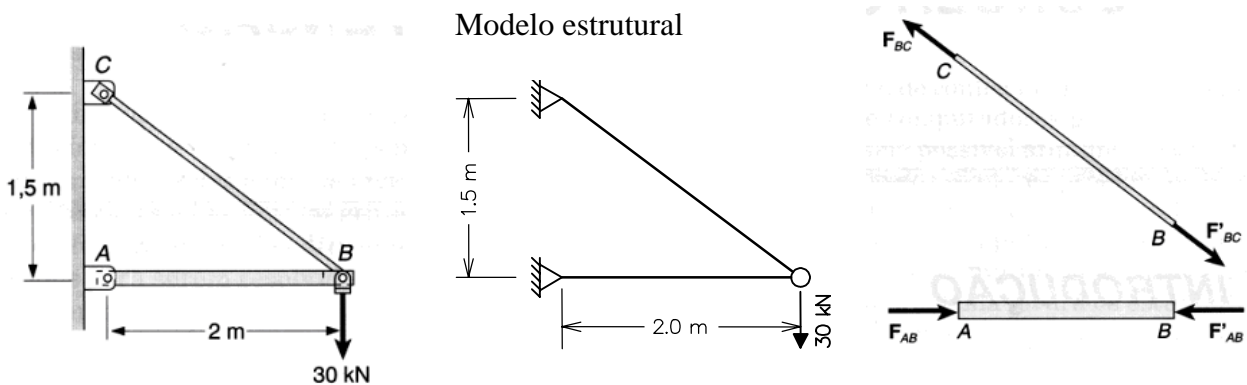


Esforços axiais e tensões normais

(Ref.: Beer & Johnston, *Resistência dos Materiais*, 3ª ed., Makron)

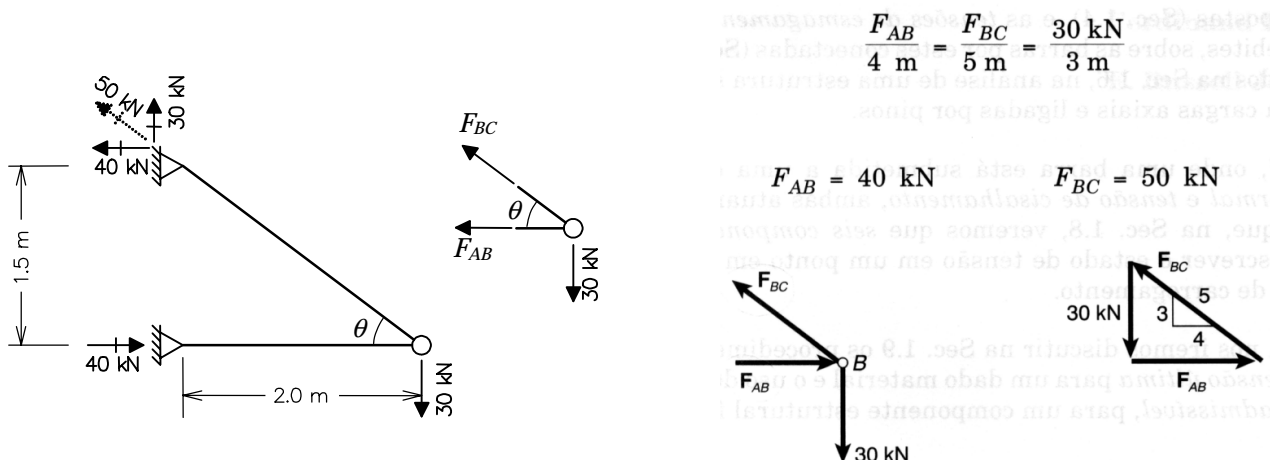
Considere a estrutura abaixo, construída em barras de aço *AB* e *BC*, unidas por ligações articuladas nas extremidades. As barras têm seção transversal circular, sendo que a seção da barra *BC* tem um diâmetro de 2 cm e a seção da barra *AB* tem um diâmetro de 4 cm. Desejamos verificar se a estrutura pode suportar com segurança a carga aplicada de 30 kN, aplicada no ponto *B*. Para verificar a segurança, vai ser utilizado o critério de tensão admissível do material, que no caso do aço pode ser adotada com o valor $\sigma_{adm} = 165 \text{ MPa}$ ($16,5 \text{ kN/cm}^2$), tanto na tração quanto na compressão.



Determinação dos esforços normais por equilíbrio

O primeiro passo da análise da estrutura é a determinação das forças que atuam nas suas barras. Essas forças são chamadas de *esforços internos*, que no caso de barras articuladas são os *esforços normais ou axiais* indicados na figura da direita. Isto é, as forças F_{BC} e F_{AB} são os *esforços normais* nas barras *BC* e *AB*.

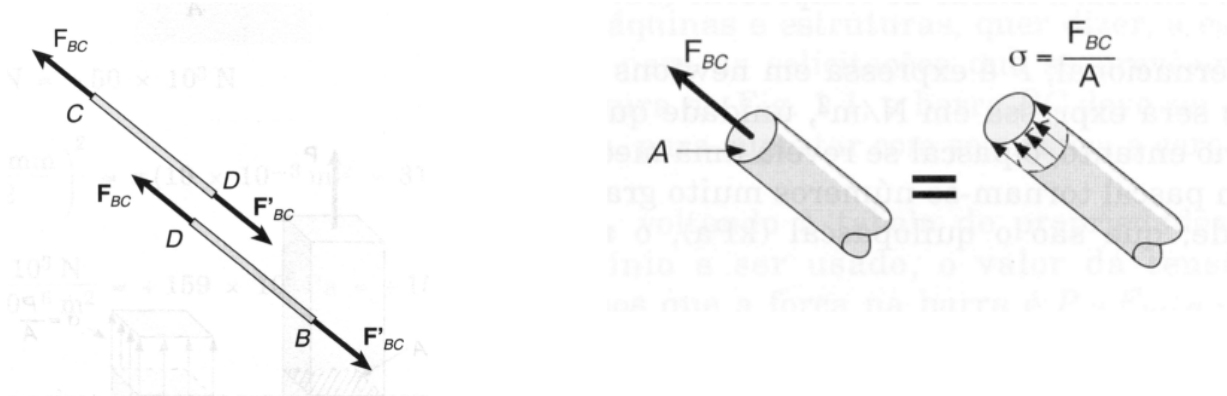
A determinação dos esforços normais nas barras pode ser feita por equilíbrio. Impõe-se o equilíbrio do nó *B* de ligação entre as barras. Isto é, as condições de equilíbrio $\sum F_x = 0$ e $\sum F_y = 0$ são impostas ao nó *B* isolado da estrutura:



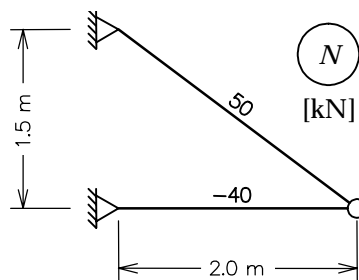
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{BC} \cdot \sin \theta - 30 \text{ kN} = 0 \Rightarrow F_{BC} \cdot 3/5 = 30 \text{ kN} \therefore F_{BC} = + 50 \text{ kN} \text{ (com o sentido arbitrado)}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{BC} \cdot \cos \theta - F_{AB} = 0 \Rightarrow F_{AB} = -50 \cdot 4/5 \therefore F_{AB} = -40 \text{ kN} \text{ (com sentido contrário ao arbitrado)}$$

O esforço normal F_{BC} representa o *esforço interno de ligação* em qualquer seção transversal da barra BC . O equilíbrio de porção da barra isolada mostra que o esforço normal na barra é constante e igual a 50 kN. Como o esforço normal está tendendo a alongar a barra, ele é denominado *esforço normal de tração*. O esforço normal F_{AB} está tendendo a encurtar a barra AB , e por isso ele é dito um *esforço normal de compressão*.



A convenção de sinais adotada para esforços normais é tal que esforços de tração são positivos e esforços de compressão são negativos. A figura abaixo mostra os esforços normais na estrutura de acordo com esta convenção de sinais:

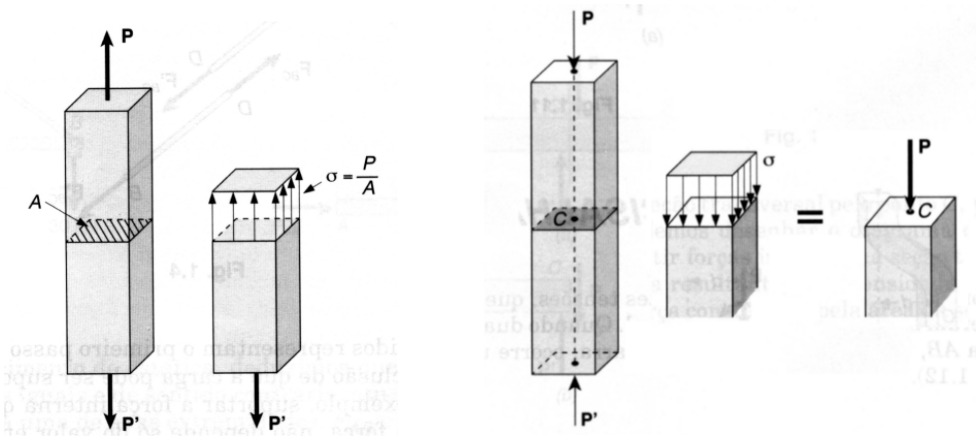


Tensões normais

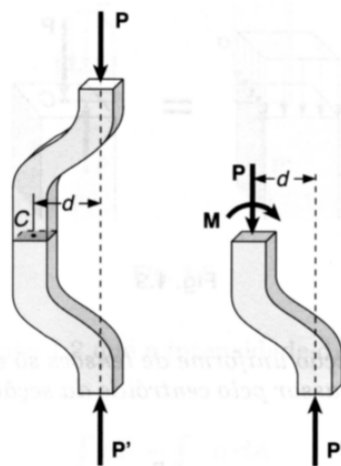
Para verificar se a estrutura tem condições de suportar a carga aplicada, é necessário determinar se cada uma das barras tem condição de suportar o esforço normal atuante. Em outras palavras, é preciso verificar se o material tem capacidade para resistir o esforço normal em cada barra.

Entretanto, a capacidade de resistência de um material é caracterizada por um efeito pontual. Como o esforço interno é um esforço integral da seção transversal de uma barra, para obter o efeito em um ponto da barra, é preciso dividir o esforço normal pela área da seção transversal. O resultado desta divisão é denominado *tensão normal*: $\sigma = N / A$, sendo N o esforço normal na barra e A a área da seção transversal.

A tensão normal representa a sollicitação em um ponto da seção transversal de uma barra onde atua um esforço axial. Por hipótese, está sendo considerado que as tensões normais provocadas por esforços axiais (normais) são constantes ao longo da seção transversal. Para tanto, é necessário que o ponto de aplicação do esforço normal seja no centro de gravidade da seção transversal.



A hipótese de tensões normais constantes para esforços axiais também despreza efeitos localizados próximos das ligações entre as barras e imperfeições na construção da barra. Por exemplo, uma barra pode ter sido fabricada com uma excentricidade em seu eixo (o que é comum) que pode resultar em momentos atuando na seção transversal pelo efeito do esforço normal associado à excentricidade. Neste caso, a distribuição das tensões normais ao longo da seção transversal não é uniforme pois aparecem tensões provocadas pelo efeito de flexão da barra (isto será visto mais tarde). Além disso, para esforços normais de compressão, uma excentricidade no eixo de uma barra pode ser responsável por um fenômeno de instabilidade da barra denominado *flambagem*.



Unidades de tensão

- 1 Pa (Pascal) é a tensão resultante da aplicação de uma força de 1 N (Newton) em uma área de 1 m²:
1 Pa = 1 N/m².
- 1 kPa (kilo-Pascal) = 1000 N/m² = 1 kN/m².
- 1 MPa (Mega-Pascal) = 10⁶ N/m² = 1000 kN/m² = 0,1 kN/cm² = 1 N/mm².
- 1 GPa (Giga-Pascal) = 10⁹ N/m² = 10⁶ kN/m² = 100 kN/cm² = 1 kN/mm².

Tensão admissível

A capacidade de segurança de uma estrutura está associada à capacidade de resistência do material *em todos os pontos da estrutura*. Um dos critérios para verificação da segurança de uma estrutura é a comparação com a *tensão normal solicitante* (provocada pelo esforço normal) em qualquer ponto da estrutura com a *tensão admissível* do material, que representa a capacidade que o material tem para resistir tensões normais.

No presente exemplo, o aço empregado tem uma tensão admissível fornecida:
 $\sigma_{adm} = 165 \text{ MPa}$ ($16,5 \text{ kN/cm}^2$).

A verificação da segurança da estrutura é feita para cada barra:

Barra AB:

Barra circular com diâmetro $d = 4 \text{ cm}$.

Área: $A = \pi \cdot d^2 / 4 = 3,14 \cdot 4^2 / 4 = 12,56 \text{ cm}^2$.

Tensão normal: $\sigma = F_{AB} / A = -40 / 12,56 = -3,2 \text{ kN/cm}^2$.

(O sinal negativo indica que a tensão é de compressão)

Verifica-se que $\sigma < \sigma_{adm}$ (em valor absoluto).

Portanto, a barra tem capacidade de resistir ao esforço normal pelo critério da tensão admissível.

Barra BC:

Barra circular com diâmetro $d = 2 \text{ cm}$.

Área: $A = \pi \cdot d^2 / 4 = 3,14 \cdot 2^2 / 4 = 3,14 \text{ cm}^2$.

Tensão normal: $\sigma = F_{BC} / A = +50 / 3,14 = +15,9 \text{ kN/cm}^2$.

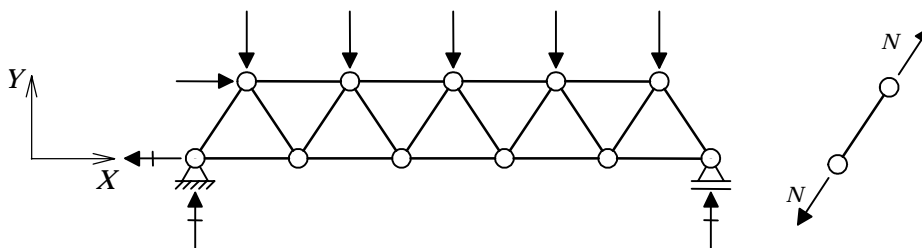
(O sinal positivo indica que a tensão é de tração)

Verifica-se que $\sigma < \sigma_{adm}$.

Portanto, a barra tem capacidade de resistir ao esforço normal pelo critério da tensão admissível.

Procedimento para determinação de esforços normais em barras de uma treliça plana

Uma *treliça* é uma estrutura reticulada que tem todas as ligações entre barras articuladas (as barras podem girar independentemente nas ligações). Na análise de uma treliça as cargas atuantes são transferidas para os seus nós. A consequência disso, em conjunto com a hipótese de ligações articuladas, é que uma treliça apresenta apenas esforços internos axiais (esforços normais de tração ou compressão).



Um procedimento que pode ser adotado para determinar os esforços normais em uma treliça plana (isostática) é o chamado *método do equilíbrio nodal*:

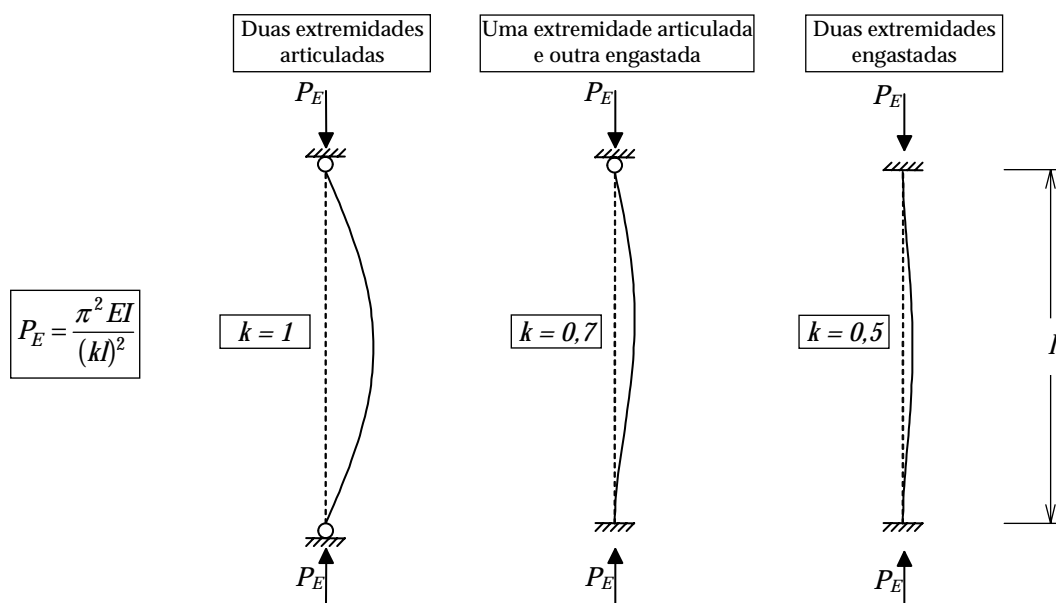
- Primeiro se determina as reações de apoio da estrutura com base nas três equações globais de equilíbrio:
 - $\sum F_x = 0 \rightarrow$ somatório global de forças na direção horizontal deve ser nulo;
 - $\sum F_y = 0 \rightarrow$ somatório global de forças na direção vertical deve ser nulo;
 - $\sum M_o = 0 \rightarrow$ somatório global de momentos em relação a um ponto qualquer deve ser nulo.
- Depois se impõe o equilíbrio de cada um dos nós da treliça de uma maneira isolada:
 - $\sum F_x = 0 \rightarrow$ somatório de forças na direção horizontal deve ser nulo;
 - $\sum F_y = 0 \rightarrow$ somatório de forças na direção vertical deve ser nulo.

Perda de estabilidade pelo efeito axial de compressão (flambagem)

Referências:

- V. Féodosiev, *Resistência dos Materiais*, Edições Lopes da Silva, Porto, Portugal, 1977.
- Fabricio Vanden Broeck & Arseno Muños, *Las Estructuras en la Naturaleza y en la Técnica*, Universidad Autonoma Metropolitana, Ciudad de México, México, 1986.

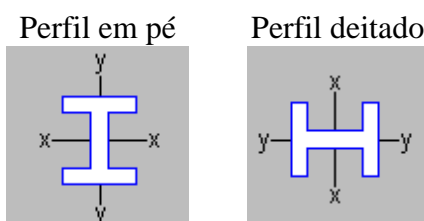
O matemático L. Euler em meados do século XVIII descobriu que a estabilidade de colunas submetidas a esforços axiais de compressão depende da relação entre uma propriedade da seção transversal da coluna e de seu comprimento: a carga máxima P_E que uma coluna pode sustentar sem flexionar varia inversamente com o quadrado de seu comprimento l e proporcionalmente com o momento de inércia I da seção transversal. Isso é mostrado na figura na página seguinte para três tipos de condições de extremidade das colunas. A perda de estabilidade de colunas submetidas à compressão é um fenômeno que se chama *Flambagem de Colunas*.



Nas expressões acima:

- P_E → carga abaixo da qual a coluna não flexiona (carga de Euler).
- E → módulo de elasticidade do material (também conhecido como módulo de Young).
- I → momento de inércia da seção transversal correspondente ao plano onde se dá a flexão.
- l → comprimento da coluna.
- k → fator que define o comprimento efetivo da coluna para flambagem.

O momento de inércia da seção transversal é uma propriedade geométrica que depende de sua orientação com respeito ao plano onde ocorre a flexão da barra. Tome, por exemplo, o perfil “T” mostrado abaixo.



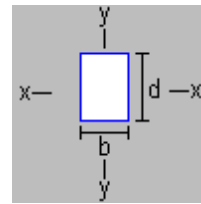
Quando a flexão da barra se dá no plano y-y, ocorre um giro da seção transversal em torno do eixo x. Neste caso, o momento de inércia a ser adotado é $I = I_x$. Por outro lado, quando a flexão da barra ocorre no plano x-x, o momento de inércia adotado é $I = I_y$.

Matematicamente, os momentos de inércia de uma seção transversal genérica são definidos pelas integrais de área mostradas ao lado.

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

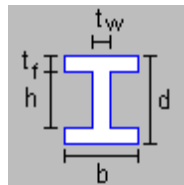
$$I_y = \int_A x^2 dA$$

O momento de inércia de uma seção transversal retangular para flexão plano y - y (giro da seção em torno do eixo x) está indicado ao lado.



$$I_x = \frac{b \cdot d^3}{12}$$

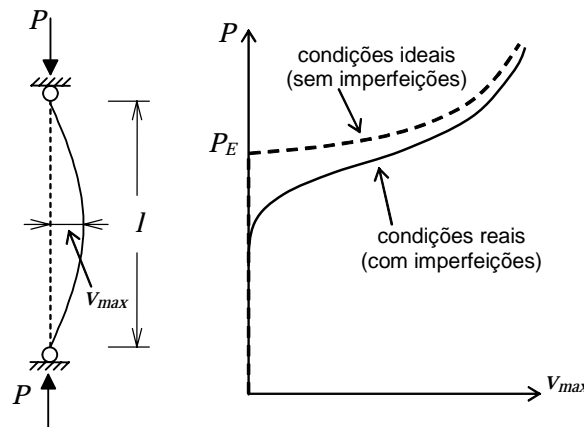
No caso do perfil “I”, as expressões para os momentos de inércia estão indicadas ao lado.



$$I_x = \frac{b \cdot d^3}{12} - \frac{(b - t_w) \cdot h^3}{12}$$

$$I_y = 2 \cdot \frac{t_f \cdot b^3}{12} + \frac{h \cdot t_f^3}{12}$$

A expressão de carga de Euler mostrada na página anterior foi deduzida para uma situação ideal. Ocorre que no mundo físico real existem imperfeições de ordem construtiva, tais como excentricidade na aplicação da carga, imperfeições geométricas das seções transversais, etc. Devido a essas imperfeições, em condições reais, a flexão da coluna por flambagem pode ocorrer para cargas mais baixas do que a carga de Euler. O gráfico da figura na página seguinte mostra a variação do valor da carga P de compressão na coluna em função da deflexão transversal máxima V_{max} do ponto do centro da coluna. Em condições ideais a coluna permanece reta (sem deflexão transversal) até que a carga atinja o valor da carga de Euler. Em condições reais, a coluna pode *flambar* abaixo da carga de Euler.



Também pode ocorrer que na estrutura real ocorram restrições físicas que dificultam a flambagem, tais como atrito nas articulações ou atrito lateral da coluna com o restante da estrutura. Nesses casos, a carga crítica para flambagem pode ser mais alta do que a carga de Euler.

Deve-se ressaltar também que a teoria de flambagem de Euler considera como hipótese básica que o material trabalha em um regime elástico, ainda longe do regime de ruptura. Isto é, admite-se que a perda de capacidade de resistir cargas da coluna se dá por flambagem de forma global. A perda de estabilidade também pode ocorrer por algum fenômeno localizado, tal como a ruína do material em algum ponto, o descolamento da solda entre a mesa e a alma do perfil, ou mesmo por uma flambagem localizada (caracterizada pela ondulação da mesa comprimida do perfil).