar e manipular as informações topológicas. O principal objetivo deste capítulo é mostrar como a topologia pode servir como uma poderosa ferramenta para a representação e gerenciamento de modelos planos em geral, e em particular, na área de elementos finitos, principalmente dentro do contexto da decomposição hierárquica do domínio para geração de malhas descrita no capítulo anterior.

3.1 *Relações de Adjacência*

O funcionamento de um pré-processador de elementos finitos engloba uma série de operações de manipulação e de consulta na estrutura de dados. Estas operações podem ser: qual a incidência de um determinado elemento, quais os elementos contidos numa determinada área para aplicação de um carregamento distribuído, qual o elemento adjacente por um bordo a um outro elemento, e assim por diante. Todas estas operações se baseiam principalmente na pesquisa das relações de adjacência entre faces (elementos), arestas (bordos dos elementos) e vértices (nós). Estas relações são exemplificadas com o auxílio da Figura 3.1. Podem ser notadas algumas relações nesta figura, dentre elas :

- F_1 e F_3 são faces adjacentes ao vértice V_4 ;
- E_3 , E_4 , E_8 e E_{11} são as arestas adjacentes ao vértice V_5 ;
- E_3 , E_5 , E_7 e E_8 são as arestas que formam a face F_1 .

De um modo geral, existem nove relações de adjacência entre faces, arestas e vértices que podem ser vistas na Figura 3.2, exemplificadas para um cubo. Conforme é

mostrado neste capítulo, todas estas relações são obtidas com rapidez quando se utiliza Estruturas de Dados Topológicas. Este fato é fundamental para a implementação de um programa gráfico e interativo como o proposto e desenvolvido neste trabalho.

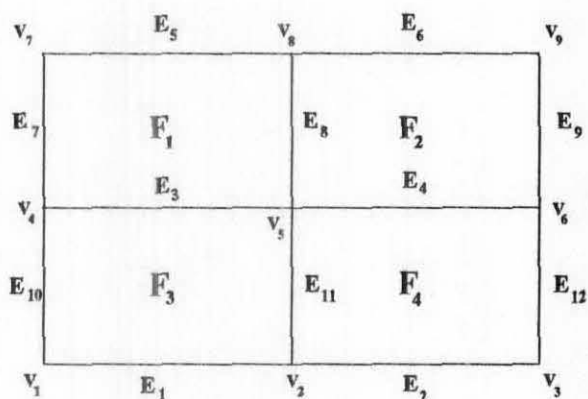


Figura 3.1: Relações de adjacência.

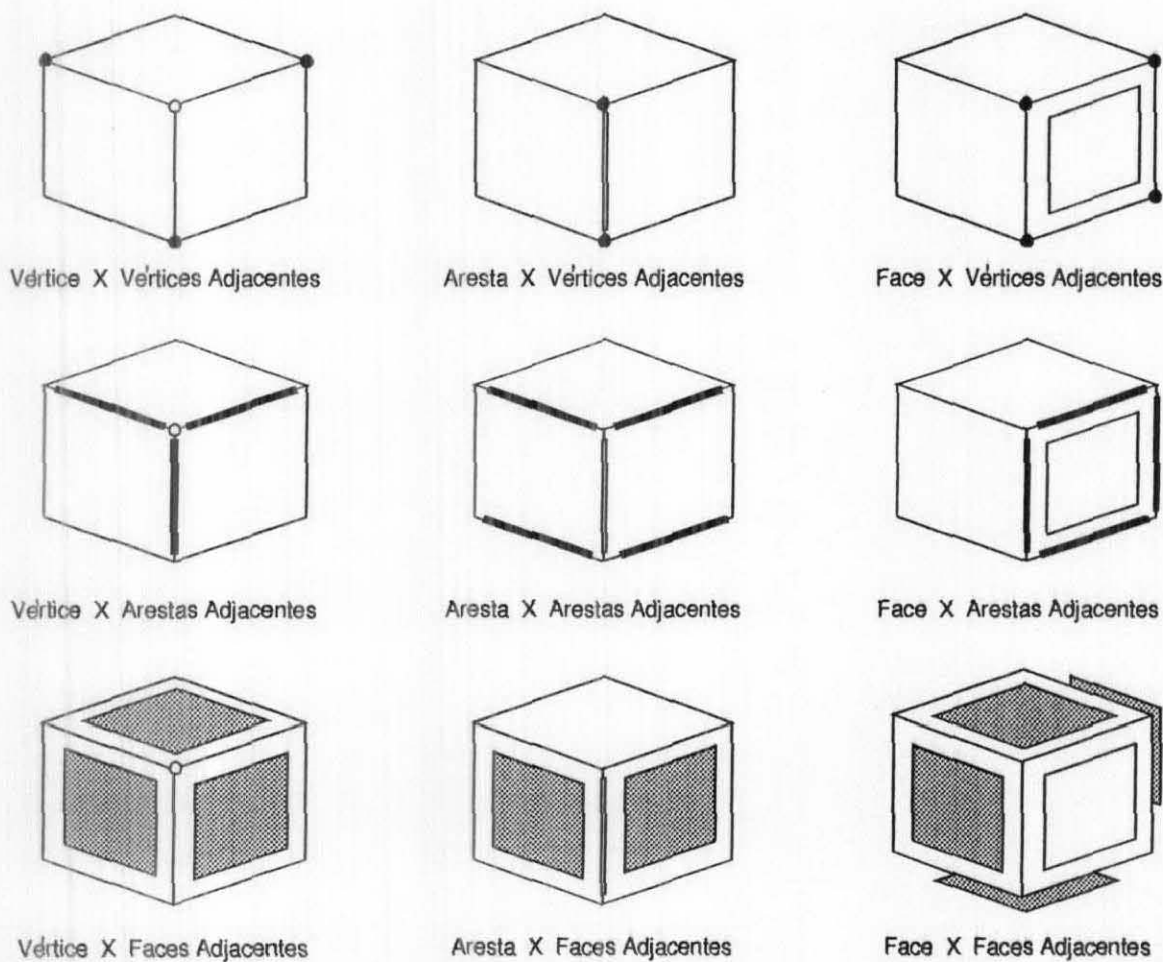


Figura 3.2: As nove relações de adjacência entre faces, arestas e vértices (Weiler, 1985).

3.2 Estruturas de Dados Topológicas e Subdivisão Planar

Uma estrutura de dados topológica é um modelo esquemático utilizado, juntamente com informações geométricas, para representação da fronteira de um sólido. Um sólido pode ser inequivocamente representado descrevendo-se sua superfície topologicamente orientada, de forma que sempre é possível dizer, em qualquer ponto da superfície, em que lado o interior do sólido está situado (Mäntylä, 1988; Hoffmann, 1989).

A superfície de um sólido poliédrico é uma variedade topológica de dimensão dois (*2-manifold*). Neste tipo de topologia, cada ponto sobre a superfície apresenta uma vizinhança local topologicamente bidimensional. Deste modo, formalmente pode-se afirmar que cada ponto sobre a superfície de um sólido tem uma vizinhança que é topologicamente equivalente a um disco aberto (Mäntylä, 1988). Em outras palavras, para cada ponto sobre a superfície é possível encontrar uma região local que é bidimensional (no sentido topológico).

A validade de sólidos *2-manifold* pode ser verificada usando conceitos de topologia algébrica (Mäntylä, 1988; Hoffmann, 1989). Um dos mecanismos utilizados para esta validação é baseado na analogia existente entre a representação do contorno topológico de um sólido e o seu *modelo planar*, ou *grafo planar*. Um exemplo de um grafo planar pode ser visto na Figura 3.3.

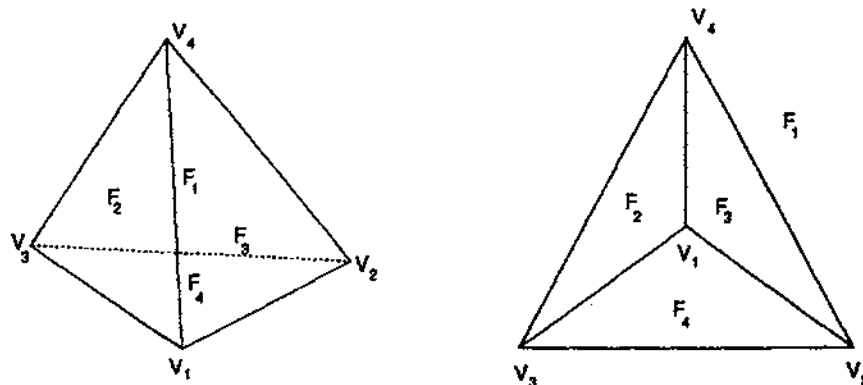


Figura 3.3: Um tetraedro e sua representação por um modelo planar.

O mapeamento entre grafos e a descrição do contorno topológico é conveniente, uma vez que permite usar os conceitos teóricos de grafos para descrever e manipular as representações topológicas. Entretanto, foge do escopo deste trabalho um estudo sobre este mecanismo de validação topológica. As duas referências supracitadas abordam o assunto de forma completa.

Existem casos, entretanto, em que a subdivisão planar é o próprio objeto de interesse. A idéia básica para representar subdivisões planares é operar tanto com a geometria quanto com a topologia da subdivisão. A descrição geométrica está relacionada com a locação real dos objetos geométricos: coordenadas dos pontos, equações das curvas e assim por diante. A descrição topológica é combinatória por natureza e encara a subdivisão planar como uma hierarquia de elementos topológicos: faces, arestas e vértices.

Cada região da subdivisão determina uma face. A fronteira comum entre duas faces adjacentes é formada por arestas, que por sua vez são delimitadas por vértices. A Figura 3.4 mostra uma subdivisão planar e os seus elementos topológicos. Analisando-se a Figura 3.4, nota-se que a região externa também é considerada como sendo uma face. Observa-se ainda que subdivisões planares estão associados a casos especiais de sólidos *2-manifold* sem cavidades ou furos, uma vez que a incidência da estrutura da superfície *2-manifold* é identificada com o espaço bidimensional. Assim, numa subdivisão planar, sempre existe uma face externa topologicamente infinita (face F_1 da Figura 3.4) que delimita a incidência da estrutura.

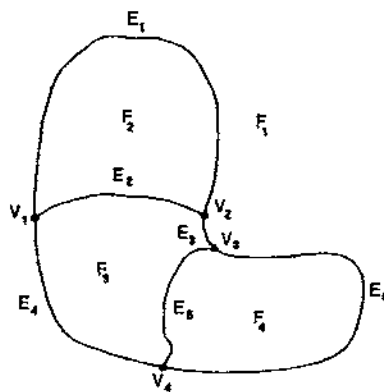


Figura 3.4: Subdivisão planar e elementos topológicos.

A consequência dessas considerações é que as ferramentas desenvolvidas para representação da fronteira de um sólido *2-manifold* podem ser utilizadas para representar subdivisões planares (Cavalcanti, 1992).

Em particular, pode-se citar a fórmula de *Euler-Poincaré*, que descreve as relações entre o número de entidades topológicas envolvidas na superfície de um poliedro (válida tanto para um sólido sem cavidades ou furos, como para faces com uma única fronteira) – Equação 3.1. Nesta equação, V , E e F são os números de vértices, arestas e faces, respectivamente. A partir da equação 3.1 pode-se verificar a fidedignidade

da representação de fronteira de um sólido ou de uma subdivisão planar. É também a partir dela que surgiram os *Operadores de Euler* (Baumgart, 1975), que têm por finalidade manipular a topologia de forma sistemática e incremental, sempre mantendo a consistência da estrutura de dados.

$$V + F = E + 2 \quad (3.1)$$

A filosofia básica do uso destes operadores é desenvolver uma forma simples de construção de grafos sem aprofundar-se em detalhes que envolvem a implementação da estrutura de dados que armazena a informação topológica. Desta forma, os operadores realizam as operações autônomas que garantem que os grafos resultantes satisfaçam a Equação 3.1. Na Figura 3.5 são mostrados alguns desses operadores.

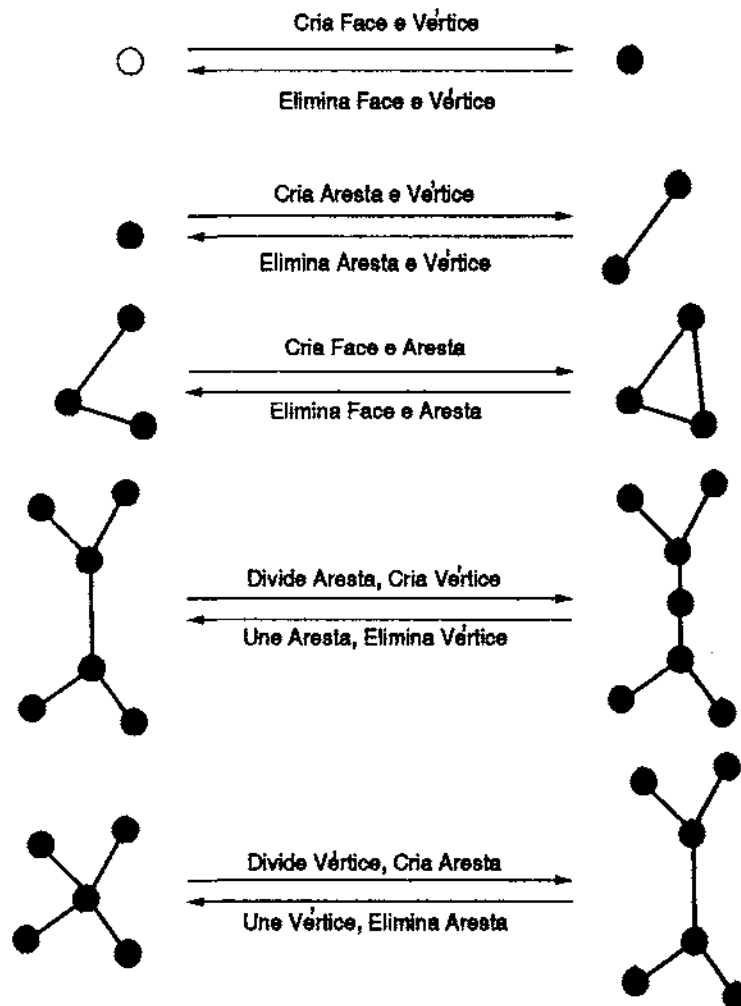


Figura 3.5: Operadores de Euler (Wawrzynek, Ingraffea, 1987 b).

3.3 Características e Vantagens de Estruturas de Dados Topológicas

A elaboração de uma estrutura de dados que possa armazenar grafos relacionados com a topologia leva em consideração três importantes aspectos, a saber :

- **Suficiência:** tornar sempre possível a recriação das relações de adjacência entre as entidades topológicas envolvidas (faces, arestas e vértices) sem que haja erro ou ambigüidade.
- **Rapidez:** elaborar algoritmos eficientes para obtenção das relações de adjacências e manipulação dos dados através dos operadores de Euler.
- **Armazenamento:** armazenar somente o necessário, eliminando-se ao máximo as redundâncias.

Entretanto, os dois últimos itens representam o grande dualismo na elaboração de uma estrutura de dados – Rapidez x Armazenamento. Um trabalho detalhado e elaborado por Woo (1985), demonstra que a relação entre a rapidez e o armazenamento pode ser disposta num gráfico como apresentado na Figura 3.6. Woo concluiu que uma estrutura de dados ideal corresponderia a um ponto na curva, o mais próximo possível da origem dos eixos.

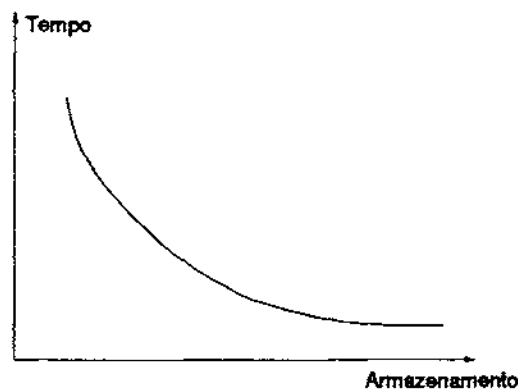


Figura 3.6: Relação entre Rapidez e Armazenamento (Woo, 1985).

Dentro deste contexto, as vantagens que podem ser destacadas quando do uso de estruturas de dados topológicas são:

- Capacidade de alterar apenas localmente a estrutura de dados, garantindo sua integridade global;
- Rapidez nas consultas e manipulações dos dados, próprias para programas interativos. Mudanças na topologia são feitas fácil e rapidamente, provocando mudanças localizadas na topologia existente;

- Minimização da complexidade na implementação da estrutura de dados devido a diversos níveis de operadores, conferindo ao programa simplicidade e flexibilidade para implementação de novos procedimentos;
- Manutenção da consistência da representação dos dados em todas as fases da modelagem. Como a estrutura de dados é provida dos Operadores de Euler, fica garantida a consistência topológica do modelo validada pela fórmula de Euler-Poincaré;
- Separação entre as informações topológicas e geométricas, minimizando os problemas geométricos decorrentes de uma aritmética de ponto flutuante. Na presente implementação, a geometria é vista como um atributo das entidades topológicas. Como exemplo deste fato, pode-se destacar as coordenadas de um vértice, que são armazenadas como sendo um atributo deste vértice. Sendo assim, pode-se modificar completamente um modelo geométrico manipulando-se as coordenadas de um vértice, sem no entanto modificar a topologia.

Dentro do contexto da decomposição hierárquica do domínio para geração de malhas de elementos finitos pode-se acrescentar as seguintes vantagens:

- Criação e reconhecimento automático de uma região, pela simples inclusão de linhas que delimitam o contorno desta, e que são facilmente grupadas pela estrutura de dados;
- Representação de regiões com topologia arbitrária;
- Obtenção simples e eficiente dos dados necessários para um algoritmo de geração de malhas, devido à existência de funções ligadas à estrutura de dados, que percorrem o contorno da região de interesse e obtêm todas as informações necessárias para estes algoritmos;
- Facilidade de implementação de diversos algoritmos de geração de malhas devido à modularidade dos operadores.

3.4 *Estruturas de Dados Topológicas Baseadas em Arestas*

Dentre as estruturas de dados topológicas, as estruturas baseadas em arestas são suficientes e possuem um bom comportamento tanto quanto à rapidez como ao armazenamento. Seguindo-se o raciocínio desenvolvido por Woo (1985) pode-se chegar à conclusão que estas estruturas têm uma localização ideal dentro da curva apresentada na Figura 3.6. Isto porque o número de entidades geométricas adjacentes a uma aresta é limitado, característica importante das arestas no caso *2-manifold*.

Esta característica se torna importante ao se implementar este tipo de estrutura em computadores. De modo a exemplificar o que foi exposto, analisando a Figura 3.7, conclui-se o seguinte sobre a aresta (e_1):

- sempre possui duas faces adjacentes – f_1 e f_2 – (que podem ser idênticas);
- sempre possui no máximo quatro arestas adjacentes – e_2, e_3, e_4 e e_5 – (entenda-se como aresta adjacente aquela que compartilha um vértice e uma face com a aresta em questão);
- sempre possui dois vértices adjacentes – v_1 e v_2 – (que podem ser idênticos).

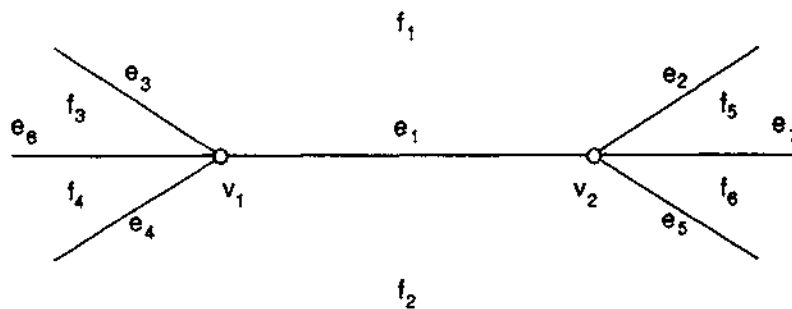


Figura 3.7: Entidades topológicas adjacentes a uma aresta.

As principais estruturas de dados baseadas em arestas são:

- “Arestas aladas” (*winged-edge*), concebida por Baumgart (1975);
- “Arestas aladas modificadas” (*modified winged-edge*), introduzida por Weiler (1985);
- “Semi-aresta” (*half-edge*), idealizada por Mäntylä (1988), ou “Face-aresta” (*face-edge*), por Weiler (1986), que são conceitualmente idênticas.

A estrutura de dados utilizada neste trabalho é a “Face-aresta modificada” (*modified face-edge*), que foi elaborada por Martha (1987), a partir da estrutura “Face-aresta” (Weiler, 1985), e é vista com mais detalhes na próxima seção.

3.5 Estrutura de Dados “Face-aresta modificada” – FEDm

Na presente seção, é feita uma revisão sucinta dos conceitos e da apresentação da estrutura FEDm (Campos, 1991). Também é descrito o conceito de *uso* de uma entidade topológica.

Esquemáticamente, a estrutura FEDm pode ser vista como apresentado na Figura 3.8, onde são armazenados seis tipos de entidades primárias e dois tipos de entidades secundárias, que serão explicadas a seguir.

O conceito de *uso* de uma entidade topológica e suas vantagens devem ser abordados antes que se prossiga na explicação das entidades topológicas propriamente ditas. A definição de *uso* está no próprio significado da palavra, ou seja, o uso de uma entidade topológica por outra entidade topológica. A idéia básica está em relacionar primeiramente os *usos* das entidades e, desta forma, relacionar indiretamente as entidades topológicas propriamente ditas. Um exemplo do conceito de *uso* pode ser dado quando se tem uma aresta que divide duas faces. Neste caso, esta aresta tem dois *usos*, cada um em relação a cada face que a aresta divide.

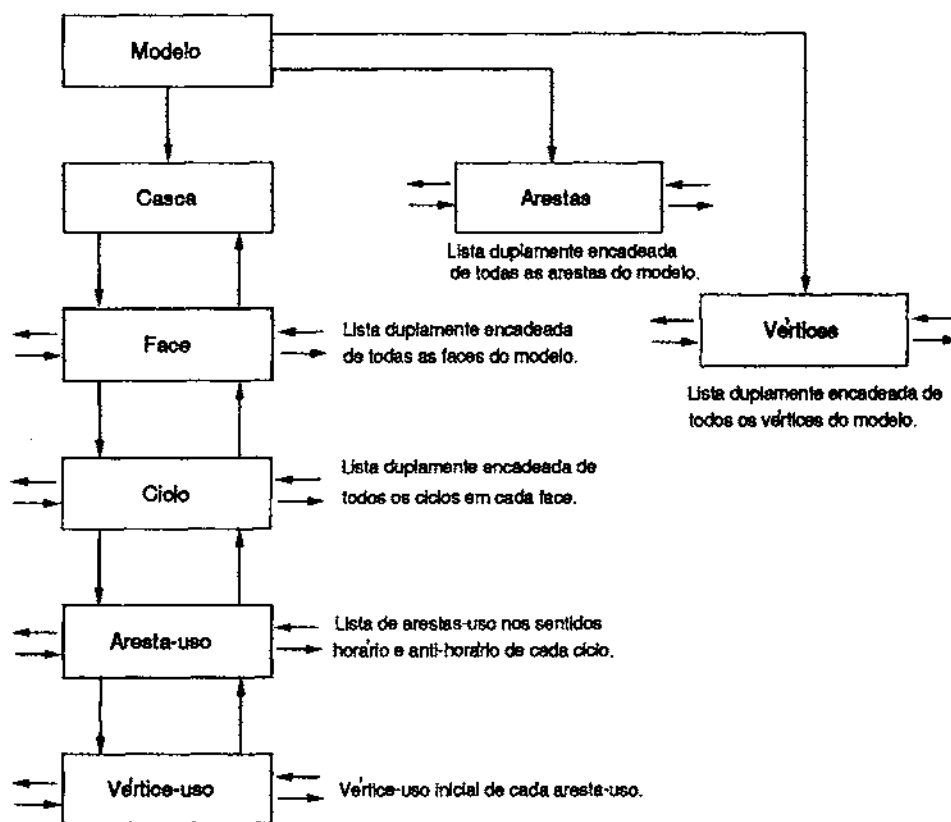


Figura 3.8: Representação esquemática das entidades topológicas da FEDm.

Desta forma, tem-se como definição as entidades primárias e secundárias (*usos*):

- Modelo: não representa uma entidade topológica propriamente dita, mas sim, toda a estrutura.
 - Casca: no caso bidimensional, a superfície em que será feita a modelagem.
 - Face: parcela da casca limitada por arestas e vértices. Toda a face externa à região modelada recebe o nome de *face livre* e é identificada à parte de todas as outras faces.
 - Ciclo: bordo contínuo e orientado de uma face, formado de arestas-uso e vértices-uso.
- Ao se analisar a Figura 3.9, podem-se observar os seguintes detalhes:

- . Uma face possui somente um ciclo externo e pode ou não possuir um ou mais ciclos internos.
- . Ciclos são orientados de um modo consistente: na presente implementação todos os ciclos externos são orientados no sentido horário (*ciclo₁* e *ciclo₃*) e todos os ciclos internos são orientados no sentido anti-horário (*ciclo₂* e *ciclo₄*).
- . A *face livre* só possui ciclos internos, orientados no sentido anti-horário.
- Aresta-uso: um dos segmentos orientados que definem um ciclo e representam o *uso* de uma aresta neste ciclo (ver Figura 3.10).
- Vértice-uso: *uso* de um vértice por uma aresta-uso (ver Figura 3.10).
- Aresta: segmento que limita duas faces.
- Vértice: no caso bidimensional, um ponto sobre o plano da casca, ou, no caso geral, entidades que limitam as arestas.

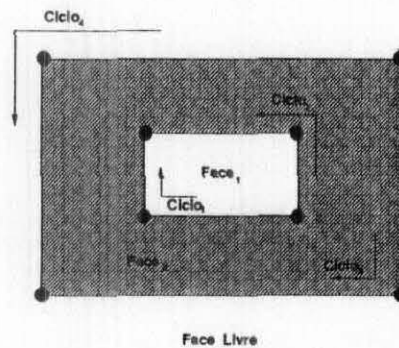


Figura 3.9: Faces e ciclos.

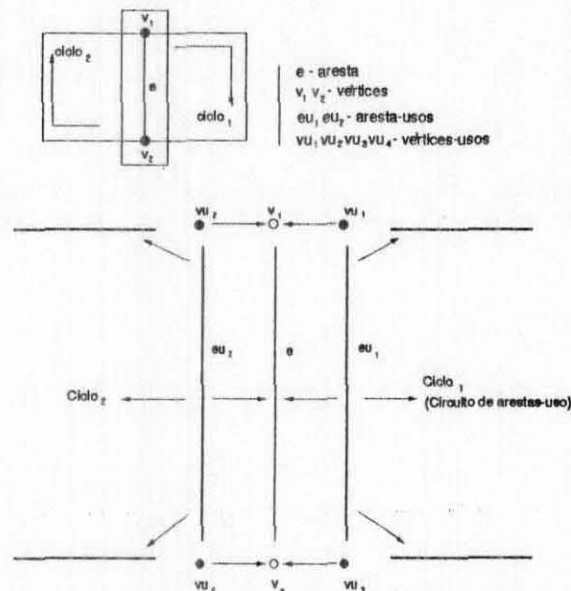


Figura 3.10: Aresta-uso e vértice-uso.

3.6 Organização do Sistema

A organização do sistema é apresentada esquematicamente na Figura 3.11, e pode ser adotada em qualquer sistema baseado numa subdivisão planar.

No nível mais baixo desta representação encontra-se a base de dados, que é composta pela Estrutura de Dados Topológica e pelos atributos de cada entidade. O acesso às informações topológicas contidas na base de dados é feito via Operadores de Euler e Funções de Procura e Consulta.

Em um nível mais elevado, encontram-se as funções que estão relacionadas com os aspectos geométricos da subdivisão, como por exemplo verificar se um dado ponto está contido numa determinada região.

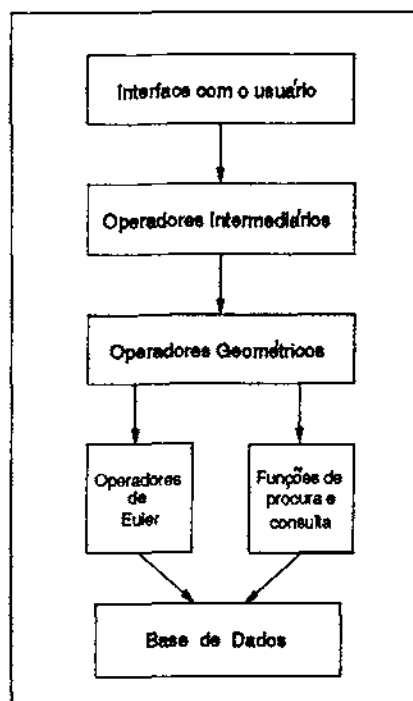


Figura 3.11: Organização do sistema.

A interface com o usuário dependerá da aplicação em questão. Entretanto, sob o enfoque da subdivisão planar, todas as operações podem ser resumidas da seguinte forma:

- Dada uma aresta (definida por sua descrição geométrica), verificar se esta pode ser inserida na estrutura de dados, sem causar inconsistência topológica ou geométrica, e inserí-la em caso afirmativo;

- Dada uma aresta para ser eliminada da estrutura de dados, eliminar a aresta processando todas as mudanças necessárias de modo a tornar consistente a estrutura de dados.

O papel dos operadores intermediários é executar as operações supracitadas, traduzindo todas as informações necessárias para os Operadores Geométricos e os Operadores de Euler. Essencialmente, uma nova aresta só pode ser inserida nos modelos, se esta estiver completamente contida por uma face. Desta forma, uma série de testes topológicos e geométricos são desenvolvidos para verificação desta condição básica. Uma vez que esta condição seja verificada, os Operadores de Euler inserem a nova aresta na base de dados.

HIERARQUIA E ATRIBUTOS

No capítulo 2 foi visto que, a partir da utilização de três modelos hierárquicos – Geometria, Sub-região e Malha – obtém-se malhas de elementos finitos completas (coordenadas, incidências, propriedades dos materiais, condições de contorno e solicitações) para posterior análise numérica. Cada modelo hierárquico é representado pela estrutura de dados topológica FEDm que foi descrita sucintamente no capítulo anterior.

O objetivo deste capítulo é descrever as ligações existentes entre os três níveis (modelos) hierárquicos e como são definidos e aplicados os atributos às entidades topológicas de cada nível.

4.1 Hierarquia

O funcionamento dos três modelos hierárquicos se dá de forma independente, sendo que, no entanto, cada modelo é limitado pelos modelos hierarquicamente superiores. Desta forma, o gerenciamento do processo de decomposição hierárquica é controlado pelos seguintes invariantes:

- Todas as entidades topológicas criadas em um nível possuem uma instância correspondente em cada nível hierarquicamente inferior;
- Não se pode eliminar uma entidade topológica em um nível se esta possuir uma instância em um nível hierárquico superior;
- Quando uma entidade gerada em um nível gera alguma inconsistência topológica em um nível inferior, este é alterado (o mais localmente possível) até que se atinja a consistência.

Uma vez definidos os invariantes que regem os modelos hierárquicos, define-se agora as principais características da comunicação entre os três níveis hierárquicos:

- A ligação hierárquica se dá somente entre as entidades topológicas que apresentam algum significado físico, isto é, faces, arestas e vértices. A utilização deste tipo de ligação permite uma implementação mais clara e intuitiva;

- As informações hierárquicas referentes aos três modelos são armazenadas nas áreas de atributos das entidades topológicas de interesse. Esta é uma característica importante, uma vez que todo o controle e manipulação da estrutura hierárquica é feito independentemente das operações sobre a estrutura de dados de cada modelo;
- Só existe comunicação entre níveis hierárquicos adjacentes, conforme representado esquematicamente na Figura 4.1. Desta forma, a comunicação entre o modelo da geometria e modelo da malha se dá via o modelo da sub-região. Esta característica torna o programa mais eficiente e modular, além de proporcionar maior simplicidade na manipulação da estrutura hierárquica.

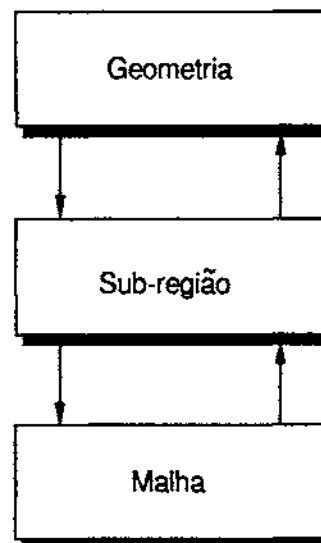


Figura 4.1: Comunicação dos modelos hierárquicos.

Com o intuito de elucidar as três características descritas acima, apresentam-se três figuras a seguir, que têm como objetivo exemplificar a comunicação entre os níveis hierárquicos:

A Figura 4.2 mostra a determinação da propriedade física de um dado elemento finito (por exemplo, f_5). Observa-se que este elemento (uma face do modelo da malha) está contido na região R_2 do modelo da geometria (esta região também representa uma face do modelo da geometria). Sendo assim, pode-se concluir que o elemento f_5 herda as mesmas propriedades (P_1) da região R_2 . Esta herança se dá por intermédio do modelo da sub-região, através da face f_{srg} , que contém a face f_5 e está contida na região R_2 .

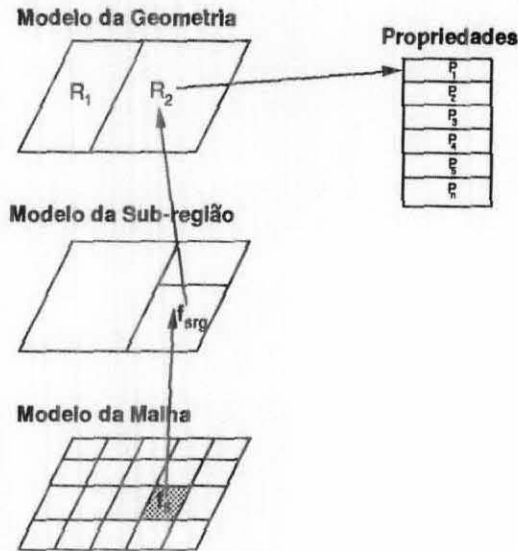


Figura 4.2: Ligação hierárquica entre faces dos modelos da Geometria e Malha.

A Figura 4.3 exemplifica a comunicação entre as entidades de níveis hierárquicos distintos, através de suas áreas de atributos. Neste caso, foi criada uma aresta no modelo da sub-região (e_{srg}). Observa-se que esta aresta possui uma área de atributos onde são definidos os *ponteiros*¹ para as entidades topológicas dos níveis imediatamente superior e inferior. No caso de e_{srg} , existe um ponteiro *ascendente* para a face f_{geo} no modelo da geometria, e um ponteiro *descendente* para a aresta e_{msh} no modelo da malha.

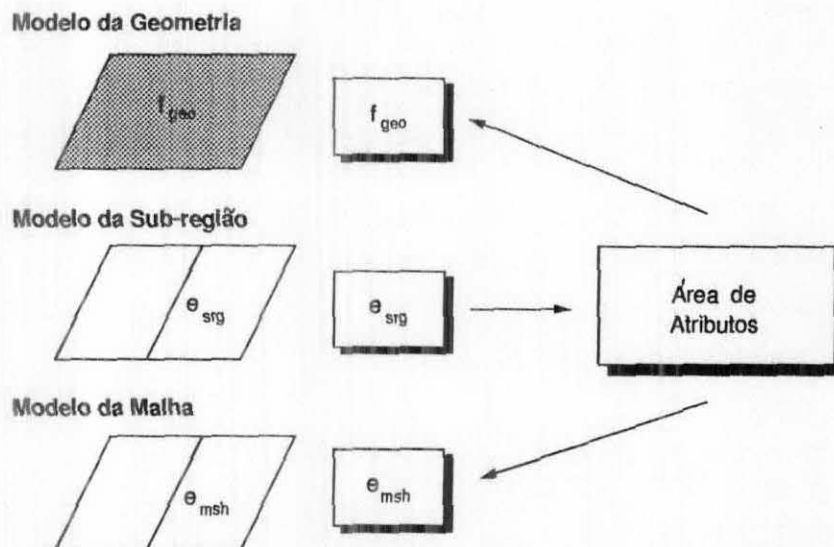


Figura 4.3: Informações hierárquicas armazenadas na área de atributos das entidades topológicas.

¹ Quando diz-se que na área de atributos são definidos ponteiros para entidades topológicas significa que há uma correspondência de uma entidade topológica em um determinado nível com outra entidade em um outro nível. Daqui por diante o termo ponteiro será usado por expressar de forma concisa toda esta correspondência entre níveis.

A Figura 4.4 exemplifica o impacto na criação de novos elementos em um determinado nível. É apresentada uma série de elementos topológicos do modelo da sub-região que tinham como ponteiros ascendentes a face f_1 da geometria. Porém, considere o caso de se criar a face f_{nova} (para atribuição de uma outra propriedade física ou espessura, por exemplo). Verifica-se que as entidades topológicas que *apontavam* para a face f_1 agora *apontam* para a face f_{nova} . Esta mudança se dá de forma localizada na área de atributos e só há mudança dos ponteiros, conferindo, assim, eficiência e simplicidade ao sistema.

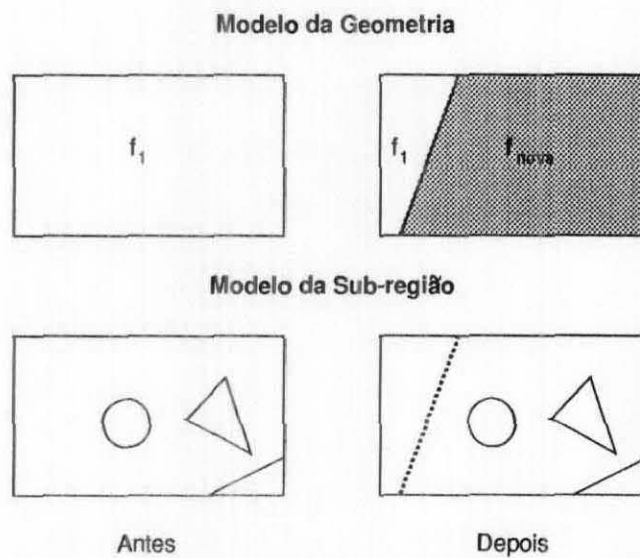


Figura 4.4: Comunicação hierárquica com os níveis adjacentes.

De modo a concluir o que foi até aqui apresentado em termos de hierarquia, cabe caracterizar os tipos de ponteiros hierárquicos. Basicamente, estes ponteiros podem ser ascendentes ou descendentes e seus tipos dependem da entidade topológica a que se referem. Por exemplo, na Figura 4.3, e_{srg} possui um ponteiro ascendente para uma face (f_{geo}) e um ponteiro descendente para uma aresta (e_{msh}).

Desta forma, chega-se à conclusão que os ponteiros descendentes sempre apontam para o mesmo tipo de entidade que os possuem, ou seja, uma face na geometria aponta para uma outra face na sub-região, e assim por diante. Os ponteiros ascendentes, em contrapartida, podem apontar para outros tipos de entidades. Por exemplo, na Figura 4.5, os vértices v_1 , v_2 e v_3 do modelo da malha apontam para um vértice, uma aresta, e uma face do modelo da sub-região, respectivamente.

Sendo assim, definiram-se todos os tipos de ponteiros ascendentes na Figura 4.6. Pode-se ressaltar nesta figura que um elemento topológico em um determinado

nível hierárquico só pode apontar para um outro elemento de mesmo tipo ou de um tipo superior em um nível hierarquicamente superior (estes tipos podem ser classificados na seguinte ordem: vértice, aresta e face). Desta forma, uma aresta do modelo da malha nunca poderá ter como ponteiro ascendente um vértice da sub-região, por exemplo.

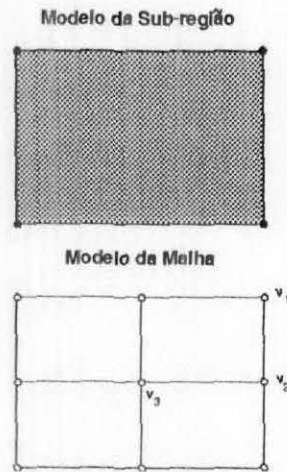


Figura 4.5: Exemplo de tipos de ponteiros ascendentes.

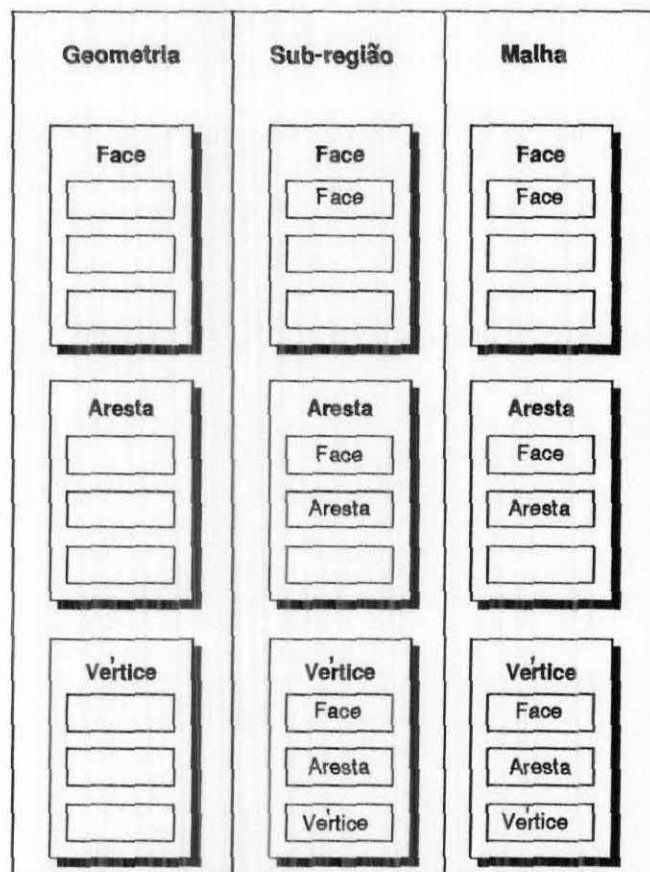


Figura 4.6: Tipos de ponteiros ascendentes.

4.2 Atributos

A área de atributos de cada entidade topológica armazena uma série de informações que dependem do modelo hierárquico ao qual a entidade pertence.

Nesta seção é dada ênfase aos atributos das faces e arestas do modelo da geometria e dos vértices do modelo da malha, pois o armazenamento das informações adicionais necessárias para análise numérica (propriedades de materiais, carregamentos e restrições de apoio) é feito nestas entidades. Para uma visão completa dos atributos de todas as outras entidades topológicas consultar o trabalho de Campos (1991).

4.2.1 Propriedades Físicas

A área de atributos relativa à face do modelo geométrico pode ser vista na Figura 4.7.

Hole_flag	Indicador se a face é tratada como furo (vazio).
Mat_ptr	Ponteiro para lista de materiais.

Figura 4.7: Representação esquemática da área de atributos de uma face da geometria.

Pela definição dos atributos dada anteriormente, observa-se que há um ponteiro para lista de materiais, ou seja, existe uma estrutura de dados à parte da estrutura de dados FEDm, no caso uma lista simplesmente encadeada, que armazena as informações das propriedades físicas dos materiais que constituem o meio a ser analisado.

A relação entre a face da geometria e a lista de materiais é representada esquematicamente na Figura 4.8, e apresenta três características, a saber:

- A lista é criada à parte, independentemente da criação do modelo geométrico.
- O topo da lista sempre é formado por um material indefinido. Todas as faces ao serem criadas apontam para este material indefinido.
- Existe um material corrente que é utilizado para atribuição das propriedades a uma face. Este é selecionado dentre os materiais da lista, incluindo o material indefinido.

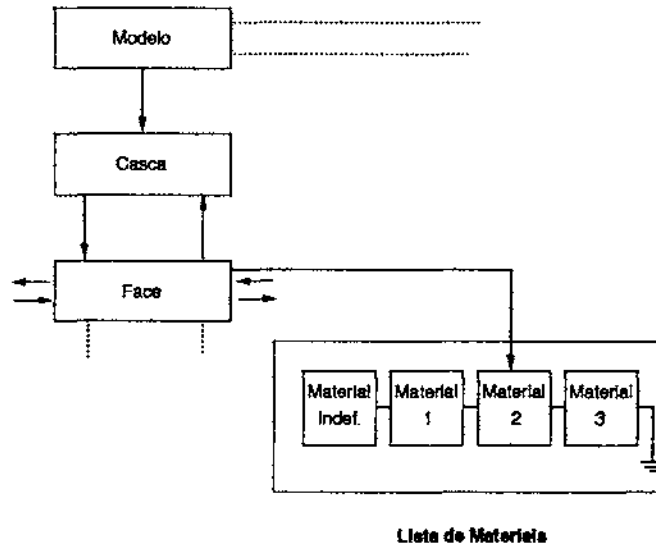


Figura 4.8: Estrutura FEDm e Lista de Materiais.

A atribuição de um determinado material integrante da lista de materiais a uma face da geometria é feita do seguinte modo :

- (1) Seleciona-se o material corrente percorrendo-se a lista de materiais, de um em um, a partir do topo da lista até se chegar ao material desejado.
- (2) Seleciona-se as faces da geometria que devem ser atribuídas à propriedade do material corrente.

Na fase atual da implementação, na lista de materiais podem ser armazenados somente dois tipos de materiais: isotrópicos (Módulo de Elasticidade e Coeficiente de Poisson) e ortotrópicos (Módulo de Elasticidade e Coeficiente de Poisson nas três direções). Entretanto, qualquer inclusão de um novo tipo de material é feita de forma simples apenas adicionando-se as informações deste novo tipo na lista de materiais, uma vez que a face da geometria *aponta* para um material da lista, não importando que tipo de material venha a ser.

A escolha de se armazenar as propriedades físicas dos materiais em uma lista reside em três importantes aspectos:

- Armazenamento mínimo de informações;
- Simplicidade de inclusão de novos tipos de materiais;
- Proporcionar uma interface amigável, natural e eficiente ao usuário.

Conforme exposto anteriormente, ao se definir uma malha de elementos finitos para ser analisada numericamente, todos os elementos gerados *herdam* as propriedades das faces geométricas nas quais estão contidos, o que é feito através de ponteiros ascendentes.

4.2.2 Restrições de apoio

As restrições de apoio podem ser aplicadas tanto nas arestas do modelo da geometria como nos vértices do modelo da malha. Em ambos os casos, dentro da área de atributos, existe um espaço reservado indicativo do tipo de restrição.

Três características são importantes na atual versão do trabalho:

- As condições de suporte aplicadas na geometria são herdadas pelo modelo da malha e são acumulativas, ou seja, um vértice da malha, que esteja relacionado com duas arestas da geometria, sendo uma aresta restringida no sentido X e a outra no sentido Y, tem restrição em ambos os sentidos X e Y (Figura 4.9).
- As restrições impostas no nível da malha prevalecem sobre as restrições impostas no nível da geometria. Isto pode ser desejável em alguns casos.
- Por só criar modelos para análise de estado plano (membrana e axissimétrico), as restrições se limitam às translações na direção X e Y.

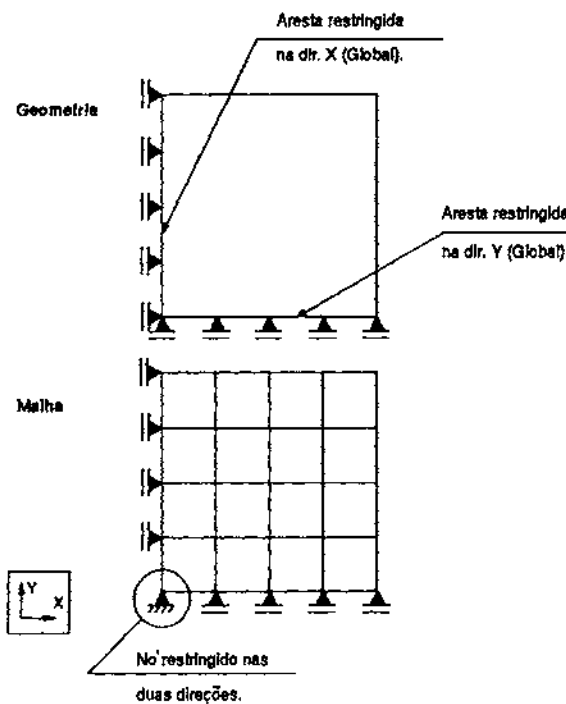


Figura 4.9: Restrições acumulativas entre a geometria e a malha.

4.2.3 Carregamentos

Analogamente ao que foi feito para as condições de suporte, pode-se aplicar carregamentos tanto nas arestas do modelo da geometria como nos vértices do modelo da malha.

A área de atributos relativa à aresta da geometria pode ser vista esquematicamente na Figura 4.10, e relativa ao vértice da malha na Figura 4.11.

se_ptr	Ponteiro (descendente) para aresta da sub-região.
type	Tipo de aresta (reta, circular ou bezier).
restr	Restrição de apoio.
geo_ptr	Descrição geométrica da aresta.
load_ptr	Ponteiro para lista de carregamentos.

Figura 4.10: Representação esquemática da área de atributos de uma aresta da geometria.

mid_flag	Indicador de nó de meio de aresta (elemento quadrático).
node_num	Numero do nó (descrição final da malha).
restr	Restrição de suporte.
load_ptr	Ponteiro para lista de carregamentos
upp_ptr	Tipo de ponteiro (ascendente) para o modelo da sub-região
sv_ptr	Ponteiro para vértice da sub-região (upp_ptr = vértice).
se_ptr	Ponteiro para aresta da sub-região (upp_ptr = aresta).
sf_ptr	Ponteiro para a face da sub-região (upp_ptr = face)

Figura 4.11: Representação esquemática da área de atributos de um vértice da malha.

Da mesma forma que foi implementada a lista de materiais, a lista de carregamentos fica à parte da estrutura de dados FEDm, e possui as seguintes características:

- Podem ser aplicados três tipos de carregamentos : carregamento uniforme, carregamento com variação linear (ambos podendo ser aplicados no sistema global de coordenadas ou no sistema local do elemento) e carregamento concentrado (somente no sistema global);
- No modelo geométrico pode-se aplicar somente os carregamentos uniformes e lineares nas arestas, enquanto que, no modelo da malha somente o carregamento concentrado nos vértices;

- Analogamente ao exposto para lista de materiais, pode-se incluir um novo tipo de carregamento na lista somente acrescentando as suas informações;
- A atribuição dos carregamentos às entidades topológicas é feita da mesma forma que são atribuídas as propriedades físicas, ou seja, atualiza-se o *valor* do carregamento corrente e seleciona-se as entidades topológicas que se quer atribuir tal carregamento;
- O topo da lista de carregamentos é formada por um carregamento nulo ao qual as arestas do modelo da geometria e os vértices do modelo da malha *apontam* quando são criados.

Quando os dados para análise numérica são extraídos, as cargas aplicadas nas arestas do modelo da geometria são automaticamente transformados em cargas equivalentes nodais aplicadas nos nós (vértices) do modelo da malha, as quais são acumuladas as eventuais cargas concentradas aplicadas. As cargas equivalentes nodais são calculadas utilizando-se as funções de forma associadas a cada elemento, obtendo-se os valores mostrados nas Figuras 4.12 e 4.13.

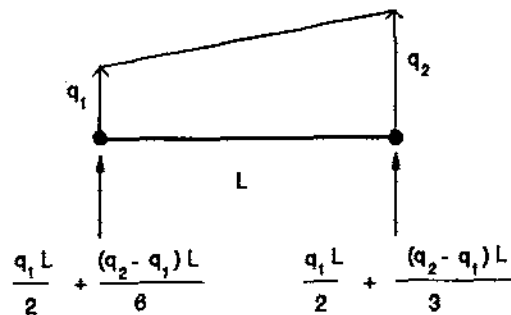


Figura 4.12: Cargas equivalentes nodais para elementos lineares.

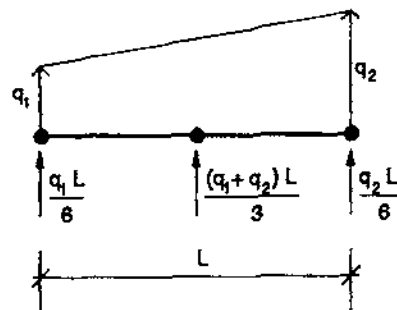


Figura 4.13: Cargas equivalentes nodais para elementos quadráticos.

GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MALHAS

O processo de decomposição hierárquica do domínio para geração de malhas utilizado neste trabalho tem como principal vantagem a exploração mais intensa dos algoritmos de mapeamento. Isto se deve à facilidade introduzida para a criação e manipulação das sub-regiões e à utilização de uma representação topológica completa dos dados. Entretanto, estes algoritmos ainda apresentam uma restrição para sua utilização, que está relacionada com a forma e o número de subdivisões do contorno das regiões. Ou seja, a região tem que ser naturalmente correspondente a um quadrado com os lados opostos discretizados em um igual número de segmentos ou a um triângulo com os três lados discretizados igualmente.

Sendo assim, o sistema de modelagem proposto permite que, quando não se desejar a utilização das técnicas de mapeamento ou quando se tornar muito complexa a sua utilização, se gere a malha de uma sub-região ou de todo o domínio através de uma triangulação genérica.

Neste capítulo é vista uma técnica de triangulação com geração de pontos internos a partir dos princípios de decomposição espacial recursiva (Wawrzynek, 1991; Samet, 1984).

5.1 *Triangulação*

Neste trabalho, a técnica de triangulação utilizada é baseada em um algoritmo de *contração* do contorno (Shaw, Pitchen, 1978). Nesta técnica, as etapas para obtenção da malha podem ser resumidas da seguinte forma:

- (1) Discretização do contorno.
- (2) Geração de pontos internos.
- (3) Triangulação propriamente dita.

A primeira etapa do processo consiste em discretizar todas as arestas (definir o número de segmentos de cada uma) que delimitam a região em que se deseja gerar a malha.

A geração de pontos internos pode ser feita de diversos modos. No presente trabalho, a técnica desenvolvida é baseada em princípios de decomposição espacial recursiva e é vista com detalhes nas próximas seções.

Com base no contorno discretizado e com os pontos internos gerados, pode-se gerar uma malha de elementos finitos utilizando-se técnicas de triangulação. Na técnica de contração do contorno, o algoritmo começa o processo a partir do contorno e o *contraí* tecendo uma malha de triângulos, conforme apresentado na Figura 5.1.

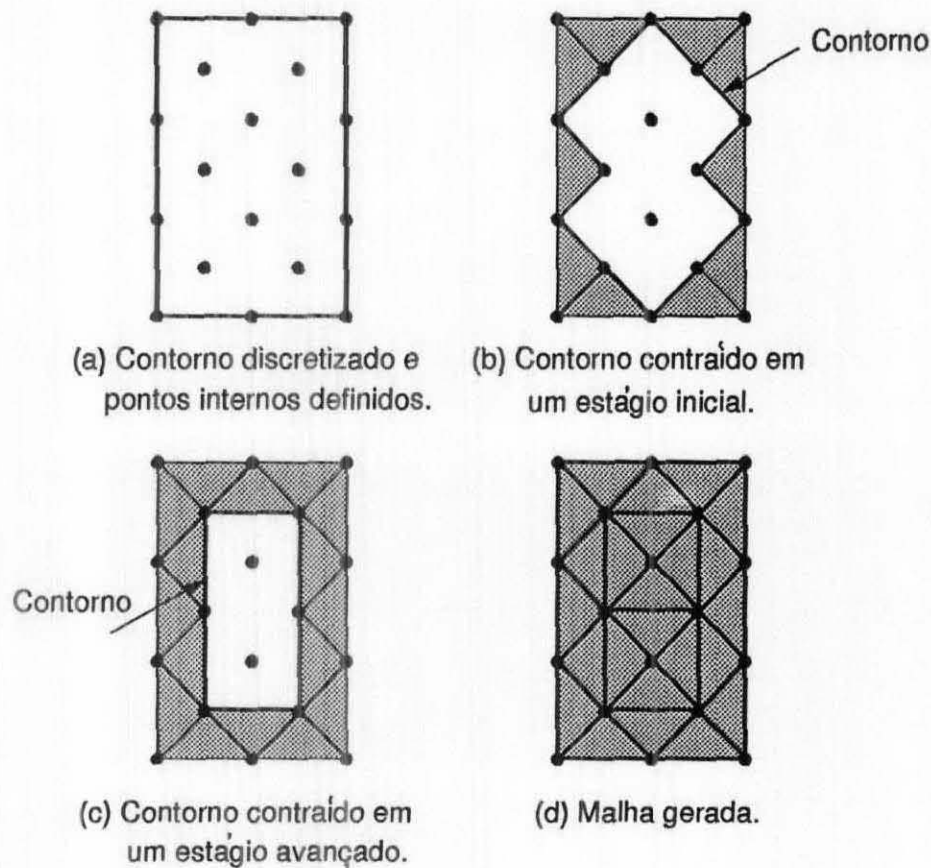


Figura 5.1: Triangulação por contração do contorno.

Desta forma, o algoritmo se mostra eficiente quando da geração de malhas em formas complexas. No entanto, possui uma baixa *performance*, podendo ser de ordem quadrática em relação ao número de elementos criados, para o pior caso. A seguir é apresentado um resumo de todo o processo de triangulação por contração do contorno:

- (1) Inicializa-se uma lista com todas as arestas do contorno.
- (2) Seleciona-se uma aresta do contorno contida na lista.
- (3) Para todos os nós do contorno ou internos seleciona-se aquele que forma com a aresta selecionada (aresta corrente) o melhor triângulo possível. Define-se o melhor

triângulo, como sendo aquele que apresenta o maior ângulo de inclusão como apresentado na Figura 5.2. De modo a tornar o algoritmo mais eficiente é feito um teste de proximidade do nó escolhido com a aresta corrente. Se este nó estiver muito distante da aresta ele é descartado e um outro nó é selecionado.

- (4) Atualiza-se a lista de arestas do contorno, retirando-se a aresta selecionada e introduzindo-se as outras arestas que formaram o triângulo, caso não estejam na lista.
- (5) Prossegue-se com o processo até que a lista fique vazia.

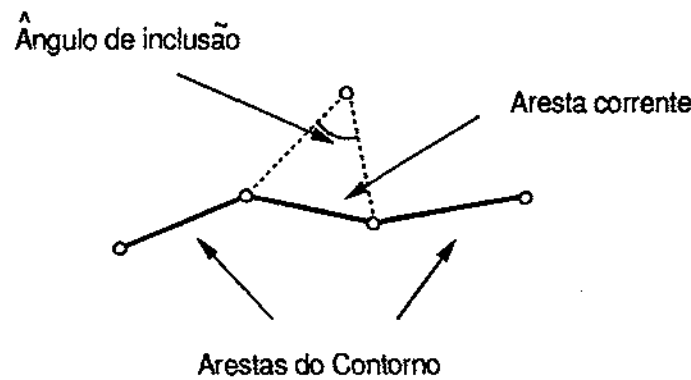


Figura 5.2: Representação esquemática do critério do ângulo utilizado na triangulação por contração do contorno.

5.2 Decomposição Espacial Recursiva - DER

Antes de analisar-se os princípios básicos da DER, faz-se necessário uma prévia distinção entre DER e *quadtree*, uma vez que ambos os termos são utilizados indistintamente na literatura, sendo mais comum o uso do termo *quadtree*. DER é um conjunto de técnicas (algoritmos) para subdivisão recursiva de uma determinada região, enquanto que *quadtree* é um tipo de estrutura de dados que pode ser utilizada para implementação de um determinado algoritmo de DER.

Desta forma, algoritmos de DER subdividem uma região em um número de regiões menores de forma similar. O processo pode ser repetido um número arbitrário de vezes para cada nova região gerada. A Figura 5.3 apresenta dois exemplos de procedimentos de DER. Na parte superior da figura uma região triangular é subdividida em quatro regiões triangulares similares. Na parte inferior uma região quadrangular é subdividida em quatro regiões quadrangulares similares.

No presente trabalho utiliza-se os procedimentos de DER para regiões quadrangulares onde cada região gerada pode ser dividida em quatro novas regiões. A representação ideal para o armazenamento de todas as informações referentes a esta subdivisão recursiva é a estrutura chamada *quadtree*.

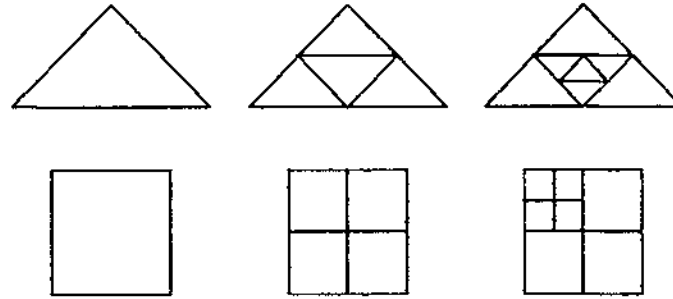


Figura 5.3: Procedimentos de DER para regiões triangulares e quadrangulares.

A estrutura de dados *quadtree* é um tipo árvore que possui a característica de que cada nó possui exatamente quatro nós *filhos* (sucessores) ou então nenhum nó filho, denominado de *folha* (sem sucessores).

Para melhor exemplificar o que foi exposto, analisa-se detalhadamente a sequência de etapas do processo de DER, conforme apresentado na Figura 5.4, e o respectivo preenchimento da estrutura de dados (*quadtree*), como mostrado na Figura 5.5.

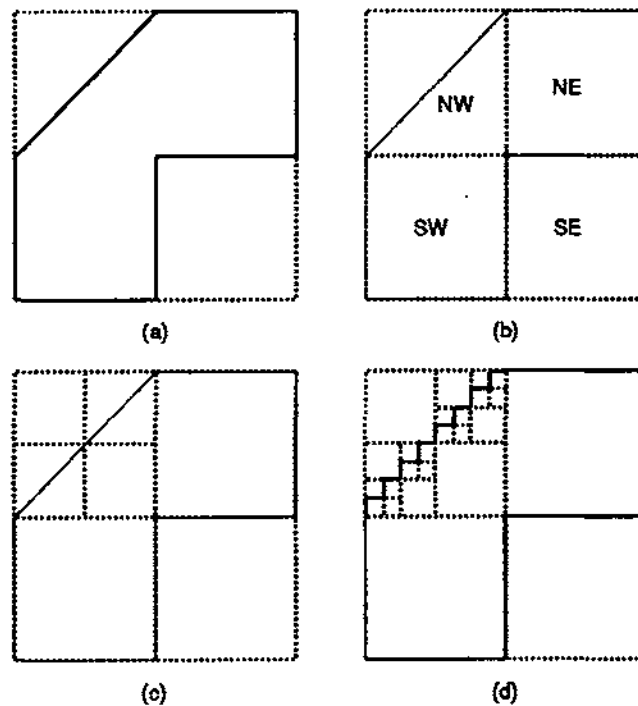


Figura 5.4: DER de uma determinada região.

Na Figura 5.4-a apresenta-se a região que se quer subdividir por meio de uma DER. O primeiro passo de todo o processo é definir um quadrado que contenha toda a região a ser representada. Este quadrado está representado na Figura 5.4-a e aparece como sendo a *raiz* da árvore (único nó da árvore que não possui antecessor) na Figura 5.5-a.

Nas seqüências posteriores apresentadas na Figura 5.4-b e 5.4-c subdividem-se as regiões quadrangulares (denominadas de *células*) de modo a representar a região. Cada etapa é mostrada esquematicamente na Figura 5.5-b e 5.5-c, respectivamente.

O processo poderá continuar indefinidamente, ou até quando se atingir a um nível de refinamento desejado, conforme mostrado na Figura 5.4-d, com a representação final da *quadtrees* de acordo com a Figura 5.5-d.

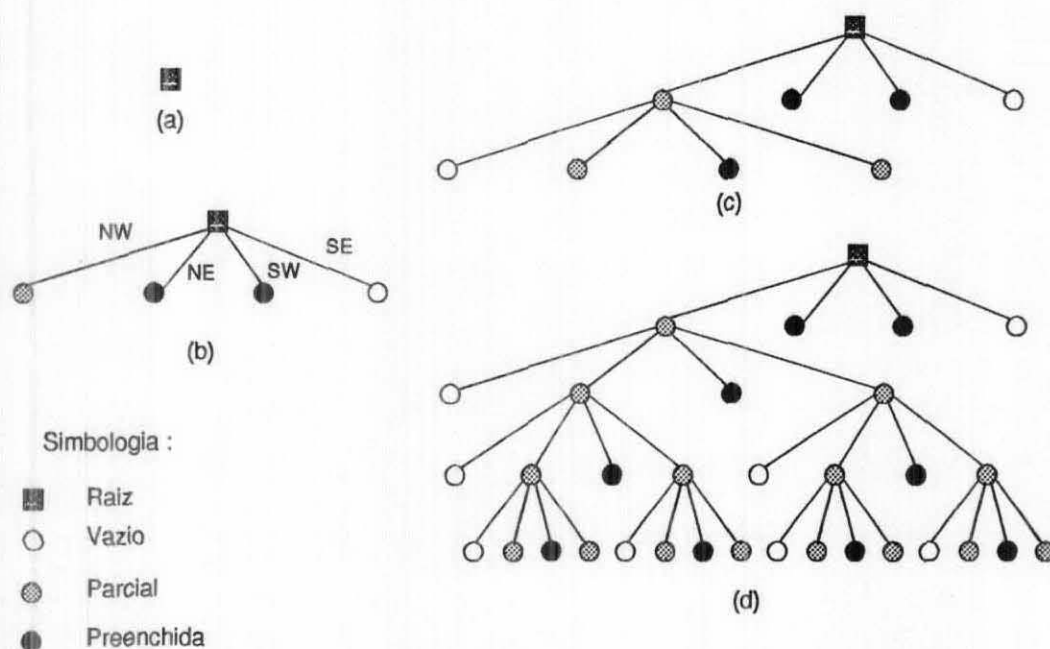


Figura 5.5: *Quadtrees* correspondente da Figura 5.4.

5.3 Geração de Nós Internos a partir da DER

Neste trabalho, a geração dos pontos interiores para a triangulação utiliza o princípio da DER, que apresenta a importante característica de *sentir* onde é necessária a geração mais intensa de pontos internos.

Esta *percepção* do algoritmo se dá com base nos contornos das regiões discretizados (único dado a ser passado para o algoritmo). Sendo assim, uma área próxima a

um trecho do contorno muito discretizado apresenta uma densidade de pontos gerados maior do que uma área próxima a um trecho menos discretizado ou de uma área central longe de qualquer contorno.

Na Figura 5.6-a apresenta-se o exemplo de uma região na qual deseja-se gerar os pontos internos. A partir deste exemplo é descrito todo o processo de geração de pontos internos, a saber:

1. Enquadra-se o menor quadrado que contém todo o modelo, conforme representado na Figura 5.6-a.
2. Cada aresta do contorno é percorrida de modo a determinar o seu comprimento e a posição do seu ponto médio (denomina-se aresta, o segmento de reta compreendido entre cada vértice da discretização do contorno). Uma vez determinado o ponto médio de uma aresta verifica-se qual célula da *quadtree* contém este ponto. Se o tamanho da célula for maior do que o comprimento da aresta em questão, subdivide-se esta célula até que o tamanho da nova célula que contiver o ponto médio seja igual ou menor que o comprimento da aresta. A Figura 5.6-b representa a subdivisão resultante após o término desta etapa.
3. Na Figura 5.6-b nota-se que, após a etapa anterior, existem, no centro da região, células relativamente grandes em relação a outras. Com o intuito de evitar elementos com tamanho relativamente grande no interior da região, adota-se como critério básico que nenhuma célula poderá ter tamanho maior do que a maior célula que é interceptada pelas arestas do contorno, conforme representado na Figura 5.6-c.
4. Observando-se atentamente a Figura 5.6-c observa-se células relativamente pequenas ao lado de células relativamente grandes. A grande diferença de tamanho entre células adjacentes não é desejável, uma vez que isto resultaria na geração de triângulos com ângulos muito agudos, o que não é aconselhável para uma análise por elementos finitos (pode apresentar problemas numéricos). A boa técnica de elaboração de malhas recomenda que a passagem de elementos pequenos para elementos maiores seja feita da forma mais gradual possível. Assim sendo, subdividem-se as células comparando-se cada uma com as suas vizinhas (Samet, 1984). Se duas células adjacentes estiverem no mesmo nível de subdivisão (mesmo tamanho), ou se a diferença entre elas for de somente um nível, não se faz uma nova subdivisão, caso contrário a célula maior é subdividida até que a diferença entre elas seja de no máximo um nível (Figura 5.6-d).
5. A partir do passo anterior, analisa-se a possibilidade de se gerar um ponto no interior de cada célula. Isto ocorre com base nas seguintes condições: (a) o ponto a ser gerado

deve estar dentro da região de interesse; (b) o ponto a ser gerado não deve estar muito próximo do contorno da região. O critério de proximidade adotado estabelece que a distância do ponto (a ser gerado) ao contorno não deve ser superior ao tamanho da célula que o contém multiplicada por um fator, que foi estabelecido empiricamente.

A Figura 5.7 ilustra os pontos internos gerados no centro de cada célula após as cinco etapas descritas acima.

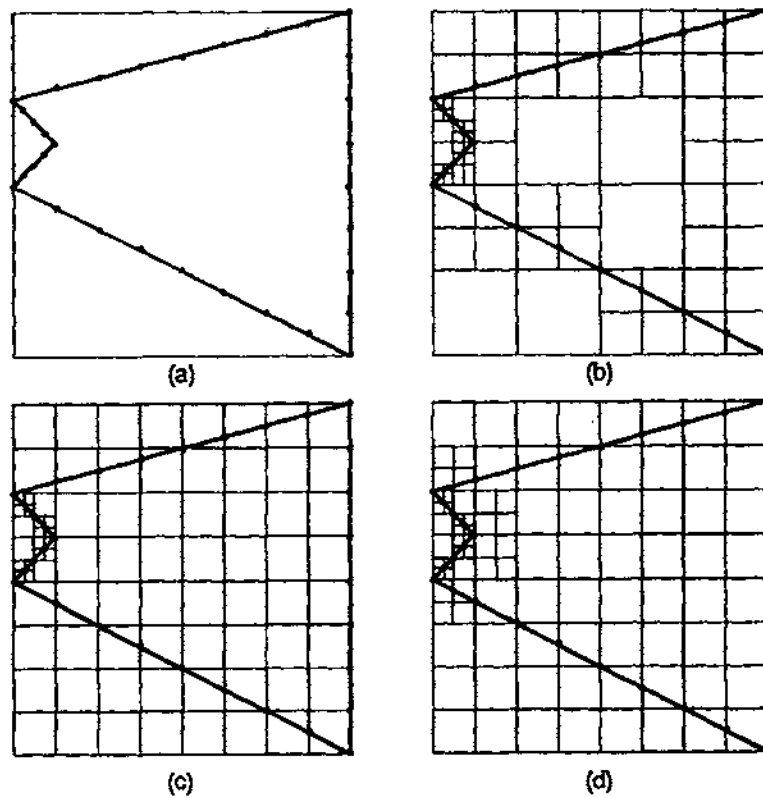


Figura 5.6: Processo de Refinamento da DER.

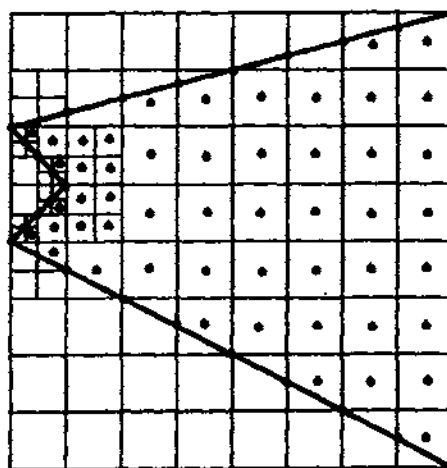


Figura 5.7: Pontos Internos gerados pelo processo de DER.

A triangulação é feita conforme a técnica descrita anteriormente, resultando na malha apresentada na Figura 5.8-a. A Figura 5.8-b mostra a mesma malha após um procedimento de suavização, onde as coordenadas de cada nó gerado no interior são recalculadas com base na média das coordenadas dos seus nós adjacentes.

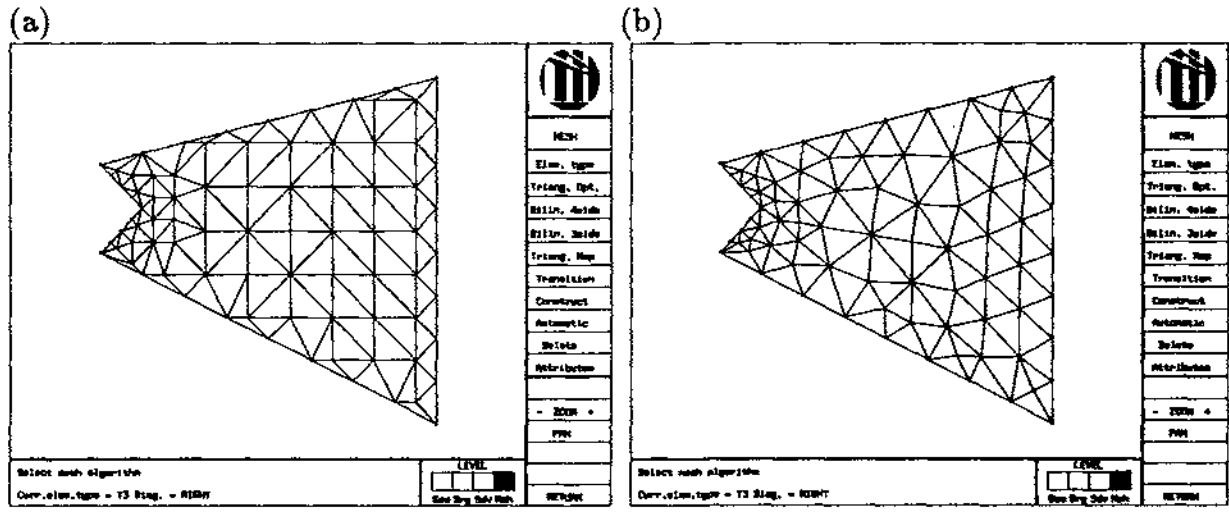


Figura 5.8: Malha de elementos finitos gerada utilizando-se técnica de triangulação. Na parte (a) a malha gerada com os pontos definidos pelo processo de DER (Figura 5.7). Na parte (b) após a suavização das coordenadas.

Neste capítulo são apresentados mais alguns exemplos da atual implementação deste trabalho. Com o intuito de apresentar de uma forma mais elucidativa, as principais características deste pré-processador, que são enumeradas a seguir:

- (1) Facilidade de atribuir às regiões (faces) do modelo da geometria propriedades de diferentes materiais. Isto é conseguido através da lista de materiais criada à parte da estrutura de dados e da subdivisão automática de arestas, a nível de modelo geométrico. Se o meio a ser analisado possuir furos, define-se a face da geometria que será tratada como tal. Na Figura 6.1, apresenta-se o perfil de um solo estratificado (com quatro diferentes materiais), onde está indicado a presença de duas escavações subterrâneas (faces do modelo geométrico que são tratadas como furos).

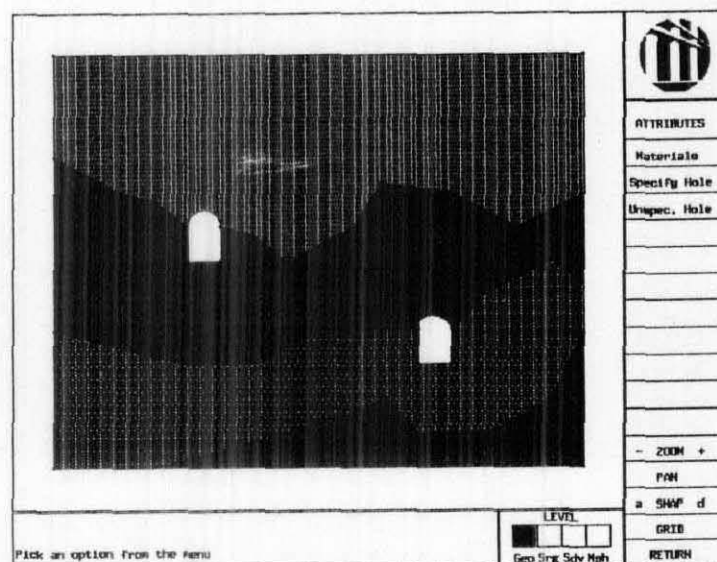


Figura 6.1: Representação da análise de uma escavação subterrânea em um solo estratificado.

- (2) Os carregamentos distribuídos são aplicados ao modelo geométrico e são herdados pelo modelo da malha. A aplicação destes carregamentos é feita nas arestas do modelo geométrico e transformadas em forças equivalentes nodais que são aplicadas nos nós correspondentes da malha. Desta forma, o carregamento é aplicado independentemente da malha gerada, conforme evidenciado na Figura 6.2 e 6.3,

que representam o modelo de um suporte metálico e duas malhas correspondentes. Nota-se na Figura 6.2, que a parte interna está sujeita a uma pressão uniforme e o paramento vertical sujeito a uma carga linearmente distribuída. Na Figura 6.3 são representadas malhas geradas por duas técnicas diferentes, na esquerda usando-se mapeamento bilinear e trilinear e na direita triangulação com pontos internos gerados por *quadtree*, que daqui por diante será chamada de triangulação por *quadtree*. Ainda utilizando o exemplo da Figura 6.2, constata-se a importância da decomposição hierárquica do domínio na geração da malha apresentada na Figura 6.3 (esquerda), onde buscou-se gerar as regiões topologicamente equivalentes a quadriláteros e triângulos de modo a usar as técnicas de mapeamento. A Figura 6.4 apresenta todos os modelos utilizados no processo de decomposição hierárquica.

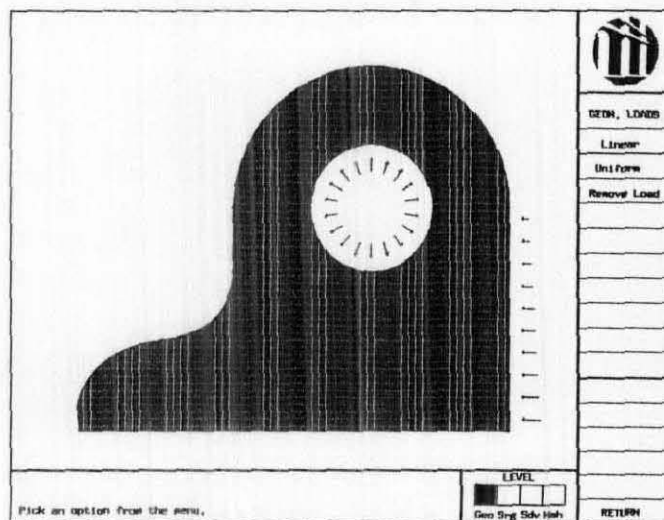


Figura 6.2: Carregamentos aplicados em um suporte metálico.

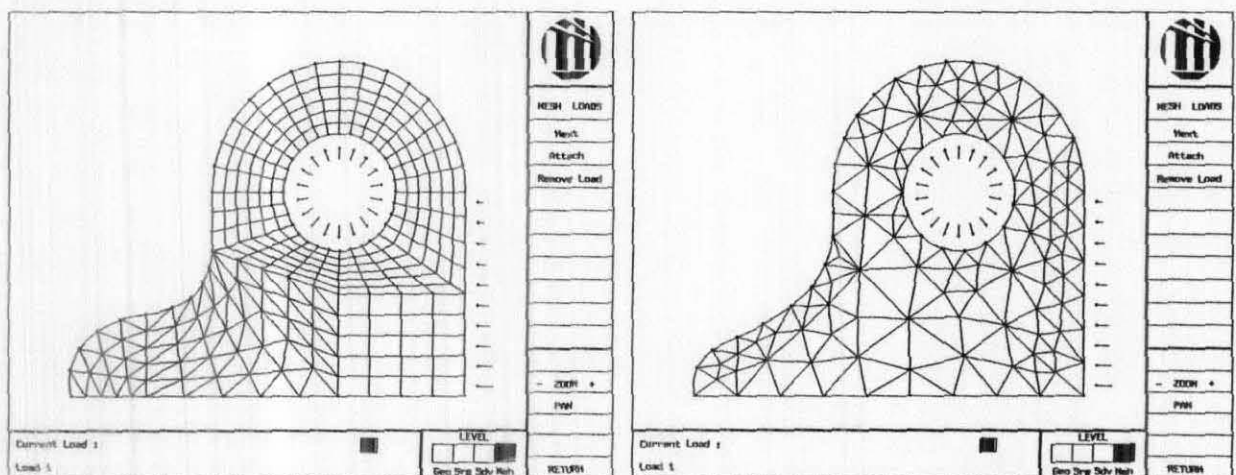


Figura 6.3: Malhas referentes ao modelo da Figura 6.2, onde a carregamento aplicado na geometria é herdado pelos nós da malha.

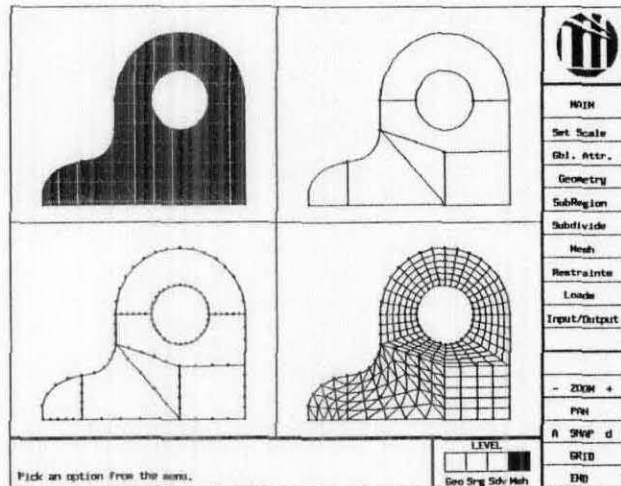


Figura 6.4: Modelos utilizados para geração de malhas usando técnicas de mapeamento bilinear e trilinear. Na parte inferior esquerda aparece o modelo da subdivisão apenas por uma questão didática.

- (3) Analogamente ao que foi exposto para os carregamentos distribuídos, as restrições de apoio impostas no modelo geométrico são herdadas pelo modelo da malha. Na Figura 6.5, é apresentado o modelo para análise de uma barragem em que restringiu-se a parte inferior da estrutura conforme representado (na parte inferior à direita da figura, as restrições adotadas foram apenas de caráter didático, de modo a enfatizar o aspecto acumulativo da restrição no modelo da malha). Na Figura 6.6, foi gerada uma malha utilizando triangulação por quadtree. Destacam-se dois aspectos importantes nesta malha: (a) o caráter acumulativo das restrições (na parte inferior à direita) e (b) na parte inferior à esquerda da malha, impõe-se restrições somente na direção Y, ao invés de restrições nas duas direções, que prevalecem às restrições impostas no modelo geométrico.

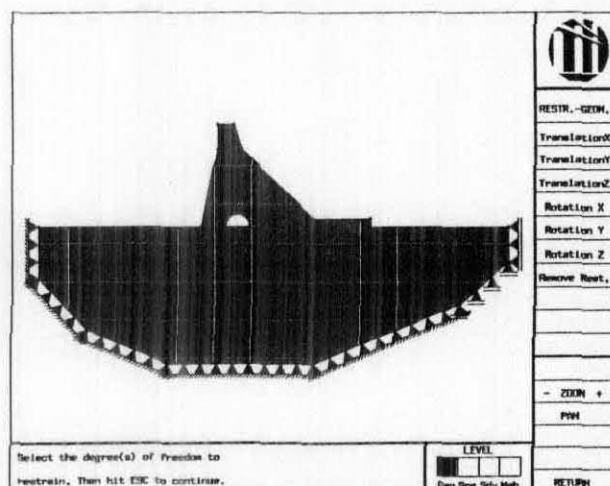


Figura 6.5: Modelo para análise de uma barragem com as restrições de suportes representadas.

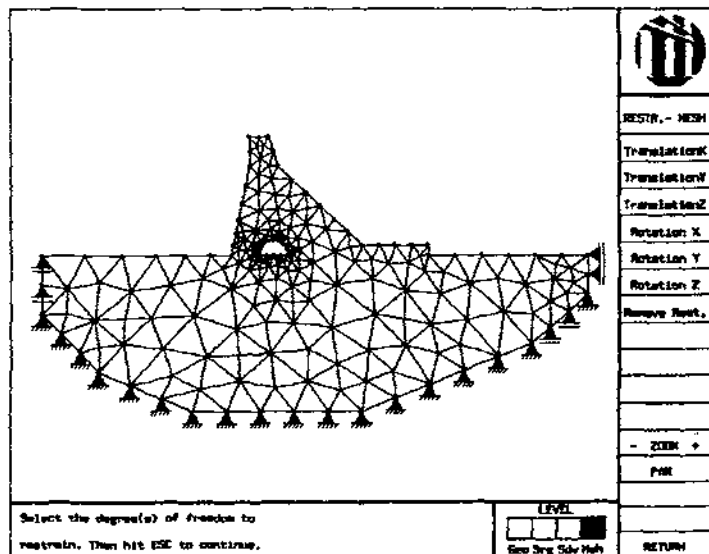


Figura 6.6: Malha de elementos finitos gerada para representação do modelo da Figura 6.5 com as restrições nodais representadas.

- (4) Os carregamentos concentrados são aplicados nos nós do modelo da malha e são adicionados aos carregamentos provenientes do modelo da geometria, se existirem. Na Figura 6.7, apresenta-se o modelo de uma viga-parede (com dois furos centrais) discretizada, com cargas concentradas (horizontal e vertical) aplicadas no topo e com as condições de suporte representadas.

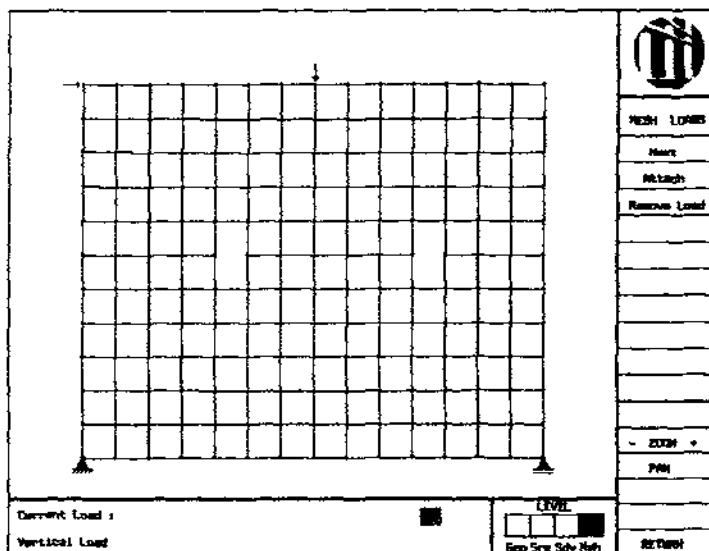


Figura 6.7: Malha de elementos finitos de uma viga-parede com as solicitações e restrições representadas.

- (5) Malhas geradas através de triangulação por quadtree são eficientes quando tem-se formas geométricas complicadas ou muito recortadas, como é o caso da peça mecânica mostrada na Figura 6.8. É importante ressaltar também que o algoritmo

possui a *percepção* de refinar mais, as regiões próximas de contornos mais discretizados conforme, é visto no detalhe da Figura 6.9.

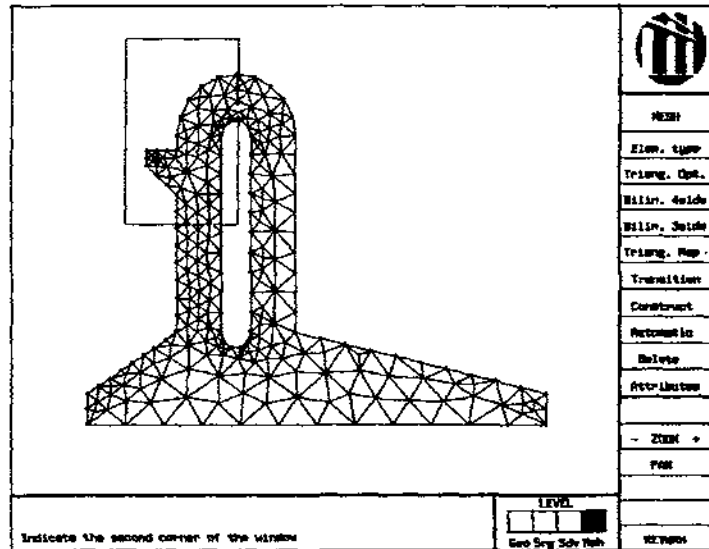


Figura 6.8: Malha de elementos finitos para uma peça mecânica gerada por triangulação com pontos internos gerados por princípios de *quadtree*.

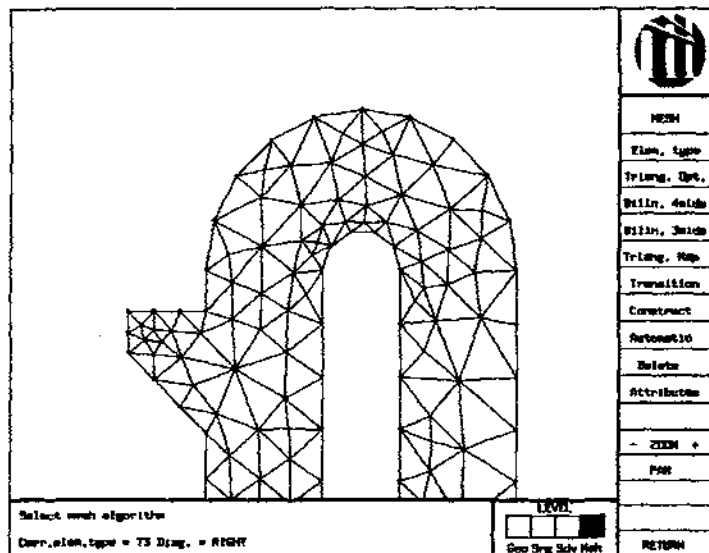


Figura 6.9: Detalhe da Figura 6.8, onde há uma maior discretização do contorno e conseqüentemente uma maior concentração de elementos.

- (6) Como a plataforma de trabalho é integrada, ou seja, os módulos de pré-processamento (definido neste trabalho), análise e pós-processamento (Guimarães, 1992) são interligados, o conceito tradicional de numeração de nós e elementos é pouco importante. Entretanto, como neste trabalho a extração dos dados para análise numérica pode ser feita para outros programas, a numeração dos nós e elementos

assume, nestes casos, papel de vital importância para interpretação dos resultados. Na Figura 6.10 é mostrada a malha de elementos finitos gerada através de mapeamento bilinear, com elementos quadráticos, para um trecho da parede de um cilindro, com a respectiva numeração de nós e elementos. Na presente versão do programa foi acoplado um renumerador nodal que tem como objetivo diminuir a largura de banda ou a altura do perfil (*sky-line*). A numeração dos nós apresentada já se encontra renumerada.

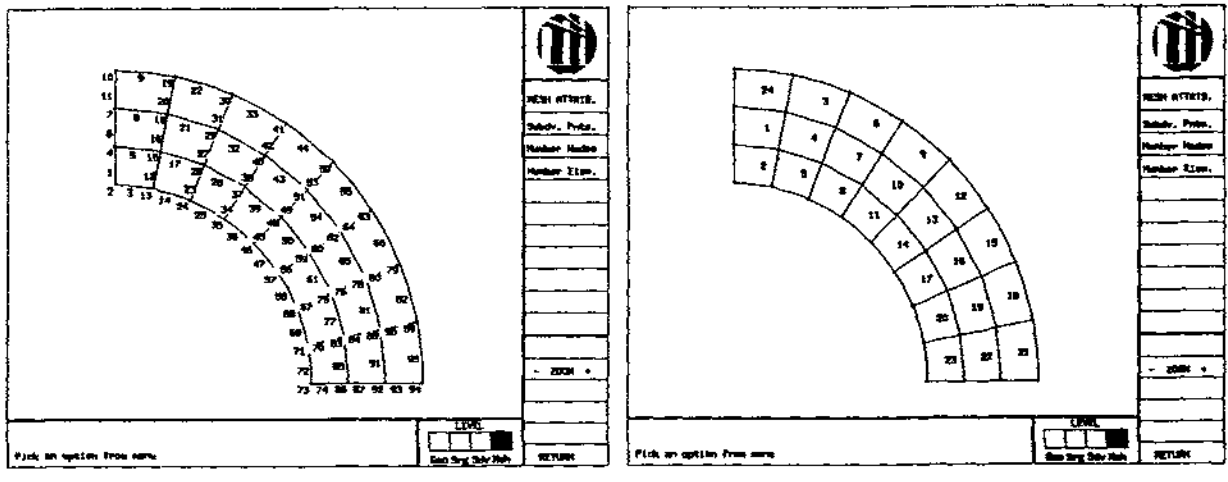


Figura 6.10: Malha de um trecho da parede de um cilindro. Na figura da esquerda é mostrada a numeração dos nós, e na figura da direita a numeração dos elementos.

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

As principais conclusões deste trabalho são:

- (a) O pré-processador gráfico com representação de dados baseada em um modelo geométrico completo da estrutura se mostrou eficiente para geração de malhas de elementos finitos. Esta eficiência fica mais acentuada quando há necessidade de redefinição da malha gerada sem que se precise de redefinição de atributos (propriedades dos materiais, restrições de suporte e carregamentos).
- (b) A decomposição hierárquica do domínio tem papel fundamental na geração de malhas, principalmente quando do uso de algoritmos de mapeamento.
- (c) A estrutura de dados topológica se mostrou eficiente, fazendo com que o pré-processador responda de forma rápida e precisa às intervenções do usuário, qualidades fundamentais para um sistema gráfico e interativo.
- (d) A geração de malhas por triangulação utilizando pontos internos gerados por *quad-tree*, se mostrou de grande aplicabilidade para discretização de modelos geométricos muito recortados ou com geometria complexa.
- (e) Este trabalho, juntamente com o trabalho proposto por Guimarães (1992), formam um sistema integrado natural para o ensino de modelagem por elemento finitos aplicado à elasticidade plana.

Como sugestões para trabalhos futuros tem-se:

- (a) Com a constante preocupação de minimizar o armazenamento da estrutura de dados utilizada propõem-se que haja somente dois níveis de hierarquia (geometria e malha), sem que se perca as informações necessárias para promover a decomposição hierárquica do domínio. Nesta mesma linha de raciocínio pode-se armazenar, de forma topologicamente completa, somente as informações da malha de uma sub-região (estrutura que ocupa maior espaço por possuir um maior número de entidades) quando houver solicitação de sua edição; caso contrário, para as regiões onde as malhas fossem geradas, seriam armazenadas somente o algoritmo que as gerou com os seus parâmetros.
- (b) Ampliação para análise de placas.

- (c) Ampliação da família de elementos a serem usados, tais como: elemento infinito, elemento de interface, elementos Serendipity (com número variado de nós) e elementos de barra.
- (d) Verificação da conformidade dos elementos (qualidade do elemento com respeito a sua forma), uma vez que geração automática de malhas pode gerar elementos que não produzam bons resultados na análise numérica.
- (e) Implementação de um algoritmo de transição que permita que, para regiões naturalmente correspondentes a um quadrilátero, lados opostos possuam diferentes número de subdivisões.
- (f) Implementação de algoritmo de triangulação utilizando não só os pontos gerados por *quadtree*, como também a triangulação propriamente dita por esta técnica, proporcionando maior rapidez na geração da malha.
- (g) Com respeito ao sistema integrado, sugere-se a implementação de procedimentos para avaliar o erro numérico da análise do modelo por elementos finitos, bem como a redefinição automática da malha, de forma auto-adaptativa, para a minimização deste erro.
- (h) Extensão do sistema integrado para simular processos de Mecânica da Fratura onde há propagação arbitrária de trincas com redefinição automática da malha.

Referências Bibliográficas

(Baehmann et. al., 1987)

Baehmann, P.L.; Wittchen, S.L.; Shephard, M.S.; Grice, K.R.; Yerry, M.A. - "Robust Geometrically Based, Automatic Two-Dimensional Mesh Generation", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 24, 1043-1078, 1987.

(Baumgart, 1975)

Baumgart, B.G. - "A Polyhedron Representation for Computer Vision", *AFI PS Proc.*, 44, pp. 589-596, 1975.

(Campos, 1991)

Campos, J.A.P. - "Geração de Malhas de Elementos Finitos Bidimensionais Baseada em uma Estrutura de Dados Topológica", *Dissertação de Mestrado, PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil, fevereiro de 1991.*

(Cavalcanti, 1992)

Cavalcanti, P.R. - "Criação e Manutenção de Subdivisões do Espaço", *Dissertação de Doutorado, PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil, março de 1992.*

(Finnigan et. al., 1989)

Finnigan, P.M.; Kela, A.; Davis, J.E. - "Geometry as a Basis for Finite Element Automation", *Engineering with Computers*, 5, 147-160, 1989.

(Gattass et. al., 1991)

Gattass, M.; Celes Filho, W.; Fonseca, G.L. - "Computação Gráfica Aplicada ao Método dos Elementos Finitos", *Notas do micurso do XIV SBMAC, Nova Fibrurgo, 02 a 05 de setembro de 1991.*

(Guimarães, 1992)

Guimarães, L.G.S. - "Disciplina de Orientação a Objetos para Análise e Pós-processamento Bidimensional de Elementos Finitos", Dissertação de Mestrado, PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil, agosto de 1992.

(Haber, et. al., 1981)

Haber, R.; Shepard, M.S.; Greenberg, D.P.; Abel, J.F.; Gallagher, R.H. - "A General Two-dimensional, Graphical Finite Element Processor Utilizing Discrete Transfinite Mappings", *Int J. Num. Meth. Engng.*, 17, pp. 1015-1044, 1981.

(Hoffmann, 1989)

Hoffmann, C.M. - "Geometric and Solid Modeling: An Introduction", Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1989.

(Mäntyllä, 1988)

Mäntyllä, M. - "An Introduction to Solid Modeling", Computer Science Press, Rockville, Maryland, 1988.

(Martha, 1987)

Martha, L.F. - "A Two-dimensional Mesh generator Based on a Topological Data Structure", *Notas Pessoais*, 1987.

(Martha, 1989)

Martha, L.F. - "Topological and Geometrical Modeling Approach to Numerical Discretization and Arbitrary Fracture Simulation in Three-Dimensions", Ph.D. Thesis, Cornell University, 1989.

(Samet, 1984)

Samet, H. - "The Quadtree and Related Hierarchical Data Structures", *ACM Computer Surveys*, 16, 2, 1984.

(Shaw, Pitchen, 1978)

Shaw R. D.; Pitchen, R. G. - "Modifications to the Suhara-Fukuda Method of Network Generation", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 12, pp. 93-99, 1978.

(Shepard, 1985)

Shepard, M.S. - "Finite Element Modeling within an Integrated Geometric Environment: Part I - Mesh Generation", *Engineering with Computers*, 1, 61-71, 1985.

(Wawrzynek, 1986)

Wawrzynek, P.A. - "Interactive Finite Element Analysis of Fracture Process: an Integrated Approach", M.Sc. Thesis, Cornell University, 1986."

(Wawrzynek, Ingraffea, 1987 a)

Wawrzynek, P.A.; Ingraffea, A.R. - "An Edge-Based Data Structure for Two-Dimensional Finite Element Analysis", *Engineering with Computers*, 3, 13-20, 1987.

(Wawrzynek, Ingraffea, 1987 b)

Wawrzynek, P.A.; Ingraffea, A.R. - "Interactive Finite Element Analysis of Fracture Process: an Integrated Approach", *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 8, 137-150, 1987.

(Wawrzynek, 1991)

Wawrzynek, P.A. - "Discrete Modeling of Crack Propagation: Theoretical Aspects and Implementation Issues in Two and Three Dimensions", Ph.D. Thesis, Cornell University, 1991.

(Weiler, 1985)

Weiler, K. - "Edge-Based Data Structure for Solid Modeling in Curved-Surface Environments", *IEEE Comput. Graph. Appl.*, 5, pp. 21-40, 1985.

(Weiler, 1986)

Weiler, K. - "Topological Structures for Geometric Modeling", SIGGRAPH'87 Advanced Solid Modeling Tutorial, 1986.

(Weiler, 1988)

Weiler, K. - "The Radial-Edge Structure: A Topological Representation for Non-Manifold Geometric Boundary Representation", Geometric Modeling for CAD Applications, North Holland, 3-36, 1988.

(Wilson, Habibullah, 1988)

Wilson, E.L.; Habibullah, A. - "SAP90 - A Series of Computer for the Static and Dynamic Finite Element Analysis of Structures, User's Manual", Computers and Structures, Incorp., Berkeley, California, 1988.

(Woo, 1985)

Woo, T.C. - "A Combinatorial Analysis of Boundary Data Structure Schemata", IEEE Comp. Graph. Appl., Vol. 5, 3, 19-27, 1985.

"MODELAGEM GEOMÉTRICA ESTENDIDA PARA MODELOS BIDIMENSIONAIS DE ELEMENTOS FINITOS". Dissertação de Mestrado apresentada por ARLINDO CARDARETT VIANNA em 28 de agosto de 1992 ao Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio e aprovada pela Comissão Julgadora, formada pelos seguintes professores:



Prof. Luiz Fernando C. R. Martha (Orientador)
Departamento de Engenharia Civil / PUC-Rio



Prof. Paulo Cezar Pinto Carvalho
IMPA / CNPq

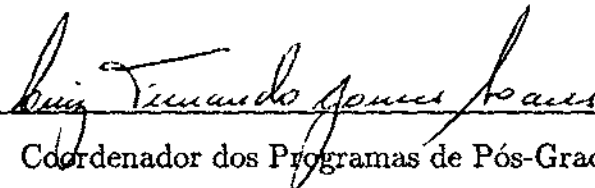


Prof. Marcelo Gattass
Departamento de Informática / PUC-Rio



Prof. Marcelo Dreux
Departamento de Engenharia Mecânica / PUC-Rio

Visto e permitida a impressão
Rio de Janeiro, 24/08/94



Coordenador dos Programas de Pós-Graduação
do Centro Técnico Científico