

**Rafael Araujo de Sousa**

**Estimativas de zonas plásticas à frente de ponta de  
trincas**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada como requisito parcial para  
obtenção do título de Doutor pelo Programa  
de Pós-Graduação em Engenharia Civil da  
PUC-Rio.

Orientador: Luiz Fernando Campos Ramos Martha  
Co-orientador: Alexandre Antonio de Oliveira Lopes  
Jaime Tupiassú Pinho de Castro

Rio de Janeiro, setembro de 2011.



**Rafael Araujo de Sousa**

**Estimativas de zonas plásticas à frente de ponta de trincas**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Luiz Fernando C. R. Martha**

Presidente/Orientador

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

**Prof. Alexandre Antonio de Oliveira Lopes**

Co-Orientador – Petrosoft Design

**Prof. Jaime Tupiassú Pinho de Castro**

Co-Orientador

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC-Rio

**Prof. Carlos Alberto de Almeida**

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC-Rio

**Prof. Ney Augusto Dumont**

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

**Prof. Remo Magalhães de Souza**

Departamento de Engenharia Civil – UFPA

**Prof. Timothy Hamilton Topper**

University of Waterloo

**Prof. José Eugênio Leal**

Coordenador Setorial

do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 15 de setembro de 2011.

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Rafael Araujo de Sousa**

Graduou-se em Engenharia Civil, pela Universidade Federal do Pará, em fevereiro de 2005. Durante a graduação atuou na área de estruturas na análise de vibrações em cabos considerando a rigidez à flexão, a rigidez ao cisalhamento e a inércia à rotação, que gerou um artigo em revista. Defendeu sua dissertação de mestrado em 14 de fevereiro de 2007 com o trabalho intitulado de Adaptatividade geométrica e numérica na geração de malhas de elementos finitos em 2D e 3D.

#### Ficha Catalográfica

Sousa, Rafael Araujo de

Estimativas de zonas plásticas à frente de ponta de trincas / Rafael Araujo de Sousa ; orientador: Luiz Fernando Campos Ramos Martha ; co-orientadores: Alexandre Antonio de Oliveira Lopes, Jaime Tupiassú Pinho de Castro. – 2011.

3vs. ; 30 cm

Tese (doutorado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, 2011.

Inclui bibliografia

1. Engenharia civil – Teses. 2. Zonas plásticas. 3. Mecânica da fratura linear elástica. 4. Métodos numéricos. I. Martha, Luiz Fernando Campos Ramos. II. Lopes, Alexandre Antonio de Oliveira. III. Castro, Jaime Tupiassú Pinho de. IV. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. IV. Título.

CDD: 624

Aos meus pais, Stélio e Maria do Carmo;  
Meu irmão, Allan Araujo de Sousa;  
Minha avó, Paula Costa Ferreira Araujo;  
E a minha esposa Nayana de Macedo Lopes

## **Agradecimentos**

Aos leitores deste trabalho, peço desculpas pela extensão dos agradecimentos. Entretanto, não posso deixar de relacionar as pessoas que foram importantes para a minha formação pessoal e que de forma indireta participaram no término desta tese. Dessa forma, agradeço em primeiro lugar aos meus pais, Stélio Augusto Amorim de Sousa e Maria do Carmo Araujo de Sousa e a Deus. Agradeço aos meus pais por toda criação e dedicação dadas a mim e a meu irmão. Dentro desse contexto, não poderia deixar de citar o bairro em que fui criado, o Jurunas, subúrbio de Belém, que me mostrou como a vida pode ser dura e que é necessário muita força de vontade para mudar uma situação desfavorável. Agradeço também ao meu irmão, Allan Araujo de Sousa, a quem devo em torno de 80% do meu pouco conhecimento geral e a minha esposa Nayana Silvia de Macedo Lopes por todo amor, dedicação, amizade e companheirismo ao longo desses três anos de convivência, assim como a toda sua família, em especial a minha sogra Ana e a minha cunhada Adriana Karoline. Também agradeço em primeiro plano, aos meus avós paternos e maternos, em especial ao meu avô Cândido José Costa Ferreira Araujo pelo exemplo de comportamento e a minha avó Paula Costa Ferreira Araujo por participar diretamente na minha vida.

Ainda no ambiente familiar, gostaria de agradecer a todos os meus tios, tias, primos e primas, em especial aos mais próximos: como os tios José Henrique Araujo, Jorge Lima, Genilson Andrade e José Carlos Araujo, as tias Conceição Araujo, Isabela Araujo, Thelma Araujo e em especial a tia Maria de Nazaré Araujo Lima, que me adotou como afilhado, aos primos Daniel Sena, Lucas Araujo, Leonardo Araujo e Bernardo Araujo e as primas Juliana Araujo e Farah Malcher. Pelos longos e importantíssimos seis anos de convivência, também agradeço à Vanessa Ferreira e toda sua família (dona Carmelina, Dalila Santos e Paulo Eduardo Ferreira).

De acordo com a minha concepção de importância na minha formação pessoal, não posso deixar de agradecer aos amigos formados ao longo da minha vida. Dentre eles destaco: Elisson Borges Saldanha “gueldo”, Francisco Nunes da

Rocha Junior, Felipe Melo “cancão”, Bruno Flexa “tabajara”, Igor Nunes “malaco”, Thiago Sena, Benedito Franciano, Evandro Leomar “mano brown”, Manoel “ted”, Francinei, Fernando Santos “dog”, Vladimir Barbosa “capitão planeta”, Bruna Cristina, Bruno Eutrópio “rato”. Agradeço especialmente aos amigos Fábio Luiz Araújo Araújo e toda a sua família que sempre me tratou como um membro e ao meu compadre, xará e parceiro nos sambas e cervejas, Rafael Ferreira Pinheiro “cachacinha” e a sua filha Arielle Bezerra Pinheiro.

No ambiente acadêmico, eu agradeço aos amigos formados durante a graduação na Universidade Federal do Pará. Entre eles destaco Tiago Rodrigues, Jean Rodrigo Aguilera e Remo Magalhães de Souza. Aos amigos conquistados durante o mestrado na PUC-Rio: Amanda Jarek, André Guedes “Dedé Bambu” e sua esposa Elaine, Clébson Wilson “dino”, Antônio Vicente “combatente”, Ygor Netto “tio chico”, João Paulo Castagnoli “gagazeiro”, Klessis “seu Klessis”. Aos colegas de disciplina do doutorado: Jorge Hinostroza “biruta”, Juan Carlo Romero “loquito”, Gerardo “Piquet” Patrick, Juarez e Guillermo “franquito”. Agradeço em especial ao grande Adenilson Costa Oliveira “mão tôca” também conhecido como “pegador encubado” pela longa convivência tanto ao longo das disciplinas do mestrado quanto no papo do esporte (futebol, vôlei, automobilismo, mma), quanto nas cervejadas tomadas nos sambas e bailes funks.

Agradeço ao TECGRAF pelo apoio financeiro e pelo ambiente agradável que me ajudou na conclusão do mestrado e do doutorado. Assim, agradeço ao Luiz Fernando Bitton pelo incentivo em entrar para o TECGRAF e aos amigos formados lá ao longo desses seis anos de convivência: Isebelle Telles “paraense pai d’égua”, Bruno Ávila, Gisele Cunha, Mauro Artemio Páchas pelas cervejas tomadas nesses anos, Antônio Sérgio “MacGyver”, Jaime Castro Neto por toda ajuda no laboratório de fotoelasticidade, Alonso Carbono “cuio”, Pedro Michelle “K-” pelas cervejas e pelos papos de samba, Antônio Miranda “caboco doido”, Ivan Fábio Menezes “Éguaa” que com esse nome composto deve ter algum descendente nortista. Agradeço ao Ivan pelas horas perdidas em que me ajudou nas listas de Elementos Finitos e nas outras disciplinas. Dentro do Tecgraf, agradeço principalmente aos amigos Marcos Arruda e esposa (Christina “pay”) por ele me transmitir o amor pela engenharia e

pela pesquisa, por transmitir o prazer em ler José Saramago e por me ensinar a diferença entre ser magro e ser seco. Finalmente, agradeço ao Fábio Pereira Figueiredo e esposa (Daniela Paes) por ele ser uma pessoa que transmite calma, compreensão e paciência assim como por ter sido a pessoa que mais ouviu minhas angústias em relação ao desenvolvimento da tese.

Agradeço também a todos os professores, treinadores e pessoas que me incentivaram a progredir nos estudos e me ensinaram a ter disciplina e força de vontade para seguir em frente. Relacionados a minha fase de atleta, agradeço ao Paulo Pimenta, Raimundo Pena, Marcelo “Biro”. Agradeço aos meus professores do segundo grau Pantoja e Moura (Matemática), Zé Luis e Hélio Dourado (Física), Celeste Proença (Redação e Português), Guilherme e Odir (Geografia) e Marcos (Literatura). Em relação a minha graduação, agradeço a todos os professores do departamento de engenharia civil da UFPA, em especial aos professores Salim Habib, Abílio da Cruz pelo incentivo e confiança depositadas em mim, ao professor José Perilo da Rosa Neto por todo conhecimento transmitido, ao professor José Raimundo Serra Pacha pela confiança e pela excelente aula ministrada e principalmente ao professor Remo Magalhães de Souza pela excelente aula, pela confiança e pelo incentivo depositados em mim, por sua simplicidade e por ser um grande amigo.

Agradeço também à Rita de Cássia e a todos os professores que tive ao longo desses seis anos de pós graduação na PUC-Rio. Entre eles destaco os professores Paulo Cuadrat, Márcio Carvalho, Carlos Alberto de Almeida e Paulo Gonçalves pela excelência no ensino, a professora Deane Roehl e ao professor João Roehl pela confiança e incentivo dados a mim e ao professor Carlos Tomei pela ajuda na compreensão da parte analítica desta tese. Relação que só não foi mais profícua por culpa minha. Também agradeço ao professor Gustavo Donato da FEI-São Bernardo do Campo e a professora Edna Fernandes Pacheco do departamento de letras da PUC-Rio por toda ajuda na correção do texto, por sua confiança, paciência e amizade.

Mais diretamente relacionados ao desenvolvimento desta tese, agradeço ao professor Jaime Tupiassú Pinho de Castro pelo tema proposto, pelos diversos

conselhos e pelas extensas conversas ao longo desta convivência. Agradeço ao professor Luiz Fernando Martha pela paciência, por sua fácil convivência, pela grande ajuda na revisão do texto e pelas boas ideias dadas ao longo da tese. Em especial, agradeço ao Alexandre Antonio de Oliveira Lopes por todas as horas gastas em diversas madrugadas em que verificávamos e discutíamos resultados e trabalhávamos juntos em uma parceria muito produtiva. Também agradeço a ele pelas diversas ideias que enriqueceram este trabalho.

## Resumo

Sousa, Rafael Araujo de; Martha, Luiz Fernando C. R.; Lopes, Alexandre Antonio de Oliveira; Castro, Jaime Tupiassú Pinho de. **Estimativa de zonas à frente de ponta de trincas**. Rio de Janeiro, 2011. 283p. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O tamanho das zonas plásticas (zps) presentes na ponta de trincas valida a utilização da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE). Dessa forma, a partir das estimativas dessas zps, este trabalho estuda o limite de validade dos dois parâmetros que caracterizam MFLE. Esses dois parâmetros são o Fator de Intensidade de Tensões ( $K$ ) e a  $T$ -stress. Este trabalho mostra que esses dois parâmetros são termos da expansão da série de Williams partir da função de tensão de Westergaard. As duas formas são maneiras diferentes de se obter a solução linear elástica (LE) completa para o campo de tensões gerados na ponta de trincas. Esta tese mostra que esses dois campos de tensões têm uso limitado, pois eles geram tensões infinitas na ponta de trincas. Essas tensões singulares são características do problema matemático, não reproduzindo o real comportamento mecânico. Devido a isso, o problema das estimativas das zps é intrinsecamente não linear. Como tentativa de contornar o problema, este trabalho propõe três maneiras de considerar os efeitos do escoamento nas estimativas zps em que se adota um material perfeitamente plástico. As estimativas feitas por campos LE são verificadas numericamente a partir do uso do Método dos Elementos Finitos (MEF) e do Método Híbrido dos Elementos de Contorno (MHEC). Duas das propostas de considerar os efeitos do escoamento nas zps são utilizadas juntamente com MHEC. Como contribuição final, este trabalho estima zps a partir de uma análise numérica não linear via MEF em que os efeitos do encruamento também são testados. Essas estimativas são comparadas com as estimativas LE corrigidas em que se considera um material perfeitamente plástico.

### Palavras Chave:

Zonas plásticas; Mecânica da Fratura Linear Elástica; Métodos numéricos

## Abstract

Sousa, Rafael Araujo de; Martha, Luiz Fernando C. R.; Lopes, Alexandre Antonio de Oliveira; Castro, Jaime Tupiassú Pinho de. **Estimate of plastic zones ahead of crack tips**. Rio de Janeiro, 2011. 283p. DSc. Thesis – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The size of plastic zones (pz) at the crack tips validates the use of Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM). Thus, this thesis studies the limits of validity of the two parameters that characterize MFLE from the pz estimates. These two parameters are the stress intensity factor ( $K$ ) and the  $T$ -stress. This work shows that  $K_I$  and the  $T$ -stress are terms of the Williams' series expansion, which is the complete linear elastic (LE) solution for the stress fields generated at the crack tips. It also demonstrates that the Williams' series is a different way of writing the Westergaard stress function in terms of a trigonometric series with infinite terms, and comments that even if the two functions are the complete LE solution for cracked bodies, they have limited use, because they generate infinite tensions at the crack tip. These singular stresses are characteristics of mathematical problem, not reproducing the real mechanical behavior. As an attempt to outline the problem of singularity in a qualitative way, this work proposes three ways to consider the yielding effects in pz estimates in which one adopts a perfectly plastic material. The completeness of the stress fields generated by the Westergaard stress function is verified numerically from the use of Finite Element Method (FEM) and from of the Hybrid Boundary Element Method (HBEM). Two of the proposals to consider the yielding effects in the pz are used in conjunction with HBEM. The problem of pz estimates is intrinsically non-linear due to the singularity obtained by the mathematical formulation. Finally, this thesis also estimates the pz from a non-linear numerical analysis via FEM. The hardening effects are also tested in these nonlinear estimates. Moreover, they are compared to estimates corrected LE in which a perfectly plastic material is considered.

### Keywords:

Plastic zones; Linear Elastic Fracture Mechanics; Numerical methods

## Sumário

1 Introdução	45
1.1. A Mecânica da Fratura Linear Elástica e o Fator de Intensidade de Tensão	46
1.2. Definições, medidas e parâmetros que influenciam a tenacidade de uma peça	48
1.3. Motivação	52
1.4. Objetivos	57
1.5. Principais contribuições	58
1.6. Organização	59
2 Revisão bibliográfica	61
2.1. A criação da Mecânica da Fratura, a função de tensão de Westergaard e a série de Williams	61
2.2. A generalização da função de tensão de Westergaard	63
2.3. O Fator de Intensidade de Tensão	64
2.4. O campo HRR e a integral $J$	65
2.5. Limitações do uso de $K$ e $J$ , e a relação entre esses parâmetros com as zonas plásticas	67
2.6. Zonas plásticas estimadas numericamente	68
2.7. A tentativa de estender a aplicabilidade da MFLE a partir da adição da $T$ -stress	71
2.8. Medidas experimentais de zonas plásticas	73
2.9. Conclusão do capítulo	73
3 Estimativas de zonas plásticas a partir do uso da Mecânica da Fratura Linear Elástica com os campos de tensões obtidos analiticamente	75
3.1. Campo de tensões gerado a partir de expressões que utilizam o $K_I$	76
3.2. Campo de tensões gerado a partir de expressões que utilizam $K_I$ com adição da $T$ -stress	76
3.2.1. Disco circular com uma trinca interna	77

3.3. Campo de tensões gerado a partir da função de tensão de Westergaard	79
3.3.1. Placa de Griffith uniaxialmente carregada	81
3.3.2. Placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central	82
3.3.3. Placa retangular com uma trinca central	86
3.4. O campo de tensões gerado pela série de Williams	94
3.5. A utilização do Método dos Mínimos Quadrados para ajustar a série de Williams à função de tensão de Westergaard	96
3.5.1. O ajuste da série de Williams à função de tensão de Westergaard para o caso da placa de Griffith biaxialmente carregada	98
3.5.2. O ajuste da série de Williams a função de tensão de Westergaard para o caso da placa de Griffith uniaxialmente carregada	104
3.6. A <i>T-stress</i> como a constante de ordem zero da série de Williams	112
3.7. Conclusões do capítulo e comentários importantes sobre as estimativas analíticas das zonas plásticas a partir do uso da MFLE	120
4 Propostas de correções das zonas plásticas obtidas linearmente para levar em consideração os efeitos do escoamento do material	123
4.1. Correção das zonas plásticas em que se considera materiais perfeitamente plásticos	123
4.1.1. Correção em que se considera a componente $\sigma_{yy}$ gerada pelo campo de tensões obtido por $K_I$ para $\theta = 0$ – Irwin (1958)	124
4.1.2. Correção feita para todas as direções em que se considera a componente $\sigma_{yy}$ gerada pelo campo de tensões obtido pela função de tensão de Westergaard – Rodriguez (2007)	126
4.1.3. Discussão sobre a proposta de Rodriguez	127
4.1.4. Correção feita para todas as direções em que se considera a componente $\sigma_{Mises}$ gerada pelo campo de tensões obtido pela função de tensão de Westergaard	130
4.1.5. Correção em que se considera um incremento de zona plástica constante nas $pz(\theta)_M$ originais	131
4.1.6. Correção feita para todas as direções em que se considera a força de superfície em que o campo de tensões é obtido pela função de tensão	

de Westergaard	131
4.1.7. Zonas plásticas corrigidas para o caso da placa de Griffith	132
4.2. Proposta de correção para levar em consideração o efeito do encruamento do material	139
4.2.1. Proposta de correção que usa o campo de tensões gerado por $K_I$	139
4.2.1.1. Proposta que utiliza uma regra exponencial e $K_I$	139
4.2.1.2. Proposta que utiliza a equação de Ramberg-Osgood e o $K_I$	140
4.2.2. Proposta de correção que usa o campo de tensões gerado pela função de tensão de Westergaard	140
4.2.3. Estimativas dos efeitos do encruamento nas zonas plásticas para o caso da placa de Griffith	144
4.3. Conclusões do capítulo	153
5 Estimativas de zonas plásticas obtidas a partir do uso da Mecânica da Fratura Linear Elástica com os campos de tensões determinados numericamente	155
5.1. Algoritmo de busca linear	155
5.2. O Método Híbrido dos Elementos de Contorno aplicado à problemas da Mecânica da Fratura	157
5.3. O Métodos dos Elementos Finitos aplicado à problemas da Mecânica da Fratura	159
5.4. Estimativas de zonas plásticas obtidas numericamente para o exemplo da placa de Griffith	159
5.5. Estimativas de zonas plásticas obtidas numericamente para o exemplo de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central	162
5.6. Placa retangular com uma trinca central sob flexo tração	169
5.7. Estimativa de zonas plásticas em espécimes diferentes sob um mesmo Fator e Intensidade de Tensão	180
5.8. Conclusões do capítulo	190
6 Tratamento numérico das propostas de correções das zonas plásticas obtidas por uma análise numérica linear elástica para levar em consideração	

os efeitos do escoamento do material	192
6.1. Correção numérica das zonas plásticas para o caso da placa de Griffith	193
6.2. Correção numérica das zonas plásticas para o caso da placa retangular sob tração com uma trinca central	196
6.3. Correção numérica das zonas plásticas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração	202
6.4. Conclusões do capítulo	208
7 Estimativas de zonas plásticas obtidas numericamente a partir de uma análise não linear	210
7.1. O modelo constitutivo	211
7.2. Parâmetros de controle da análise não linear	212
7.3. Placa retangular sob tração com uma trinca central – análise não linear	213
7.3.1. Efeito do encruamento nas zonas plásticas elastoplásticas	213
7.3.2. Efeito do parâmetro $a/W$ nas zonas plásticas elastoplásticas e comparação entre essas zonas plásticas com as zonas plásticas corrigidas	226
7.4. Placa retangular com uma trinca central sob flexo tração	233
7.4.1. Efeito do encruamento nas zonas plásticas elastoplásticas	234
7.4.2. Efeito do parâmetro $a/W$ nas zonas plásticas elastoplásticas e comparação entre essas zonas plásticas com as zonas plásticas corrigidas	247
7.5. Conclusões do capítulo	255
8 Conclusões	256
9 Referências bibliográficas	263
Apêndice	272
A.1. Obtenção das zonas plásticas a partir do pós-processamento da análise de elementos finitos	272
A.2. Sensibilidade das estimativas das zonas plásticas obtidas pelo	

método dos elementos finitos em relação ao nível de refinamento da malha 275

A.3. Programa desenvolvido que ajusta os valores da geometria e da carga dos espécimes CCT, SENT e SENB sob um mesmo  $K_I$  e mesmo valor de  $\sigma_{II}/S_Y$  281

## Lista de figuras

- Figura 1 – Placa de Griffith biaxialmente carregada. 47
- Figura 2 – Variação de  $K_C$  com a espessura  $t$  (Wallin, 1985). 50
- Figura 3 – Tipos de fratura para espécimes sob tensão e deformação plana (Adaptada de Castro & Meggiolaro, 2009). 51
- Figura 4 – Zonas plásticas  $p_z(\theta)_M$  insensíveis à relação  $\sigma_r/S_Y$ , estimadas para o caso da placa de Griffith, carregada em modo I sob tensão plana  $(p_z(\theta)_{M,pl-\sigma}^{K_I})$ . 54
- Figura 5 – Zonas plásticas  $p_z(\theta)_M$  insensíveis à relação  $\sigma_r/S_Y$ , estimadas para o caso da placa de Griffith, carregada em modo I sob deformação plana  $(p_z(\theta)_{M,pl-\varepsilon}^{K_I})$ . 54
- Figura 6 – Zonas plásticas circulares de tamanhos “pequenos” e “grandes” que validam ou não o uso da MFLE (Castro & Meggiolaro, 2009). 55
- Figura 7 – Fluxograma do dimensionamento à fratura de uma peça que utiliza  $K$  para descrever a intensidade do campo de tensões. 56
- Figura 8 – Disco circular com uma trinca interna (adaptada de Fett, 1998). 77
- Figura 9 – Zonas plásticas estimadas para o exemplo do disco circular com uma trinca interna, em que o campo de tensões é obtido a partir de  $K_I$  mais  $T$ -stress, Eq. (26), sob condições de tensão plana  $(p_z(\theta)_{M,pl-\sigma}^{K_I+T})$ . 78
- Figura 10 – Zonas plásticas estimadas para o exemplo do disco circular com uma trinca interna, em que o campo de tensões é obtido a partir de  $K_I$  mais  $T$ -stress, Eq. (26), sob condições de deformação plana  $(p_z(\theta)_{M,pl-\varepsilon}^{K_I+T})$ . 79
- Figura 11 – Placa de Griffith uniaxialmente carregada. 81
- Figura 12 – Zonas plásticas  $p_z(\theta)_M$  estimadas para o caso da placa de Griffith sob tensão plana e com  $\sigma_r/S_Y = 0,2; 0,4; 0,6; 0,7$  e  $0,8$ . 81
- Figura 13 – Zonas plásticas  $p_z(\theta)_M$  estimadas para o caso da placa de Griffith sob deformação plana e com  $\sigma_r/S_Y = 0,2; 0,4; 0,6; 0,7$  e  $0,8$ . 82
- Figura 14 – Placa retangular semi infinita com uma trinca central. 83
- Figura 15 – Zonas plásticas estimadas para uma placa retangular semi infinita com

$a/W = 0,025$  e para a placa de Griffith sob tensão plana para  $\sigma_r/S_Y = 0,2; 0,4; 0,6; 0,7$  e  $0,8$ . 83

Figura 16 – Zonas plásticas estimadas para uma placa retangular semi infinita com  $a/W = 0,025$  e para a placa de Griffith sob deformação plana para  $\sigma_r/S_Y = 0,2; 0,4; 0,6; 0,7$  e  $0,8$ . 84

Figura 17 – Zonas plásticas estimadas para uma placa retangular semi infinita com  $a/W = 0,025; 0,05$  e  $0,091$  e para a placa de Griffith sob tensão plana para  $\sigma_r/S_Y = 0,2; 0,4; 0,6; 0,7$  e  $0,8$ . 84

Figura 18 – Zonas plásticas estimadas para uma placa retangular semi infinita com  $a/W = 0,025; 0,05$  e  $0,091$  e para a placa de Griffith sob deformação plana para  $\sigma_r/S_Y = 0,2; 0,4; 0,6; 0,7$  e  $0,8$ . 85

Figura 19 – Placa retangular com uma trinca central. 86

Figura 20 – Zonas plásticas  $p_z(\theta)_M$  estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob tensão plana com  $a/W = 0,1$  e  $0,2$  e com  $\sigma_r/S_Y = 0,2, 87$

Figura 21 – Zonas plásticas  $p_z(\theta)_M$  estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob tensão plana com  $a/W = 0,1$  e  $0,2$  e com  $\sigma_r/S_Y = 0,4, 88$

Figura 22 – Zonas plásticas  $p_z(\theta)_M$  estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob tensão plana com  $a/W = 0,1$  e  $0,2$  e com  $\sigma_r/S_Y = 0,5, 88$

Figura 23 – Zonas plásticas  $p_z(\theta)_M$  estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob tensão plana com  $a/W = 0,1$  e  $0,2$  e com  $\sigma_r/S_Y = 0,6, 89$

Figura 24 – Zonas plásticas  $p_z(\theta)_M$  estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob tensão plana com  $a/W = 0,1$  e  $0,2$  e com  $\sigma_r/S_Y = 0,7, 89$

Figura 25 – Zonas plásticas  $p_z(\theta)_M$  estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob tensão plana com  $a/W = 0,1$  e  $0,2$  e com  $\sigma_r/S_Y = 0,8, 90$

Figura 26 – Zonas plásticas  $p_z(\theta)_M$  estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob deformação plana com  $a/W = 0,1$  e  $0,2$  e com  $\sigma_r/S_Y = 0,2$ . 90

Figura 27 – Zonas plásticas  $p_z(\theta)_M$  estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob deformação plana com  $a/W = 0,1$  e  $0,2$  e com  $\sigma_r/S_Y = 0,4$ . 91

Figura 28 – Zonas plásticas  $p_z(\theta)_M$  estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob deformação plana com  $a/W = 0,1$  e  $0,2$  e com

$\sigma_r/S_Y = 0,5$ . 91

Figura 29 – Zonas plásticas  $p_z(\theta)_M$  estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob deformação plana com  $a/W = 0,1$  e  $0,2$  e com  $\sigma_r/S_Y = 0,6$ . 92

Figura 30 – Zonas plásticas  $p_z(\theta)_M$  estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob deformação plana com  $a/W = 0,1$  e  $0,2$  e com  $\sigma_r/S_Y = 0,7$ . 92

Figura 31 – Zonas plásticas  $p_z(\theta)_M$  estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob deformação plana com  $a/W = 0,1$  e  $0,2$  e com  $\sigma_r/S_Y = 0,8$ . 93

Figura 32 – Convergência das estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wrg}$  sob tensão plana para  $\sigma_r/S_Y = 0,2$ . 98

Figura 33 – Convergência das estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wrg}$  sob tensão plana para  $\sigma_r/S_Y = 0,4$ . 99

Figura 34 – Convergência das estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wrg}$  sob tensão plana para  $\sigma_r/S_Y = 0,5$ . 99

Figura 35 – Convergência das estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wrg}$  sob tensão plana para  $\sigma_r/S_Y = 0,6$ . 100

Figura 36 – Convergência das estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wrg}$  sob tensão plana para  $\sigma_r/S_Y = 0,7$ . 100

Figura 37 – Convergência das estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wrg}$  sob tensão plana para  $\sigma_r/S_Y = 0,8$ . 101

Figura 38 – Convergência das estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wrg}$  sob deformação plana para  $\sigma_r/S_Y = 0,2$ . 101

Figura 39 – Convergência das estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wrg}$  sob deformação plana para  $\sigma_r/S_Y = 0,4$ . 102

Figura 40 – Convergência das estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wrg}$  sob deformação plana para  $\sigma_r/S_Y = 0,5$ . 102

Figura 41 – Convergência das estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wrg}$

- sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ . 103
- Figura 42 – Convergência das estimativas  $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $pz(\theta)_M^{Wrg}$   
sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ . 103
- Figura 43 – Convergência das estimativas  $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $pz(\theta)_M^{Wrg}$   
sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ . 104
- Figura 44 – Convergência das estimativas  $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $pz(\theta)_M^{Wrg}$   
sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ . 105
- Figura 45 – Convergência das estimativas  $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $pz(\theta)_M^{Wrg}$   
sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ . 106
- Figura 46 – Convergência das estimativas  $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $pz(\theta)_M^{Wrg}$   
sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ . 106
- Figura 47 – Convergência das estimativas  $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $pz(\theta)_M^{Wrg}$   
sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ . 107
- Figura 48 – Convergência das estimativas  $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $pz(\theta)_M^{Wrg}$   
sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ . 107
- Figura 49 – Convergência das estimativas  $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $pz(\theta)_M^{Wrg}$   
sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ . 108
- Figura 50 – Convergência das estimativas  $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $pz(\theta)_M^{Wrg}$   
sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ . 109
- Figura 51 – Convergência das estimativas 109
- Figura 52 – Convergência das estimativas  $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $pz(\theta)_M^{Wrg}$   
sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ . 110
- Figura 53 – Convergência das estimativas  $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $pz(\theta)_M^{Wrg}$   
sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ . 110
- Figura 54 – Convergência das estimativas  $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $pz(\theta)_M^{Wrg}$   
sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ . 111
- Figura 55 – Convergência das estimativas  $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $pz(\theta)_M^{Wrg}$   
sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ . 111

Figura 56 – Comparação das estimativas  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ ,  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$  e  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$  sob tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ . 113

Figura 57 – Comparação das estimativas  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ ,  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$  e  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$  sob tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ . 114

Figura 58 – Comparação das estimativas  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ ,  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$  e  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$  sob tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ . 114

Figura 59 – Comparação das estimativas  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ ,  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$  e  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$  sob tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ . 115

Figura 60 – Comparação das estimativas  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ ,  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$  e  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$  sob tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ . 116

Figura 61 – Comparação das estimativas  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ ,  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$  e  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$  sob tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ . 116

Figura 62 – Comparação das estimativas  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ ,  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$  e  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$  sob deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ . 117

Figura 63 – Comparação das estimativas  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ ,  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$  e  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$  sob deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ . 118

Figura 64 – Comparação das estimativas  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ ,  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$  e  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$  sob deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ . 118

Figura 65 – Comparação das estimativas  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ ,  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$  e  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$  sob deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ . 119

Figura 66 – Comparação das estimativas  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ ,  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$  e  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$  sob deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ . 120

Figura 67 – Comparação das estimativas  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ ,  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$  e  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$  sob deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ . 120

Figura 68 – Comparação entre a componente  $\sigma_{yy}(x, 0)$  gerada por  $K_I$  e a componente  $\sigma_{yy}(x-x_1, 0)$  gerada por  $K_I$  e transladada de  $x_1$  (adaptada de Castro & Meggiolaro, 2009). 125

- Figura 69 – Comparação entre a componente  $\sigma_{yy}(x, 0)$  gerada pela função de tensão de Westergaard e a componente  $\sigma_{yy}(r-r_1, 0)$  gerada pela função de tensão de Westergaard e transladada de  $r_1$  (adaptada de Rodriguez, 2007).126
- Figura 70 – Mostra os comportamentos: (a) da componente  $\sigma_{xx}(r,0)$ , (b) da componente  $\sigma_{yy}(r,0)$  e (c) da componente  $\sigma_{xy}(r,0)$  na direção paralela ao plano da trinca que são geradas pelo campo de tensões gerado pela função de tensão de Westergaard. 128
- Figura 71 – Mostra os comportamentos: (a) da componente  $\sigma_{xx}(r,0)$ , (b) da componente  $\sigma_{yy}(r,0)$  e (c) da componente  $\sigma_{xy}(r,0)$  na direção paralela ao plano da trinca que são geradas pelo campo de tensões gerado pela função de tensão de Westergaard. 130
- Figura 72 – Todas as propostas de correção das estimativas  $pz(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas lineares elásticas truncadas sob tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  para o caso da placa de Griffith. 133
- Figura 73 – Todas as propostas de correção das estimativas  $pz(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas lineares elásticas truncadas sob tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  para o caso da placa de Griffith. 133
- Figura 74 – Todas as propostas de correção das estimativas  $pz(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas lineares elásticas truncadas sob tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$  para o caso da placa de Griffith. 134
- Figura 75 – Todas as propostas de correção das estimativas  $pz(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas lineares elásticas truncadas sob tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  para o caso da placa de Griffith. 134
- Figura 76 – Todas as propostas de correção das estimativas  $pz(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas lineares elásticas truncadas sob tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  para o caso da placa de Griffith. 135
- Figura 77 – Todas as propostas de correção das estimativas  $pz(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas lineares elásticas truncadas sob tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  para o caso da placa de Griffith. 135
- Figura 78 – Todas as propostas de correção das estimativas  $pz(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas LE truncadas sob deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  para o

- caso da placa de Griffith. 136
- Figura 79 – Todas as propostas de correção das estimativas  $pz(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas LE truncadas sob deformação plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,4$  para o caso da placa de Griffith. 136
- Figura 80 – Todas as propostas de correção das estimativas  $pz(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas LE truncadas sob deformação plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,5$  para o caso da placa de Griffith. 137
- Figura 81 – Todas as propostas de correção das estimativas  $pz(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas LE truncadas sob deformação plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,6$  para o caso da placa de Griffith. 137
- Figura 82 – Todas as propostas de correção das estimativas  $pz(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas LE truncadas sob deformação plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,7$  para o caso da placa de Griffith. 138
- Figura 83 – Todas as propostas de correção das estimativas  $pz(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas LE truncadas sob deformação plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,8$  para o caso da placa de Griffith. 138
- Figura 84 – Comportamento da componente de tensão  $\sigma_{yy}$  e das estimativas  $pz_M^{Wtg}$ ,  $pz_M^{Wtg+eqHard}$  e  $pz_M^{Wtg+eq}$  para um determinado valor de  $\theta$ . 141
- Figura 85 – Simulação da fase plástica de uma material que estabelece uma relação entre tensão e a coordenada polar  $r$  para vários valores de  $m$  e  $\alpha$ . 142
- Figura 86 – Determinação da estimativa  $pz_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma,r}$  para um determinado valor de  $\bar{\theta}$  a partir da igualdade entre as áreas em azul pontilhado e  $A_{Total}$ , em que  $A_{Total} = A_{Linear} + A_{NaoLinear}$ . 143
- Figura 87 – Comportamento da equação de Ramberg-Osgood para  $\alpha_e = 0,1$  e  $\alpha_e = 0,3$ . 145
- Figura 88 – Comportamento da equação de Ramberg-Osgood sem a parte elástica para  $\alpha_e = 0,1$  e  $\alpha_e = 0,3$ . 145
- Figura 89 – O ajuste da equação de Ramberg-Osgood para  $\alpha_e = 0,1$ . 146
- Figura 90 – O ajuste da equação de Ramberg-Osgood para  $\alpha_e = 0,3$ . 146
- Figura 91 – Comparação entre as  $pz$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $pz$  corrigidas sob estado plano de tensão com  $\sigma_r/S_Y$

- = 0,2. 147
- Figura 92 – Comparação entre as  $p_z$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $p_z$  corrigidas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ . 148
- Figura 93 – Comparação entre as  $p_z$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $p_z$  corrigidas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ . 148
- Figura 94 – Comparação entre as  $p_z$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $p_z$  corrigidas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ . 149
- Figura 95 – Comparação entre as  $p_z$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $p_z$  corrigidas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ . 149
- Figura 96 – Comparação entre as  $p_z$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $p_z$  corrigidas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ . 150
- Figura 97 – Comparação entre as  $p_z$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $p_z$  corrigidas sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ . 150
- Figura 98 – Comparação entre as  $p_z$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $p_z$  corrigidas sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ . 151
- Figura 99 – Comparação entre as  $p_z$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $p_z$  corrigidas sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ . 151
- Figura 100 – Comparação entre as  $p_z$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $p_z$  corrigidas sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ . 152
- Figura 101 – Comparação entre as  $p_z$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $p_z$  corrigidas sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ . 152
- Figura 102 – Comparação entre as  $p_z$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $p_z$  corrigidas sob estado plano de deformação com

- $\sigma_r/S_Y = 0,8$ . 153
- Figura 103 – Determinação do ponto que satisfaz  $\sigma_{Mises}(\sigma_n, r, \theta) < S_Y$  (Lopes *et al*, 2009). 156
- Figura 104 – Determinação do ponto que satisfaz  $\sigma_{Mises}(\sigma_n, r, \theta) - S_Y < tol$  (Lopes *et al*, 2009). 156
- Figura 105 – Trinca curva genérica modelada como uma sucessão de elementos retos de trinca (Lopes, 2002). 158
- Figura 106 – Representação gráfica das componentes de tensão (a)  $\sigma_{yy}$  e (b)  $\sigma_{xx}$  (Lopes, 2002). 158
- Figura 107 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de tensão para o caso da placa de Griffith. 160
- Figura 108 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de deformação para o caso da placa de Griffith. 161
- Figura 109 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de tensão com  $\sigma_r/S_Y = 0,2$  para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central. 162
- Figura 110 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de tensão com  $\sigma_r/S_Y = 0,4$  para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central. 163
- Figura 111 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de tensão com  $\sigma_r/S_Y = 0,5$  para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central. 163
- Figura 112 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de tensão com  $\sigma_r/S_Y = 0,6$  para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central. 164
- Figura 113 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de

Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central. 164

Figura 114 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central. 165

Figura 115 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central. 165

Figura 116 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central. 166

Figura 117 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$  para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central. 166

Figura 118 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central. 167

Figura 119 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central. 167

Figura 120 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central. 168

Figura 122 – Efeito da relação  $\sigma_n/S_Y$  nas zonas plásticas sob tensão plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com  $a/W =$

- 0,05 para (a) ponta 1 e (b) ponta 2. 170
- Figura 123 – Efeito da relação  $\sigma_r/S_Y$  nas zonas plásticas sob tensão plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com  $a/W = 0,1$  para (a) ponta 1 e (b) ponta 2. 170
- Figura 124 – Efeito da relação  $\sigma_r/S_Y$  nas zonas plásticas sob tensão plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com  $a/W = 0,4$  para (a) ponta 1 e (b) ponta 2. 171
- Figura 125 – Efeito da relação  $\sigma_r/S_Y$  nas zonas plásticas sob deformação plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com  $a/W = 0,05$  para (a) ponta 1 e (b) ponta 2. 172
- Figura 126 – Efeito da relação  $\sigma_r/S_Y$  nas zonas plásticas sob deformação plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com  $a/W = 0,1$  para (a) ponta 1 e (b) ponta 2. 172
- Figura 127 – Efeito da relação  $\sigma_r/S_Y$  nas zonas plásticas sob deformação plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com  $a/W = 0,4$  para (a) ponta 1 e (b) ponta 2. 173
- Figura 128 – Efeito da relação  $a/W$  nas zonas plásticas sob tensão plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com  $\sigma_r/S_Y = 0,2$  para (a) ponta 1 e (b) ponta 2. 173
- Figura 129 – Efeito da relação  $a/W$  nas zonas plásticas sob tensão plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com  $\sigma_r/S_Y = 0,4$  para (a) ponta 1 e (b) ponta 2. 174
- Figura 130 – Efeito da relação  $a/W$  nas zonas plásticas sob tensão plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com  $\sigma_r/S_Y = 0,5$  para (a) ponta 1 e (b) ponta 2. 174
- Figura 131 – Efeito da relação  $a/W$  nas zonas plásticas sob tensão plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com  $\sigma_r/S_Y = 0,6$  para (a) ponta 1 e (b) ponta 2. 175
- Figura 132 – Efeito da relação  $a/W$  nas zonas plásticas sob tensão plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com  $\sigma_r/S_Y = 0,7$  para (a) ponta 1 e (b) ponta 2. 175
- Figura 133 – Efeito da relação  $a/W$  nas zonas plásticas sob tensão plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com  $\sigma_r/S_Y =$

0,8 para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.	176
Figura 134 – Efeito da relação $a/W$ nas zonas plásticas sob deformação plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com $\sigma_n/S_Y = 0,2$ para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.	176
Figura 135 – Efeito da relação $a/W$ nas zonas plásticas sob deformação plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com $\sigma_n/S_Y = 0,4$ para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.	177
Figura 136 – Efeito da relação $a/W$ nas zonas plásticas sob deformação plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com $\sigma_n/S_Y = 0,5$ para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.	177
Figura 137 – Efeito da relação $a/W$ nas zonas plásticas sob deformação plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com $\sigma_n/S_Y = 0,6$ para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.	178
Figura 138 – Efeito da relação $a/W$ nas zonas plásticas sob deformação plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com $\sigma_n/S_Y = 0,7$ para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.	178
Figura 139 – Efeito da relação $a/W$ nas zonas plásticas sob deformação plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com $\sigma_n/S_Y = 0,8$ para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.	179
Figura 140 – Espécime SENT (adaptada de Anderson, 1995).	180
Figura 141 – Espécime SENB (adaptada de Anderson, 1995).	181
Figura 142 – Espécime CCT (adaptada de Anderson, 1995).	181
Figura 143 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,2$ .	182
Figura 144 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .	182
Figura 145 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .	183
Figura 146 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,6$ .	183
Figura 147 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,7$ .	184
Figura 148 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo	

MEF sob tensão plana para $\sigma_n/S_Y = 0,8$ .	184
Figura 149 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,2$ .	185
Figura 150 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .	185
Figura 151 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .	186
Figura 152 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,6$ .	186
Figura 153 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,7$ .	187
Figura 154 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob deformação plana para $\sigma_n/S_Y = 0,8$ .	187
Figura 155 – Zonas plásticas para o espécime CCT obtidas pelo MEF sob tensão plana.	188
Figura 156 – Zonas plásticas para o espécime CCT obtidas pelo MEF sob deformação plana.	188
Figura 157 – Zonas plásticas para o espécime SENT obtidas pelo MEF sob tensão plana.	189
Figura 158 – Zonas plásticas para o espécime SENT obtidas pelo MEF sob deformação plana.	189
Figura 159 – Zonas plásticas para o espécime SENB obtidas pelo MEF sob tensão plana.	190
Figura 160 – Zonas plásticas para o espécime SENB obtidas pelo MEF sob deformação plana.	190
Figura 161 – Subdivisão do intervalo de integração numérica.	193
Figura 162 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas pela componente $\sigma_{yy}$ obtidas numericamente e as zonas plásticas corrigidas pela componente $\sigma_{yy}$ obtidas analiticamente para o caso sob tensão plana.	194
Figura 163 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas pela componente $\sigma_{Mises}$ obtidas numericamente e as zonas plásticas corrigidas por $\sigma_{Mises}$ obtidas analiticamente para o caso sob tensão plana.	194
Figura 164 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas pela componente $\sigma_{yy}$	

- obtidas numericamente e as zonas plásticas corrigidas pela componente  $\sigma_{yy}$  obtidas analiticamente para o caso em deformação plana. 195
- Figura 165 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas pela componente  $\sigma_{Mises}$  obtidas numericamente e as zonas plásticas corrigidas por  $\sigma_{Mises}$  obtidas analiticamente para o caso em deformação plana. 195
- Figura 166 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas por  $\sigma_{Mises}$  obtidas numericamente e analiticamente para o caso sob tensão plana com  $a/W = 0,05$ . 196
- Figura 167 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas por  $\sigma_{yy}$  obtidas numericamente e analiticamente para o caso sob tensão plana com  $a/W = 0,05$ . 197
- Figura 168 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas por  $\sigma_{Mises}$  obtidas numericamente e analiticamente para o caso sob tensão plana com  $a/W = 0,1$ . 197
- Figura 169 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas por  $\sigma_{yy}$  obtidas numericamente e analiticamente para o caso sob tensão plana com  $a/W = 0,1$ . 198
- Figura 170 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas por  $\sigma_{Mises}$  obtidas numericamente e analiticamente para o caso em tensão plana com  $a/W = 0,18$ . 198
- Figura 171 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas por  $\sigma_{yy}$  obtidas numericamente e as analiticamente para o caso sob tensão plana com  $a/W = 0,18$ . 199
- Figura 172 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas por  $\sigma_{Mises}$  obtidas numericamente e analiticamente para o caso em deformação plana com  $a/W = 0,05$ . 199
- Figura 173 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas por  $\sigma_{yy}$  obtidas numericamente e analiticamente para o caso em deformação plana com  $a/W = 0,05$ . 200
- Figura 174 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas por  $\sigma_{Mises}$  obtidas numericamente e analiticamente para o caso em deformação plana com  $a/W = 0,10$ . 200
- Figura 175 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas por  $\sigma_{yy}$  obtidas

numericamente e analiticamente para o caso em deformação plana com  $a/W = 0,10$ . 201

Figura 176 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas por  $\sigma_{Mises}$  obtidas numericamente e analiticamente para o caso em deformação plana com  $a/W = 0,18$ . 201

Figura 177 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas por  $\sigma_{yy}$  obtidas numericamente e analiticamente para o caso em deformação plana com  $a/W = 0,18$ . 202

Figura 178 – Efeito de  $\sigma_r/S_Y$  nas zonas plásticas corrigidas numericamente para  $a/W = 0,05$  sob tensão plana para (a) ponta 1 considerando  $\sigma_{Mises}$ ; (b) ponta 2 considerando  $\sigma_{Mises}$ ; (c) ponta 1 considerando  $\sigma_{yy}$  e (d) ponta 2 considerando  $\sigma_{yy}$ . 203

Figura 179 – Efeito de  $\sigma_r/S_Y$  nas zonas plásticas corrigidas numericamente para  $a/W = 0,10$  em tensão plana para (a) ponta 1 considerando  $\sigma_{Mises}$ ; (b) ponta 2 considerando  $\sigma_{Mises}$ ; (c) ponta 1 considerando  $\sigma_{yy}$  e (d) ponta 2 considerando  $\sigma_{yy}$ . 204

Figura 180 – Efeito de  $\sigma_r/S_Y$  nas zonas plásticas corrigidas numericamente para  $a/W = 0,40$  em tensão plana para (a) ponta 1 considerando  $\sigma_{Mises}$ ; (b) ponta 2 considerando  $\sigma_{Mises}$ ; (c) ponta 1 considerando  $\sigma_{yy}$  e (d) ponta 2 considerando  $\sigma_{yy}$ . 205

Figura 181 – Efeito de  $\sigma_r/S_Y$  nas zonas plásticas corrigidas numericamente para  $a/W = 0,05$  em deformação plana para (a) ponta 1 considerando  $\sigma_{Mises}$ ; (b) ponta 2 considerando  $\sigma_{Mises}$ ; (c) ponta 1 considerando  $\sigma_{yy}$  e (d) ponta 2 considerando  $\sigma_{yy}$ . 206

Figura 182 – Efeito de  $\sigma_r/S_Y$  nas zonas plásticas corrigidas numericamente para  $a/W = 0,10$  em deformação plana para (a) ponta 1 considerando  $\sigma_{Mises}$ ; (b) ponta 2 considerando  $\sigma_{Mises}$ ; (c) ponta 1 considerando  $\sigma_{yy}$  e (d) ponta 2 considerando  $\sigma_{yy}$ . 207

Figura 183 – Efeito de  $\sigma_r/S_Y$  nas zonas plásticas corrigidas numericamente para  $a/W = 0,40$  em deformação plana para (a) ponta 1 considerando  $\sigma_{Mises}$ ; (b) ponta 2 considerando  $\sigma_{Mises}$ ; (c) ponta 1 considerando  $\sigma_{yy}$  e (d) ponta 2 considerando  $\sigma_{yy}$ . 208

- Figura 184 – Modelo multilinear elástico utilizado pelo programa ANSYS (adaptada de ANSYS, 2001). 211
- Figura 185 – Modelo bilinear elástico utilizado. 211
- Figura 186 – Gráfico que indica a convergência da análise feita pelo ANSYS (2001) – adaptada de ANSYS (2001). 212
- Figura 187 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ , com  $a/W = 0,10$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados. 214
- Figura 188 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ , com  $a/W = 0,15$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados. 214
- Figura 189 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ , com  $a/W = 0,10$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados. 215
- Figura 190 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ , com  $a/W = 0,15$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados. 215
- Figura 191 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ , com  $a/W = 0,10$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados. 216
- Figura 192 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ , com  $a/W = 0,15$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados. 216
- Figura 193 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ , com  $a/W = 0,10$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados. 217
- Figura 194 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ , com  $a/W = 0,15$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados. 217
- Figura 195 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ , com  $a/W = 0,10$  e

- com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados. 218
- Figura 196 – Estimativas numérica feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ , com  $a/W = 0,15$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados. 218
- Figura 197 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ , com  $a/W = 0,10$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados. 219
- Figura 198 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ , com  $a/W = 0,15$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados. 219
- Figura 199 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ , com  $a/W = 0,10$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados. 220
- Figura 200 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ , com  $a/W = 0,15$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados. 220
- Figura 201 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ , com  $a/W = 0,10$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados. 221
- Figura 202 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ , com  $a/W = 0,15$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados. 221
- Figura 203 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ , com  $a/W = 0,10$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados. 222
- Figura 204 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ , com  $a/W = 0,15$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados. 222
- Figura 205 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ , com  $a/W = 0,10$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados. 223

Figura 206 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das

$p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ , com  $a/W = 0,15$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados. 223

Figura 207 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das

$p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ , com  $a/W = 0,10$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados. 224

Figura 208 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das

$p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ , com  $a/W = 0,15$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados. 224

Figura 209 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das

$p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ , com  $a/W = 0,10$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados. 225

Figura 210 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das

$p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ , com  $a/W = 0,15$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados. 225

Figura 211 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 99,9\%E$  e  $H = 1\%E$  e zonas

plásticas  $p z_M^{LE-MHEC}$  e  $p z_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de tensão para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  e com  $a/W = 0,10$  e  $a/W = 0,15$ . 227

Figura 212 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 99,9\%E$  e  $H = 1\%E$  e zonas

plásticas  $p z_M^{LE-MHEC}$  e  $p z_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de tensão para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  e com  $a/W = 0,10$  e  $a/W = 0,15$ . 227

Figura 213 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 99,9\%E$  e  $H = 1\%E$  e zonas

plásticas  $p z_M^{LE-MHEC}$  e  $p z_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de tensão para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$  e com  $a/W = 0,10$  e  $a/W = 0,15$ . 228

Figura 214 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 99,9\%E$  e  $H = 1\%E$  e zonas

plásticas  $p z_M^{LE-MHEC}$  e  $p z_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de tensão para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  e com  $a/W = 0,10$  e  $a/W = 0,15$ . 228

Figura 215 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 99,9\%E$  e  $H = 1\%E$  e zonas

plásticas  $p z_M^{LE-MHEC}$  e  $p z_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de tensão para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  e com  $a/W = 0,10$  e  $a/W = 0,15$ . 229

Figura 216 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 99,9\%E$  e  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $pz_M^{LE-MHEC}$  e  $pz_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de tensão para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  e com  $a/W = 0,10$  e  $a/W = 0,15$ . 229

Figura 217 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 99,9\%E$  e  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $pz_M^{LE-MHEC}$  e  $pz_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de deformação para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  e com  $a/W = 0,10$  e  $a/W = 0,15$ . 230

Figura 218 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 99,9\%E$  e  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $pz_M^{LE-MHEC}$  e  $pz_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de deformação para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  e com  $a/W = 0,10$  e  $a/W = 0,15$ . 230

Figura 219 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 99,9\%E$  e  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $pz_M^{LE-MHEC}$  e  $pz_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de deformação para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$  e com  $a/W = 0,10$  e  $a/W = 0,15$ . 231

Figura 220 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 99,9\%E$  e  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $pz_M^{LE-MHEC}$  e  $pz_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de deformação para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  e com  $a/W = 0,10$  e  $a/W = 0,15$ . 231

Figura 221 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 99,9\%E$  e  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $pz_M^{LE-MHEC}$  e  $pz_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de deformação para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  e com  $a/W = 0,10$  e  $a/W = 0,15$ . 232

Figura 222 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 99,9\%E$  e  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $pz_M^{LE-MHEC}$  e  $pz_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de deformação para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  e com  $a/W = 0,10$  e  $a/W = 0,15$ . 232

Figura 223 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pz_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,05$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2. 234

Figura 224 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pz_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2. 235

Figura 225 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das

$p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,05$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.  
235

Figura 226 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.  
236

Figura 227 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,05$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.  
236

Figura 228 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.  
237

Figura 229 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,05$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.  
237

Figura 230 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.  
238

Figura 231 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,05$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.  
238

Figura 232 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.  
239

Figura 233 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,05$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

239

Figura 234 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

240

Figura 235 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,05$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

240

Figura 236 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

241

Figura 237 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,05$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

241

Figura 238 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

242

Figura 239 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,05$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

242

Figura 240 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para

(b) ponta 2. 243

Figura 241 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das

$p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,05$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2. 243

Figura 242 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das

$p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2. 244

Figura 243 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das

$p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,05$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2. 244

Figura 244 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das

$p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2. 245

Figura 245 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das

$p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,05$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2. 245

Figura 246 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das

$p z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2. 246

Figura 247 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 1\%E$  e zonas plásticas

$p z_M^{LE-MHEC}$  e  $p z_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de tensão para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  e com  $a/W = 0,05$  e  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2. 248

Figura 248 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 1\%E$  e zonas plásticas

$p z_M^{LE-MHEC}$  e  $p z_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de tensão para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  e com  $a/W = 0,05$  e  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2. 248

Figura 249 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 1\%E$  e zonas plásticas

$p z_M^{LE-MHEC}$  e  $p z_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de tensão para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$  e com  $a/W = 0,05$  e  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2. 249

Figura 250 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 1\%E$  e zonas plásticas

$p z_M^{LE-MHEC}$  e  $p z_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de tensão para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  e com  $a/W = 0,05$  e  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2. 249

Figura 251 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 1\%E$  e zonas plásticas

$p z_M^{LE-MHEC}$  e  $p z_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de tensão para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  e com  $a/W = 0,05$  e  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2. 250

Figura 252 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 1\%E$  e zonas plásticas

$p z_M^{LE-MHEC}$  e  $p z_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de tensão para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  e com  $a/W = 0,05$  e  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2. 250

Figura 253 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 1\%E$  e zonas plásticas

$p z_M^{LE-MHEC}$  e  $p z_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de deformação para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  e com  $a/W = 0,05$  e  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2. 251

Figura 254 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 1\%E$  e zonas plásticas

$p z_M^{LE-MHEC}$  e  $p z_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de deformação para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  e com  $a/W = 0,05$  e  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2. 251

Figura 255 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 1\%E$  e zonas plásticas

$p z_M^{LE-MHEC}$  e  $p z_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de deformação para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$  e com  $a/W = 0,05$  e  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2. 252

Figura 256 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 1\%E$  e zonas plásticas

$p z_M^{LE-MHEC}$  e  $p z_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de deformação para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  e com  $a/W = 0,05$  e  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2. 252

Figura 257 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 1\%E$  e zonas plásticas

$p z_M^{LE-MHEC}$  e  $p z_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de deformação para

$\sigma_n/S_Y = 0,7$  e com  $a/W = 0,05$  e  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2. 253

Figura 258 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $p_z_M^{LE-MHEC}$  e  $p_z_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de deformação para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  e com  $a/W = 0,05$  e  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2. 253

Figura A.1 – Divisão do modelo completo do espécime CCT em subdomínios com diferentes graus de refinamento da malha. 273

Figura A.2 – Resposta nodal da tensão equivalente de Mises com a tensão máxima limitada a tensão de escoamento em que se visualiza a zona plástica na ponta da trinca para o modelo do espécime CCT sob tensão plana. 273

Figura A.3 – Uso do programa DEMO-IMO após se delimitar a fronteira de um subdomínio adjacente à ponta da trinca em que se conhece previamente as suas dimensões. 274

Figura A.4 – Obtenção da zona plástica a partir do uso do programa DEMO-IMO. 275

Figura A.5 – Obtenção da zona plástica a partir do uso do programa DEMO-IMO. 276

Figura A.6 – Detalhe de três dos cinco níveis de refinamento utilizados nas malhas de elementos finitos para o estado de tensão plana, com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  e para  $a/W = 0,10$ , em que (a) mostra o menor nível de refinamento usado, (b) mostra um nível de refinamento intermediário e (c) mostra o maior nível de refinamento usado na estimativa das zonas plásticas. 277

Figura A.7 – Zonas plásticas lineares elásticas estimadas pelo MHEC e pelo MEF sob estado de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  e com  $a/W = 0,10$  para o exemplo do espécime CCT para o primeiro nível de refinamento da malha de elementos finitos. 278

Figura A.8 – Zonas plásticas lineares elásticas estimadas pelo MHEC e pelo MEF sob estado de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  e com  $a/W = 0,10$  para o exemplo do espécime CCT para o segundo nível de refinamento da malha de elementos finitos. 278

Figura A.9 – Zonas plásticas lineares elásticas estimadas pelo MHEC e pelo MEF sob estado de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  e com  $a/W = 0,10$  para o exemplo

do espécime CCT para o terceiro nível de refinamento da malha de elementos finitos. 279

Figura A.10 – Zonas plásticas lineares elásticas estimadas pelo MHEC e pelo MEF para um estado de tensão plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,4$  e com  $a/W = 0,10$  para o exemplo do espécime CCT para o quarto nível de refinamento da malha de elementos finitos. 280

Figura A.11 – Zonas plásticas lineares elásticas estimadas pelo MHEC e pelo MEF sob estado de tensão plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,4$  e com  $a/W = 0,10$  para o exemplo do espécime CCT para o quinto nível de refinamento da malha de elementos finitos. 280

Figura A.12 – Programa desenvolvido em Mathcad para calcular os valores da geometria e da carga dos espécimes CCT, SENT e SENB de tal maneira que se mantenha fixo os valores de  $K_I$  e de  $\sigma_r/S_Y$ . 283

## Lista de tabelas

Tabela 1 – Valores de  $F(a/R)$  dependentes da relação  $a/R$  (Tada *et al*, 1985). 78

Tabela 2 – Valores de  $\gamma$  dependentes da relação  $a/W$  e  $H/W$  (Fett, 1998). 87

Tabela 3 – Valores de  $F(a/W)$  dependentes da relação  $a/W$  (Tada *et al*, 1985). 87

## Lista de símbolos

$K$	Fator de Intensidade de Tensão.
ASTM	American Society for Testing and Materials.
$K_I$	Fator de Intensidade de Tensão em modo I de trincamento.
$K_{II}$	Fator de Intensidade de Tensão em modo II de trincamento.
$K_{III}$	Fator de Intensidade de Tensão em modo III de trincamento.
$\sigma_{xx}$ , $\sigma_{yy}$ , $\sigma_{zz}$ , e $\sigma_{xy}$	Componentes de tensão escritas em coordenadas Cartesianas.
$x$ e $y$	Sistema Cartesiano de coordenadas.
$r$ e $\theta$	Sistema Polar de coordenadas.
$\sigma_n$	Tensão nominal.
$a$	Comprimento ou metade do comprimento de trinca.
$K_{IC}$	Medida de tenacidade para peças que estejam sob estado plano de deformação.
$S_Y$	Tensão de escoamento do material.
$\sigma_n/S_Y$	Relação entre a tensão nominal e a tensão de escoamento.
$T$	Tenacidade.
MF	Mecânica da Fratura.
MFLE	Mecânica da Fratura Linear Elástica.
MFEP	Mecânica da Fratura Elastoplástica.
$J_{IC}$	Medida de tenacidade sob deformação plana em que não vale a MFLE.
$K_{JIC}$	Medida de tenacidade sob deformação plana obtida a partir de valores por $J_{IC}$
$E_1$	Módulo de elasticidade longitudinal que depende do estado de tensão estudado, podendo ser de tensão ou de deformação plana.
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal.
$\nu$	Coefficiente de Poisson do material.
CT ou CS	Compact Specimen.
DC(T)	Disk-Shaped Compact Specimens.
SENB	Single Edge Notched Bend.
SENB	Single Edge Notched Bend.

CCT	Center Cracked Tension.
$t$	Espessura da peça.
$K_C(t)$	Valor empírico da tenacidade que é expresso como função de $t$ .
$t_{\min}$	Valor de $t$ mínimo onde $K_C(t)$ se torna constante e igual a $K_{IC}$ .
$t_C$	Comprimento característico da peça.
$pz(\theta)$	Zonas plásticas estimadas por um determinado critério de escoamento.
$pz(\theta)_M$	Zonas plásticas estimadas pelo critério de escoamento de Mises.
EPE	Estado de escoamento em pequena escala.
EGE	Estado de escoamento em grande escala.
$\sigma_{Mises}$	Tensão equivalente de Mises.
$pz(\theta)_{M,pl-\sigma}^K$	Zonas plásticas estimadas para um estado plano de tensão e obtidas pelo campo de tensões originado a partir de $K_I$ em que se usa a tensão equivalente de Mises como critério de escoamento.
$pz(\theta)_{M,pl-\epsilon}^K$	Zonas plásticas estimadas para um estado plano de deformação e obtidas pelo campo de tensões originado a partir de $K_I$ em que se usa a tensão equivalente de Mises como critério de escoamento.
$pz0$	Zona plástica de referência obtida para $\theta = 0^\circ$ .
$K_t$	Fator de Concentração de Tensão.
$J$	Integral $J$ .
$T-stress$	Termo constante de ordem zero gerado pela série de Williams.
$\rho$	Raio de ponta da trinca.
Ti	Titânio.
Al	Alumínio.
$\delta W$	Incremento de trabalho.
$\Delta K$	Varição de $K$ .
$\delta E_D$	Varição da energia de deformação.
$\delta A$	Incremento de área de trinca.
$E_P$	Energia Pontencial.
$\mathcal{G}$	Taxa de alívio de energia.
$Z$	Função de tensão de Westergaard.
$z$ e $\bar{z}$	Número complexo e seu conjugado.

$Z'$	Derivada da função de tensão de Westergaard em relação ao número complexo ( $z$ ).
$\sigma_0$	Tensão correspondente à deformação máxima do material.
CTOD	Crack Tip Open Displacement.
$z_{p_c}$	Zonas plástica crítica que segundo a ASTM valida a MFLE.
MEF	Método dos Elementos Finitos.
MEC	Método dos Elementos de Contorno.
MHEC	Método Híbrido dos Elementos de Contorno.
$\sigma_{ij}$	Componentes do campo de tensões escritas em notação indicial.
$\varepsilon_{ij}$	Componentes do campo de deformações escritas em notação indicial.
$\alpha$ e $m$	Parâmetros do modelo de encruamento $p z_M^{Wig+eqHardExp-\sigma,r}$ .
$f_{ij}(\theta)$	Função da coordenada $\theta$ para cada campo de tensões.
$k$	Parâmetro que define a intensidade biaxial do carregamento.
$\Phi$	Função de tensão.
$n_e$	Expoente de encruamento do material.
$\alpha_e$	Coefficiente de encruamento do material.

# 1 Introdução

Este trabalho estuda os limites de validade dos parâmetros que caracterizam os campos de tensões lineares elásticos na Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE). A Mecânica da Fratura (MF) tem como principais objetivos quantificar a maior carga que uma estrutura trincada pode suportar em serviço; identificar a maior trinca tolerável por uma estrutura em serviço e quantificar a taxa de propagação de trincas e a vida residual das estruturas trincadas sob cargas reais de serviço (Castro & Meggiolaro, 2009). O parâmetro que define a validade da MFLE ou da Mecânica da Fratura Elastoplástica (MFEP) é o tamanho da zona plástica formada à frente da ponta das trincas. Por esse fato, este trabalho estuda os limites de validade dos parâmetros da MFLE a partir da estimativa da forma e do tamanho das zonas plásticas geradas pelos campos de tensões lineares elásticos.

Inicialmente o Fator de Intensidade de Tensão ( $K$ ) foi considerado como o único parâmetro responsável por caracterizar o campo de tensões da MFLE para estruturas sob baixos níveis de carregamento (Irwin, 1957). Há uma grande quantidade de problemas de trincamento que apresentam pequenas zonas plásticas quando comparadas com outras dimensões da estrutura, tais como a espessura ou o ligamento residual, como por exemplo, os problemas de fadiga de vida longa. Notadamente, esses são os problemas de fadiga a baixos níveis de carga de serviço. Devido à necessidade de determinar o campo de tensões em condições de carregamentos mais elevados, um novo parâmetro denominado *T-stress* foi acrescentado ao campo de tensões originado a partir de  $K$  (Irwin, 1958). Contudo, este trabalho mostra que esses dois parâmetros, partes da solução linear elástica completa (que pode ser obtida por uma função de tensão ou a partir de uma análise numérica linear elástica), podem não ser suficientes para caracterizar satisfatoriamente as zonas plásticas em muitos casos práticos.

Este trabalho também discute as limitações da análise linear elástica que assume tensões singulares na ponta das trincas, hipótese matematicamente

interessante, mas que não corresponde à realidade física. Na situação real, sempre existe plastificação do material na ponta da trinca (ou outro comportamento não linear, como micro-cavitação em cerâmicas frágeis ou crazing em polímeros). Esses fenômenos têm grande importância na estimativa dos limites de validade da MFLE.

Os campos de tensões tradicionalmente estudados pela Mecânica da Fratura Elastoplástica (MFEP) também apresentam singularidade nas pontas das trincas. Na verdade, os campos de tensões singulares utilizados na MFLE e na MFEP evidenciam suas limitações intrínsecas. O problema de estimar zonas plásticas é intrinsecamente não linear, pois cada incremento de carga causa um incremento no escoamento na ponta das trincas, e gera um novo estado de tensões naquela região. Entretanto, para preservar a conveniência dos campos de tensões lineares elásticos singulares, este trabalho propõe formas de considerar os efeitos do escoamento e do nível de encruamento no tamanho e forma das zonas plásticas. Essas estimativas corrigidas são comparadas com as estimativas de zonas plásticas obtidas a partir de uma análise elastoplástica, que considera a não linearidade do material.

Essas estimativas são tratadas ao longo dos sete capítulos desta tese. Este primeiro capítulo apresenta o escopo deste trabalho, listando definições importantes, a sua motivação, os seus objetivos, as suas principais contribuições e a sua organização. Dessa maneira, este capítulo é dividido em seis seções. A primeira seção descreve a importância do Fator de Intensidade de Tensão na Mecânica da Fratura Linear Elástica, e o uso de  $K$  para prever o fraturamento de peças trincadas. A segunda seção apresenta definições de tenacidade e os parâmetros que a influenciam, e comenta as propostas de padronização da tenacidade feitas pela American Society for Testing and Materials (ASTM). A terceira seção apresenta a motivação deste trabalho, a quarta seção comenta sobre os objetivos, a quinta seção destaca as suas principais contribuições e por último, a sexta seção mostra a organização dos demais capítulos deste trabalho.

### **1.1. A Mecânica da Fratura Linear Elástica e o Fator de Intensidade de Tensão**

Irwin (1957) e Williams (1957) introduziram o Fator de Intensidade de Tensão ( $K$ ) como o parâmetro responsável por caracterizar severidade do campo

de tensões linear elástico no em torno da ponta de trincas. As trincas podem ser requisitadas nos modos I, II e/ou III de carregamento, que correspondem respectivamente aos modos de abertura, cisalhamento no plano e cisalhamento fora do plano da trinca. Na presença de apenas um desses modos de carregamento,  $K$  é denominado por  $K_I$ ,  $K_{II}$  ou  $K_{III}$ . O campo LE de tensões gerado por  $K$  só é correto em regiões muito próximas às pontas de trincas. Essa afirmação pode ser confirmada pelo campo de tensões gerado por  $K$  para a placa de Griffith (Griffith, 1920), Figura 1, cujas componentes de tensão em regiões próximas ao contorno não apresentam os resultados esperados. Por exemplo,  $\sigma_{yy}(K, r \rightarrow \infty, \theta = 0) = 0$ , em vez de  $\sigma_{yy}(K, r \rightarrow \infty, \theta = 0) = \sigma_n$ , que seria o correto. As variáveis  $r$  e  $\theta$ , presentes na componente  $\sigma_{yy}$ , são as coordenadas polares.

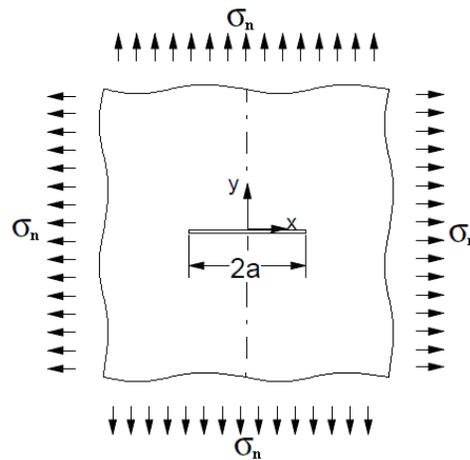


Figura 1 – Placa de Griffith biaxialmente carregada.

Na Figura 1, que mostra a placa de Griffith biaxialmente carregada, o tamanho da trinca tem comprimento igual a  $2a$  e está sob um carregamento que gera uma tensão biaxial nominal igual à  $\sigma_n$ . A placa de Griffith é caracterizada por uma trinca em um meio infinito, isto é, quando a largura e comprimento da placa são bem maiores que o tamanho da trinca ( $2a$ ). Ela foi originalmente analisada sob um estado biaxial de tensão e a expressão do  $K$  para o caso da placa de Griffith é mostrada na Eq. (1):

$$K_I = \sigma_n \sqrt{\pi a} . \quad (1)$$

Para obter a expressão do  $K_I$  para a placa de Griffith, Williams (1957) usou o primeiro termo de uma série trigonométrica com infinitos termos e Irwin (1957) utilizou uma função de tensão, que ficou conhecida como função de tensão de

Westergaard (Westergaard, 1939). O campo de tensões obtido a partir de  $K_I$  é mostrado na Eq. (2):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{Bmatrix} 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{Bmatrix}. \quad (2)$$

A Eq. (2) representa o ponto fundamental da MFLE. Ela indica que o campo de tensões em qualquer corpo trincado, solicitado pelo modo I de carregamento, pode ser obtido a partir do valor de  $K_I$ . Essa afirmação só é verdadeira quando o nível de tensão ( $\sigma_n/S_Y$ ) for pequeno, o que gera uma perturbação localizada no campo de tensões na vizinhança da ponta da trinca. Na relação “ $\sigma_n/S_Y$ ”,  $S_Y$  indica a resistência ao escoamento.

O Fator de Intensidade de Tensão ( $K$ ) pode ser utilizado para prever o fraturamento de peças trincadas quando o parâmetro  $K_{IC}$  puder ser definido como a tenacidade dessas peças. Para o caso de carregamento em modo I, o fraturamento pode ser previsto quando  $K_I$  for igual a  $K_{IC}$ . Entretanto, nem sempre o parâmetro  $K_{IC}$  pode ser definido como a tenacidade de uma peça trincada. Por isso, a próxima seção apresenta a definição de tenacidade, as propostas de padronização feitas pela ASTM e fala sobre as condições necessárias para que  $K_{IC}$  possa ser considerado como tenacidade.

## 1.2. Definições, medidas e parâmetros que influenciam a tenacidade de uma peça

Castro & Meggiolaro (2009) definem a tenacidade ( $T$ ) como a resistência do material à propagação de trincas. A intensidade da tenacidade de um material pode ser medida pela energia necessária para propagar as trincas. A compreensão da diferença entre tenacidade e ductilidade é outro ponto importante citado por Castro & Meggiolaro (2009). A ductilidade é definida como a capacidade que o material possui de deformar plasticamente. Feitas as duas definições, percebe-se que nem todo o material tenaz é dúctil. Como exemplo, tem-se a madeira que é tenaz mas que não é dúctil. Entretanto, como a deformação plástica absorve muita energia, os materiais dúcteis são geralmente tenazes. Contudo, a deformação

plástica não é o único mecanismo que absorve energia durante a propagação das trincas e que contribui com o aumento da tenacidade. Como exemplo, citam-se os materiais compósitos com fibras de vidro, que em geral são tenazes mas não são ducteis. Esses materiais absorvem energia descolando e arrancando as fibras da matriz do material.

Em relação às medidas de tenacidade, Broek (1988) afirmou que a literatura sobre a MFLE é confusa, sendo às vezes até mesmo contraditória. Como evidência a favor dessa afirmação, Castro & Meggiolaro (2009) apontam a existência de uma vasta quantidade de normas ASTM sobre medidas de tenacidade.

Das normas ASTM que tratam sobre a padronização da medida de tenacidade, têm-se as normas: E399 (1990), E561 (1999), E740 (1988), E813 (1987), E1152 (1995), E1221 (1996), E1290 (2003), E1304 (1989), E1737 (1996) e a mais recente, a norma E1820 (2001), cujo objetivo é integrar todas as outras. Nessa norma, os parâmetros  $K_{IC}$ ,  $J_{IC}$  e  $K_{JIC}$  são definidos como a tenacidade à fratura quando a peça está sob um estado de deformação plana dominante. A diferença entre esses três parâmetros é que  $K_{IC}$  só vale quando há apenas uma pequena quantidade de material deformado plasticamente à frente da ponta da trinca;  $J_{IC}$  e  $K_{JIC}$  valem para quantidades substancialmente grandes. O parâmetro  $K_{JIC}$  é obtido a partir de uma expressão que envolve  $J_{IC}$ , conforme mostra a Eq. (3):

$$K_{JIC} = \sqrt{E_1 J_{IC}}, \quad (3)$$

em que  $E_1 = E/(1-\nu^2)$ , sendo  $E$  o módulo de elasticidade longitudinal e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

A norma E1820 (2001) utiliza três tipos de espécimes, SENB, CS e o DC(T) e apresenta fórmulas para calcular a tenacidade  $K_C(t)$  que dependem da espessura  $t$  do espécime. A partir do cálculo de  $K_C(t)$ , a norma E1820 define o parâmetro  $t_{min}$ , conforme mostra a Eq. (4)

$$t_{min} = 2,5 \left( \frac{K_C(t)}{S_Y} \right)^2, \quad (4)$$

em que  $S_Y$  é a resistência ao escoamento do material. Outro parâmetro definido pela norma E1820 é o tamanho característico da peça  $t_c$ , que é o menor valor entre a espessura, o comprimento da peça e o tamanho da trinca.

Se o tamanho característico da peça for maior que o parâmetro  $t_{min}$  ( $t_c > t_{min}$ ), tem-se a presença de um estado de deformação plana dominante e pode-se definir  $K_{IC}$  como a tenacidade da peça,  $K_{IC} = K_C(t)$ .

Wallin (1985) mostrou o efeito da espessura na estimativa de  $K_{IC}$ . A diferença entre  $K_C(t)$  e  $K_{IC}$  pode ser vista, de forma bem clara, na Figura 2 apresentada por Wallin.

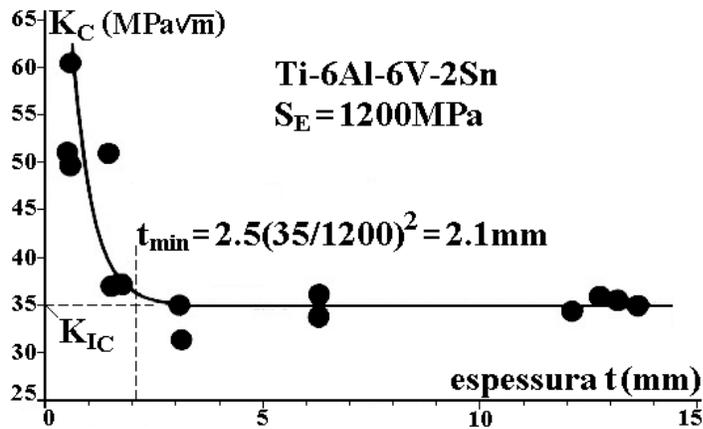


Figura 2 – Variação de  $K_C$  com a espessura  $t$  (Wallin, 1985).

Fica evidente na Figura 2 a dependência de  $K_C$  em relação a espessura  $t$ .

Para complementar a discussão feita acima, em que se mostra que  $K_{IC}$  é uma propriedade mecânica sob estado de deformação plana, Castro & Meggiolaro (2009) explicam que as superfícies livres de cargas das peças ficam, independentemente das suas espessuras, sob um estado de tensão plana predominante, pois  $\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$ . Entretanto, os mesmos autores lembram que as trincas sempre geram altas concentrações de tensões com gradientes elevados ao longo das suas pontas e que as tensões trativas  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{yy}$  tendem a gerar deformações  $\epsilon_{zz}$  muito elevadas que são restringidas pelo resto da peça que permanece sob tensões elásticas muito baixas. Castro & Meggiolaro afirmam que essa restrição é total quando a peça é bastante espessa que chega a impedir a contração transversal em uma região ao longo da ponta da trinca em que  $\epsilon_{zz} = 0$ . Nesse caso, o material dessa região fica sob um estado predominantemente de deformação plana. Castro & Meggiolaro comentam que nesse estado plano o escoamento ocorre de uma forma mais desfavorável. Eles fazem essa afirmação utilizando o critério de escoamento de Tresca e mostrando que sob um mesmo

estado de tensão é mais fácil ocorrer o escoamento para um estado plano de deformação do que para um estado plano de tensão. Finalmente, Castro & Meggiolaro afirmam que como  $K_{IC}$  deveria ser uma propriedade mecânica e que por isso deveria independer de parâmetros geométricos da peça (desde que  $t > t_{min}$ ), esses autores julgaram ser razoável supor que  $t_{min}$  seja a menor espessura que garante à máxima restrição ao escoamento junto à ponta da trinca. Com essa suposição, Castro & Meggiolaro justificam o fato de  $K_{IC}$  ser uma medida de tenacidade à fratura sob um estado de deformação plana dominante.

Em situações intermediárias, é necessário se fazer uma análise tridimensional. Entretanto, Castro & Meggiolaro (2009) comentam que os efeitos da componente  $\sigma_{zz}$  podem ser visualizados pela diferença na forma fraturada das peças finas, das peças com espessura intermediárias e das peças espessas, conforme mostra a Figura 3.

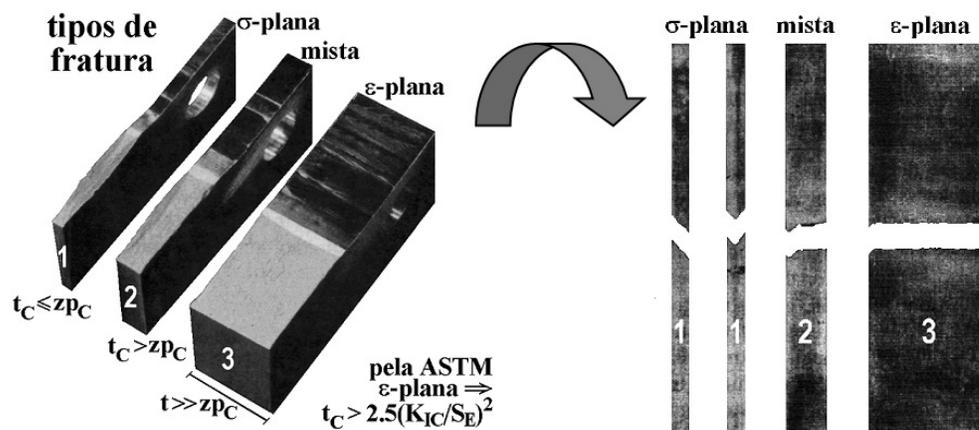


Figura 3 – Tipos de fratura para espécimes sob tensão e deformação plana (Adaptada de Castro & Meggiolaro, 2009).

Como conclusão, Castro & Meggiolaro afirmam que é mais fácil ocorrer deformações plásticas em peças finas, que estejam sob um estado de tensão plana dominante, do que em peças espessas que estejam sob um estado de deformação plana dominante.

Conforme visto na seção anterior, o Fator de Intensidade de Tensão pode ser utilizado para prever a fratura de peças trincadas. De acordo com essa previsão, a propagação da trinca tem início quando o  $K$  da peça for igual ao seu  $K_{IC}$ . Portanto, é necessário que se tenha um estado de deformação plana dominante. Para o caso de peças finas em que se tem um estado de tensão plana dominante, o parâmetro  $K_{IC}$  não pode ser utilizado como tenacidade. Esse fato acontece devido à

tenacidade variar com a espessura,  $K_C(t)$ . Com isso, alguns autores estudaram formas de relacionar  $K_C(t)$  com  $K_{IC}$  para poderem utilizar o resultado na previsão da fratura de peças trincadas.

Com esse intuito, Vroman (1983) apresentou a Eq. (5) para relacionar os dois parâmetros:

$$\frac{K_C(t)}{K_{IC}} = \sqrt{1 + 2,3 \frac{K_C(t)}{S_Y} \sqrt{t}} . \quad (5)$$

O programa NASGRO (1998) propôs a Eq. (6) como alternativa a Eq. (5):

$$\frac{K_C(t)}{K_{IC}} = 1 + A e^{-\frac{Bt}{t_{\min}}} . \quad (6)$$

em que para as ligas de alumínio, recomenda-se usar  $A = B = 1$ . Para os aços inox e ligas de titânio, recomenda-se utilizar  $A = 0,5$  e  $B = 1$ . Para os aços carbonos e ferros fundidos adota-se  $A = 0,5$  e  $B = 0,75$ .

### 1.3. Motivação

Considerando que o campo de tensões obtido a partir de  $K$  só é correto em regiões muito próximas à ponta de trincas, a análise linear elástica (LE) baseada no  $K$ , que é usada para estimar o tamanho de zonas plásticas  $pz(\theta)$ , só pode ser considerada correta para baixos níveis de tensão. Quando isso acontece, tem-se o que se chama de um estado de tensão com escoamento em Pequena Escala (EPE). Contudo, a grande maioria dos livros textos sobre Mecânica da Fratura (MF), assim como as normas ASTM citadas anteriormente, tratam do uso indiscriminado de  $K$  para estimar as  $pz(\theta)$ .

Ao se adotar o critério de escoamento de Mises e usando  $K_I$  para representar o campo de tensões, Unger (2001) estimou as zonas plásticas  $pz(\theta)_M$  para o estado de tensão plana,  $pz(\theta)_{M,pl-\sigma}^K$ , e para o estado de deformação plana,  $pz(\theta)_{M,pl-\varepsilon}^K$ :

$$pz(\theta)_{M,pl-\sigma}^{K_I} = \left( \frac{K_I^2}{2 \pi S_Y^2} \right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left( 1 + 3 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right), \quad (7)$$

$$pz(\theta)_{M,pl-\varepsilon}^{K_I} = \left( \frac{K_I^2}{2 \pi S_Y^2} \right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left( (1 - 2\nu)^2 + 3 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right), \quad (8)$$

em que  $\nu$  é o coeficiente de Poisson. A partir da Eq. (7), determina-se uma zona plástica de referência ( $pz0$ ), que é usada para normalizar todas as outras

estimativas que serão feitas no decorrer deste trabalho. O valor de  $p_z0$  é avaliado na direção paralela ao plano da trinca,  $\theta = 0$ , resultando em:

$$p_z0 = (1/2\pi)(K_I/S_Y)^2. \quad (9)$$

O contorno da zona plástica estimado a partir do critério de escoamento de Mises é determinado quando a tensão equivalente de Mises for igual à  $S_Y$ , conforme mostra a Eq. (10).

$$\sigma_{Mises}(\sigma_{ij}, r, \theta) = S_Y. \quad (10)$$

em que  $\sigma_{ij}$  são as componentes de tensão.

Como dito anteriormente,  $\sigma_{ij} = f(K_I)$  é exata somente quando  $r \rightarrow 0$ , precisamente onde o comportamento LE não faz sentido. Estimativas, elastoplásticas (EP) como as que usam o campo HRR (ver definição na seção 2.4), também não resolvem o problema, pois elas também apresentam singularidade na ponta da trinca.

Apesar de saber que as estimativas de  $p_z(\theta)_M$ , que usam o  $K$ , só são aceitáveis em baixos níveis de  $\sigma_n/S_Y$ , vale a pena avaliar o que acontece com essas estimativas quando se aumenta a relação  $\sigma_n/S_Y$ . Essa tarefa foi feita por Rodriguez (2007), Rodriguez *et al* (2008), Sousa *et al* (2009), Lopes *et al* (2009), Sousa *et al* (2010) e Castro *et al* (2011) que mostraram que  $p_z(\theta)_M$  são insensíveis ao aumento de  $\sigma_n/S_Y$  quando se usa  $K$  para descrever o campo de tensões. Todos esses trabalhos usaram o critério de escoamento de Mises para estimar as zonas plásticas e  $K$  para representar a intensidade o campo de tensões, conforme mostra a Eq. (11).

$$\sigma_{Mises}(K_I, r, \theta) = S_Y. \quad (11)$$

Os valores de  $r$  que satisfizerem a Eq. (11) serão as  $p_z(\theta)_M$  em tensão plana  $(p_z(\theta)_{M,pl-\sigma}^{K_I})$  ou em deformação plana  $(p_z(\theta)_{M,pl-\epsilon}^{K_I})$ .

Ao se analisar o exemplo da placa de Griffith, a Figura 4 mostra as zonas plásticas  $p_z(\theta)_{M,pl-\sigma}^{K_I}$ .

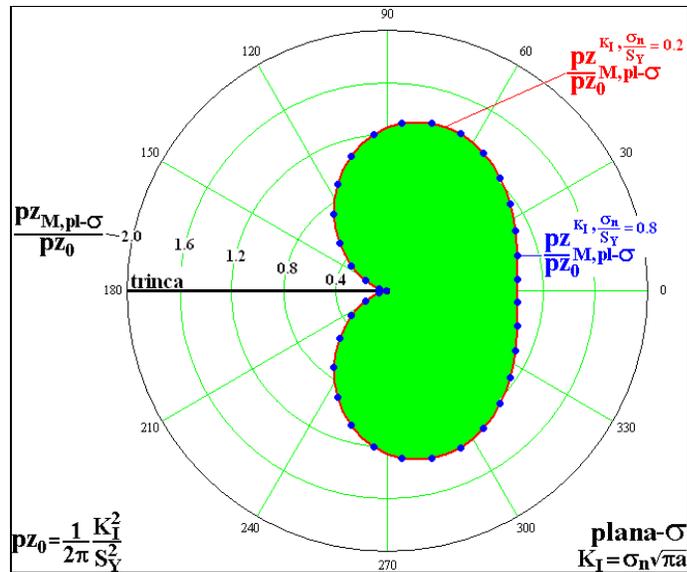


Figura 4 – Zonas plásticas  $pz(\theta)_M$  insensíveis à relação  $\sigma_n/S_Y$ , estimadas para o caso da placa de Griffith, carregada em modo I sob tensão plana  $(pz(\theta)_{M,pl-\sigma}^{K_I})$ .

A Figura 5 mostra as zonas plásticas  $pz(\theta)_{M,pl-\varepsilon}^{K_I}$  para o exemplo da placa de Griffith.

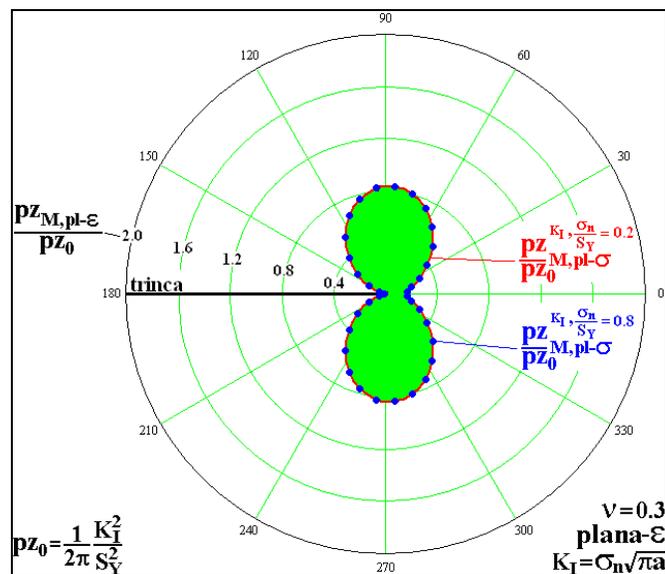


Figura 5 – Zonas plásticas  $pz(\theta)_M$  insensíveis à relação  $\sigma_n/S_Y$ , estimadas para o caso da placa de Griffith, carregada em modo I sob deformação plana  $(pz(\theta)_{M,pl-\varepsilon}^{K_I})$ .

Ao se considerar o fato de que o campo de tensões LE gerado por  $K$  só é correto em regiões bem próximas à ponta de trincas, é possível perceber que as estimativas das  $pz(\theta)_M$  obtidas a partir do campo de tensões dado pela Eq. (11)

podem ser bem imprecisas, pois as duas  $p_z(\theta)_M$  mostradas na Figura 4 e na Figura 5 são iguais sendo que correspondem à valores de  $\sigma_n/S_Y$  bem diferentes. Essa imprecisão aumenta quanto maior for a relação  $\sigma_n/S_Y$ . Dessa forma, não se deve usar o campo de tensões gerado pelo  $K$  para estimar  $p_z(\theta)_M$  sob cargas reais de serviço, pois componentes estruturais são normalmente projetados com fatores de segurança ( $\phi_Y$ ) variando entre 1,2 a 3. Esses simples argumentos mostram que os limites do uso de  $K$  para representar o campo linear elástico de tensões devem ser mais bem explorados, o que será feito no decorrer deste trabalho.

Todo o estudo sobre os limites da utilização de  $K$  para representar o campo de tensões nas proximidades da ponta de trincas é feito com base em estimativas de zonas plásticas, pois para que se possa usar a MFLE para prever o fraturamento de peças trincadas, é necessário que essas zonas plásticas, presentes na ponta de trincas, sejam pequenas. Esse critério para o uso da MFLE pode ser visto na Figura 6.

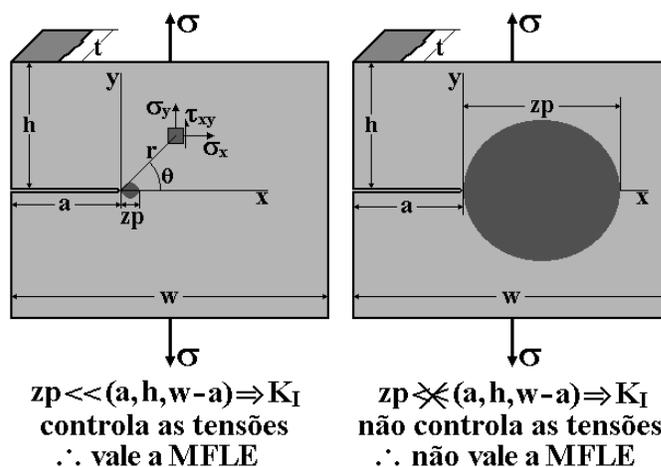


Figura 6 – Zonas plásticas circulares de tamanhos “pequenos” e “grandes” que validam ou não o uso da MFLE (Castro & Meggiolaro, 2009).

A Figura 7 mostra um fluxograma com um encadeamento típico de procedimentos para prever a fratura de uma peça trincada. Esse fluxograma deixa evidente a necessidade de se estimar da forma mais correta possível o tamanho e forma das zonas plásticas.

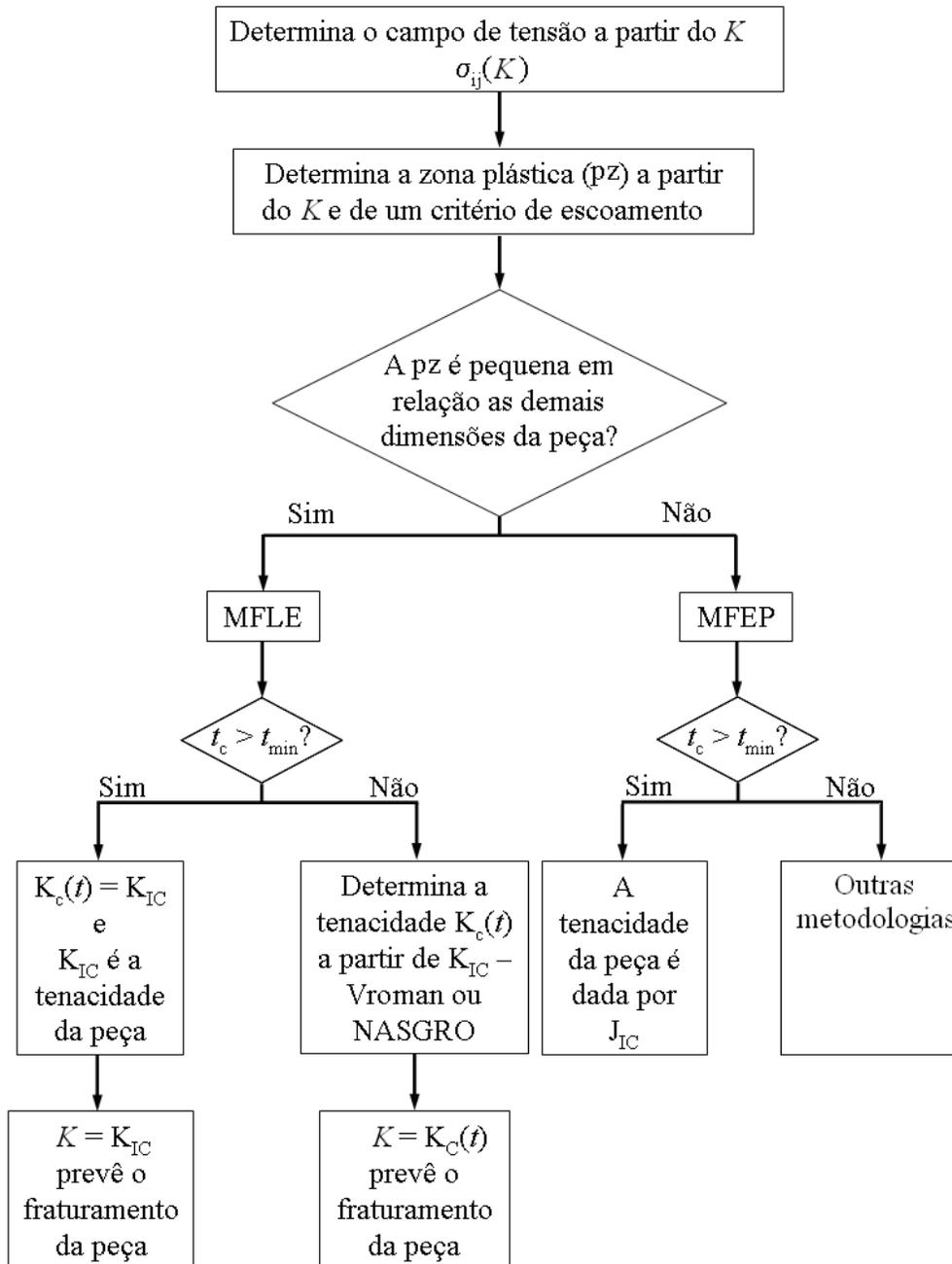


Figura 7 – Fluxograma do dimensionamento à fratura de uma peça que utiliza  $K$  para descrever a intensidade do campo de tensões.

Conforme mencionado, a principal motivação deste trabalho é a constatação de que o tamanho e a forma das zonas plásticas na ponta de trincas não ficam caracterizadas de maneira abrangente quando se utiliza apenas expressões de campos de tensões obtidas a partir de  $K$  (ou de  $K$  mais  $T$ -stress). Essa constatação pode ser vista pela Figura 4 e pela Figura 5, que mostram que a forma e o tamanho das zonas plásticas são insensíveis à relação  $\sigma_r/S_Y$  quando o campo de

tensões é definido apenas por  $K$ . Levando-se isso em conta, a próxima seção apresenta os objetivos deste trabalho.

#### 1.4. Objetivos

Conforme pode ser visto na Figura 7, a estimativa correta de zonas plásticas é fundamental para determinar todo o dimensionamento à fratura de peças estruturais. A utilização desse procedimento tem como grande vantagem o fato de utilizar um parâmetro tabelado, como  $K$ .

Todas as informações sobre o tipo de carregamento e geometria são incluídas na expressão de  $K$ . Como neste trabalho só se trabalha com trincas carregadas em modo I de trincamento,  $K$  é substituído por  $K_I$ . Caso se queira analisar outro modo de trincamento ou um modo misto, a referência será feita explicitamente, como  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  ou  $K_{I,II}$ , que indicam, respectivamente, os modos II e III e o modo misto na presença dos modos I e II.

Este trabalho mostra a ineficiência da estimativa de zonas plásticas que usam  $K$  para descrever o campo de tensões. Dessa forma, este trabalho tem como objetivo secundário mostrar que as zonas plásticas além de sofrerem a influência de  $\sigma_r/S_Y$ , também são afetadas:

- pelos parâmetros geométricos da peça,
- pelo tipo de carregamento,
- pelo encruamento do material.

As influências dos parâmetros citados acima na determinação do tamanho e forma das zonas plásticas serão verificadas analiticamente usando expressões de  $K$  ou a partir de funções de tensão de Westergaard, que são soluções analíticas para o campo de tensões escritas em termos de variáveis complexas. Essas influências nas zonas plásticas também serão verificadas numericamente com a utilização do Método Híbrido dos Elementos de Contorno (MHEC), a partir do programa de desenvolvido por Lopes (2002), e pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) com uso do programa ANSYS (2001).

Ao se usar as respostas analíticas e numéricas, espera-se mostrar que a metodologia usual encontrada na literatura técnica, Figura 7, que usa apenas  $K_I$  para estimar o tamanho e forma das zonas plásticas, está subavaliando o real efeito delas no comportamento das peças trincadas.

Os seguintes tópicos podem ser citados como objetivos principais deste trabalho:

- Tendo como base as funções de tensão para problemas de trinca, que são conhecidas para poucos casos, mostra-se que tanto o MEF e o MHEC são ferramentas poderosas na estimativa de zonas plásticas, usando tanto análise linear quanto uma análise não linear com não linearidade do material.
- Demonstração que não se deve prever o fraturamento de peças trincadas comparando-se  $K_I$  com  $K_{IC}$  em todas as situações, principalmente quando a relação  $\sigma_t/S_Y$  for grande.
- Com zonas plásticas estimadas de forma mais acurada, espera-se mostrar que elas seriam o melhor parâmetro para prever o fraturamento de uma peça trincada. Isso será visto no exemplo em que se analisará corpos de prova diferentes com o mesmo  $K_I$ ; pois apesar disso, eles apresentarão zonas plásticas diferentes.

### 1.5. Principais contribuições

Conforme foi visto na seção anterior, o principal interesse deste trabalho é avaliar os limites de utilização dos campos de tensões que são caracterizados pelos parâmetros elásticos  $K_I$  e  $T-stress$ . Toda essa avaliação é feita em termos de estimativa de zonas plásticas, o que não é apresentada de forma clara na literatura técnica especializada. A partir dessas estimativas, este trabalho mostra que os campos de tensões obtidos a partir de  $K_I$  ou a partir de  $K_I$  mais  $T-stress$  são na verdade campos lineares elásticos incompletos, cuja solução pode ser obtida a partir de uma análise linear elástica numérica ou a partir de uma função de tensão para problemas de trinca (função de tensão de Westergaard). Essa incompletude dos campos de tensões obtidos a partir dos parâmetros lineares elásticos também é mostrada a partir da utilização da série de Williams (1957), pois mostra-se para o exemplo da placa de Griffith, que  $K_I$  e  $T-stress$  são na verdade termos dessa série. Nesse mesmo exemplo, mostra-se que a partir de um determinado valor da relação  $\sigma_t/S_Y$ , são necessários mais termos da série para que se tenha estimativas de zonas plásticas iguais às estimativas de zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard.

Em seguida, devido à singularidade intrínseca da solução linear elástica, este trabalho questiona a validade das estimativas das zonas plásticas obtidas por campos de tensões lineares elásticos completos que são determinados a partir da função de tensão de Westergaard ou a partir da solução numérica. Além disso, com base na ideia de Irwin (1958) que foi feita para corrigir as zonas plásticas na direção paralela ao plano da trinca,  $\theta = 0$ , para levar em conta o escoamento do material para o caso da placa de Griffith, este trabalho apresenta como contribuição, três tentativas de carácter qualitativo para levar em consideração o comportamento perfeitamente plástico do material para direções diferentes do plano da trinca. Este trabalho também propõe uma forma de utilizar o campo de tensões obtido analiticamente para levar em consideração os efeitos do encruamento nas estimativas das zonas plásticas.

Tendo-se em vista que a singularidade dos campos de tensões lineares elásticos caracteriza uma não linearidade intrínseca à representação matemática das componentes de tensão nas proximidades de pontas de trincas, este trabalho também apresenta como contribuição as zonas plásticas obtidas a partir de análises não lineares feitas pelo programa ANSYS (2001). Essas zonas plásticas elastoplásticas são comparadas com as zonas plásticas corrigidas e com as zonas plásticas estimadas a partir do campo de tensões determinado por  $K$ .

Finalmente, este trabalho mostra que espécimes diferentes que têm o mesmo  $K$  apresentam zonas plásticas diferentes. Esta verificação é feita para a solução linear elástica completa obtida numericamente.

## 1.6. Organização

O Capítulo 1 introduziu o problema que se pretende estudar, apresentou a motivação, definiu os objetivos, indicou as principais contribuições e mostra nesta seção, a organização deste trabalho. O Capítulo 2 apresenta a revisão bibliográfica, que trata sobre o surgimento da Mecânica da Fratura Linear Elástica e suas limitações. Além disso, esse capítulo também apresenta todas as propostas de medição e de estimativa das zonas plásticas localizadas à frente de ponta de trincas. O Capítulo 3 é reservado para mostrar as estimativas de zonas plásticas a partir o uso da MFLE. Nesse capítulo, apenas a abordagem analítica é apresentada. Devido à singularidade intrínseca dos campos de tensões lineares

elásticos, o Capítulo 4 mostra as ideias de Irwin (1958) e de Rodriguez (2007) para corrigir as zonas plásticas para o caso da placa de Griffith e que tentam levar em consideração o modelo de um material com comportamento perfeitamente plástico. Além disso, esse capítulo apresenta três propostas alternativas para corrigir as zonas plásticas lineares elásticas para considerar o caso de um material perfeitamente plástico e uma maneira de levar em consideração o efeito do encruamento nessas zonas plásticas. A partir do uso de um programa comercial estabelecido no meio científico (ANSYS) em que se utiliza o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Capítulo 5 mostra a obtenção de zonas plásticas a partir de uma abordagem numérica linear elástica. Essas estimativas numéricas de zonas plásticas também são feitas a partir do uso do Método Híbrido dos Elementos de Contorno (MHEC) com a utilização do programa desenvolvido por Lopes (2002).

O Capítulo 6 mostra as zonas plásticas corrigidas obtidas numericamente com o uso do programa desenvolvido por Lopes (2002), em que se considera a correção proposta por Rodriguez (2007) e a correção proposta por este trabalho em que se utiliza a tensão equivalente de Mises. O Capítulo 7 mostra, a partir do programa ANSYS, as zonas plásticas obtidas numericamente com análise não linear, com não linearidade do material. Nesse capítulo também se compara esses resultados elastoplásticos com as estimativas lineares elásticas corrigidas. Por fim, o Capítulo 8 apresenta as conclusões e as sugestões para trabalhos futuros.

## 2 Revisão bibliográfica

Este capítulo é dedicado à apresentação de todos os trabalhos que serviram como referência para o desenvolvimento desta pesquisa. A primeira seção aborda o surgimento da Mecânica da Fratura (MF) com Inglis (1913), fala sobre os trabalhos de Irwin (1956) e (1957) que usaram a função de tensão de Westergaard e comenta sobre a série de Williams (1957). Em seguida, a segunda seção apresenta as tentativas de generalizar a função de tensão de Westergaard (Westergaard, 1939). A seção seguinte, terceira seção, é responsável por mostrar a obtenção do Fator de Intensidade de Tensão ( $K$ ) a partir da função de tensão de Westergaard e da série de Williams. A quarta seção define a relação entre a integral  $J$  e o campo HRR. Posteriormente, a quinta seção comenta sobre as limitações do uso do  $K$  e de  $J$  para representar os campos de tensões na vizinhança da ponta de trincas. Essa seção também define a relação entre esses dois parâmetros com as zonas plásticas. Em seguida, a sexta seção é responsável por mostrar os trabalhos que tentaram estimar as zonas plásticas ou o campo de tensões a partir de métodos numéricos. A sétima seção comenta sobre a tentativa de estender a aplicabilidade da MFLE a partir do uso de um segundo parâmetro. Esse parâmetro é conhecido como  $T$ -stress e nada mais é que a adição de uma tensão constante na componente de tensão paralela ao plano da trinca. Essa componente de tensão paralela ao plano da trinca é obtida a partir de  $K$ . A penúltima seção deste capítulo apresenta os trabalhos que se propuseram a obter medidas experimentais de zonas plásticas. A última seção faz um resumo do que foi abordado neste capítulo.

### 2.1. A criação da Mecânica da Fratura, a função de tensão de Westergaard e a série de Williams

A Mecânica da Fratura teve início com Inglis (1913), que estudou entalhes elípticos em placas planas. Nesse trabalho, Inglis obteve o Fator de Concentração de Tensão ( $K_t$ ). Quando o raio da ponta do entalhe tende a zero ( $\rho \rightarrow 0$ ), tem-se a

definição teórica de trincas, cujos campo de tensões tende ao infinito em suas pontas. Apesar de toda a formulação teórica, Inglis não conseguiu explicar o motivo pelo qual essas peças com entalhes afiados não quebravam. A explicação para esse fato foi dada por Griffith (1920), que explicou o problema evocando um princípio energético. Dessa forma, Griffith ignorou a singularidade do modelo matemático e apelou para um princípio mais forte, supondo que a propagação das trincas, como qualquer fenômeno físico, tem que obedecer à lei da conservação de energia (Castro & Meggiolaro, 2009).

Ao se escrever a primeira lei da termodinâmica em forma incremental, pode-se afirmar que uma trinca só pode crescer se o incremento do trabalho ( $\delta W$ ) fornecido à peça for maior que a soma da variação da energia de deformação ( $\delta E_D$ ) e da variação da energia absorvida durante o crescimento da trinca ( $\delta A$ ), Eq. (12):

$$\delta W \geq \delta E_D + T \cdot \delta A, \quad (12)$$

em que  $T$  é a tenacidade, que pode ser definida como a energia requerida para gerar uma unidade de área de trinca. Dessa forma, a energia de deformação ( $E_D$ ) tende a decrescer, reduzindo a energia potencial do sistema pelo aumento do incremento da trinca, Eq. (13):

$$E_P = E_D - W_E, \quad (13)$$

em que  $W_E$  é o trabalho feito pelo carregamento da peça trincada, conforme segue o crescimento da trinca. Para quantificar esse efeito, Griffith (1920) definiu a Taxa de Alívio da Energia Potencial, conforme mostra a Eq. (14):

$$G = - \frac{\partial E_P}{\partial A}. \quad (14)$$

Irwin (1957) chamou  $G$  de força de extensão da trinca. Esse parâmetro é um dos pilares da MFLE (Castro & Meggiolaro, 2009). O cálculo analítico de  $G$  requer uma análise global das tensões e deformações em todos os pontos da peça, o que normalmente não é uma tarefa trivial.

Dezenove anos depois do trabalho de Griffith (1920), Westergaard (1939) apresentou uma função de tensão, Eq. (15), que recebeu seu nome e que usa variáveis complexas. A função de tensão de Westergaard resolve o problema de uma placa infinita carregada biaxialmente (placa de Griffith). O trabalho de Carothers (1920) e Nádai (1921) serviram de base para Westergaard.

$$Z = \frac{\sigma_n z}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \quad (15)$$

em que  $\sigma_n$  é a tensão nominal,  $z = x + iy$ ,  $i = \sqrt{-1}$  e  $Z(z)$  é a função de tensão de Westergaard para uma placa infinita biaxialmente carregada.

A função de tensão de Westergaard para o caso de uma placa infinita é de grande importância para a MF, pois no ano de 1957, essa função foi utilizada por Irwin (1957) para introduzir o conceito do Fator de Intensidade de Tensão ( $K$ ), que foi obtido independentemente por Williams (1957), que usou uma série infinita para descrever o campo de tensões nas proximidades das pontas de trincas. O campo de tensões gerado a partir da função de tensão de Westergaard pode ser visto pela Eq. (16), Eq. (17) e Eq. (18).

$$\sigma_{xx} = \operatorname{Re}(Z(z)) - y \operatorname{Im}(Z'(z)), \quad (16)$$

$$\sigma_{yy} = \operatorname{Re}(Z(z)) + y \operatorname{Im}(Z'(z)), \quad (17)$$

$$\sigma_{xy} = -y \operatorname{Re}(Z'(z)). \quad (18)$$

Caso se use a série de Williams, o campo de tensões pode ser obtido de acordo com a Eq. (19):

$$\sigma_{ij} = A_{ij}(\theta) r^{-1/2} + B_{ij}(\theta) + C_{ij}(\theta) r^{1/2}, \quad (19)$$

em que  $\sigma_{ij}$  são as componentes de tensão escritas em forma indicial,  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  e  $C_{ij}$  são funções da coordenada  $\theta$ , que são determinadas de acordo com as condições de contorno, e  $r$  e  $\theta$  são as coordenadas polares.

## 2.2. A generalização da função de tensão de Westergaard

A partir da utilização da função de tensão de Westergaard por Irwin (1957) para a determinar o  $K$  da placa de Griffith em modo I,  $K_I$ , outros autores se interessaram em estudar detalhadamente a obtenção de campo de tensões a partir dessas funções de variáveis complexas, igualmente ao que foi feito para a função de tensão de Westergaard. Dentre esses trabalhos, destacam-se os estudos de Sun & Farris (1989) que mostraram que a superposição da função de tensão de Westergaard com um campo de tensões uniforme fornece a solução completa para problemas bidimensionais de elasticidade em uma placa infinita; de Sih (1966), que identificou casos em que a função de tensão de Westergaard não pode ser utilizada; e de Eftis & Liebowitz (1972) que partiram do trabalho de Sih e mostraram como estender a validade do uso da função de tensão de Westergaard.

Além disso, esses dois autores apresentaram uma função de tensão de Westergaard aproximada que resolve o caso de uma placa finita com uma trinca central uniaxialmente carregada. Em ordem cronológica, o último trabalho pesquisado desta seção foi o estudo feito por Sanford (1979), que mostrou que as funções de tensão de Westergaard não são aplicáveis para todos os tipos de condições de contorno, mesmo no caso em que se considera as correções propostas por Sih (1966) e Eftis & Liebowitz (1972).

### 2.3. O Fator de Intensidade de Tensão

Ao se usar a série de Williams e a função de tensão de Westergaard, obtém-se, conforme foi mostrado anteriormente, a Eq. (20):

$$\sigma_{ij} = K_I / \sqrt{2\pi r} g_{ij}(\theta), \quad (20)$$

que é igual à Eq. (2). As funções  $g_{ij}(\theta)$  são as funções que aparecem na Eq. (2) escritas de forma compacta.

A utilização de  $K_I$  para representar o campo de tensões, Eq. (2) ou Eq. (20), só é válida se a zona plástica for relativamente pequena quando comparada com as outras dimensões da peça, por exemplo, o tamanho da trinca. Vitvitskii (1975) afirmou que são as deformações dentro dessa região que governam o processo de pré-fratura e que definem os modos de fratura de um corpo. Ele também afirmou que dependendo do tamanho da zona plástica, tem-se uma fratura dúctil, frágil ou quase frágil. Hutchinson (1968 *a*) comentou que a fratura dúctil que ocorre em corpos trincados são geralmente precedidas por uma pequena quantidade de material deformado plasticamente, que ocorrem em regiões com grandes concentrações de tensão, como é o caso das regiões nas proximidades das pontas de trincas. Zhu *et al* (2010) mencionaram sobre a influência do tamanho e forma das zonas plásticas no processo de fratura e fadiga de peças trincadas.

Griffis & Spretnak (1970), Broek (1968), Broek (1971) e Wolf (1971) definiram a zona plástica como o processo de suavização da ponta das trincas. De acordo com esses estudos, Smith (1975) enfatizou que o uso de  $K_I$  para representar a intensidade do campo de tensões só é válido a partir de uma certa distância da ponta da trinca. Entretanto, por causa dessa singularidade, o uso de  $K_I$  se torna inadequado para determinar o estado de tensões na vizinhança bem próxima da ponta da trinca. Essa região é de grande importância no processo de

extensão da trinca, pois é ela que caracteriza o problema da fratura. Weiss & Meyerson (1971) também comentaram sobre a influência das zonas plásticas no processo de propagação de trincas. Eles fizeram um estudo metalográfico do campo de deformação nas redondezas das trincas.

A ASTM (1970) recomendou que se utilize valores de  $K_I$  menores que  $(S_Y \sqrt{a})/\sqrt{2,5}$  para garantir que a zona plástica seja menor que o comprimento da trinca. Nessa recomendação feita pela ASTM,  $a$  indica a metade do comprimento da trinca. Caso a recomendação da ASTM seja satisfeita, o estado de tensão para a ponta da trinca em um material elastoplástico será determinado por  $K_I$ . Entretanto, isso só será verdade para baixos níveis de carga. Nesse estado de tensões em que a ASTM recomenda o uso de  $K_I$ , tem-se um estado de tensões denominado de Escoamento em Pequena Escala (EPE) – (Rice, 1968, *a e b*). Caso contrário, tem-se o que se chama de um estado de Escoamento em Grande Escala (EGE) – (Kim & Kang, 2002). Uma importante observação sobre o estado de EPE foi feita por Hancock *et al* (1993), que comentaram que os projetos de fratura partem da hipótese de que os valores de  $K_I$  são independentes da geometria do problema. Entretanto, as deformações na ponta da trinca e a tenacidade à fratura só são independentes da geometria quando se tem pequenos níveis de carga e sob certas condições geométricas, ou seja, a independência de  $K_I$  quanto à geometria do problema só é verdadeira sob um estado EPE.

Sob as condições EPE, o  $K_I$  pode ser usado para prever o início do processo de fratura da peça, que começará quando o  $K_I$  igualar a tenacidade da peça,  $K_{IC}$ . Interessado no estudo dos processos de fratura, Vitvitskii (1975) definiu a fratura de sólidos trincados como sendo um processo de desenvolvimento de descontinuidades que podem ter sido criadas durante o processo de fabricação ou durante os primeiros estágios de deformação na estrutura do material. Sommer & Aurich (1991) afirmaram que a fratura dúctil pode ser prevista pelo critério estabelecido pela MFLE somente em condições de EPE.

#### **2.4. O campo HRR e a integral $J$**

Hutchinson (1968, *b*), e Rice & Rosengren (1968) mostraram, de forma independente, que  $J$  caracteriza a intensidade do campo de tensões em materiais

elásticos não lineares. Ambos os trabalhos usaram a equação de Ramberg-Osgood para descrever a relação entre deformação e tensão, conforme mostra a Eq. (21):

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_e \left( \frac{\sigma}{S_Y} \right)^{n_e}, \quad (21)$$

em que  $E$  é o módulo de Young,  $n_e$  é o expoente de encruamento e  $\alpha_e$  é o coeficiente de encruamento. Esses dois trabalhos mostraram que os campos de tensões e de deformações variam em uma taxa igual à  $1/r$  na vizinhança da ponta da trinca. Devido à esse alto gradiente de tensão e à ductilidade dos materiais, regiões próximas à ponta de trincas ficam sob deformações predominantemente plásticas. O campo de tensões e de deformações obtidos a partir de  $J$  podem ser vistos pela Eq. (22) e Eq. (23):

$$\sigma_{ij} = k_{\sigma 1} \left( \frac{J}{r} \right)^{\frac{1}{n_e+1}}, \quad (22)$$

$$\varepsilon_{ij} = k_{\varepsilon 1} \left( \frac{J}{r} \right)^{\frac{n_e}{n_e+1}}, \quad (23)$$

em que  $k_{\sigma 1}$  e  $k_{\varepsilon 1}$  são constantes que são definidas de acordo com as condições de contorno,  $r$  é uma das coordenadas polares e  $n_e$  é o expoente de encruamento. Anderson (1995) apresentou a Eq. (22) e Eq. (23) em termos de parâmetros elásticos como a tensão de escoamento ( $S_Y$ ) e o módulo de Young ( $E$ ). Como resultado, ele apresentou a Eq. (24) e a Eq. (25).

$$\sigma_{ij} = S_Y \left( \frac{EJ}{\alpha_e S_Y^2 I_n r} \right)^{\frac{1}{n_e+1}} \tilde{\sigma}_{ij}, \quad (24)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\alpha_e S_Y}{E} \left( \frac{EJ}{\alpha_e S_Y^2 I_n r} \right)^{\frac{n_e}{n_e+1}} \tilde{\varepsilon}_{ij}, \quad (25)$$

em que  $I_n$  é uma constante de integração que depende de  $n_e$ , e  $\tilde{\sigma}_{ij}$  e  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$  são funções adimensionais de  $n_e$  e  $\theta$ . A Eq. (24) e a Eq. (25) definem o que se chama de campo HRR. Como afirmado anteriormente, percebe-se que pela presença de  $r$  no denominador do campo de tensões e de deformações, o campo HRR apresenta uma singularidade de ordem  $(1/r)$ . Com isso, nota-se que o campo HRR possui o mesmo problema da singularidade obtido pelos campos de tensões gerado a partir de  $K_I$  ou de  $K_{II}$  mais  $T$ -stress e que são utilizados para estimar as  $p_z(\theta)_M$ .

O campo HRR deu origem à outra especificação da Mecânica da Fratura, que ficou conhecida como Mecânica da Fratura Elastoplástica (MFEP). Outros parâmetros também são usados na MFEP, como, por exemplo, o CTOD (Crack Tip Open Displacement). Desde então, vários pesquisadores se dedicaram a investigar os seus limites e suas aplicações.

Begley & Landes (1971) e independentemente Broberg (1971) propuseram que a integral  $J$  pudesse ser usada como um critério de fratura dúctil. Entretanto, Begley & Landes (1971) também discutiram a possível influência da geometria do espécime na validade do uso de um único parâmetro como critério à fratura.

Sommer & Aurich (1991) falaram sobre as limitações do uso do campo HRR, citando duas condições necessárias para a sua aplicabilidade. Primeiro, é necessário que se tenha apenas uma pequena quantidade de material deformado plasticamente à frente da ponta da trinca. Segundo, é necessário que o problema possa ser caracterizado como um estado plano de tensão ou de deformação.

As mesmas limitações comentadas por Sommer & Aurich (1991) também foram comentados por Kim & Kang (2002), que enfatizaram que a Eq. (24) e a Eq. (25) são válidas somente se a zona plástica à frente da ponta de trincas for restringida pelo campo linear elástico controlado por  $K_I$ . Esses autores afirmaram que caso se tenha um estado de EGE, não é possível representar o campo de tensões com apenas um parâmetro,  $J$  ou  $K$ .

McMeeking & Parks (1979), que estavam interessados em investigar as limitações do uso do campo HRR, avaliaram a influência do tamanho do espécime e do comprimento da trinca no domínio de  $J$  em regiões próximas à ponta de trincas. Kudari *et al* (2007) também estudaram os efeitos da geometria no tamanho das zonas plásticas a partir de expressões que usam a integral  $J$ . Em outro trabalho, Kudari & Kodancha (2008) estudaram a relação entre a integral  $J$  e o CTOD para espécimes do tipo CT e SENB.

## **2.5. Limitações do uso de $K$ e $J$ , e a relação entre esses parâmetros com as zonas plásticas**

Como citado anteriormente, os parâmetros  $K$  e  $J$  são válidos somente em estados de EPE, em que o tamanho da zona plástica é pequeno em relação a dimensão característica da peça, como o comprimento da trinca ou a espessura da peça. Então, é evidente a necessidade de se estimar de maneira precisa o tamanho

e forma das zonas plásticas. Além de validarem a utilização dos parâmetros  $K$  e  $J$ , as zonas plásticas também influenciam outras características de uma peça, como é o caso da tenacidade, por exemplo. Devido à essa necessidade de melhorar as estimativas das  $p_z(\theta)_M$ , vários estudos foram realizados com o objetivo de relacionar essas estimativas com os parâmetros da MFLE e da MFEP.

Spitzig (1968) propôs que o valor do CTOD fosse igual ao tamanho da zona plástica na direção paralela ao plano da trinca. Gerberich & Hemmings (1969) afirmaram que essa relação entre o CTOD e as  $p_z(\theta)_M$  nem sempre é válida. Zhu *et al* (2010) enfatizaram o grande efeito das  $p_z(\theta)_M$  na tenacidade dos componentes mecânicos. Liebowitz & Eftis (1971) estudaram a correção de Irwin para redistribuir as tensões dentro das zonas plásticas e concluíram que devido à essa correção, espera-se um pequeno aumento na tenacidade dos componentes mecânicos. Ishikawa & Tsuya (1974), Kang & Beom (2000), Broek (1974) e Miserez *et al* (2004) têm a mesma opinião. Todos esses pesquisadores concordaram que quanto maior for o tamanho das zonas plásticas à frente da ponta de trincas, maior será a tenacidade da peça devido à dissipação da energia plástica.

Interessados no estudo sobre os parâmetros que afetam a tenacidade das peças mecânicas, De Wit *et al* (1993) propuseram relacionar a redução da espessura da peça com o CTOD ou com a tenacidade. Li *et al* (2005) investigaram os efeitos da relação entre o comprimento da trinca e a largura da peça na tenacidade de espécimes padrões. Tentando estender a validade da MFLE, Hilton & Hutchinson (1971) propuseram a utilização de Fatores de Intensidade de Tensão Locais ( $K_L$ ) que seriam obtidos a partir das expressões tradicionais de  $K_I$ .

Larsson & Carlsson (1973) utilizaram o Método dos Elementos Finitos (MEF) para determinar a aplicabilidade dos limites recomendados pela ASTM (1970) para o uso de  $K_I$ . Esse trabalho foi um dos primeiros que tentou determinar o campo de tensões nas proximidades de ponta de trincas de forma numérica. A partir de então, vários pesquisadores começaram a utilizar métodos numéricos em seus estudos. Alguns desses trabalhos são citados na próxima seção.

## 2.6. Zonas plásticas estimadas numericamente

Os estudos analíticos, que deram origem à MF, procuraram determinar funções de tensão de Westergaard para outras geometrias com o objetivo de

avaliar as limitações de MFLE e da MFEP e, além disso, esses trabalhos tentaram achar maneiras de obter expressões genéricas de  $K$  e  $J$  para vários tipos de geometria e carregamento. Em paralelo a esses trabalhos analíticos, os pesquisadores começaram a utilizar métodos numéricos na MF para estimar os valores de  $K$ ,  $J$ , as zonas plásticas, os efeitos de restrição e todos os demais pontos de interesse da Mecânica da Fratura.

Como mencionado anteriormente, um trabalho muito importante sobre os limites do uso de  $K_I$ , foi a pesquisa feita por Larsson & Carlsson (1973). Nesse estudo, eles investigaram o problema de determinar os campos de tensões elastoplásticas nas proximidades da ponta de trincas em diferentes tipos de espécimes. Eles concluíram que  $K_I$  não é suficiente para estimar as zonas plásticas mesmo sob condições de EPE. O fato que os levaram a essa conclusão foi que o começo do escoamento na análise de elementos finitos ocorria quando o primeiro elemento atingia a tensão de escoamento. Contudo, Larsson & Carlsson acharam que esse começo de escoamento variava conforme o valor de  $K_I$  e de acordo com o tipo de espécime. Anteriormente ao trabalho de Larsson & Carlsson, Burdekin & Stone (1966) já tinham comentado sobre as limitações das recomendações feitas pela ASTM (1970). Eles disseram que essas recomendações são bem aplicáveis para materiais quase frágeis. Posteriormente, eles propuseram uma forma de estender a aplicabilidade da mecânica da fratura convencional em situações em que se tem uma substancial quantidade de material plastificado. Entretanto, nenhuma estimativa de zona plástica foi feita.

Outros trabalhos relacionados à obtenção de campos de tensões a partir de ferramentas numéricas são: o artigo de Tracey (1976) que apresentou uma formulação numérica para corpos trincados sob um estado de deformação plana e sob condições de EPE; o estudo de Malik & Fu (1982) que utilizaram um método numérico denominado de Método de Linhas para analisar a resposta elastoplástica de uma placa carregada com uma trinca central. Por último, cita-se o trabalho feito por Sommer & Aurich (1991) que comentaram que investigações mais detalhadas indicavam a necessidade de se fazer uma análise tridimensional para estudar a fratura dúctil de peças mecânicas trincadas, mesmo em placas que estejam sob condições de tensão plana predominantes. Esse autores fizeram uma boa revisão bibliográfica e citaram duas importantes conclusões. Primeiro, as restrições em entalhes ou espécimes pré-trincados são causadas pelas descontinuidades

geométricas e pelo tipo de carregamento. Em segundo lugar, eles concluíram que existem dois tipos de restrição, uma global e outra local. Esse último tipo influencia diretamente o estado de tensões na ponta de trincas.

Ainda dentro da área numérica, Newman *et al* (1995) utilizaram o MEF e fizeram estudos detalhados dos efeitos do fator de restrição global ( $\alpha_G$ ). Uma das mais importantes conclusões desse estudo foi que para o caso em que se tenha trincas maiores que quatro vezes a espessura da peça, o fator  $\alpha_G$  pode ser obtido com uma única função de  $K_I$ . Quando isso não acontece,  $\alpha_G$  se torna dependente do tipo de espécime, da trinca e da espessura da peça. Efeitos de restrição ao escoamento também foram estudados por Yuan & Brocks (1997), que concluíram que essa restrição é uma barreira contra a deformação plástica, e que ela é induzida pela geometria, pela carga e pelo contorno da peça. Kudari *et al* (2009) fizeram a mesma conclusão feita por Yuan & Brocks.

Também interessado em investigar a influência da restrição ao escoamento, Nakamura & Parks (1988) estudaram os efeitos tridimensionais em espécimes sob condições de tensão plana para distâncias em torno de  $1,5t$  da ponta da trinca, em que  $t$  é a espessura da peça. Eles concluíram que em áreas muito próximas à ponta de trincas, ocorrem condições assintóticas de deformação plana. Como uma continuação desse trabalho, Nakamura & Parks (1990) enfatizaram que os campos de tensões obtidos a partir de expressões de  $K$  e  $J$  precisam ser determinados fora das regiões que sofrem esses efeitos tridimensionais, mas que ainda estejam longe do contorno das peças. Com o objetivo de determinar de maneira rápida e acurada os valores de  $K_I$  para problemas bidimensionais em que se aplica os conceitos da elasticidade plana a partir do Método Híbrido dos Elementos de Contorno (MHEC), Lopes (2002) utilizou tanto a série de Williams quanto a função de tensão de Westergaard como solução fundamental. Chang *et al* (2005) usaram o modelo de Dugdale (Dugdale, 1960) e uma forma equivalente da função de tensão de Westergaard para mostrar os efeitos do nível de tensão no tamanho das  $p_z(\theta)_M$ . Entretanto, eles não mostraram nenhuma estimativa de zona plástica a partir desse modelo proposto.

## 2.7. A tentativa de estender a aplicabilidade da MFLE a partir da adição da T-stress

No mesmo trabalho em que investigaram os limites recomendados pela ASTM (1970) para o uso de  $K_I$ , Larsson & Carlsson (1973) adicionaram um termo constante na direção paralela ao plano da trinca (*T-stress*) de tal forma que os resultados numéricos pudessem ser compatíveis com os resultados obtidos a partir do uso exclusivo de  $K_I$  recomendado pela ASTM (1970). Os autores ainda propuseram o uso combinado de  $K_I$  com a *T-stress* para representar a intensidade do campo de tensões em regiões próximas à ponta de trincas. Todavia, anteriormente ao trabalho de Larsson & Carlsson, Irwin (1958) já tinha observado que os experimentos fotoelásticos, que foram feitos por Wells & Post (1958) para medir a intensidade do campo de tensões nas redondezas da ponta de trincas, poderiam ser simulados pelo campo de tensões gerado a partir de  $K_I$  acrescido por uma tensão constante, que atuaria na direção paralela ao plano da trinca.

A partir do trabalho de Larsson & Carlsson (1973), os pesquisadores da área começaram a cogitar a possibilidade de estender os limites de aplicabilidade da MFLE e da MFEP com a adição da *T-stress* na componente de tensão paralela ao plano da trinca. De acordo com essa ideia, dois trabalhos podem ser citados. Primeiramente, Bilby *et al* (1986) concluíram que a adição da *T-stress* na direção paralela ao plano da trinca pode ser utilizada para estender a faixa de validade das soluções analíticas além das condições de EPE. Em seguida, Wang (1993) usou dois parâmetros,  $K_I$  mais *T-stress*, para descrever o campo de tensões nas proximidades das pontas de trincas. Esse estudo foi feito em trincas superficiais de placas tridimensionais.

A necessidade de determinar os valores da *T-stress* para cada novo tipo de geometria e carga ocupou pesquisadores por algum tempo, que inevitavelmente começaram a utilizar os métodos numéricos em seus estudos. Dentro dessa área, citam-se os seguintes trabalhos como referência: Rice (1974), Cardew *et al* (1984), Chen & Tian (2000), Chen *et al* (2001), Karihaloo & Xiao (2001), e Tan & Wang (2003), que tentaram desenvolver métodos numéricos e analíticos para avaliarem os valores da *T-stress* para trincas presentes em corpos com materiais isotrópicos; e Su & Sun (2005), que avaliaram os valores de  $K_I$  e da *T-stress* para várias propriedades de material e para várias orientações de trinca.

Interessados em análises tridimensionais, Nakamura & Parks (1992) desenvolveram um método computacional a partir do MEF para obter a distribuição da *T-stress* ao longo da frente de trincas tridimensionais; Wang & Parks (1992) avaliaram a distribuição da *T-stress* ao longo de uma trinca semi-elíptica em uma placa tridimensional; Zhao *et al* (2001) avaliaram os valores de  $K_I$  e da *T-stress* para trincas de cantos a partir de uma técnica iterativa de integral de domínio. Ambas as técnicas utilizadas nesse trabalho foram desenvolvidas por Nakamura & Parks (1992). Ainda no ambiente de análise tridimensional, Wang (2004) comentou sobre o fato de haver poucos valores de *T-stress* obtidos para problemas tridimensionais.

Outros trabalhos com enfoques analíticos e numéricos que tentaram determinar os valores da *T-stress* são os artigos de Leever & Radon (1982), Kfoury (1986) e Sham (1991), que estudaram a obtenção da *T-stress* apenas para os casos de trincas bidimensionais. Todos esses artigos mostraram que os valores da *T-stress* dependem fortemente do tipo de carga e do comprimento da trinca. Outros trabalhos que podem ser citados ainda dentro desse enfoque são os de Bétegon & Hancock (1991), Du & Hancock (1991) e O'Dowd & Shih (1991). Esses trabalhos indicaram que a adição da *T-stress* no campo HRR fornece melhores resultados na caracterização dos campos elastoplásticos em deformação plana para a ponta de trincas sob várias orientações e sob vários tipos de carga. Ganti & Parks (1997) e Zhang *et al* (1997) investigaram os efeitos da *T-stress* na restrição de trincas contornadas por materiais deformados plasticamente. Ramesh *et al* (1997) expandiram a função de tensão de Westergaard em uma série trigonométrica, o que já tinha sido feito por Williams. A partir dessa série, esses autores avaliaram os efeitos do número de termos da série no campo de tensões. Eles também enfatizaram o importante efeito que a *T-stress* tem na MF.

Dentre os artigos pesquisados neste trabalho relacionados ao estudo da *T-stress*, o que foi considerado como sendo um dos mais completos foi o estudo de Fett (1998). Nesse trabalho, Fett mostrou a parte conceitual da *T-stress* e demonstrou a partir de vários métodos diferentes como obter os valores da *T-stress* para diversas geometrias. Fett utilizou funções de Green e o Método de Contorno do tipo Colocação.

Outros trabalhos interessantes que além de se preocuparem com a obtenção dos valores da *T-stress* também se interessaram em estudar os seus efeitos foram:

o artigo de Kim *et al* (1996) que afirmaram que a *T-stress* afeta o comportamento à fratura, o trabalho de Kang & Beom (2000) que chamaram a atenção para o fato de que a *T-stress* afeta o tamanho das  $p_z(\theta)_M$  sem mudar os efeitos da singularidade presente na ponta das trincas, e a pesquisa de Smith *et al* (2001) que estudaram a influência da *T-stress* na tenacidade à fratura.

## 2.8. Medidas experimentais de zonas plásticas

A partir do que foi estudado neste trabalho, pode-se afirmar que não houve consenso sobre medidas confiáveis das zonas plásticas. Alguns grupos se propuseram a medir zonas plásticas usando técnicas especulares de laser com materiais fotoelásticos. Contudo, outros autores questionaram essas medidas de zonas plásticas. Basicamente, eles argumentaram que devido ao alto gradiente de tensão e deformação, poucas técnicas seriam realmente eficazes para a medição de zonas plásticas na vizinhança de pontas de trincas. Um opinião bem interessante que merece destaque foi feita por Vitvitskii (1975). Ele afirmou que justamente por esse alto gradiente de tensão, as medidas de zonas plásticas feitas até aquele momento eram imprecisas.

Entre os estudos que se propuseram a medir as zonas plásticas, pode-se citar o trabalho de Tay *et al* (1995) que utilizou a técnica especular de laser para medir as  $p_z(\theta)_M$  em espécimes do tipo CCT com níveis de tensão equivalentes ao estado de EPE; o artigo de Yang *et al* (1997) que forneceu algumas fórmulas empíricas para determinar as zonas plásticas em materiais compósitos e o trabalho de Miserez *et al* (2004), que trabalharam com camadas fotoelásticas em materiais compósitos para obter os campos de tensões. Em seguida, a partir desses campos de tensões, Miserez *et al* estimaram as zonas plásticas, que foram comparadas com os seus resultados obtidos pelo MEF e pelo campo de tensões representado pela integral *J*. Uma das mais importantes conclusões desse trabalho foi que os campos de tensões bidimensionais gerados pelo parâmetros *J* e *K* não são suficientes para reproduzir os resultados experimentais.

## 2.9. Conclusão do capítulo

Conforme foi visto ao longo deste capítulo, foram achadas funções de tensão de Westergaard apenas para dois casos de condições de contorno (placa de

Griffith e placa retangular semi infinita com uma trinca central sob tração). Esse fato justifica o uso dos métodos numéricos para a estimativa de zonas plásticas a frente de ponta de trincas. Outro ponto importante, é que a única proposta de correção da singularidade das zonas plásticas encontrada, foi a proposta feita por Irwin (1958) e somente para a direção paralela ao plano da trinca ( $\theta = 0$ ). Nessa proposta Irwin utiliza o Fator de Intensidade de Tensão para representar o campo de tensões.

Quanto à parte experimental da medição de zonas plásticas e a parte numérica da estimativa das zonas plásticas, observou-se que apesar de diversos autores terem se proposto a obter o campo de tensões na proximidade da ponta de trincas, poucas ou praticamente nenhuma medida de zona plástica foi apresentada. Esse fato ressalta a importância de todas as estimativas de zonas plásticas que são apresentadas neste trabalho.

O próximo capítulo mostra como estimar as zonas plásticas a partir da utilização da MFLE.

### 3

## Estimativas de zonas plásticas a partir do uso da Mecânica da Fratura Linear Elástica com os campos de tensões obtidos analiticamente

Como visto nos Capítulos 1 e 2, o campo de tensões linear elástico usado na MFLE pode ser gerado por expressões que usam  $K_I$ , o que corresponde à utilizar a Eq. (2). Também foi comentado no Capítulo 2 que no caso da placa de Griffith, tanto a função de tensão de Westergaard quanto a série de Williams resultam, após algumas simplificações, no  $K_I$ . Entretanto, foi mostrado no Capítulo 1 que ao se utilizar o campo de tensões gerado por  $K_I$  as zonas plásticas para o caso da placa de Griffith são insensíveis à relação  $\sigma_n/S_Y$ . Além disso, a resposta esperada para componente  $\sigma_{yy}$ , que deveria tender para a tensão nominal para pontos afastados da frente da trinca, isto é,  $\sigma_{yy}(K_I, r \rightarrow \infty, \theta = 0) = \sigma_n$ , não é satisfeita. Em vez disso, o resultado obtido é  $\sigma_{yy}(K_I, r \rightarrow \infty, \theta = 0) = 0$ . Por esses motivos, este capítulo avalia as estimativas de zonas plásticas feitas a partir do uso dos campos de tensões obtidos  $K_I$ ,  $K_I$  com adição da  $T$ -stress, pela série de Williams e pela função de tensão de Westergaard.

Todas essas informações sobre os campos de tensões e sobre as zonas plásticas obtidas a partir de uma abordagem analítica são tratadas neste capítulo, que é dividido em sete seções. A primeira seção mostra como o campo de tensões é determinado a partir de  $K_I$ . A segunda seção apresenta a proposta de estender o uso da MFLE a partir da adição da  $T$ -stress na componente  $\sigma_{xx}$  que é obtida a partir do campo de tensões determinado por  $K_I$ . A terceira seção explica como obter o campo de tensões a partir da função de tensão de Westergaard. A quarta seção mostra como utilizar a série de Williams para representar o campo de tensões. A quinta seção explica como utilizar o Método dos Mínimos Quadrados para ajustar o campo de tensões obtido pela série de Williams ao campo de tensões determinado pela função de tensão de Westergaard. A sexta seção mostra em termos de estimativa de zonas plásticas como a  $T$ -stress corresponde ao primeiro termo constante de ordem zero da série de Williams, e que, por isso

mesmo, não representa a solução completa do campo de tensões. A sétima seção faz alguns comentários importantes sobre as estimativas analíticas das zonas plásticas a partir dos quatro campos de tensões utilizados pela MFLE.

### 3.1. Campo de tensões gerado a partir de expressões que utilizam o $K_I$

Ao se usar a Eq. (2) para representar o campo de tensões na placa de Griffith, a resposta esperada para a componente  $\sigma_{yy}$  em regiões longe da ponta da trinca, que é  $\sigma_{yy}(K_I, r \rightarrow \infty, \theta = 0) = \sigma_n$ , não é encontrada. Em vez disso, obtém-se  $\sigma_{yy}(K_I, r \rightarrow \infty, \theta = 0) = 0$ , o que é um erro. Quanto a estimativa das zonas plásticas, foi visto que elas são insensíveis à relação  $\sigma_n/S_Y$ , conforme se viu na Figura 4 e na Figura 5 do Capítulo 1.

### 3.2. Campo de tensões gerado a partir de expressões que utilizam $K_I$ com adição da $T$ -stress

Como visto anteriormente no Capítulo 2, o termo  $T$ -stress foi proposto primeiramente por Irwin (1958) para ajustar resultados experimentais fotoelásticos feitos por Wells & Post (1958). Larsson & Carlsson (1973), que investigaram os limites recomendados pela ASTM (1970) para o uso de  $K_I$ , disseram que a adição da  $T$ -stress na componente  $\sigma_{xx}$  ajustava as formas das zonas plásticas obtidas a partir de uma análise linear elástica com as formas das zonas plásticas obtidas a partir de uma análise não linear com elementos finitos. A adição da  $T$ -stress no campo linear elástico pode ser visto na Eq. (26):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{Bmatrix} 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} T_{stress} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (26)$$

A  $T$ -stress pode ser interpretada como o termo constante de ordem zero na série de Williams, conforme é visto na subseção 3.6. Entretanto, apesar de mudar a forma das zonas plásticas e de fazer com que elas fiquem sensíveis à relação  $\sigma_n/S_Y$ , a solução linear elástica gerada por  $K_I$  mais  $T$ -stress não é completa por não reproduzir as condições de contorno e nem satisfazer a resposta esperada para a

componente  $\sigma_{yy}$ . Como exemplo, cita-se o caso da placa de Griffith em que a resposta  $\sigma_{yy}^{\infty} = \sigma_n$  não é encontrada.

Os efeitos da adição da *T-stress* no tamanho e forma das zonas plásticas podem ser vistos no exemplo de um disco circular com uma trinca interna. Esse exemplo mostra que as zonas plásticas obtidas a partir do campo gerado por  $K_I$  mais *T-stress* são sensíveis à relação  $\sigma_n/S_Y$  e aos parâmetros geométricos, como a relação entre o comprimento da trinca e o diâmetro do disco.

### 3.2.1. Disco circular com uma trinca interna

A Figura 8 mostra um disco circular com uma trinca interna de comprimento  $2a$  sob uma pressão interna constante de valor igual a  $\sigma_n$  e com um diâmetro igual a  $2R$ .

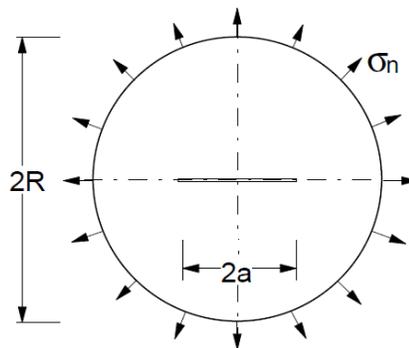


Figura 8 – Disco circular com uma trinca interna (adaptada de Fett, 1998).

Fett (1998) apresentou a Eq. (27) que fornece os valores da *T-stress* para o caso do disco circular com uma trinca interna. Os valores da *T-stress* dependem de  $\sigma_n$  e da relação  $a/R$ .

$$T_{stress} = \sigma_n \frac{-1 + a/R - 2.34a/R^2 + 4.27^3 - 3.326a/R^4 + 0.9824^5}{1 - a/R}. \quad (27)$$

Os valores de  $K_I$  para o caso do disco circular com uma trinca interna podem ser obtidos por:

$$K_I = \sigma_n \sqrt{\pi a} F(a/R), \quad (28)$$

em que os valores de  $F(a/R)$  são obtidos no trabalho de Tada *et al* (1985), conforme a Tabela 1.

Tabela 1 – Valores de  $F(a/R)$  dependentes da relação  $a/R$  (Tada *et al*, 1985).

$a/R$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
$F(a/W)$	1.000	1.022	1.062	1.135	1.252
$a/R$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$F(a/W)$	1.393	1.513	1.597	2.236	3.036

Os valores de  $K_I$  também dependem de  $\sigma_n$  e da relação  $a/R$ . Com os valores de  $K_I$  obtidos a partir da Tabela 1 e da Eq. (28) somados aos valores da  $T$ -stress obtidos pela Eq. (27), pode-se estimar as zonas plásticas para o caso do disco circular com uma trinca interna. As zonas plásticas  $p_z(\theta)_M$  sob a influência de  $K_I$  mais  $T$ -stress são mostradas na Figura 9 para o caso de tensão plana ( $p_z(\theta)_{M,pl-\sigma}^{K_I+T}$ ), para relações de  $a/R$  iguais à 0,4 e a 0,5 e para razões de  $\sigma_n/S_Y$  iguais à 0,2 e 0,8.

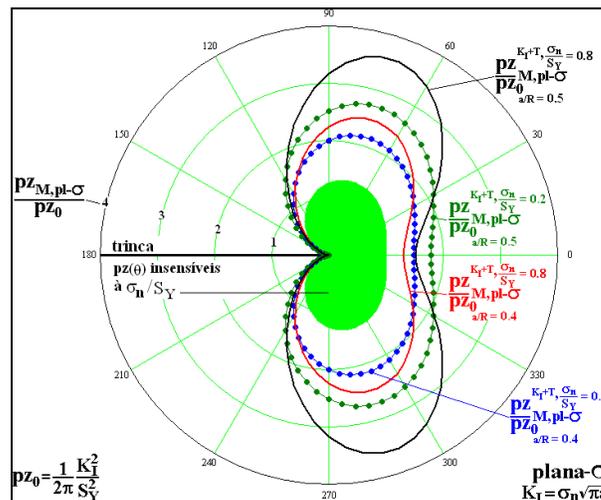


Figura 9 – Zonas plásticas estimadas para o exemplo do disco circular com uma trinca interna, em que o campo de tensões é obtido a partir de  $K_I$  mais  $T$ -stress, Eq. (26), sob condições de tensão plana ( $p_z(\theta)_{M,pl-\sigma}^{K_I+T}$ ).

A Figura 10 refere-se ao caso de deformação plana ( $p_z(\theta)_{M,pl-\epsilon}^{K_I+T}$ ).

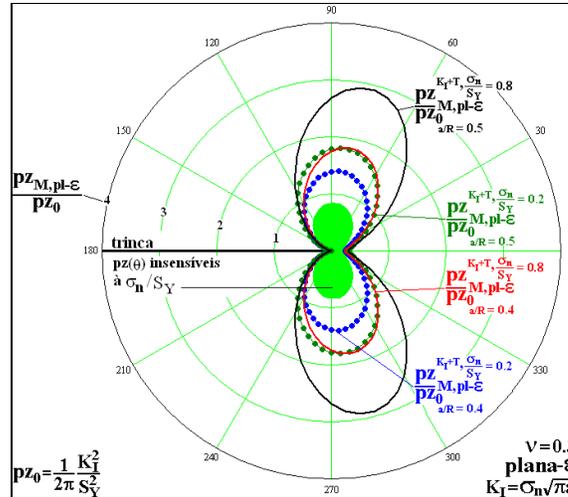


Figura 10 – Zonas plásticas estimadas para o exemplo do disco circular com uma trinca interna, em que o campo de tensões é obtido a partir de  $K_I$  mais  $T$ -stress, Eq. (26), sob condições de deformação plana  $(p_z(\theta)_{M,pl-\epsilon}^{K_I+T})$ .

Ao se analisar a Figura 9 e a Figura 10, é possível ver que com a adição da  $T$ -stress na componente  $\sigma_{xx}$ , as  $p_z(\theta)_M$  se tornam sensíveis à relação  $\sigma_n/S_Y$  e aos parâmetros geométricos. O efeito de  $\sigma_n/S_Y$  pode ser visto ao se fixar  $a/R = 0,4$  ou  $0,5$ . Em seguida, para cada valor de  $a/R$  adotado, aumenta-se  $\sigma_n/S_Y$  de  $0,2$  a  $0,8$ . De maneira semelhante, o efeito de  $a/R$  pode ser visto ao se fixar  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  ou  $0,8$ . Em seguida, aumenta-se  $a/R$  de  $0,4$  a  $0,5$ . Tem-se como resultado, que as zonas plásticas aumentam tanto com o aumento de  $\sigma_n/S_Y$  quanto com o aumento de  $a/R$ , conforme foi observado por Irwin (1958).

### 3.3. Campo de tensões gerado a partir da função de tensão de Westergaard

De acordo com a revisão bibliográfica feita neste trabalho, apenas dois tipos de funções de tensão de Westergaard foram encontradas. Uma para o caso da placa de Griffith, que foi mostrada na Eq. (15) e outra para o caso de uma placa retangular semi infinita com uma trinca central, cuja função de tensão de Westergaard é dada pela Eq. (29):

$$Z_{RetPlaca} = \frac{\sigma_n \sin\left(\frac{z\pi}{W}\right) \left[ \frac{a\pi}{W} \csc\left(\frac{a\pi}{W}\right) \right]^{0,5}}{\left[ \sin^2\left(\frac{z\pi}{W}\right) - \sin^2\left(\frac{a\pi}{W}\right) \right]^{0,5}}, \quad (29)$$

que foi apresentada por Efits & Liebowitz (1972). É importante mencionar que essa função é aproximada e que por isso, ela tem um limite de validade estabelecido para  $(a\pi/W \ll 0,3)$ , em que  $W$  é a largura da placa.

O campo de tensões para a placa de Griffith e para a placa retangular semi infinita é dado pela Eq. (16), Eq. (17), e Eq. (18). Para os dois exemplos, quando se tem o caso uniaxial, é necessário que se adicione  $-\sigma_n$  na componente  $\sigma_{xx}$ , de tal forma que se force a obtenção das respostas esperadas. Para o caso da placa de Griffith, o que se espera para o caso uniaxial é  $\sigma_{xx}(x = \infty) = 0$ . Para o caso da placa retangular com trinca central a resposta esperada é  $\sigma_{xx}(x = W) = 0$ .

Nos dois exemplos, o campo de tensões obtido a partir  $K_I$  mais  $T-stress$ , embora resulte em zonas plásticas sensíveis à  $\sigma_n/S_y$  e aos parâmetros geométricos, não é a solução linear elástica completa, pois a componente  $\sigma_{yy}$  gerada por esse campo de tensões não reproduz a resposta esperada no contorno. Em contrapartida, a solução obtida a partir da função de tensão de Westergaard satisfaz todas as condições de contorno e todas as respostas esperadas das componentes de tensão nos bordos das peças.

Em relação às estimativas das zonas plásticas, os resultados gerados pela função de tensão de Westergaard são praticamente idênticos aos resultados gerados pelo campo de tensões obtido por  $K_I$  mais  $T-stress$  para baixos níveis de tensão. Para níveis de tensão maiores que 0,2; os resultados das estimativas das zonas plásticas obtidos a partir da função de tensão de Westergaard são menores que os resultados gerados pelo campo de tensões obtido por  $K_I$  mais  $T-stress$ .

A placa de Griffith uniaxialmente carregada, que já foi estudada por Rodriguez (2007), será o primeiro exemplo em que se mostra os efeitos da relação  $\sigma_n/S_y$  nas estimativas das zonas plásticas. Em seguida, apresentam-se as estimativas das zonas plásticas para o caso da placa retangular com uma trinca central, em que se usa a função de tensão de Westergaard representada pela Eq. (29).

### 3.3.1. Placa de Griffith uniaxialmente carregada

A Figura 11 mostra a placa de Griffith uniaxialmente carregada.

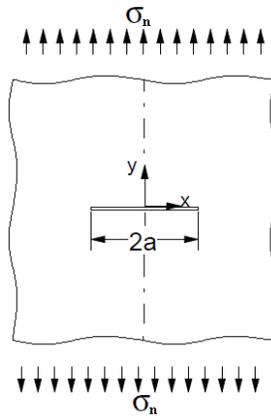


Figura 11 – Placa de Griffith uniaxialmente carregada.

A Figura 12 mostra as estimativas das zonas plásticas para o caso da placa de Griffith sob tensão plana ( $pZ_{M,pl-\sigma}^{Wtg}$ ) com os valores de  $\sigma_n/S_Y$  iguais à 0,2; 0,4; 0,6; 0,7 e 0,8.

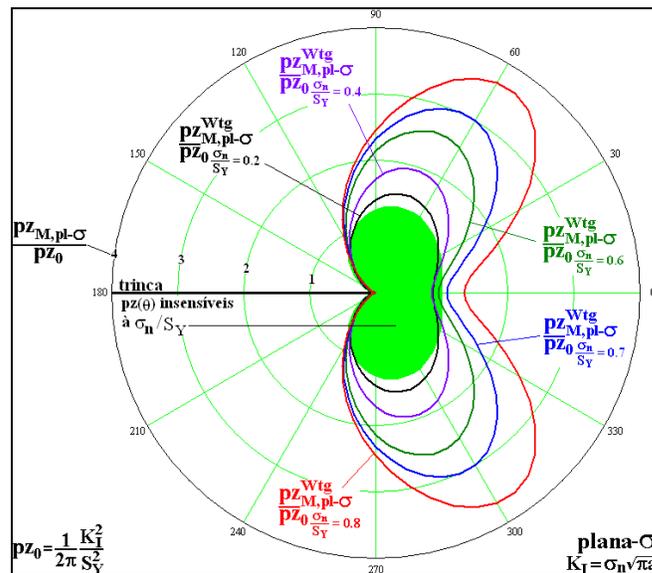


Figura 12 – Zonas plásticas  $pz(\theta)_M$  estimadas para o caso da placa de Griffith sob tensão plana e com  $\sigma_n/S_Y = 0,2; 0,4; 0,6; 0,7$  e  $0,8$ .

A Figura 13 mostra as estimativas das zonas plásticas para o caso da placa de Griffith sob deformação plana ( $pZ_{M,pl-\varepsilon}^{Wtg}$ ) com os valores de  $\sigma_n/S_Y$  iguais à 0,2; 0,4; 0,6; 0,7 e 0,8.

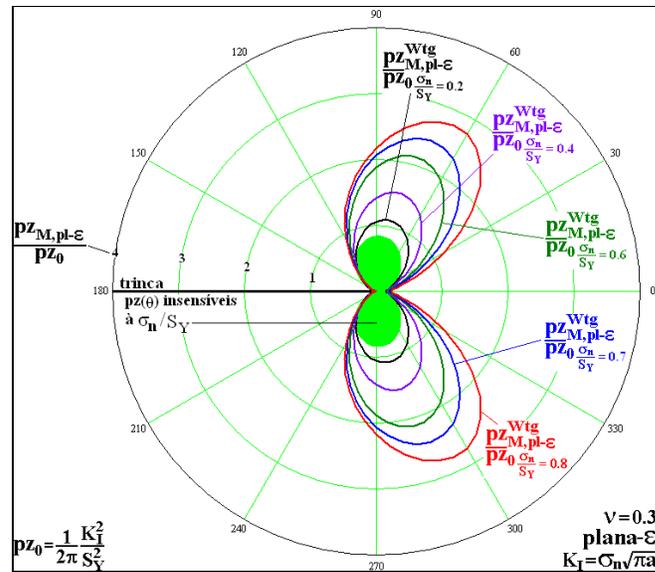


Figura 13 – Zonas plásticas  $p_z(\theta)_M$  estimadas para o caso da placa de Griffith sob deformação plana e com  $\sigma_n/S_Y = 0,2; 0,4; 0,6; 0,7$  e  $0,8$ .

Ao se analisar a Figura 12 e a Figura 13, percebe-se que a medida que o valor  $\sigma_n/S_Y$  aumenta, as zonas plásticas aumentam de tamanho.

### 3.3.2. Placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central

A Figura 14 mostra uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central, cujo comprimento é igual a  $2a$  e que tem uma carga distribuída que gera uma tensão nominal de valor igual a  $\sigma_n$ , com uma largura de  $W$ .

Nesse exemplo, mostra-se que as zonas plásticas correspondentes ao exemplo da placa retangular semi infinita com  $a/W = 0,025$  reproduzem os resultados de zonas plásticas obtidas para o caso da placa de Griffith. Em seguida, mostra-se o efeito dos parâmetros geométricos, tal como o ligamento residual. Para tanto, comparam-se as estimativas de zonas plásticas correspondentes à três valores de  $a/W$ :  $a/W = 0,025$ ;  $a/W = 0,05$  e para  $a/W = 0,091$ . Todos os valores estão dentro do limite de validade da função de tensão da placa retangular semi infinita com uma trinca central.

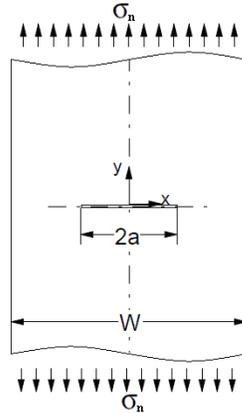


Figura 14 – Placa retangular semi infinita com uma trinca central.

A Figura 15 mostra que para  $a/W = 0,025$  as zonas plásticas sob tensão plana para a placa retangular semi infinita com uma trinca central ( $pZ_{M,pl-\sigma}^{Wtg,a/W}$ ) são praticamente iguais às zonas plásticas para o caso da placa de Griffith ( $pZ_{M,pl-\sigma}^{Wtg}$ ).

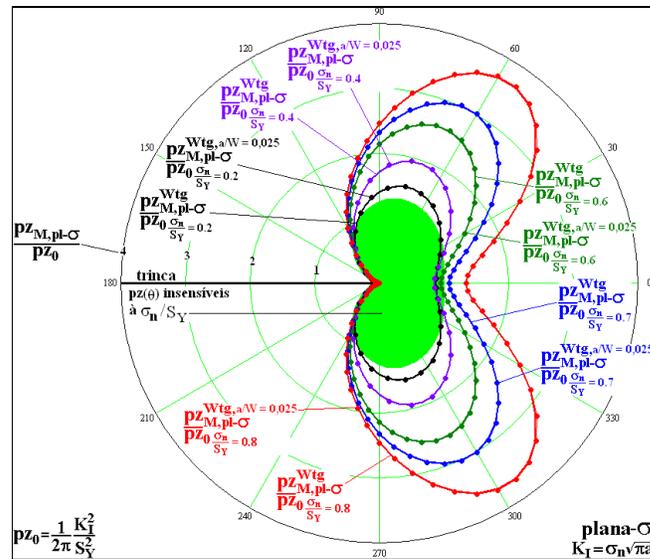


Figura 15 – Zonas plásticas estimadas para uma placa retangular semi infinita com  $a/W = 0,025$  e para a placa de Griffith sob tensão plana para  $\sigma_n/S_y = 0,2; 0,4; 0,6; 0,7$  e  $0,8$ .

A Figura 16 mostra que para  $a/W = 0,025$  as zonas plásticas sob deformação plana para a placa retangular semi infinita com uma trinca central ( $pZ_{M,pl-\epsilon}^{Wtg,a/W}$ ) são praticamente iguais às zonas plásticas para o caso da placa de Griffith ( $pZ_{M,pl-\epsilon}^{Wtg}$ ).

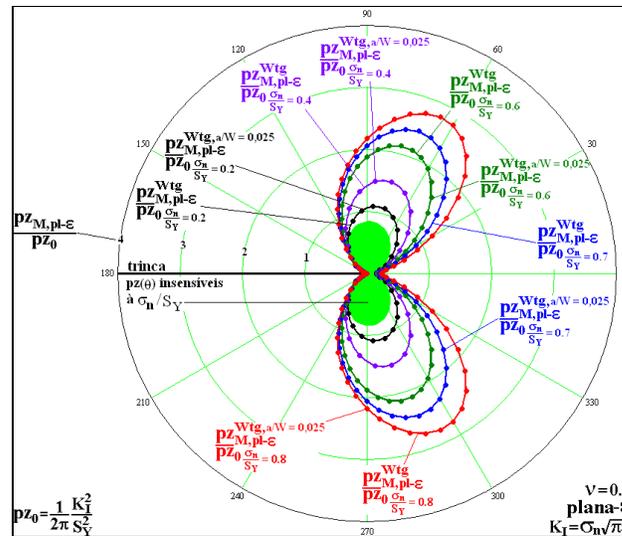


Figura 16 – Zonas plásticas estimadas para uma placa retangular semi infinita com  $a/W = 0,025$  e para a placa de Griffith sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,2; 0,4; 0,6; 0,7$  e  $0,8$ .

A Figura 17 mostra as estimativas das zonas plásticas para o caso da placa retangular semi infinita com uma trinca central sob tensão plana para  $a/W = 0,025$ ;  $a/W = 0,05$  e para  $a/W = 0,091$ .

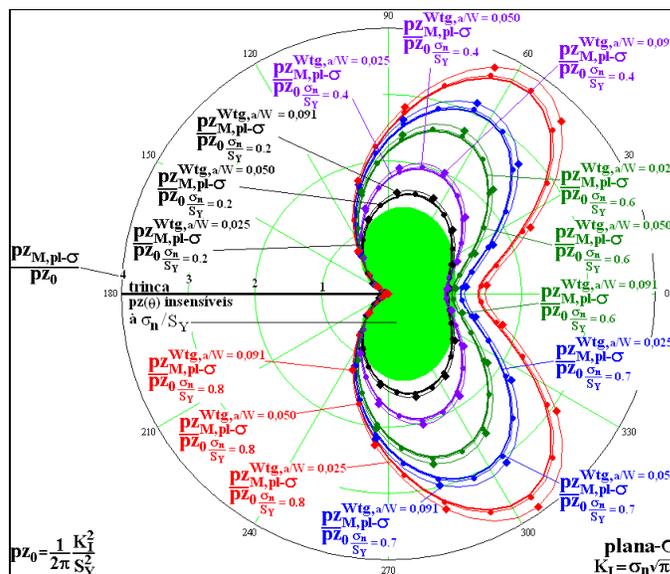


Figura 17 – Zonas plásticas estimadas para uma placa retangular semi infinita com  $a/W = 0,025$ ;  $0,05$  e  $0,091$  e para a placa de Griffith sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,2; 0,4; 0,6; 0,7$  e  $0,8$ .

A Figura 18 mostra as estimativas das zonas plásticas para o caso da placa retangular semi infinita com uma trinca central sob deformação plana para  $a/W = 0,025$ ;  $a/W = 0,05$  e para  $a/W = 0,091$ .

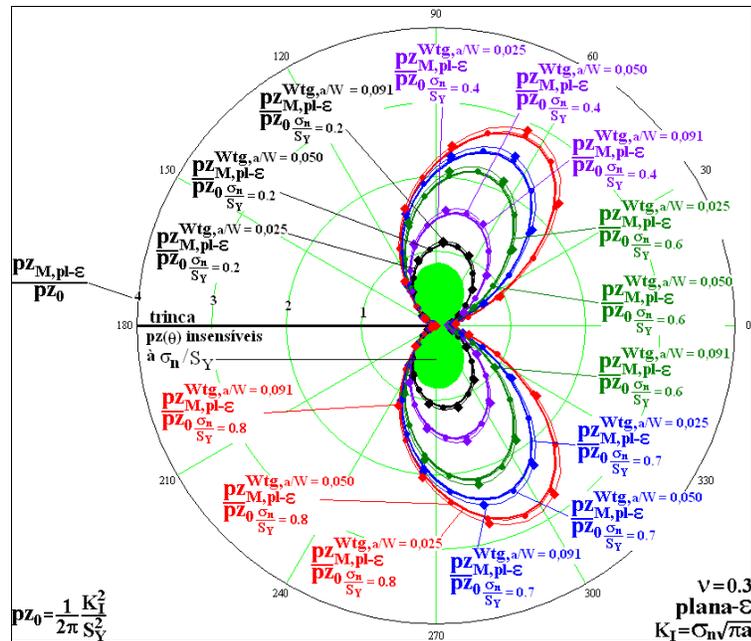


Figura 18 – Zonas plásticas estimadas para uma placa retangular semi infinita com  $a/W = 0,025$ ; 0,05 e 0,091 e para a placa de Griffith sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ ; 0,4; 0,6; 0,7 e 0,8.

Ao se analisar a Figura 17 e a Figura 18, percebe-se, em ambos os estados planos, que a medida que se aumenta a relação  $a/W$ , o que corresponde à diminuir o ligamento residual, as zonas plásticas aumentam de tamanho. Esse resultado já era esperado, pois à medida que o ligamento residual diminui, a tensão aumenta nessa regiões, gerando, conseqüentemente, uma maior zona de plastificação.

Uma outra observação bastante importante, é que as zonas plásticas estimadas para  $a/W = 0,05$  são bem próximas das zonas plásticas obtidas para  $a/W = 0,025$  que por sua vez reproduzem as zonas plásticas correspondentes à placa de Griffith. A próxima subseção avalia os efeitos da  $T-stress$  nas estimativas das zonas plásticas para o caso de uma placa retangular com uma trinca central. Juntamente com essas estimativas geradas a partir do campo de tensões obtido por  $K_I$  mais  $T-stress$ , também se avalia as zonas plásticas geradas pelo campo de tensões obtido a partir função de tensão de Westergaard. Com isso, é possível ver que a partir de um determinado nível de tensão, as zonas plásticas geradas por  $K_I$  mais  $T-stress$  não reproduzem as estimativas obtidas a partir da função de tensão de Westergaard, que é a solução linear elástica para corpos trincados.

### 3.3.3. Placa retangular com uma trinca central

A Figura 19 mostra uma placa retangular com uma trinca central, cujo comprimento da trinca é igual a  $2a$  e que tem uma carga distribuída que gera uma tensão nominal de valor igual a  $\sigma_n$ , com uma largura de  $2W$  e com uma altura de  $2H$ .

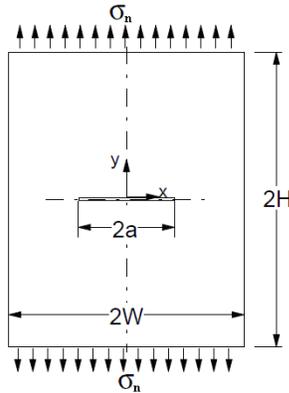


Figura 19 – Placa retangular com uma trinca central.

Como visto na seção anterior, os valores de  $a/W = 0,05$  para placa retangular semi infinita com uma trinca central geram estimativas de zonas plásticas praticamente iguais aos resultados obtidos para o caso da placa de Griffith. É importante observar que para o caso da placa retangular semi infinita com uma trinca central, a largura da placa foi definida por  $W$ . Já para o caso da placa retangular com uma trinca central, a largura é definida por  $2W$ . Dessa forma, os resultados obtidos para  $a/W = 0,05$  para o caso da placa retangular semi infinita com uma trinca central correspondem à  $a/W = 0,1$  para o caso da placa retangular com uma trinca central.

Fett (1998) apresentou a Eq. (30) em que se obtém os valores da  $T$ -stress em função da tensão nominal  $\sigma_n$ , da relação  $a/W$  e de  $\gamma$  para uma placa retangular com uma trinca interna:

$$T_{stress} = \frac{\sigma_n \gamma}{(1 + a/W)}, \quad (30)$$

em que o parâmetro  $\gamma$  depende da relação  $H/W$  e é obtido pela Tabela 2, de acordo com o que foi mostrado por Fett (1998). Como se pretende simular nesse exemplo o caso da placa retangular semi infinita com uma trinca central, usa-se o maior valor da relação  $H/W$  apresentado por Fett, que corresponde à  $H/W = 1,25$ .

Tabela 2 – Valores de  $\gamma$  dependentes da relação  $a/W$  e  $H/W$  (Fett, 1998).

$a/W$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$H/W = 1,25$	-1,0	-0,9	-0,83	-0,777	-0,716	-0,656
$a/W$	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
$H/W = 1,25$	-0,596	-0,53	-0,47	-0,43	-0,413	

Os valores de  $K_I$  para a placa retangular com trinca central também podem ser obtidos pela Eq. (28). A diferença entre os dois casos é que para o caso da placa retangular, os valores de  $F(a/W)$  são dadas pela Tabela 3, conforme mostrado por Tada *et al* (1985).

Tabela 3 – Valores de  $F(a/W)$  dependentes da relação  $a/W$  (Tada *et al*, 1985).

$a/W$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
$F(a/W)$	1.0000	1.0060	1.0246	1.0577	1.1094
$a/W$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$F(a/W)$	1.1867	1.3033	1.4882	1.8160	2.5776

O próximo passo é estudar as estimativas das zonas plásticas a partir dos três campos de tensões, que são: campo de tensões gerado por  $K_I$  ( $p_z(\theta)_M^{K_I}$ ), campo de tensões obtido por  $K_I$  mais  $T$ -stress ( $p_z(\theta)_M^{K_I+T}$ ) e pela função de tensão de Westergaard ( $p_z(\theta)_M^{Wtg}$ ). A Figura 20 mostra as zonas plásticas  $p_z(\theta)_M$  estimadas sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  e para  $a/W = 0,1$  e  $0,2$ .

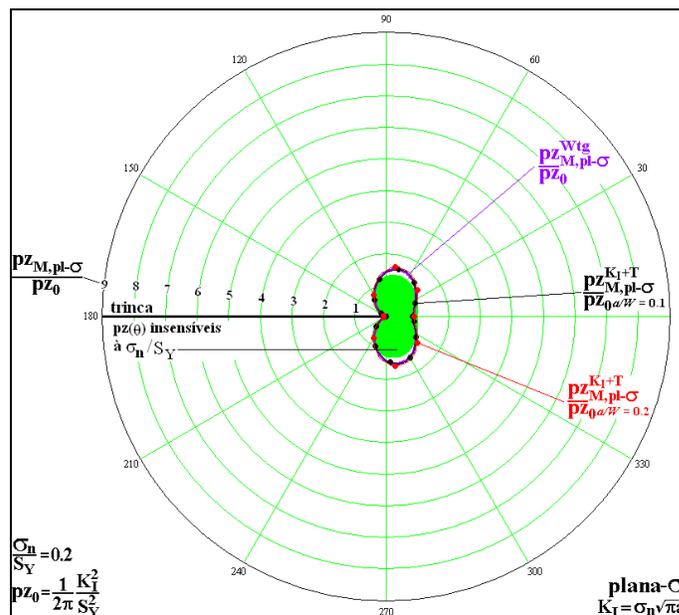


Figura 20 – Zonas plásticas  $p_z(\theta)_M$  estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob tensão plana com  $a/W = 0,1$  e  $0,2$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ .

A Figura 21 mostra as zonas plásticas  $pz(\theta)_M$  estimadas sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  e para  $a/W = 0,1$  e  $0,2$ .

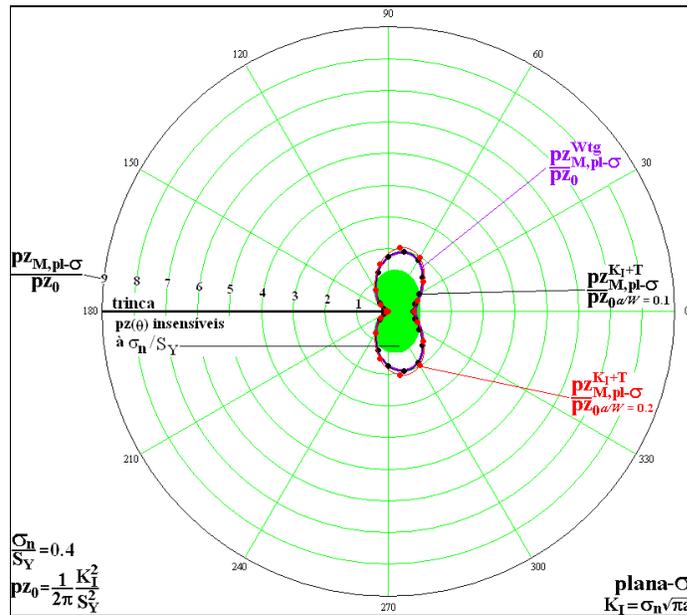


Figura 21 – Zonas plásticas  $pz(\theta)_M$  estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob tensão plana com  $a/W = 0,1$  e  $0,2$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

A Figura 22 mostra as zonas plásticas  $pz(\theta)_M$  estimadas sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$  e para  $a/W = 0,1$  e  $0,2$ .

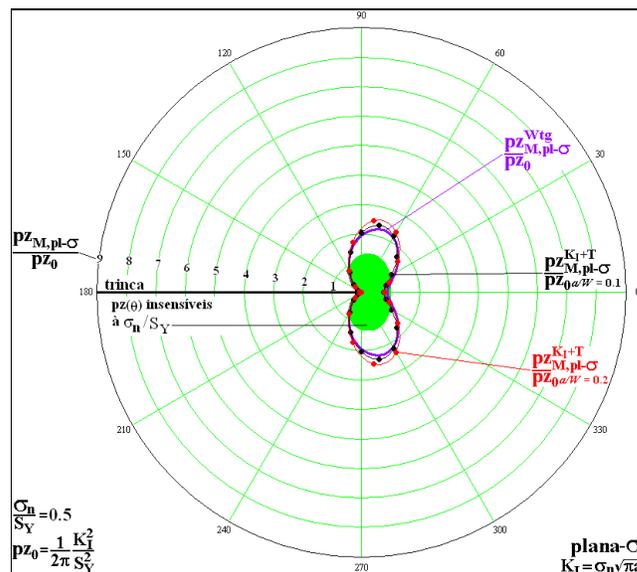


Figura 22 – Zonas plásticas  $pz(\theta)_M$  estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob tensão plana com  $a/W = 0,1$  e  $0,2$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .

A Figura 23 mostra as zonas plásticas  $pz(\theta)_M$  estimadas sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  e para  $a/W = 0,1$  e  $0,2$ .

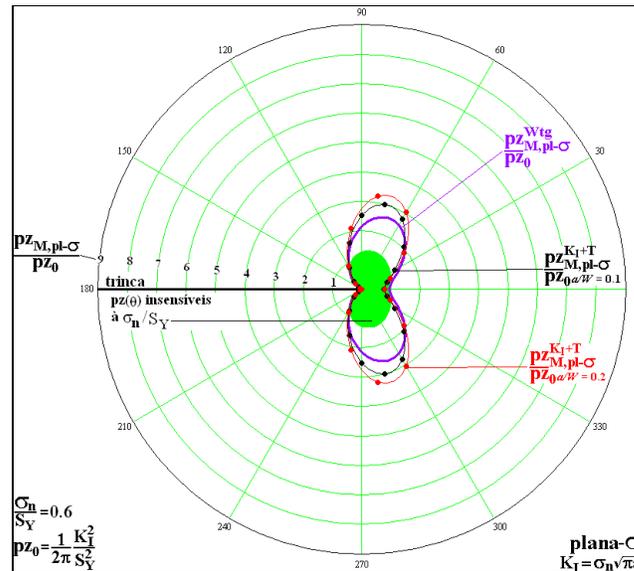


Figura 23 – Zonas plásticas  $pz(\theta)_M$  estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob tensão plana com  $a/W = 0,1$  e  $0,2$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ .

A Figura 24 mostra as zonas plásticas  $pz(\theta)_M$  estimadas sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  e para  $a/W = 0,1$  e  $0,2$ .

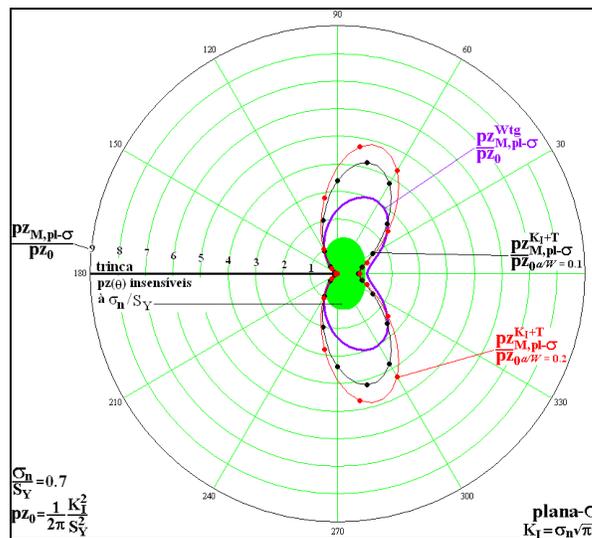


Figura 24 – Zonas plásticas  $pz(\theta)_M$  estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob tensão plana com  $a/W = 0,1$  e  $0,2$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ .

A Figura 25 mostra as zonas plásticas  $pz(\theta)_M$  estimadas sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  e para  $a/W = 0,1$  e  $0,2$ .

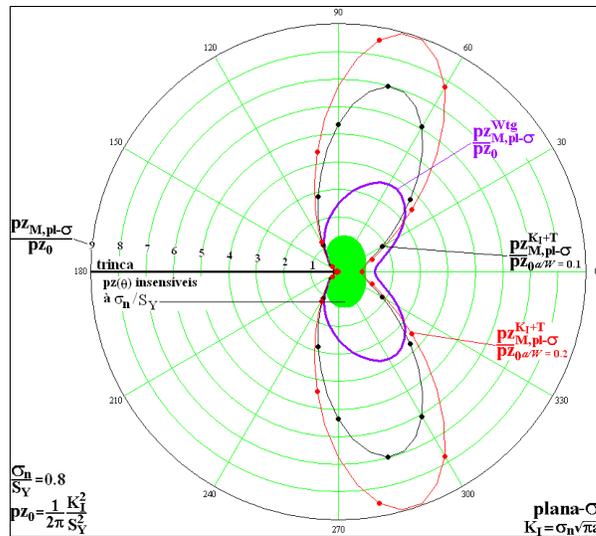


Figura 25 – Zonas plásticas  $p z(\theta)_M$  estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob tensão plana com  $a/W = 0,1$  e  $0,2$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ .

A Figura 26 mostra as zonas plásticas  $p z(\theta)_M$  estimadas sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  e para  $a/W = 0,1$  e  $0,2$ .

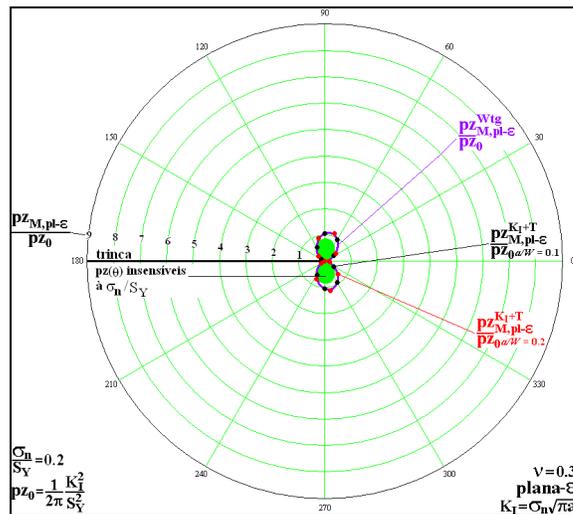


Figura 26 – Zonas plásticas  $p z(\theta)_M$  estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob deformação plana com  $a/W = 0,1$  e  $0,2$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ .

A Figura 27 mostra as zonas plásticas  $p z(\theta)_M$  estimadas sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  e para  $a/W = 0,1$  e  $0,2$ .



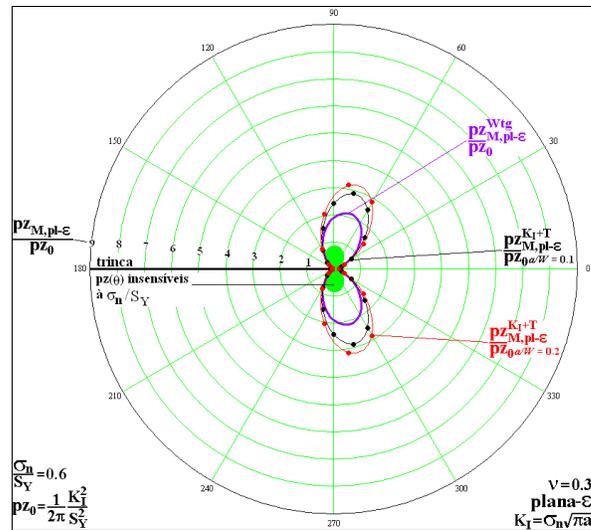


Figura 29 – Zonas plásticas  $p_z(\theta)_M$  estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob deformação plana com  $a/W = 0,1$  e  $0,2$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ .

A Figura 30 mostra as zonas plásticas  $p_z(\theta)_M$  estimadas sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  e para  $a/W = 0,1$  e  $0,2$ .

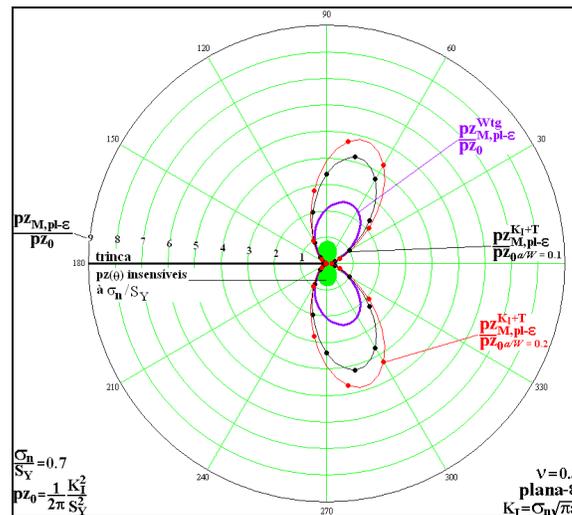


Figura 30 – Zonas plásticas  $p_z(\theta)_M$  estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob deformação plana com  $a/W = 0,1$  e  $0,2$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ .

A Figura 31 mostra as zonas plásticas  $p_z(\theta)_M$  estimadas sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  e para  $a/W = 0,1$  e  $0,2$ .

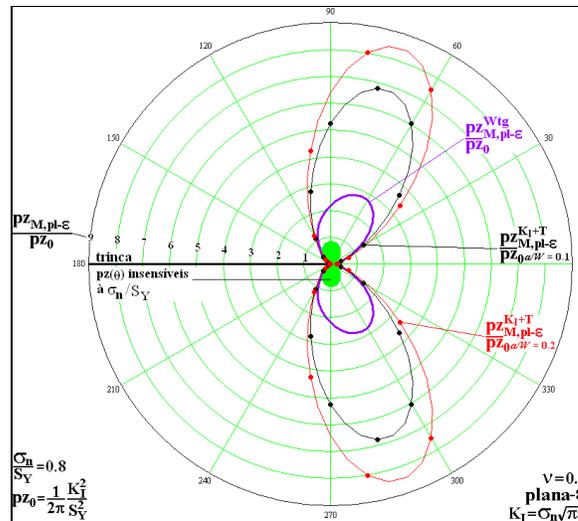


Figura 31 – Zonas plásticas  $p_z(\theta)_M$  estimadas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob deformação plana com  $a/W = 0,1$  e  $0,2$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ .

É possível observar nas doze figuras anteriores que a adição da *T-stress* na componente  $\sigma_{xx}$  obtida a partir  $K_I$  consegue capturar os efeitos da relação  $\sigma_n/S_Y$  no tamanho e forma das zonas plásticas, conforme já tinha sido visto no exemplo do disco circular com um trinca interna. Além disso, essas figuras mostram que os efeitos  $\sigma_n/S_Y$  também podem ser identificados ao se utilizar o campo de tensões gerado pela função de tensão de Westergaard. Os efeitos dos parâmetros geométricos também podem ser vistos nessas figuras pelos dois valores  $a/W$  utilizados, pois de acordo com o que era esperado, as zonas plásticas  $p_z(\theta)_M$  correspondentes à  $a/W = 0,1$  são menores que as zonas plásticas  $p_z(\theta)_M$  correspondentes à  $a/W = 0,2$ . O fato das zonas plásticas correspondentes à  $a/W = 0,1$  serem menores que as zonas plásticas correspondentes à  $a/W = 0,2$  ocorre independentemente do valor de  $\sigma_n/S_Y$ .

Também é importante observar que para baixos níveis de tensão,  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  e  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  por exemplo, as zonas plásticas obtidas a partir do campo de tensões gerado por  $K_I$  mais *T-stress* são bem semelhantes às zonas plásticas obtidas a partir do campo de tensões gerado pela função de tensão de Westergaard. Entretanto, quando o valor  $\sigma_n/S_Y$  cresce, a diferença entre as duas estimativas aumenta, e as zonas plásticas obtidas a partir do campo de tensões gerado por  $K_I$  mais *T-stress* são maiores que as zonas plásticas geradas pelo campo de tensões obtido pela função de tensão de Westergaard.

### 3.4. O campo de tensões gerado pela série de Williams

É muito importante comentar que a demonstração utilizada nesta subseção foi retirada do trabalho de Lopes (2002), que é co-orientador deste trabalho.

Williams apresentou uma forma diferente para a Eq. (19):

$$\Phi = r^{\lambda+1} \begin{bmatrix} c_1 \sin[(\lambda+1)\theta^*] + c_2 \cos[(\lambda+1)\theta^*] \\ c_3 \sin[(\lambda-1)\theta^*] + c_4 \cos[(\lambda-1)\theta^*] \end{bmatrix}, \quad (31)$$

em que  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$  são constantes e  $\lambda$  é um expoente que deve ser determinado conforme as condições de contorno do problema. A Eq. (31) pode ser reescrita em uma forma mais compacta, de acordo com o que mostra a Eq. (32):

$$\Phi = r^{\lambda+1} F(\theta^*, \lambda). \quad (32)$$

Para que  $\Phi$  seja uma função de tensão, é necessário que ela satisfaça a Eq. (33):

$$\nabla^4 \Phi(r, \theta^*) = 0, \quad (33)$$

sendo que as componentes de tensão podem ser obtidas conforme mostra a Eq (34):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^{*2}} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta^*} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta^*} \end{Bmatrix}, \quad (34)$$

em que, por simplicidade, tem-se que  $\Phi = \Phi(r, \theta^*)$ .

Ao se substituir a função de tensão proposta por Williams, Eq. (31) ou Eq. (32), na Eq. (34), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = r^{\lambda-1} \begin{Bmatrix} F''(\theta^*) + (\lambda+1)F(\theta^*) \\ \lambda(\lambda+1)F(\theta^*) \\ -\lambda F'(\theta^*) \end{Bmatrix}, \quad (35)$$

em que  $F'(\theta^*)$  é a derivada de  $F$  com respeito a  $\theta^*$ . Para que a condição de superfície livre seja satisfeita nas faces da trinca, é necessário que:

$$\sigma_{\theta\theta}(0) = \sigma_{\theta\theta}(2\pi) = \sigma_{r\theta}(0) = \sigma_{r\theta}(2\pi) = 0, \quad (36)$$

implicando em:

$$F(0) = F(2\pi) = F'(0) = F'(2\pi) = 0. \quad (37)$$

Na solução geral da Eq. (31) as constantes não são nulas, as condições de contorno descritas pela Eq. (37) são satisfeitas se:

$$\sin(2\pi\lambda) = 0, \quad (38)$$

com

$$\lambda = \frac{n}{2}, \quad (39)$$

em que  $n = 1, 2, 3, \dots$

Ao se substituir a Eq. (37) e a Eq. (39) na Eq. (31), se elimina duas constantes, tendo-se como resultado a Eq. (40):

$$\Phi = r^{\frac{n}{2}+1} \left\{ \begin{array}{l} c_3 \left[ \sin \left[ \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \theta^* \right] - \frac{n-2}{n+2} \sin \left[ \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \theta^* \right] \right] + \\ c_4 \left[ \cos \left[ \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \theta^* \right] - \cos \left[ \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \theta^* \right] \right] \end{array} \right\}. \quad (40)$$

Ao se escrever  $\theta = \theta^* - \pi$  e  $n = 1$  na Eq. (40), tem-se que:

$$\Phi = r^{\frac{3}{2}} \left[ s_1 \left[ -\cos \left( \frac{\theta}{2} \right) - \frac{1}{3} \cos \left( \frac{3\theta}{2} \right) \right] + t_1 \left[ -\sin \left( \frac{\theta}{2} \right) - \sin \left( \frac{3\theta}{2} \right) \right] \right] + s_2 r^2 [1 - \cos(2\theta)] + \dots, \quad (41)$$

em que  $s_i$  e  $t_i$  são constantes que precisam ser definidas ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ). A troca de variável de  $\theta^*$  para  $\theta$  é importante para que se possa relacionar os termos da Eq. (40) com os termos de  $K$ . Ao se substituir a Eq. (41) na Eq. (34), obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{array} \right\} = \frac{1}{4\sqrt{r}} \left\{ \begin{array}{l} s_1 \left[ -5 \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) + \cos \left( \frac{3\theta}{2} \right) \right] + \\ s_1 \left[ -3 \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) - \cos \left( \frac{3\theta}{2} \right) \right] + \\ s_1 \left[ -\sin \left( \frac{\theta}{2} \right) - \sin \left( \frac{3\theta}{2} \right) \right] + \\ t_1 \left[ -5 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) + 3 \sin \left( \frac{3\theta}{2} \right) \right] \\ t_1 \left[ -3 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) - 3 \sin \left( \frac{3\theta}{2} \right) \right] \\ t_1 \left[ \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) + 3 \cos \left( \frac{3\theta}{2} \right) \right] \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right\}, \quad (42)$$

As constantes  $s_1$  e  $t_1$  podem ser relacionadas aos modos I e II de trincamento. Dessa forma, tem-se que:

$$s_1 = -\frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \text{ e } t_1 = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (43)$$

### 3.5. A utilização do Método dos Mínimos Quadrados para ajustar a série de Williams à função de tensão de Westergaard

Esta subseção, que também foi feita na sua essência a partir do trabalho de Lopes (2002), apresenta a obtenção de  $n$  termos da série de Williams, de tal forma que se ajuste a série de Williams aos resultados obtidos pelas componentes de tensão obtidas a partir da função de tensão de Westergaard. Para elucidar esse ajuste, é necessário definir os seguintes vetores e matrizes:

1) matriz  $\mathbf{T}$  que armazena em suas linhas os  $n$  primeiros termos da série de Williams que são avaliados nos mesmo pontos em que se avalia as componentes de tensão obtidas a partir da função de tensão de Westergaard;

2) vetor  $\mathbf{c}$  que tem em seus elementos representando os coeficientes dos  $n$  primeiros termos da série de Williams;

3) vetor  $\mathbf{t}_n$  que armazena as componentes de tensão obtidas a partir da função de tensão de Westergaard.

De acordo com o Método dos Mínimos Quadrados, o vetor  $\mathbf{c}$  precisa ser tal que:

$$\left(\mathbf{c}^T \mathbf{T}^T - \mathbf{t}_n^T\right) (\mathbf{T} \mathbf{c} - \mathbf{t}_n) = \min. \quad (44)$$

Ao se derivar a Eq. (44) em relação a  $\mathbf{c}$  e igualando o resultado à zero, tem-se que:

$$\mathbf{c} = \left(\mathbf{T}^T \mathbf{T}\right)^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{t}_n. \quad (45)$$

Como resultado se terá o campo de tensões a partir do uso de dois termos da série de Williams ( $\sigma_{xx}^{Wil}$ ,  $\sigma_{yy}^{Wil}$ ,  $\sigma_{xy}^{Wil}$ ). Com os valores de  $n = 1, 2, 3, \dots$  adotados na série de Williams mostrada na seção anterior, percebe-se que não se tem o termo constante de ordem zero, que corresponde a  $T$ -stress, conforme é mostrado na seção 3.6. Dessa maneira, sem perda de generalidade, pode-se adicionar a  $T$ -stress no campo de tensões determinado pela série de Williams. Como resultado, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{Wil+T} \\ \sigma_{yy}^{Wil+T} \\ \sigma_{xy}^{Wil+T} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{Wil} \\ \sigma_{yy}^{Wil} \\ \sigma_{xy}^{Wil} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} T_{stress} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (46)$$

Para ilustrar a expansão da série de Williams feita neste trabalho, mostra-se abaixo o aspecto dos vetores  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{t}_n$  e da matriz  $\mathbf{T}$  para o caso em que se expande a série de Williams com dois termos a partir da avaliação dos valores de  $\sigma_{yy}$  obtido pelo campo de tensões determinado pela função de tensão de Westergaard sob três pontos na direção  $\theta = 0$ :  $P_1(r_1, \theta = 0)$ ,  $P_2(r_2, \theta = 0)$ , e  $P_3(r_3, \theta = 0)$ . O vetor  $\mathbf{t}_n$  apresenta três elementos em que cada elemento tem o valor de  $\sigma_{yy}^{Wtg}$  avaliado em cada ponto.

$$\mathbf{t}_n^T = [\sigma_{yy}^{Wtg}(P_1(r_1, \theta = 0)) \quad \sigma_{yy}^{Wtg}(P_2(r_2, \theta = 0)) \quad \sigma_{yy}^{Wtg}(P_3(r_3, \theta = 0))]. \quad (47)$$

A matriz  $\mathbf{T}$  tem três linhas correspondentes aos três pontos e tem duas colunas correspondentes aos dois termos da série de Williams:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} F_1(P_1(r_1, \theta = 0)) & F_2(P_1(r_1, \theta = 0)) \\ F_3(P_2(r_2, \theta = 0)) & F_4(P_2(r_2, \theta = 0)) \\ F_5(P_3(r_3, \theta = 0)) & F_6(P_3(r_3, \theta = 0)) \end{bmatrix}. \quad (48)$$

em que  $F_i(r, \theta = 0)$   $i = 1, \dots, 6$  são função trigonométricas obtidas a partir da série de Williams, como mostrado pela Eq. (35). O vetor  $\mathbf{c}$  apresenta dois elementos correspondentes aos dois termos usados na série de Williams:

$$\{\mathbf{c}\}^T = [C_1 \quad C_2]. \quad (49)$$

em que  $C_1$  e  $C_2$  são os coeficientes do ajuste da série de Williams. Esses valores são avaliados conforme mostra a Eq. (45). Depois disso, é possível substituir os valores de  $n = 1$  e  $n = 2$  e a Eq. (49) na Eq. (35). Após se obter o campo de tensões pela série de Williams, adiciona-se a  $T-stress$  e obtém-se o campo de tensões correspondente à Eq. (46).

A próxima subseção mostra dois exemplos em que se faz o ajuste da série de Williams a partir da função de tensão de Westergaard. O Método dos Mínimos Quadrados é utilizado para esse ajuste. O primeiro exemplo trata da placa de Griffith biaxialmente carregada. O segundo exemplo estuda a placa de Griffith uniaxialmente carregada. Nos dois exemplos, mostra-se que a partir do número adequado de termos,  $Num$ , utilizados na série de Williams  $(pz(\theta)_M^{Wil-Num})$ , obtêm-

se as mesmas estimativas de zonas plásticas quando se usa a função de tensão de Westergaard  $(pz(\theta)_M^{Wtg})$ .

### 3.5.1. O ajuste da série de Williams à função de tensão de Westergaard para o caso da placa de Griffith biaxialmente carregada

Este exemplo tem solução analítica, Eq. (16), Eq. (17), e Eq. (18). A seguir, estuda-se o efeito do número de termos da série de Williams na estimativa das zonas plásticas para o caso da placa de Griffith biaxialmente carregada. O campo de tensões gerado pela série de Williams é mostrado na Eq. (46). Nesse exemplo o valor da *T-stress* igual a 0.

A Figura 32 mostra as estimativas das zonas plásticas sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ . Pode-se observar que para esse nível de tensão, apenas um termo basta para ajustar a estimativa obtida pela série de Williams,  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ , à estimativa obtida pela função de tensão de Westergaard  $pz(\theta)_M^{Wtg}$ .

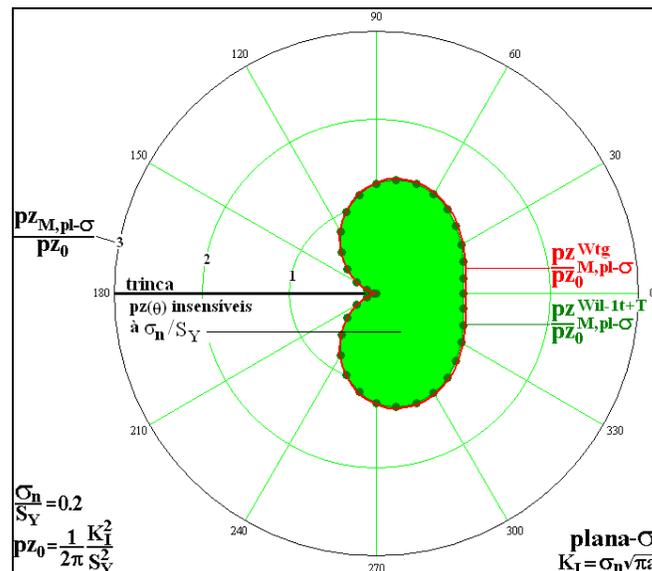


Figura 32 – Convergência das estimativas  $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $pz(\theta)_M^{Wtg}$  sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ .

A Figura 33 mostra as estimativas  $pz(\theta)_M$  sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

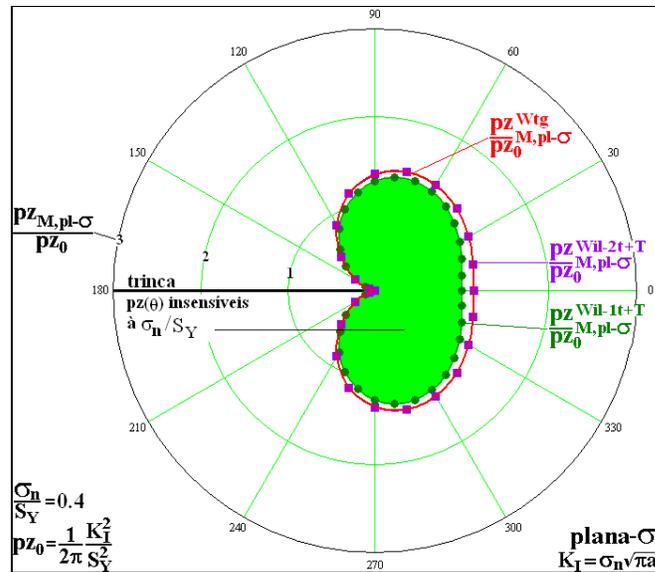


Figura 33 – Convergência das estimativas  $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $pz(\theta)_M^{Wtg}$  sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

No caso da Figura 33 são necessários dois termos para ajustar as estimativas  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-2t}$  às estimativas  $pz(\theta)_M^{Wtg}$ . A mesma quantidade de termos é necessária para o caso em que  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ , conforme mostra a Figura 34.

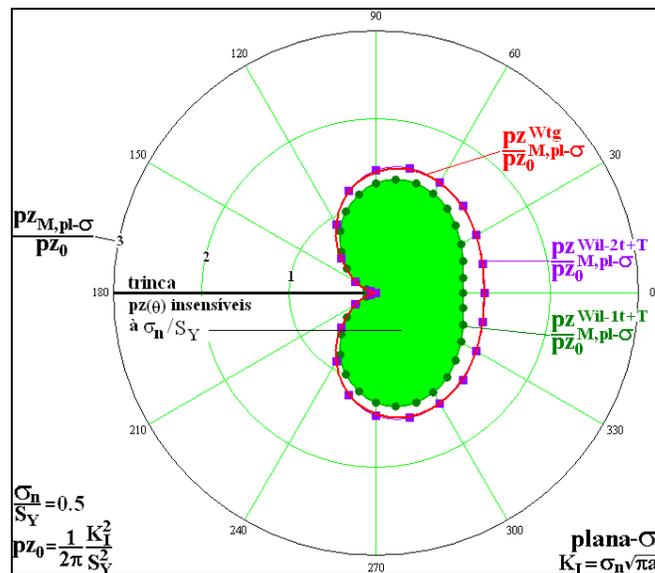


Figura 34 – Convergência das estimativas  $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $pz(\theta)_M^{Wtg}$  sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .

A Figura 35 mostra as estimativas  $pz(\theta)_M$  sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ .

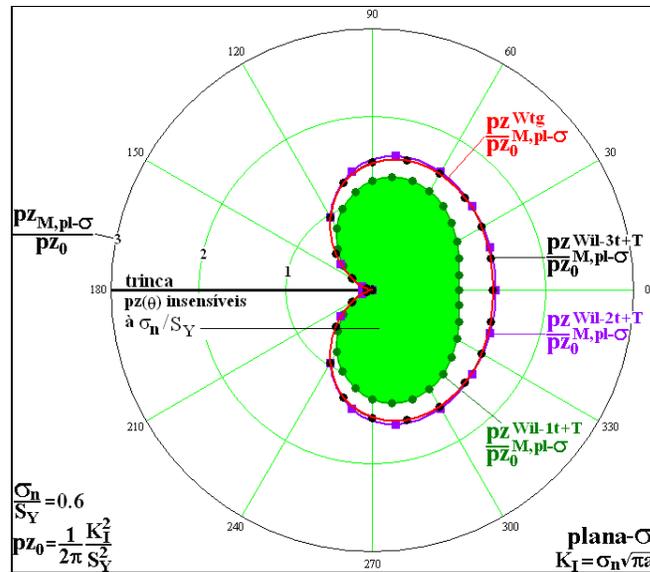


Figura 35 – Convergência das estimativas  $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $pz(\theta)_M^{Wtg}$  sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ .

No caso da Figura 35, são necessários três termos na série de Williams para ajustar a estimativa  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-3t}$  à estimativa  $pz(\theta)_M^{Wtg}$ . A mesma quantidade termos é necessária para o caso em que  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ , conforme mostra a Figura 36.

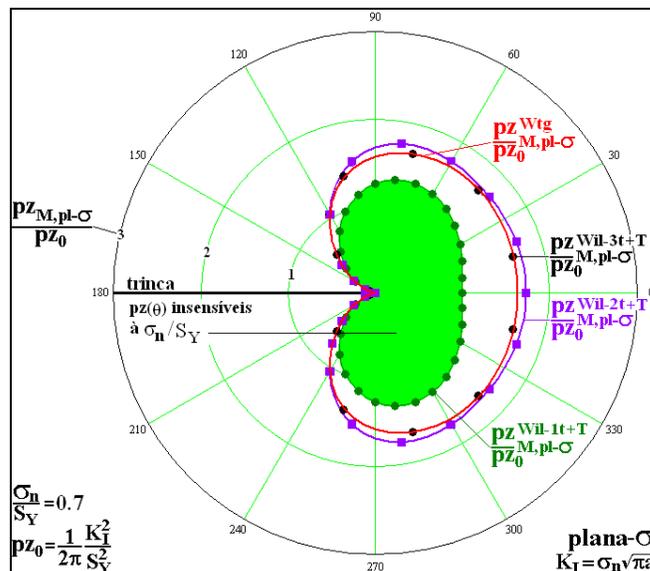


Figura 36 – Convergência das estimativas  $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $pz(\theta)_M^{Wtg}$  sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ .

A Figura 37 mostra as estimativas  $pz(\theta)_M$  sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ .

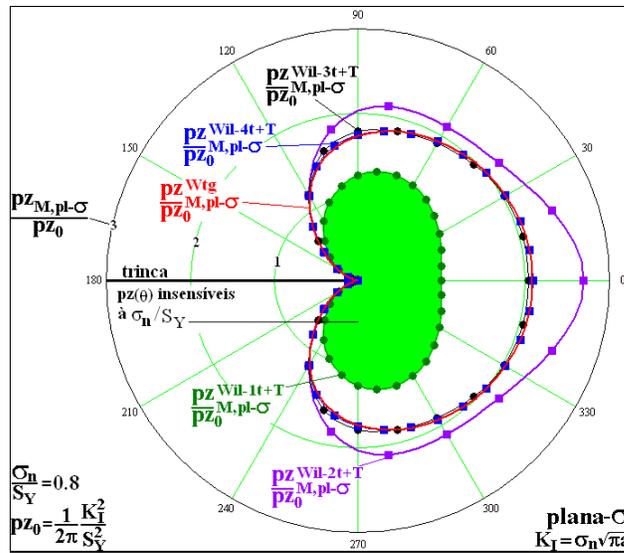


Figura 37 – Convergência das estimativas  $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $pz(\theta)_M^{Wtg}$  sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ .

No caso ilustrado pela Figura 37, percebe-se que são necessários quatro termos na série de Williams para ajustar a estimativa  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-4t}$  à estimativa  $pz(\theta)_M^{Wtg}$ . A Figura 38 mostra as estimativas  $pz(\theta)_M$  sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ . Percebe-se que neste caso, apenas um termo na série de Williams é necessário para ajustar a estimativa  $pz(\theta)_{M,\epsilon-pl}^{Wil-1t}$  à estimativa  $pz(\theta)_M^{Wtg}$ .

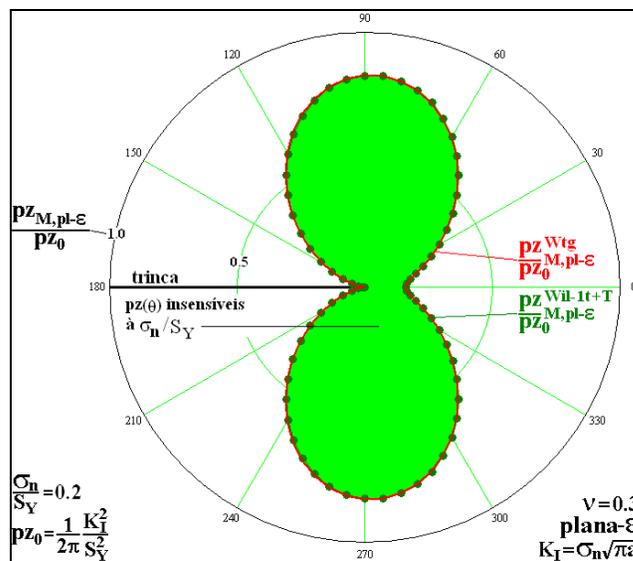


Figura 38 – Convergência das estimativas  $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $pz(\theta)_M^{Wtg}$  sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ .

A Figura 39 mostra as estimativas  $p_z(\theta)_M$  sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ . Percebe-se que no caso em que se tem  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  sob deformação plana, são necessários dois termos na série de Williams para ajustar a estimativa  $p_z(\theta)_{M,\varepsilon-pl}^{Wil-2t}$  à estimativa  $p_z(\theta)_M^{Wtg}$ .

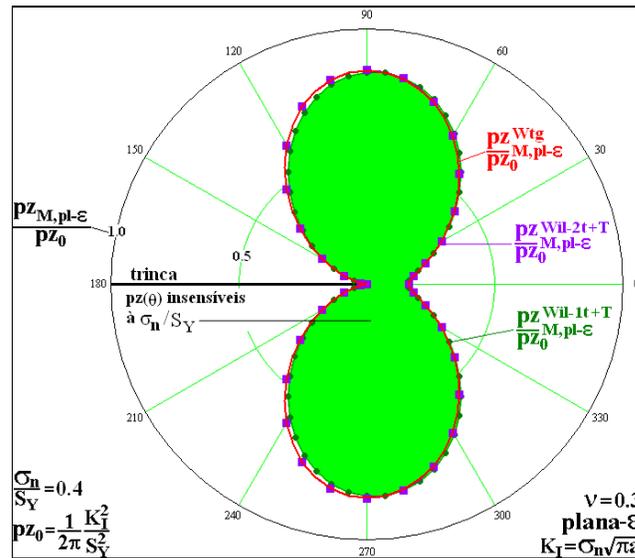


Figura 39 – Convergência das estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wtg}$  sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

A Figura 40 mostra as estimativas  $p_z(\theta)_M$  sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .

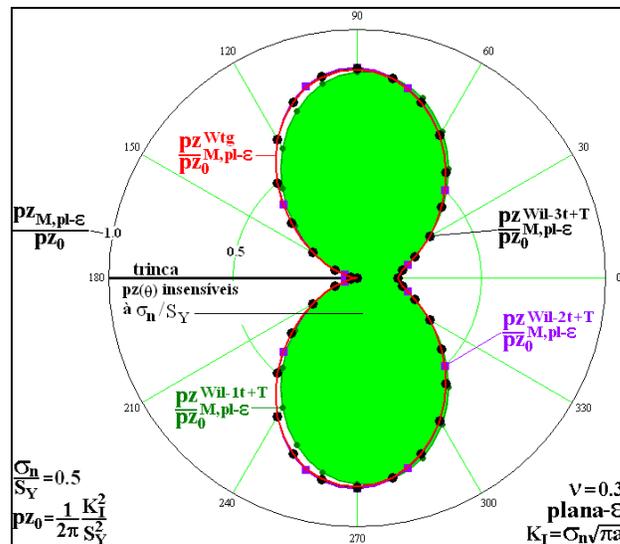


Figura 40 – Convergência das estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wtg}$  sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .

A Figura 41 mostra as estimativas  $p_z(\theta)_M$  sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ .

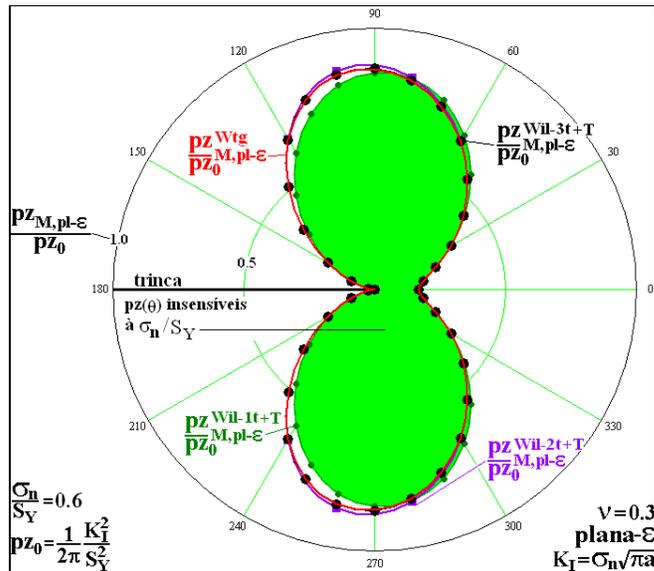


Figura 41 – Convergência das estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wtg}$  sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ .

A Figura 42 mostra as estimativas  $p_z(\theta)_M$  sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ .

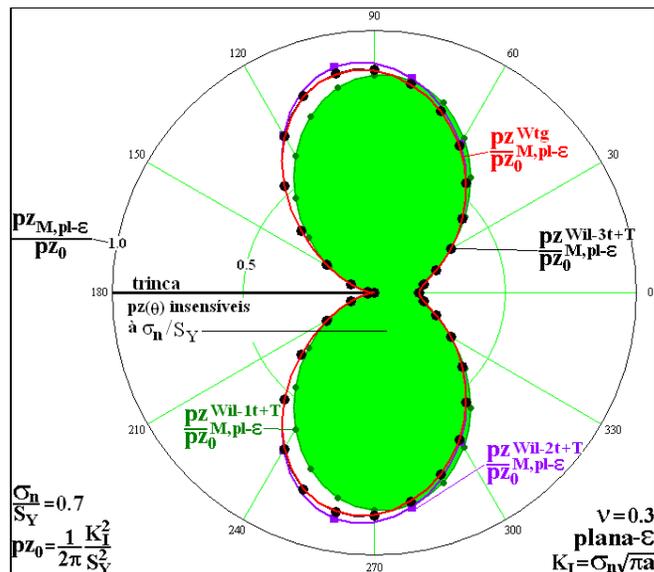


Figura 42 – Convergência das estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wtg}$  sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ .

Nos casos em que se tem  $\sigma_r/S_Y = 0,5; 0,6$  e  $0,7$  são necessários três termos na série de Williams para ajustar a estimativa  $p_z(\theta)_{M,\varepsilon-pl}^{Wil-3t}$  à estimativa  $p_z(\theta)_M^{Wtg}$ . A Figura 43 mostra as estimativas  $p_z(\theta)_M$  sob deformação plana para  $\sigma_r/S_Y = 0,8$ .

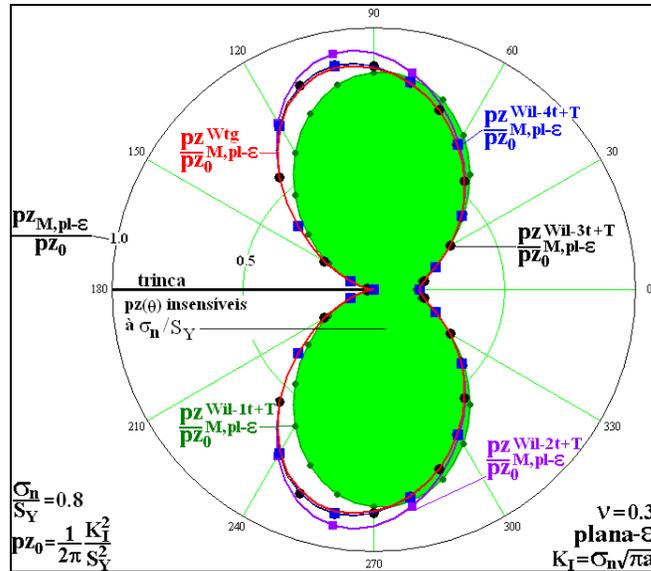


Figura 43 – Convergência das estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wtg}$  sob deformação plana para  $\sigma_r/S_Y = 0,8$ .

No caso em que se tem  $\sigma_r/S_Y = 0,8$  são necessários quatro termos na série de Williams para ajustar a estimativa  $p_z(\theta)_{M,\varepsilon-pl}^{Wil-4t}$  à estimativa  $p_z(\theta)_M^{Wtg}$ .

Todos os parâmetros utilizados para o caso da placa de Griffith biaxialmente carregada são feitos no próximo exemplo. A diferença é que o exemplo seguinte trata do caso da placa de Griffith uniaxialmente carregada.

### 3.5.2. O ajuste da série de Williams a função de tensão de Westergaard para o caso da placa de Griffith uniaxialmente carregada

Os detalhes deste problema podem ser vistos na Figura 1. Abaixo se mostra o efeito do número de termos da série de Williams nas estimativas das zonas plásticas para ambos os estados planos. A Figura 44 mostra as estimativas  $p_z(\theta)_M$  sob tensão plana para  $\sigma_r/S_Y = 0,2$ . Percebe-se que neste caso, apenas um termo na série de Williams é necessário para ajustar a estimativa  $p_z(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$  à estimativa

$pz(\theta)_M^{Wtg}$ . O campo de tensões gerado pela série de Williams é mostrado na Eq.

(46). Nesse exemplo o valor da  $T$ -stress igual a  $-\sigma_n$ .

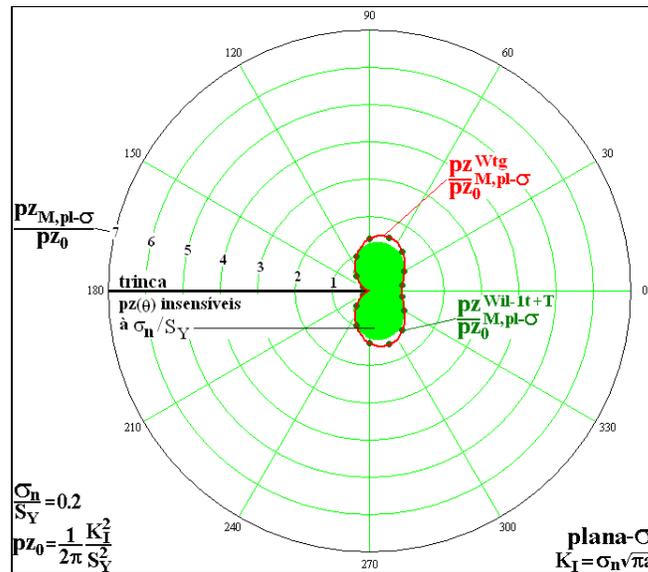


Figura 44 – Convergência das estimativas  $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $pz(\theta)_M^{Wtg}$  sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ .

A Figura 45 mostra as estimativas  $pz(\theta)_M$  sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ . É possível ver que neste caso, dois termos na série de Williams ajustam a estimativa  $pz(\theta)_M^{Wil-2t}$  à estimativa  $pz(\theta)_M^{Wtg}$ . Já quando se tem  $\sigma_n/S_Y = 0,5$  e  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  são necessários três termos na série de Williams para estimar as  $pz(\theta)_M^{Wil-3t}$ . Quando se tem  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  quatro termos na série de Williams são necessários para ajustar a estimativa  $pz(\theta)_M^{Wil-4t}$  à estimativa  $pz(\theta)_M^{Wtg}$ . Para o caso em que  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  são necessários seis termos na série de Williams para se fazer o ajuste.

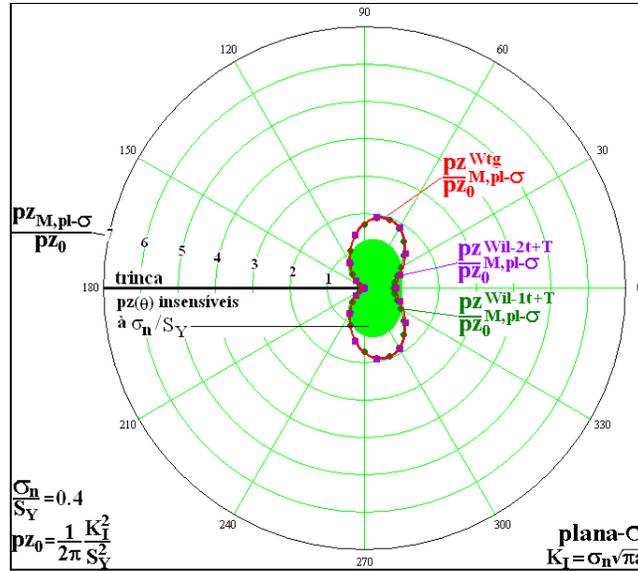


Figura 45 – Convergência das estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wtg}$  sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

A Figura 46 mostra as estimativas  $p_z(\theta)_M$  sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .

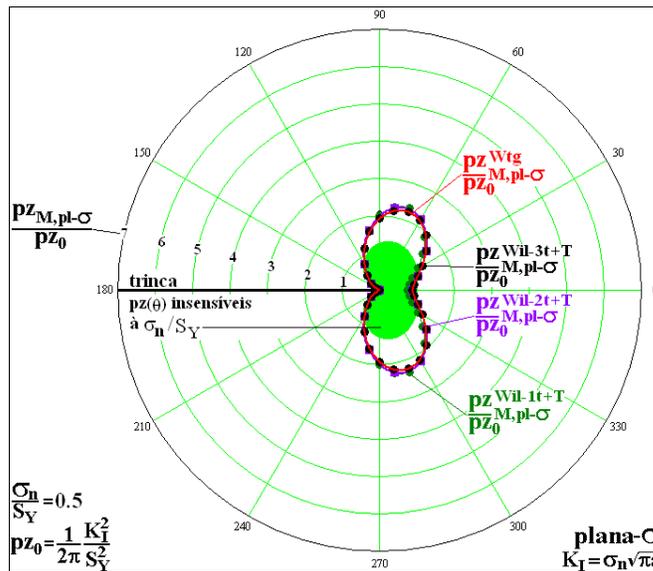


Figura 46 – Convergência das estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wtg}$  sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .

A Figura 47 mostra as estimativas  $p_z(\theta)_M$  sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ .

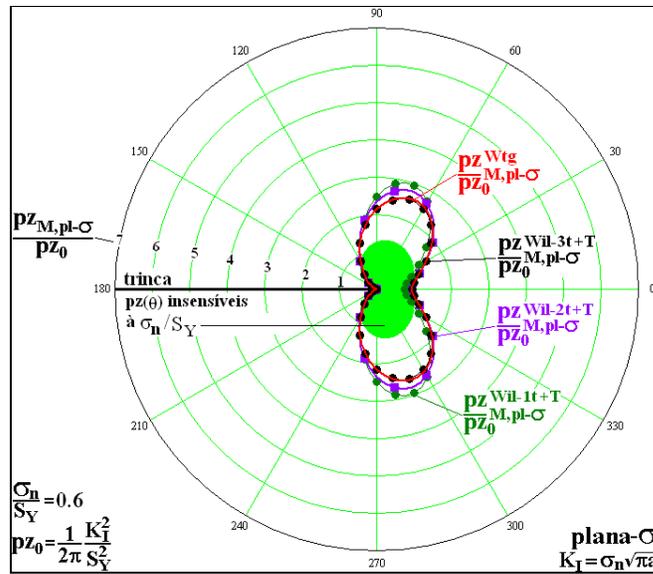


Figura 47 – Convergência das estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wtg}$  sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ .

A Figura 48 mostra as estimativas  $p_z(\theta)_M$  sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ .

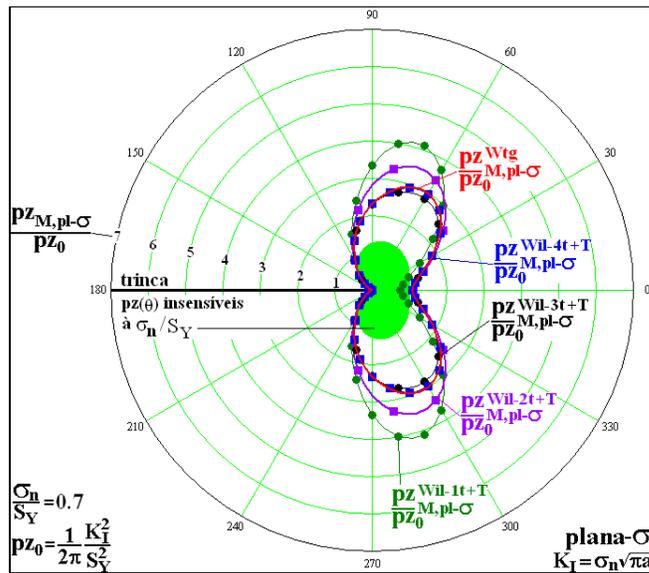


Figura 48 – Convergência das estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wtg}$  sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ .

A Figura 49 mostra as estimativas  $p_z(\theta)_M$  sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ .

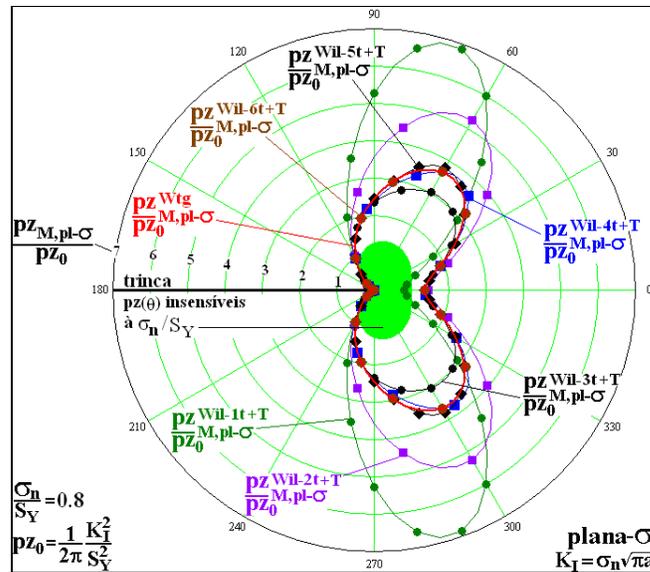


Figura 49 – Convergência das estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wtg}$  sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ .

Para o caso sob deformação plana em que se tem  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ , a Figura 50 mostra que apenas um termo na série de Williams ajusta a estimativa  $p_z(\theta)_{M,\varepsilon-pl}^{Wil-1t}$  à estimativa  $p_z(\theta)_M^{Wtg}$ . De acordo com a Figura 51, percebe-se que são necessários dois termos na série de Williams para o ajuste quando  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ . Para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$  e para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  são necessários três termos para ajustar a estimativa  $p_z(\theta)_{M,\varepsilon-pl}^{Wil-3t}$  à estimativa  $p_z(\theta)_M^{Wtg}$ , vide Figura 52 e Figura 53. De acordo com a Figura 54, vê-se que são necessários quatro termos para o ajuste quando  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ . O último caso, em que se tem  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  percebe-se que são necessários cinco termos na série de Williams para ajustar a estimativa  $p_z(\theta)_{M,\varepsilon-pl}^{Wil-5t}$  à estimativa  $p_z(\theta)_M^{Wtg}$ , conforme mostra a Figura 55.

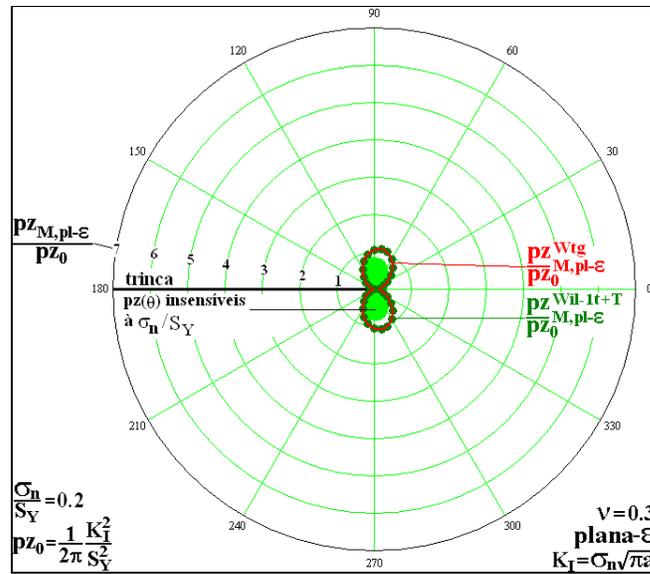


Figura 50 – Convergência das estimativas  $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $pz(\theta)_M^{Wtg}$  sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ .

Abaixo, mostra-se a Figura 51 para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

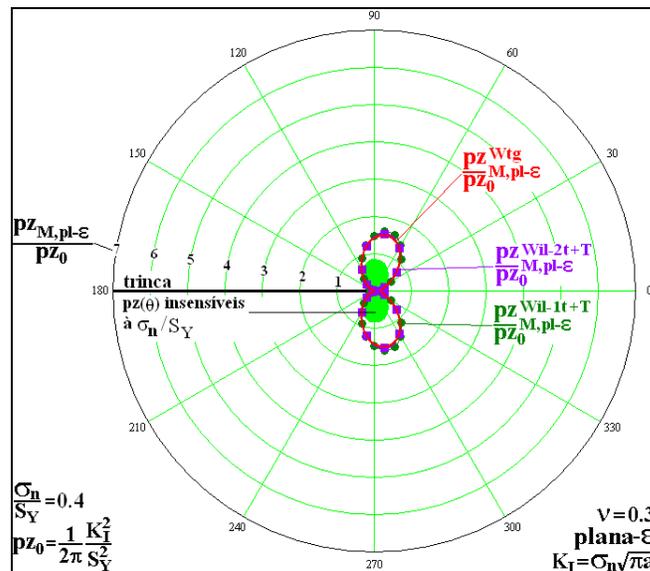


Figura 51 – Convergência das estimativas  $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $pz(\theta)_M^{Wtg}$  sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

Abaixo, mostra-se a Figura 52 para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .

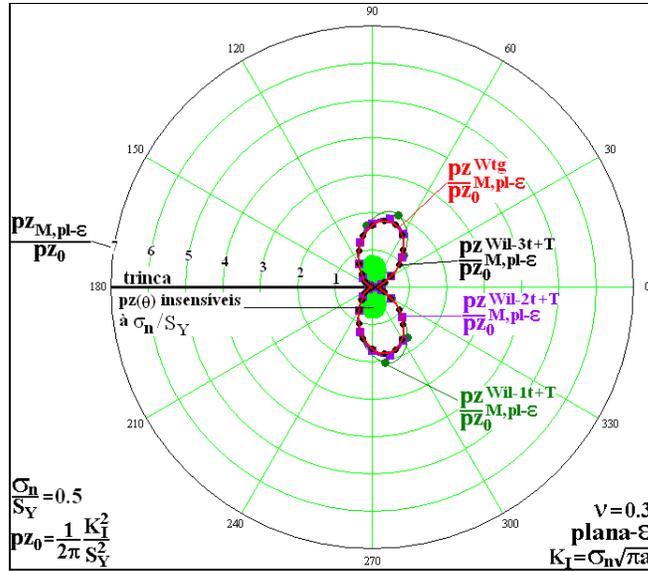


Figura 52 – Convergência das estimativas  $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $pz(\theta)_M^{Wtg}$  sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .

Abaixo, mostra-se a Figura 53 para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ .

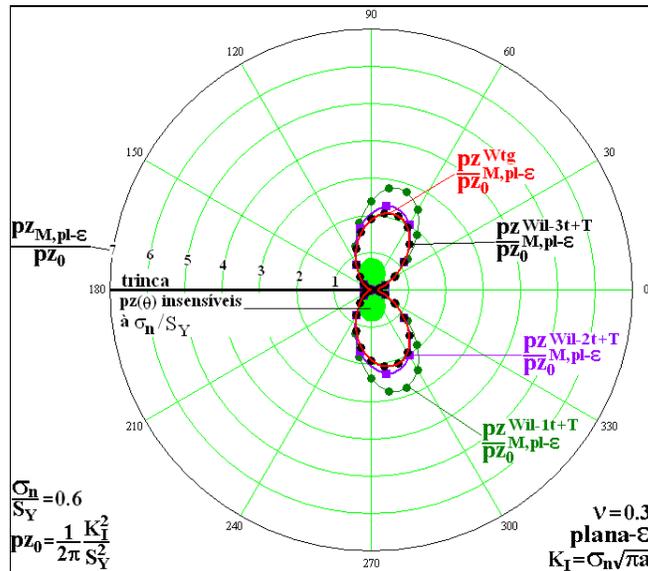


Figura 53 – Convergência das estimativas  $pz(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $pz(\theta)_M^{Wtg}$  sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ .

Abaixo, mostra-se a Figura 54 para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ .

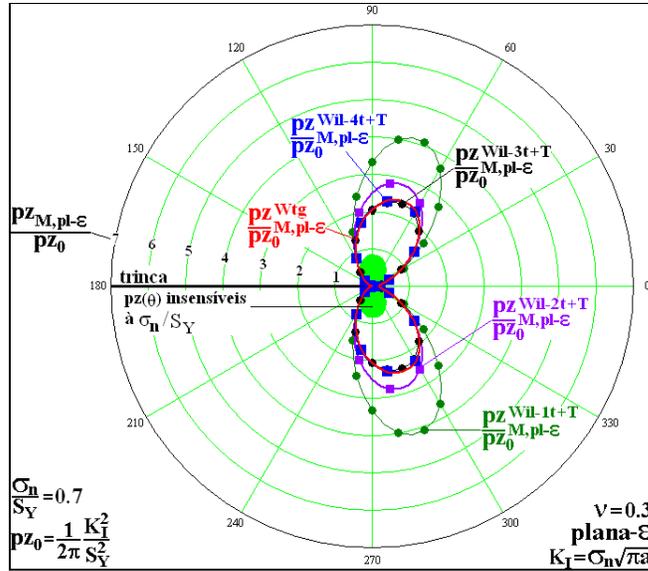


Figura 54 – Convergência das estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $p_z(\theta)_M^{WtG}$  sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ .

Abaixo, mostra-se a Figura 55 para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ .

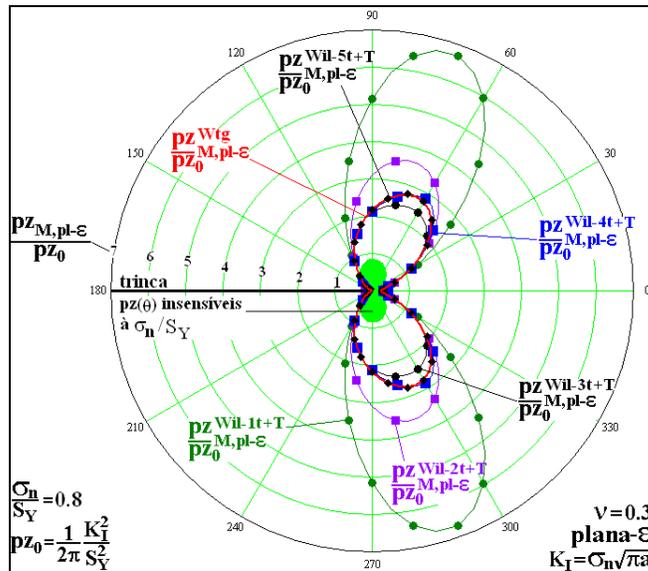


Figura 55 – Convergência das estimativas  $p_z(\theta)_M^{Wil-Num}$  às estimativas  $p_z(\theta)_M^{WtG}$  sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ .

Ao se analisar ambos os estados planos para o caso da placa Griffith uniaxialmente tracionada, percebe-se que para valores altos de  $\sigma_n/S_Y$  são necessários mais termos na série de Williams para ajustar as estimativas

$pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-Numt}$  em tensão plana e as estimativas  $pz(\theta)_{M,\varepsilon-pl}^{Wil-Numt}$  em deformação plana às estimativas  $pz(\theta)_M^{Wig}$ .

A próxima subseção mostra, a partir da estimativa de zonas plásticas, que a  $T$ -stress é o termo constante de ordem zero da série de Williams.

### 3.6. A $T$ -stress como a constante de ordem zero da série de Williams

Fett (1998) apresentou a série de Williams para uma placa retangular com uma trinca central como:

$$\Phi = \sigma_n W^2 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{r}{W}\right)^{j+\frac{3}{2}} A_j \left[ \cos\left(j + \frac{3}{2}\right)\theta - \frac{j + \frac{3}{2}}{j - \frac{1}{2}} \cos\left(j - \frac{1}{2}\right)\theta \right] + \sigma_n W^2 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{r}{W}\right)^{j+2} B_j [\cos(j+2)\theta - \cos(j\theta)] \quad (50)$$

em que  $\sigma_n$  é a tensão nominal,  $a$  é a metade do comprimento da trinca e  $W$  é a metade da largura da placa. Depois disso, Fett mostrou como fica a componente  $\sigma_{xx}$  para  $\theta = 0$ :

$$\sigma_{xx}(\theta=0) = -\sigma_n \sum_{j=0}^{\infty} A_j \left(\frac{a-x}{W}\right)^{j-\frac{1}{2}} \frac{(2j+3)(2j+1)}{(2j-1)} - \sigma_n \sum_{j=0}^{\infty} 4B_j \left(\frac{a-x}{W}\right)^j (j+1) \quad (51)$$

Ao se analisar o primeiro termo, que corresponde  $j = 0$ , pode-se relacionar  $A_0$  com  $K_I$ :

$$\sigma_{xx}(\theta=0) = -\sigma_n \sum_{j=0}^{\infty} A_j \left(\frac{a-x}{W}\right)^{j-\frac{1}{2}} \frac{(2j+3)(2j+1)}{(2j-1)} - \sigma_n \sum_{j=0}^{\infty} 4B_j \left(\frac{a-x}{W}\right)^j (j+1) \quad (52)$$

O termo com coeficiente  $B_0$  representa a tensão  $\sigma_{xx}$  total localizada na ponta da trinca ( $x = a$ ).

$$\sigma_{xx}|_{x=a}(\theta=0) = -4 \sigma_n B_0 \quad (53)$$

Essa tensão  $\sigma_{xx}$  total inclui as contribuições que estão presentes para a localização  $x = a$  em uma estrutura não trincada,  $\sigma_{xx}^{(0)}|_{x=a}$ , e o termo adicional que é gerado exclusivamente pela trinca. É essa contribuição que é a  $T$ -stress. Dessa maneira, a  $T$ -stress para o caso da placa de Griffith é dada por:

$$T_{stress} = -4 \sigma_n B_0 - \sigma_{xx}^{(0)}|_{x=a}. \quad (54)$$

A seguir, mostra-se em termos de estimativas de zonas plásticas, que a  $T$ -stress e o primeiro termo da série de Williams são equivalentes quando se usa a Eq. (50). Para isso, utiliza-se o exemplo da placa retangular com uma trinca central com uma relação de  $a/W = 0,1$ .

A Figura 56 mostra que a estimativa  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$  e a estimativa  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$  são iguais. A análise é feita sob o estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ .

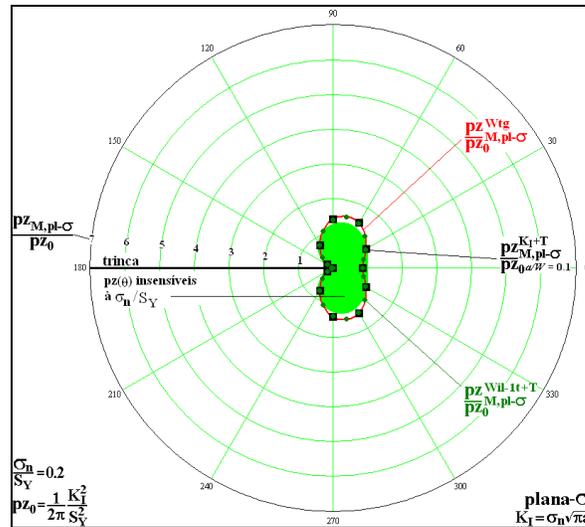


Figura 56 – Comparação das estimativas  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ ,  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$  e  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$  sob tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ .

A Figura 57 mostra que a estimativa  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$  e a estimativa  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$  são iguais. A análise é feita sob o estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

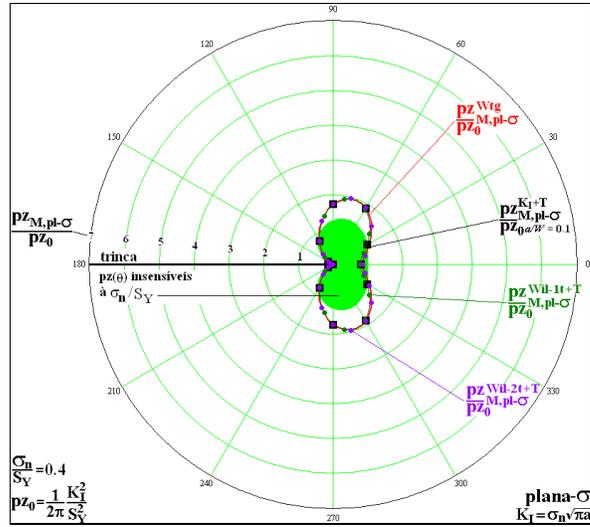


Figura 57 – Comparação das estimativas  $p_z(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ ,  $p_z(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$  e  $p_z(\theta)_{M,\sigma-pl}^{KI+T}$  sob tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

A Figura 58 mostra que a estimativa  $p_z(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$  e a estimativa  $p_z(\theta)_{M,\sigma-pl}^{KI+T}$  são iguais. A análise é feita sob o estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .

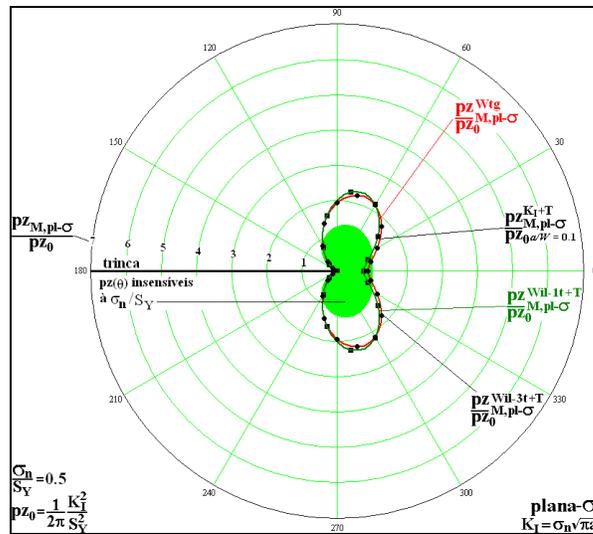


Figura 58 – Comparação das estimativas  $p_z(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ ,  $p_z(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$  e  $p_z(\theta)_{M,\sigma-pl}^{KI+T}$  sob tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .

A Figura 59 mostra que a estimativa  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$  e a estimativa  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{KI+T}$  são iguais. A análise é feita sob o estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ .

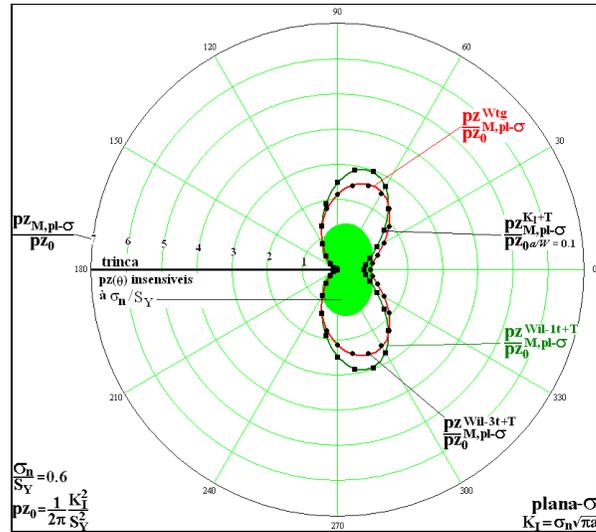


Figura 59 – Comparação das estimativas  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ ,  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$  e  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{KI+T}$  sob tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ .

A Figura 60 mostra que a estimativa  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$  e a estimativa  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{KI+T}$  são iguais. A análise é feita sob o estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ .

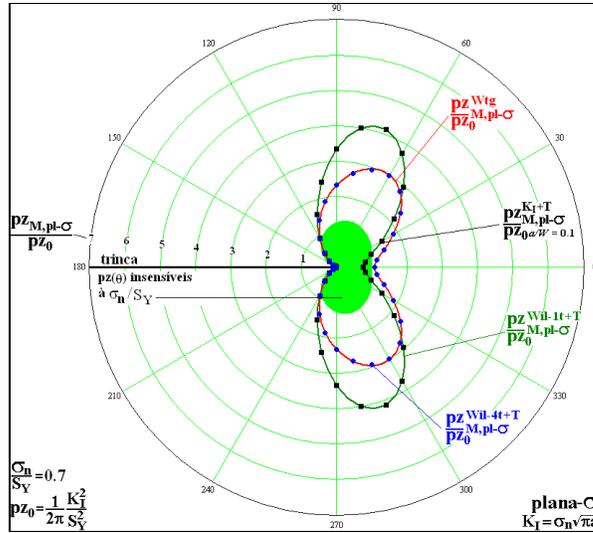


Figura 60 – Comparação das estimativas  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ ,  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$  e  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{KI+T}$  sob tensão plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,7$ .

A Figura 61 mostra que a estimativa  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$  e a estimativa  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{KI+T}$  são iguais. A análise é feita sob o estado plano de tensão com  $\sigma_r/S_Y = 0,8$ .

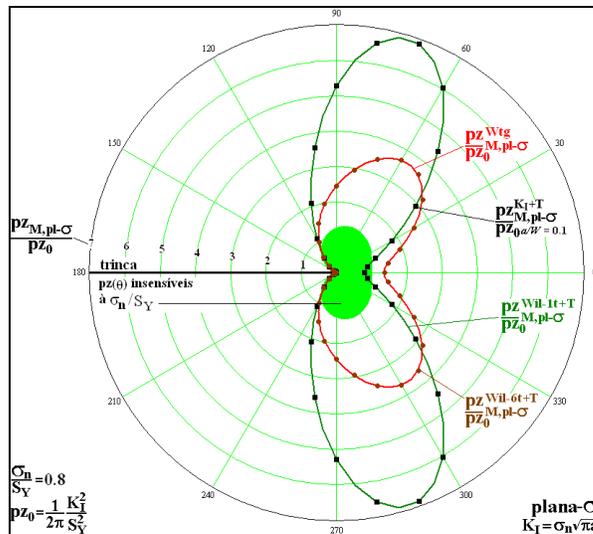


Figura 61 – Comparação das estimativas  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ ,  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$  e  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{KI+T}$  sob tensão plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,8$ .



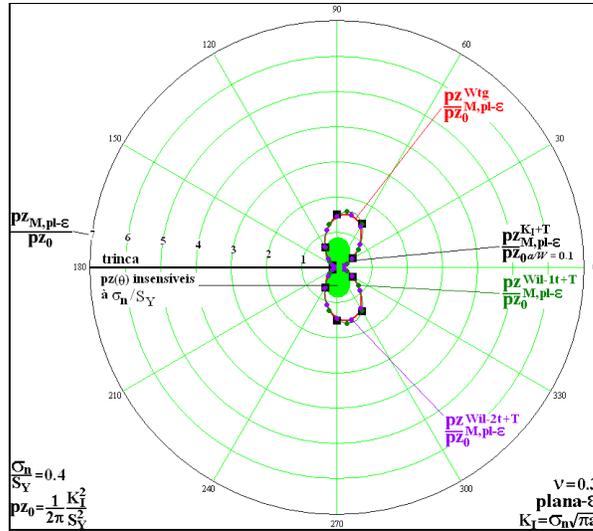


Figura 63 – Comparação das estimativas  $p_z(\theta)_{M, \sigma-pl}^{Wil-1t}$ ,  $p_z(\theta)_{M, \sigma-pl}^{West}$  e  $p_z(\theta)_{M, \sigma-pl}^{KI+T}$  sob deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

A Figura 64 mostra que a estimativa  $p_z(\theta)_{M, \sigma-pl}^{Wil-1t}$  e a estimativa  $p_z(\theta)_{M, \sigma-pl}^{KI+T}$  são iguais. A análise é feita sob o estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .

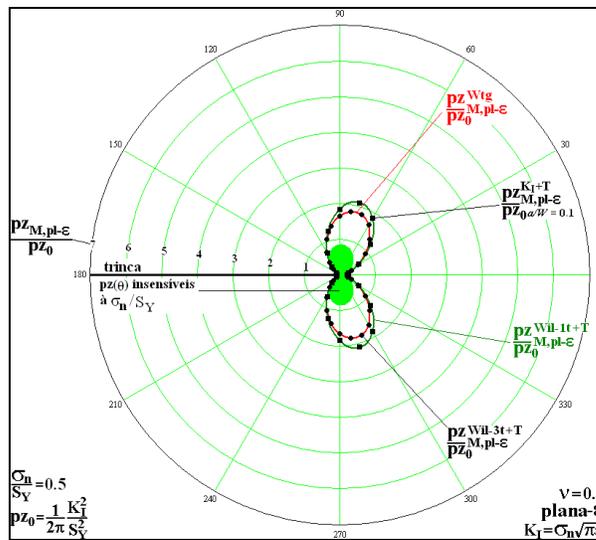


Figura 64 – Comparação das estimativas  $p_z(\theta)_{M, \sigma-pl}^{Wil-1t}$ ,  $p_z(\theta)_{M, \sigma-pl}^{West}$  e  $p_z(\theta)_{M, \sigma-pl}^{KI+T}$  sob deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .



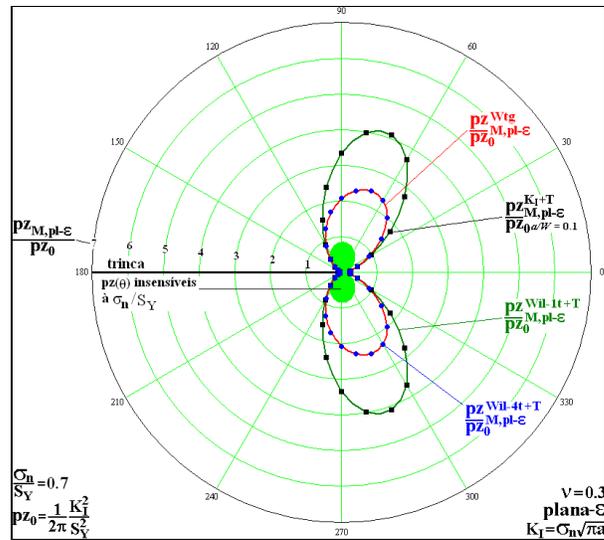


Figura 66 – Comparação das estimativas  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ ,  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$  e  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$  sob deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ .

A Figura 67 mostra o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ .

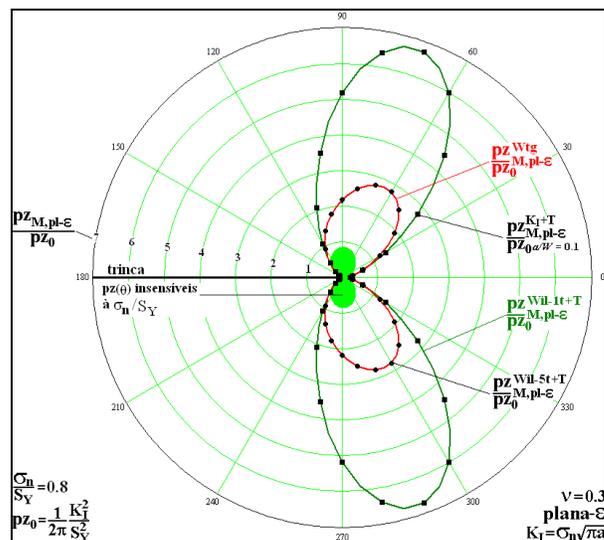


Figura 67 – Comparação das estimativas  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{Wil-1t}$ ,  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{West}$  e  $pz(\theta)_{M,\sigma-pl}^{K_I+T}$  sob deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ .

### 3.7. Conclusões do capítulo e comentários importantes sobre as estimativas analíticas das zonas plásticas a partir do uso da MFLE

Até agora, foram mostradas estimativas de zonas plásticas obtidas a partir do truncamento de quatro campos de tensões, que são: o campo de tensões gerado a partir do  $K_I$ , o campo de tensões obtido a partir do  $K_I$  mais  $T$ -stress, o campo de

tensões gerado pela função de tensão de Westergaard e pelo campo de tensões obtido pela série de Williams. Entende-se por truncamento do campo de tensões a definição do contorno da zona plástica quando o valor da tensão de Mises for igual a tensão de escoamento do material, conforme indica a Eq. (10).

O campo de tensões obtido a partir do  $K_I$  além de não satisfazer as respostas esperadas e as condições de contorno, geram estimativas  $p_z(\theta)_M$  que são insensíveis à relação  $\sigma_n/S_Y$ . Essa insensibilidade não acontece no campo de tensões gerado a partir da adição da *T-stress* na componente  $\sigma_{xx}$  obtida a partir do  $K_I$ , conforme se viu em dois exemplos, o caso do disco circular com uma trinca interna e o caso da placa retangular com uma trinca centrada.

O exemplo do disco circular com uma trinca interna mostrou que a adição da *T-stress* faz com que as  $p_z(\theta)_M$  sejam sensíveis à  $\sigma_n/S_Y$  e aos parâmetros geométricos. Entretanto, a adição da *T-stress* na componente  $\sigma_{xx}$  não resolve o problema da componente  $\sigma_{yy}$  que é gerada por  $K_I$  para o exemplo da placa de Griffith, pois conforme foi comentado, tem-se  $\sigma_{yy}(x = \infty) = 0$  em vez de se ter  $\sigma_{yy}(x = \infty) = \sigma_n$ .

Outra observação importante é que as estimativas  $p_z(\theta)_M$  obtidas a partir de  $K_I$  mais *T-stress* são normalmente maiores que as estimativas  $p_z(\theta)_M$  obtidas a partir da função de tensão de Westergaard. Essa diferença aumenta conforme cresce a relação  $\sigma_n/S_Y$ . Entretanto, partindo do princípio que a função de tensão de Westergaard é uma função de tensão, e que por isso, satisfaz as condições de equilíbrio, pode-se concluir que ela é a solução linear elástica do problema idealizado para o caso da placa de Griffith por também satisfazer as condições de contorno e de superfície livre. Portanto, as estimativas lineares elásticas das zonas plásticas obtidas por uma função de tensão de Westergaard são geradas a partir da solução matemática do problema elástico plano de corpos trincados.

O campo de tensões gerado a partir da série de Williams, que nada mais é do que escrever a função de tensão de Westergaard em forma de uma série infinita, mostra os efeitos dos números de termos da série na estimativa das zonas plásticas. A equivalência entre a série de Williams e a função de tensão de Westergaard foi mostrada em termos de estimativa de zonas plásticas, pois, independentemente do valor  $\sigma_n/S_Y$ , as duas estimativas são idênticas conforme se aumente o número de termos da série. Ainda no exemplo da placa de Griffith

uniaxialmente tracionada, mostrou-se que a *T-stress* gera estimativas  $p_z(\theta)_M$  idênticas as estimativas  $p_z(\theta)_M$  obtidas a partir da série de Williams com apenas um termo. Como para altos valores  $\sigma_r/S_Y$  são necessários mais termos na série de Williams para ajustar as estimativas das zonas plásticas obtidas a partir da função de tensão de Westergaard, conclui-se que a adição da *T-stress* não é suficiente para estimar as zonas plásticas do problema linear elástico completo para altos valores de  $\sigma_r/S_Y$ .

O problema dos campos lineares de tensões obtidos pelo  $K_I$ ,  $K_{II}$  mais *T-stress*, série de Williams e pela função de tensão de Westergaard é que eles geram tensões singulares na ponta das trincas. Essas tensões singulares são características do problema matemático, elas não reproduzem o real comportamento mecânico, pois nenhum material suporta tensão infinita, ou ele rompe ou ele plastifica. Para tentar contornar esse problema, o próximo capítulo apresenta algumas propostas de correção das zonas plásticas geradas a partir dos campos de tensões lineares elásticos e que apresentam singularidade na ponta da trinca. Primeiramente, são apresentadas propostas de correção para o caso em que se tem um material perfeitamente plástico. Em seguida, são apresentadas propostas que tentam considerar os efeitos do encruamento nas estimativas  $p_z(\theta)_M$ .

## 4

### **Propostas de correções das zonas plásticas obtidas linearmente para levar em consideração os efeitos do escoamento do material**

Como dito no capítulo anterior, as zonas plásticas estimadas pela truncamento do campo de tensões linear elástico gerado pela função de tensão de Westergaard, pela série de Williams, pelo  $K_I$  ou pelo  $K_I$  mais a  $T$ -stress não correspondem à realidade, pois o campo de tensões não pode ser singular na ponta da trinca. Com a tentativa de contornar essa limitação da solução linear elástica, este capítulo apresenta propostas de correções das zonas plásticas obtidas pelo truncamento do campo de tensões lineares elásticos que consideram o escoamento e o encruamento dos materiais. Dessa maneira, este capítulo é dividido em três seções. A primeira seção aborda o caso em que se trata apenas os materiais perfeitamente plásticos. A segunda seção apresenta as propostas de correções que tentam levar em conta os efeitos do encruamento no tamanho e forma das zonas plásticas. A terceira seção apresenta as conclusões do capítulo.

#### **4.1. Correção das zonas plásticas em que se considera materiais perfeitamente plásticos**

Esta seção é dividida em sete subseções. A primeira subseção mostra a proposta de correção feita por Irwin (1958) em que se utiliza a componente  $\sigma_{yy}$  gerada a partir do campo tensões obtidos por  $K_I$  e é feita apenas para a direção paralela ao plano da trinca. A segunda subseção apresenta a proposta feita por Rodriguez (2007), em que se usa a componente  $\sigma_{yy}$  gerada a partir do campo tensões obtidos pela função de tensão de Westergaard e é feita para todas direções ( $0^\circ < \theta < 360^\circ$ ). A terceira subseção apresenta uma discussão sobre a proposta feita por Rodriguez. A quarta subseção apresenta uma proposta de correção similar à que foi feita por Rodriguez. A diferença consiste na utilização da tensão equivalente de Mises em vez da componente  $\sigma_{yy}$ . Também fundamentada na proposta da Rodriguez, a quinta subseção mostra a proposição de uma correção

que considera a componente vertical da força de superfície. A sexta subseção apresenta uma proposta de correção em que se considera uma razão constante para ser acrescentada a zona plástica linear elástica original. Por último, a sétima subseção apresenta os efeitos de cada tipo de correção para o caso da placa de Griffith para os dois estados planos.

#### 4.1.1. Correção em que se considera a componente $\sigma_{yy}$ gerada pelo campo de tensões obtido por $K_I$ para $\theta = 0$ – Irwin (1958)

É importante ressaltar que esta subseção foi baseada no trabalho original de Irwin (1958). Entretanto, Castro & Meggiolaro (2009) também fazem uma apresentação da ideia feita por Irwin.

Ao se truncar o campo de tensões linear elástico, que é singular, à tensão de escoamento ( $S_Y$ ) sem se considerar os efeitos das tensões que ultrapassam o valor de  $S_Y$ , impede-se que a integral da componente  $\sigma_{yy}(x, 0) = K_I / \sqrt{2\pi x}$  no ligamento residual da peça reproduza o carregamento que originou  $K_I$ . Por esse motivo e por reconhecer que a zona plástica linear elástica truncada deveria aumentar de tamanho para garantir o equilíbrio de forças, Irwin (1958) estimou uma nova zona plástica,  $pz_{Irw}$ , denominada neste trabalho de zona plástica equilibrada.

Em seu trabalho, Irwin (1958) desprezou o efeito do encruamento ao supor que a componente  $\sigma_{yy}$  tem valor constante dentro da nova zona plástica igual a  $\kappa_1 \cdot S_Y$ , em que  $\kappa_1$  é uma constante que depende do estado plano dominante. Ao longo do ligamento residual e fora da  $pz_{Irw}$ , Irwin fez uma translação do campo de tensões no plano da trinca de um valor igual a  $x_1$ , em que  $x_1$  é a distância entre a ponta de trinca e o ponto no eixo  $x$  no qual a solução original previa  $\sigma_{yy}(x_1, 0) = \kappa_1 \cdot S_Y$ , ou seja,  $x_1 = pz\theta$ . Dessa maneira, o valor de  $x_1$  deve ser calculado para equilibrar os esforços que atuam no ligamento residual da peça trincada, fazendo com que a integral da tensão  $\sigma_{yy}(x, 0) = K_I / \sqrt{2\pi x}$  linear elástica original ao longo de  $x$  seja igual à área formada entre  $S_Y \cdot pz_{Irw}$ , que considera o escoamento (sem encruamento) e limita as tensões na  $pz_{Irw}$ , como mostrado na Figura 68.

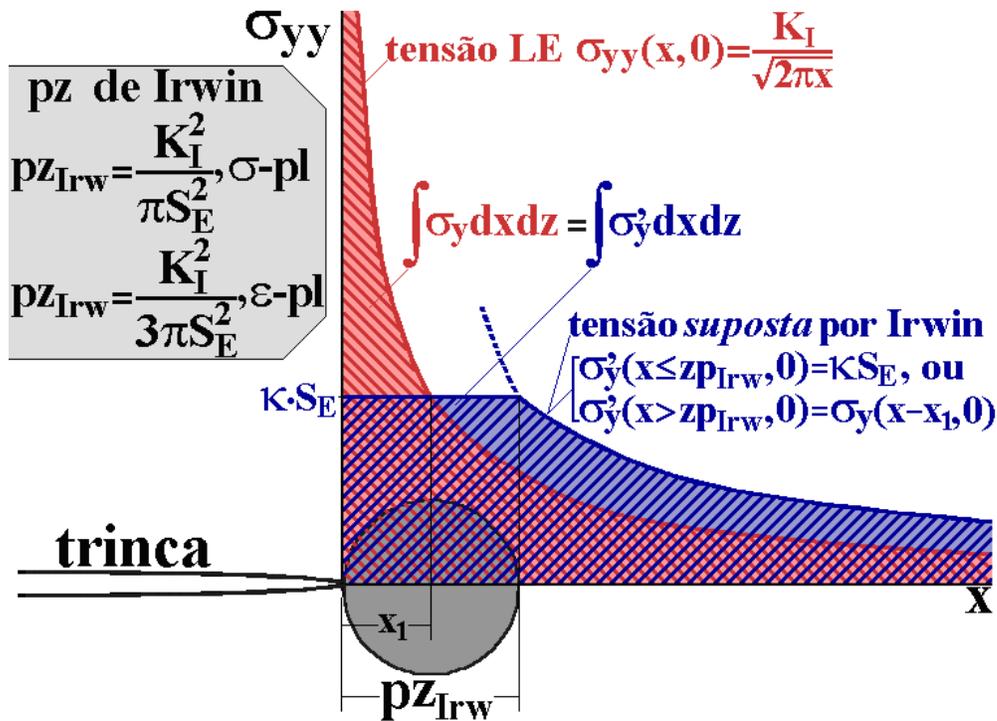


Figura 68 – Comparação entre a componente  $\sigma_{yy}(x, 0)$  gerada por  $K_I$  e a componente  $\sigma_{yy}(x-x_1, 0)$  gerada por  $K_I$  e transladada de  $x_1$  (adaptada de Castro & Meggiolaro, 2009).

O valor de  $pz_{Irw}$  pode ser determinado a partir das componentes de tensão  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{yy}$  transladadas de  $x_1$  para ambos os estados planos. Considerando o estado plano de tensão e igualando-se a tensão equivalente de Mises à  $S_Y$ , tem-se que:

$$S_Y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(x-x_1)}}. \quad (55)$$

O valor de  $x$  determinado na Eq. (55) equivale a nova zona plástica estimada por Irwin (1958). Após algumas poucas operações na Eq. (55), é possível se obter a Eq. (56):

$$\frac{K_I^2}{S_Y^2} = 2\pi x - 2\pi x_1. \quad (56)$$

Ao se isolar  $x$  na Eq. (56) e lembrando que  $x_1$  é igual à  $pz_0$  e que  $pz_0 = (K_I^2 / (2\pi S_Y^2))$ , tem-se que:

$$x = 2pz_0 \therefore pz_{Irw} = 2pz_0. \quad (57)$$

Portanto, a nova zona plástica estimada por Irwin,  $pz_{Irw}$ , prevê uma zona plástica que é o dobro do tamanho da zona plástica prevista originalmente,  $pz_0$  para a direção paralela ao plano da trinca ( $\theta = 0^\circ$ ).

#### 4.1.2. Correção feita para todas as direções em que se considera a componente $\sigma_{yy}$ gerada pelo campo de tensões obtido pela função de tensão de Westergaard – Rodriguez (2007)

Rodriguez (2007) propôs uma forma alternativa para corrigir as zonas plásticas obtidas da solução linear a partir da translação da componente  $\sigma_{yy}$  de um valor  $r_1$ , igual ao que foi feito por Irwin (1958). Outra semelhança com o trabalho de Irwin, foi que Rodriguez analisou apenas o caso da placa de Griffith uniaxialmente carregada. Entretanto, Rodriguez utilizou o campo de tensões linear elástico gerado a partir da função de tensão de Westergaard. Além de usar o campo de tensões gerado a partir da função de tensão de Westergaard, Rodriguez tentou estender as correções para todas as direções do plano ( $0^\circ < \theta < 360^\circ$ ). Como o exemplo estudado por Rodriguez foi o da placa de Griffith uniaxialmente carregada, ele considerou apenas a componente  $\sigma_{yy}$  para a correção.

A correção proposta por Rodriguez (2007) pode ser melhor compreendida pela Figura 69.

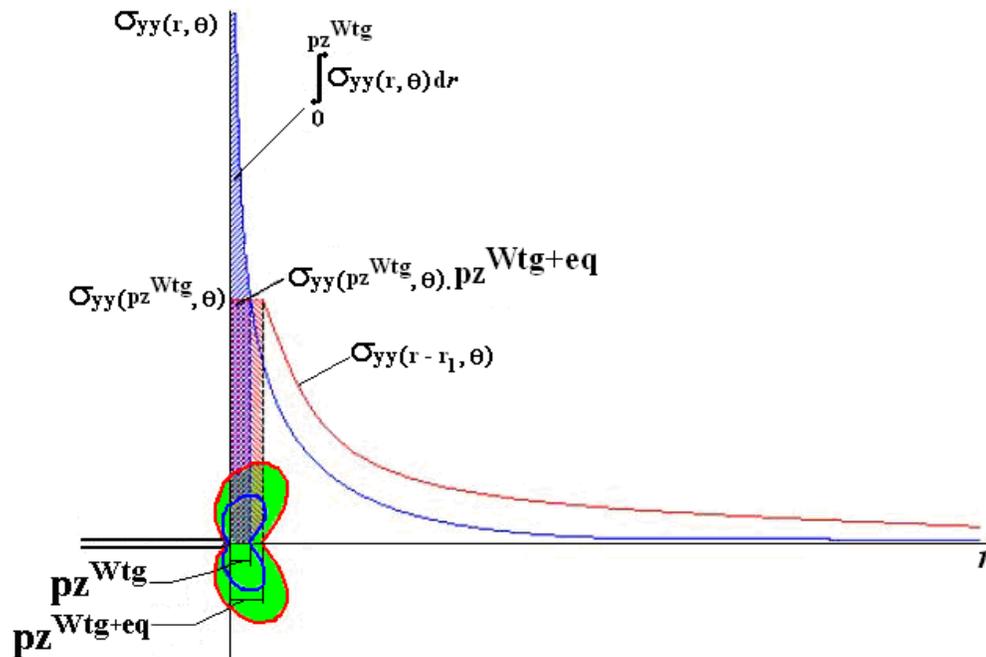


Figura 69 – Comparação entre a componente  $\sigma_{yy}(x, \theta)$  gerada pela função de tensão de Westergaard e a componente  $\sigma_{yy}(r-r_1, \theta)$  gerada pela função de tensão de Westergaard e transladada de  $r_1$  (adaptada de Rodriguez, 2007).

Ao se igualar as duas áreas hachuradas na Figura 69, obtém-se a Eq. (58):

$$\sigma_{yy}(p_{z_M}^{Wig}(\theta), \theta) p_{z_M}^{Wig+eq\sigma_y}(\theta) = \int_0^{p_{z_M}^{Wig}(\theta)} \sigma_{yy}(r, \theta) dr. \quad (58)$$

A partir da Eq. (58), a zona plástica corrigida por Rodriguez pode ser obtida pela Eq. (59):

$$p_{z_M}^{Wig+eq\sigma_y}(\theta) = \frac{\int_0^{p_{z_M}^{Wig}(\theta)} \sigma_{yy}(r, \theta) dr}{\sigma_{yy}(p_{z_M}^{Wig}(\theta), \theta)}. \quad (59)$$

Essa correção pode ser vista como uma tentativa de generalizar a correção feita por Irwin na direção paralela ao plano da trinca ( $\theta = 0$ ), que é baseada no equilíbrio das forças verticais que geram tensões singulares no interior das zonas plásticas. Entretanto alguns pontos devem ser ressaltados na correção feita por Rodriguez (2007), conforme é discutido na próxima subseção.

#### 4.1.3. Discussão sobre a proposta de Rodriguez

O argumento de Rodriguez (2007) para validar sua proposta de correção da zona plástica, que não foi devidamente explicado em seu trabalho, é baseado nos seguintes fatos. Primeiro, como o carregamento é uniaxial, considera-se apenas o equilíbrio das forças geradas pela tensão  $\sigma_{yy}$ . Além disso, tendo-se o campo de tensões representado  $K_I$ , Eq. (2), percebe-se que a razão entre as tensões,  $\sigma_{xx}/\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{yy}/\sigma_{xy}$  e  $\sigma_{xy}/\sigma_{xx}$  é mantida constante para um determinado  $\theta$ , independentemente do valor do raio. Por esse fato, Rodriguez argumenta que ao se usar apenas  $\sigma_{yy}$  na correção também se altera as outras componentes devido à razão entre elas permanecer constante.

Em contrapartida ao primeiro argumento de Rodriguez e utilizando-se o campo de tensões gerado pela função de tensão de Westergaard, a Figura 70 mostra que mesmo que o carregamento seja uniaxial, a trinca gera para  $\theta = 0^\circ$ , singularidades na componente  $\sigma_{xx}$ . Para outros valores de  $\theta$  a singularidade também ocorre na componente  $\sigma_{xy}$ .

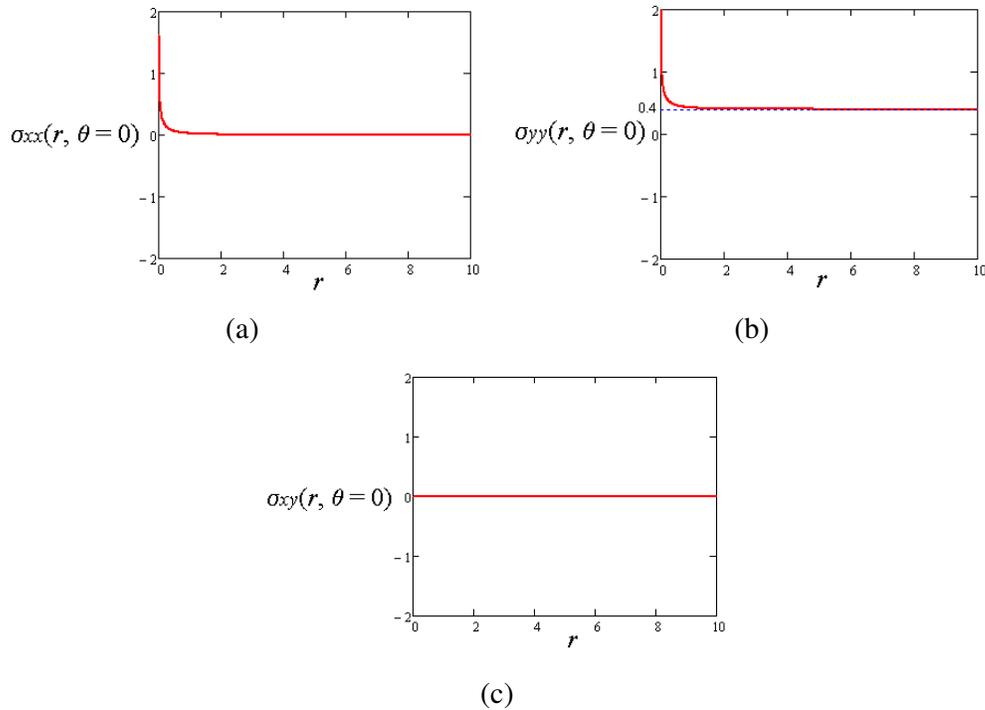


Figura 70 – Mostra os comportamentos: (a) da componente  $\sigma_{xx}(r,0)$ , (b) da componente  $\sigma_{yy}(r,0)$  e (c) da componente  $\sigma_{xy}(r,0)$  na direção paralela ao plano da trinca que são geradas pelo campo de tensões gerado pela função de tensão de Westergaard.

Apesar de não ser mostrado neste trabalho, também é importante comentar que essas singularidades presentes nas componentes  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{xy}$  também aparecem quando se utiliza o campo de tensões gerado apenas por  $K_I$ .

Já em relação ao segundo argumento, a afirmação feita é verdadeira apenas quando se usa Eq. (2). Entretanto, quando se utiliza o campo de tensões gerado pela função de tensão de Westergaard, o argumento de Rodriguez não é verificado. Com objetivo de verificar detalhadamente esse segundo argumento de Rodriguez, nove funções são definidas. As três primeiras dessas funções usam o campo de tensões gerado por  $K_I$  e a componente  $\sigma_{yy}$  no denominador. As outras seis funções utilizam o campo de tensões gerado pela função de tensão de Westergaard, sendo que três usam a componente  $\sigma_{yy}$  no denominador e as outras três utilizam a tensão equivalente de Mises.

Ao se usar o campo de tensões gerado por  $K_I$  pode-se definir as equações (60), (61) e (62):

$$RK_{S_{xx}S_{yy}}(\theta) = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yy}} = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]}, \quad (60)$$

$$RK_{S_{yy}S_{yy}}(\theta) = \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{yy}} = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]}, \quad (61)$$

$$RK_{S_{xy}S_{yy}}(\theta) = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{yy}} = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]}. \quad (62)$$

Ao se utilizar o campo tensões gerado pela função de tensão de Westergaard as equações (63), (64), (65), (66), (67) e (68) podem ser definidas:

$$RWtg_{S_{xx}S_{yy}}(\theta) = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yy}} = \frac{\operatorname{Re}(Z) - y \operatorname{Im}(Z') - \sigma_n}{\operatorname{Re}(Z) + y \operatorname{Im}(Z')}, \quad (63)$$

$$RWtg_{S_{yy}S_{yy}}(\theta) = \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{yy}} = \frac{\operatorname{Re}(Z) + y \operatorname{Im}(Z')}{\operatorname{Re}(Z) + y \operatorname{Im}(Z')}, \quad (64)$$

$$RWtg_{S_{xy}S_{yy}}(\theta) = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{yy}} = \frac{-y \operatorname{Re}(Z')}{\operatorname{Re}(Z) + y \operatorname{Im}(Z')}. \quad (65)$$

$$RWtg_{S_{xx}S_m}(Z(r, \theta)) = \frac{\sigma_{xx}(Z(r, \theta))}{\sigma_{Mises}(Z(r, \theta))} = \frac{\operatorname{Re}(Z(r, \theta)) - y \operatorname{Im}(Z'(r, \theta)) - \sigma_n}{\sigma_{Mises}(Z(r, \theta))}, \quad (66)$$

$$RWtg_{S_{yy}S_m}(Z(r, \theta)) = \frac{\sigma_{yy}(Z(r, \theta))}{\sigma_{Mises}(Z(r, \theta))} = \frac{\operatorname{Re}(Z(r, \theta)) + y \operatorname{Im}(Z'(r, \theta))}{\sigma_{Mises}(Z(r, \theta))}, \quad (67)$$

$$RWtg_{S_{xy}S_m}(Z(r, \theta)) = \frac{\sigma_{xy}(Z(r, \theta))}{\sigma_{Mises}(Z(r, \theta))} = \frac{-y \operatorname{Re}(Z'(r, \theta))}{\sigma_{Mises}(Z(r, \theta))}. \quad (68)$$

A Figura 71 mostra o comportamento das nove funções definidas acima. Nela é possível ver que o segundo argumento de Rodriguez não vale para o caso em que se usa a função de tensão de Westergaard para representar o campo de tensões. A Figura 71(a) mostra o comportamento das funções obtidas pelas equações (60), (63) e (66). A Figura 71(b) mostra o comportamento das funções obtidas pelas equações (61), (64) e (67). Por último, a Figura 71(c) mostra o comportamento das funções obtidas pelas equações (62), (65) e (68). Na Figura 71, todas as funções são avaliadas para um valor de  $\theta$  igual a  $45^\circ$ .

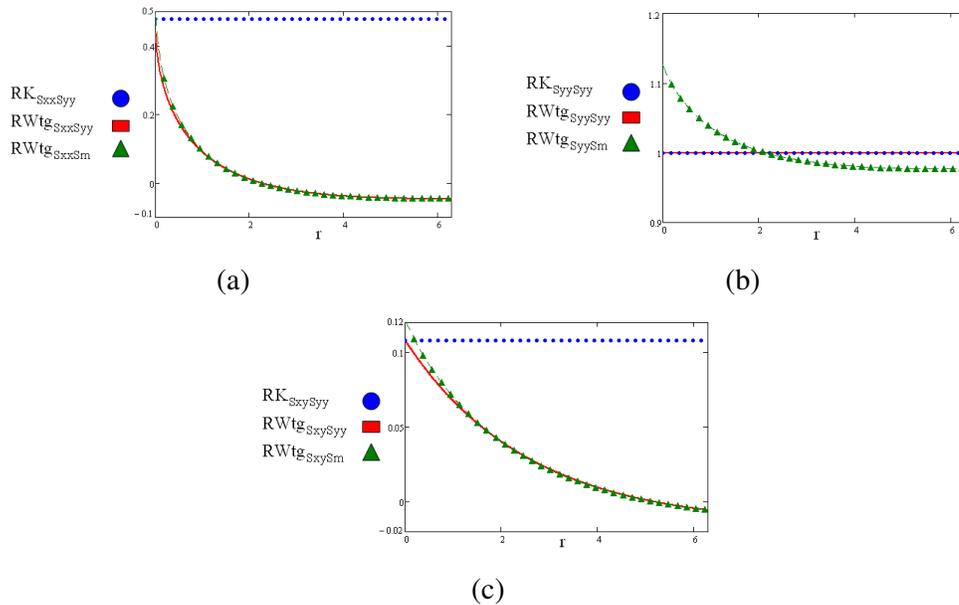


Figura 71 – Mostra os comportamentos: (a) da componente  $\sigma_{xx}(r,0)$ , (b) da componente  $\sigma_{yy}(r,0)$  e (c) da componente  $\sigma_{xy}(r,0)$  na direção paralela ao plano da trinca que são geradas pelo campo de tensões gerado pela função de tensão de Westergaard.

Analisando a Figura 70 e a Figura 71 é possível verificar que os argumentos de Rodriguez (2007) não são válidos para todas as situações. Dessa forma este trabalho apresenta, nas próximas subseções, três formas alternativas para as correções das  $pz(\theta)_M$ .

#### 4.1.4. Correção feita para todas as direções em que se considera a componente $\sigma_{Mises}$ gerada pelo campo de tensões obtido pela função de tensão de Westergaard

O principal argumento de Rodriguez (2007) a favor da correção  $pz_M^{Wig+eq\sigma_y}(\theta)$  é que o exemplo estudado por ele apresenta um carregamento uniaxial. Entretanto, como proceder para casos de carregamentos mais complicados como o caso da placa de Griffith carregada biaxialmente, ou o caso de uma placa sob flexo tração? Nesses casos, por que razão seria necessário utilizar apenas a componente  $\sigma_{yy}$  para fazer a correção das zonas plásticas?

Ao se lembrar que o problema de estimar zonas plásticas à frente da ponta de trincas é um problema intrinsecamente não linear e que por isso, qualquer correção dessas zonas plásticas obtidas de uma solução linear serve apenas como uma medida qualitativa, a correção que utiliza a tensão equivalente de Mises pode

ser uma razoável alternativa. Nesta proposta, substitui-se na Eq. (59) a componente  $\sigma_{yy}$  pela tensão equivalente de Mises,  $\sigma_{Mises}$ , conforme mostra a Eq. (69):

$$pz_M^{Wtg+eqM}(\theta) = \frac{\int_0^{pz_M^{Wtg}(\theta)} \sigma_{Mises}(r, \theta) dr}{\sigma_{Mises}(pz_M^{Wtg}(\theta), \theta)}. \quad (69)$$

Como as  $pz_M^{Wtg}(\theta)$  são determinadas para os pontos em que  $\sigma_{Mises}(pz_M^{Wtg}(\theta), \theta) = S_Y$ , a Eq. (69) pode ser reescrita como:

$$pz_M^{Wtg+eqM}(\theta) = \frac{\int_0^{pz_M^{Wtg}(\theta)} \sigma_{Mises}(r, \theta) dr}{S_Y}. \quad (70)$$

A Eq. (70) define as zonas plásticas corrigidas em que se usa  $\sigma_{Mises}$ .

#### 4.1.5. Correção em que se considera um incremento de zona plástica constante nas $pz(\theta)_M$ originais

Nesta correção se utiliza um incremento constante ao longo de cada raio definido para uma direção  $\theta$ . Essa correção pode ser resumida pela Eq. (71):

$$pz_M^{Wtg+eqR}(\theta) = pz_M^{Wtg}(\theta) + \kappa, \quad (71)$$

em que  $\kappa = pz_M^{Wtg+eq\sigma_y}(\bar{\theta}) - pz_M^{Wtg}(\bar{\theta})$  ou  $\kappa = pz_M^{Wtg+eqM}(\bar{\theta}) - pz_M^{Wtg}(\bar{\theta})$ . Nesses dois casos,  $\bar{\theta}$  é um valor conhecido, normalmente igual a zero. Essa constante tem o mesmo sentido de equilíbrio de forças para a direção  $\theta = 0^\circ$ , conforme foi feito por Irwin (1958). Para as outras direções, adota-se o mesmo valor  $\kappa$  de correção. Essa correção possui a vantagem de ser de fácil implementação, pois a integração necessária para determinar  $\kappa$  para  $\theta = 0^\circ$  na Eq. (59) ou Eq. (70) é feita apenas uma vez.

#### 4.1.6. Correção feita para todas as direções em que se considera a força de superfície em que o campo de tensões é obtido pela função de tensão de Westergaard

Esta correção utiliza a componente perpendicular da força de superfície para fazer a correção das  $pz_M^{Wtg}(\theta)$ . Esta correção é mais consistente que a correção de

Rodriguez (2007) por considerar a componente perpendicular à superfície da força de superfície, cuja integral ao longo da área de interesse resulta na força aplicada, diferentemente da simples componente de tensão. Essa correção pode ser resumida pela Eq. (72):

$$pZ_M^{Wig+eqTr}(\theta) = \frac{\int_0^{pZ_M^{Wig}(\theta)} t_{yy}(r, \theta) dr}{t_{yy}(pZ_M^{Wig}(\theta), \theta)}, \quad (72)$$

em que  $t_{yy}$  é determinada pela fórmula de Cauchy, Eq. (73):

$$\begin{Bmatrix} t_{xx}(r, \theta) \\ t_{yy}(r, \theta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(r, \theta) & \sigma_{xy}(r, \theta) \\ \sigma_{xy}(r, \theta) & \sigma_{yy}(r, \theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{Bmatrix}. \quad (73)$$

#### 4.1.7. Zonas plásticas corrigidas para o caso da placa de Griffith

A comparação de todas as propostas de correções é feita para o exemplo da placa de Griffith. As próximas doze figuras mostram as diferenças em termos de estimativa de zonas plásticas entre cada uma dessas propostas para os dois estados planos. Nessas figuras também se apresentam as zonas plásticas estimadas pelo truncamento da tensão equivalente de Mises, que é gerada pelo campo de tensões obtido pelo  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $T$ -stress e pela função de tensão de Westergaard.

Em ambos os casos planos, as zonas plásticas corrigidas aumentam de tamanho. Esse fato já era esperado, pois ao se considerar um material perfeitamente plástico e ao se limitar as tensões dentro das zonas plásticas à tensão de escoamento, uma quantidade maior de material deve deformar plasticamente, o que faz com que as zonas plásticas aumentem de tamanho.

Em ambos os estados planos e para todos os casos de  $\sigma_r/S_Y$ , as estimativas  $pZ_M^{Wig+eq\sigma_y}$  são bem próximas das estimativas  $pZ_M^{Wig+eqTr}$ . Essas duas estimativas são, em geral, o dobro das zonas plásticas  $pZ_M^{Wig}$ . As estimativas  $pZ_M^{Wig+eqM}$  são um pouco menores as estimativas  $pZ_M^{Wig+eq\sigma_y}$ . As estimativas  $pZ_M^{Wig+eqR}$  são maiores que as estimativas  $pZ_M^{Wig}$  e menores que as estimativas  $pZ_M^{Wig+eqM}$ .

A Figura 72 mostra todas as propostas de correção das  $pZ(\theta)_M$  com  $\sigma_r/S_Y = 0,2$  para o caso plano de tensão.

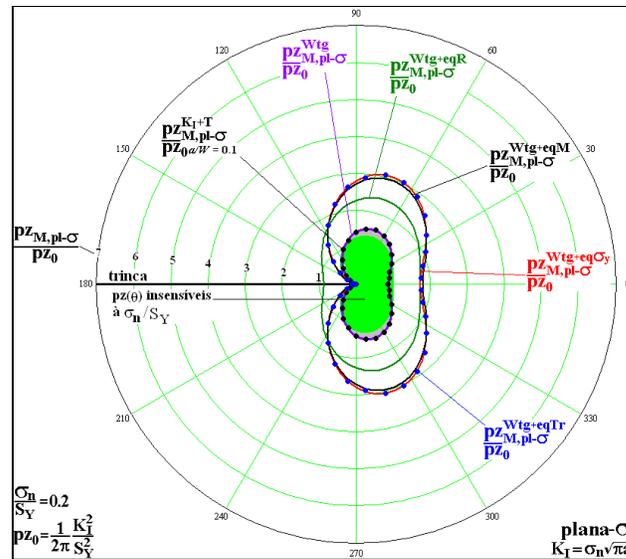


Figura 72 – Todas as propostas de correção das estimativas  $pz(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas lineares elásticas truncadas sob tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  para o caso da placa de Griffith.

A Figura 73 mostra todas as propostas de correção das  $pz(\theta)_M$  com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  para o caso plano de tensão.

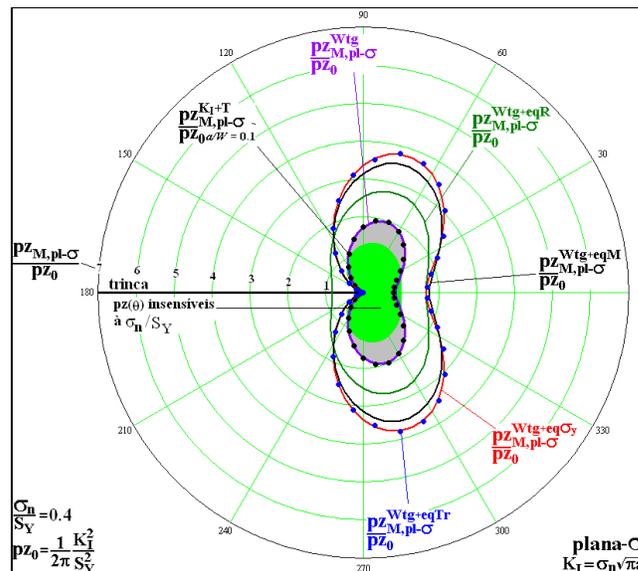


Figura 73 – Todas as propostas de correção das estimativas  $pz(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas lineares elásticas truncadas sob tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  para o caso da placa de Griffith.

A Figura 74 mostra todas as propostas de correção das  $pz(\theta)_M$  sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .

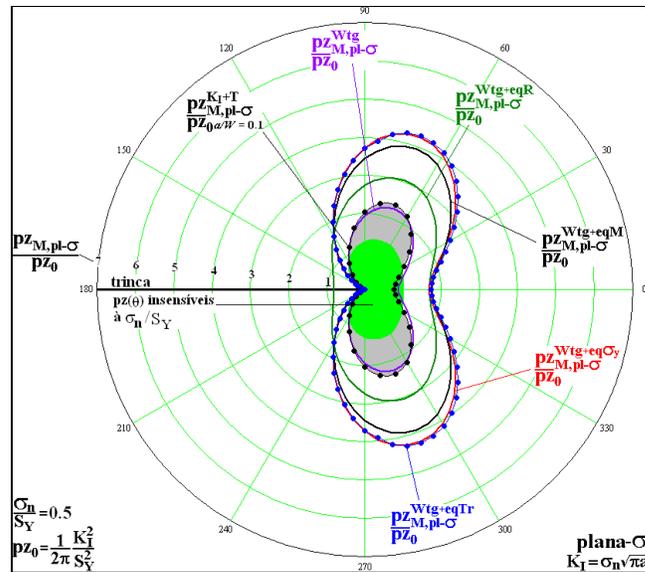


Figura 74 – Todas as propostas de correção das estimativas  $p_z(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas lineares elásticas truncadas sob tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$  para o caso da placa de Griffith.

A Figura 75 mostra todas as propostas de correção das  $p_z(\theta)_M$  sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ .

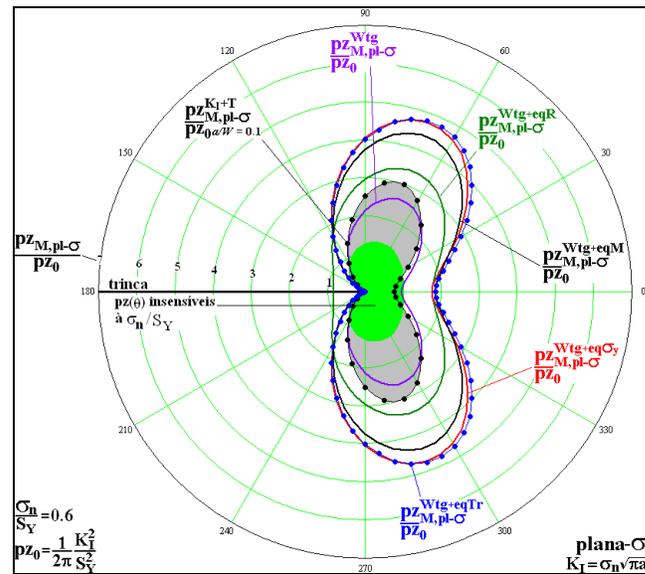


Figura 75 – Todas as propostas de correção das estimativas  $p_z(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas lineares elásticas truncadas sob tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  para o caso da placa de Griffith.

A Figura 76 mostra todas as propostas de correção das  $p_z(\theta)_M$  sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ .

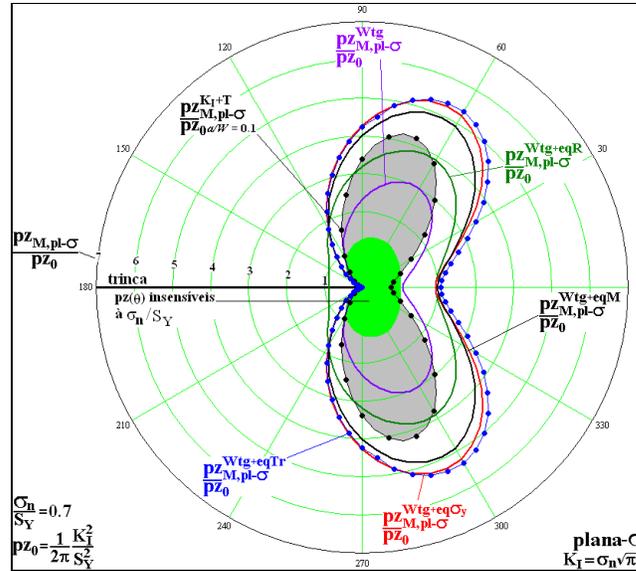


Figura 76 – Todas as propostas de correção das estimativas  $p_z(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas lineares elásticas truncadas sob tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  para o caso da placa de Griffith.

A Figura 77 mostra todas as propostas de correção das  $p_z(\theta)_M$  sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ .

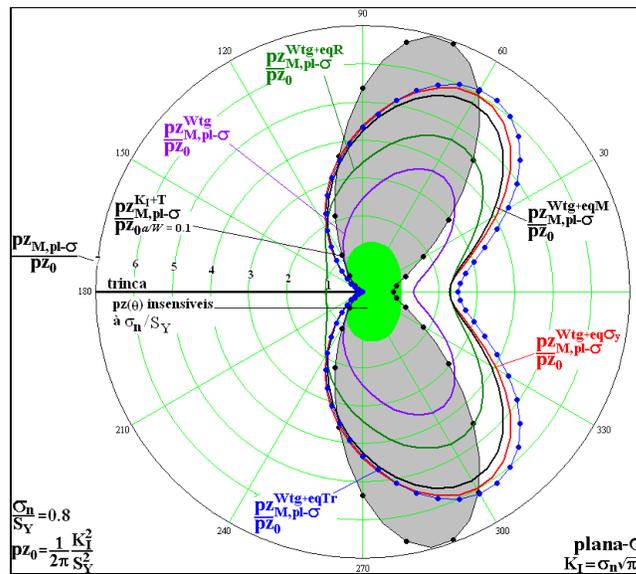


Figura 77 – Todas as propostas de correção das estimativas  $p_z(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas lineares elásticas truncadas sob tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  para o caso da placa de Griffith.

A Figura 78 mostra todas as propostas de correção das  $p_z(\theta)_M$  sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ .

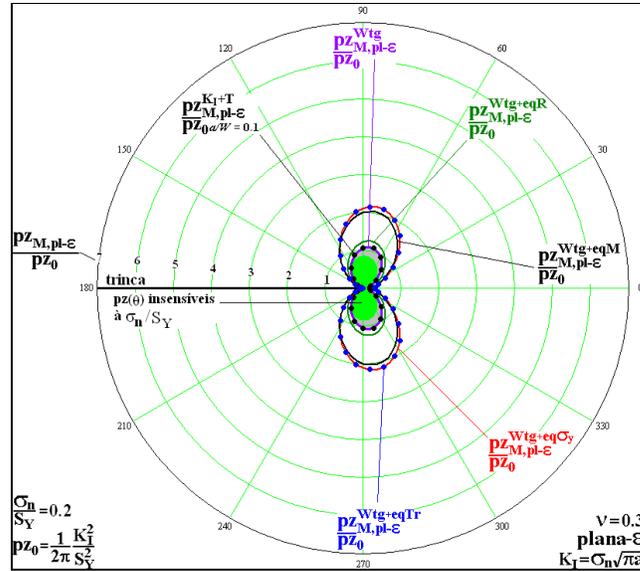


Figura 78 – Todas as propostas de correção das estimativas  $p_z(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas LE truncadas sob deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  para o caso da placa de Griffith.

A Figura 79 mostra todas as propostas de correção das  $p_z(\theta)_M$  sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

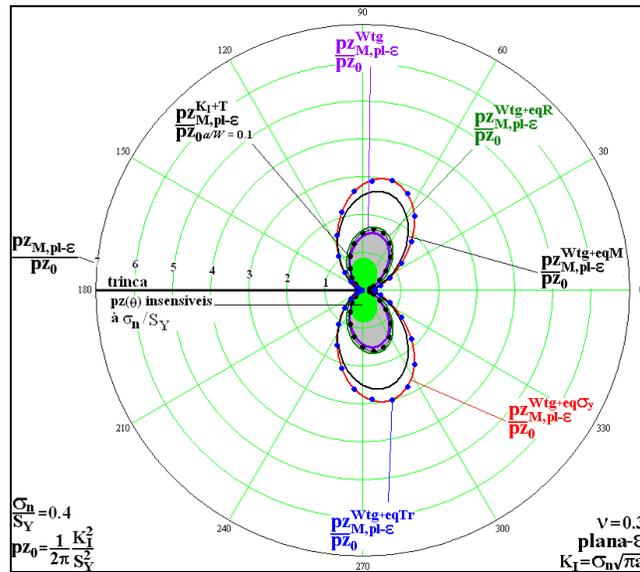


Figura 79 – Todas as propostas de correção das estimativas  $p_z(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas LE truncadas sob deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  para o caso da placa de Griffith.

A Figura 80 mostra todas as propostas de correção das  $p_z(\theta)_M$  sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .

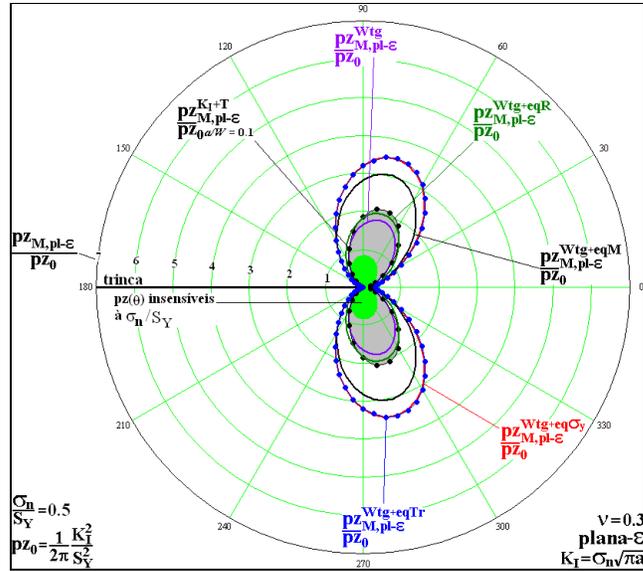


Figura 80 – Todas as propostas de correção das estimativas  $p_z(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas LE truncadas sob deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$  para o caso da placa de Griffith.

A Figura 81 mostra todas as propostas de correção das  $p_z(\theta)_M$  sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ .

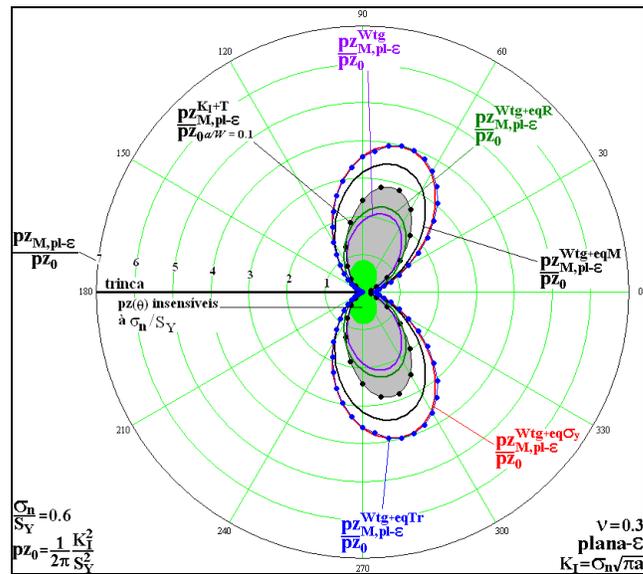


Figura 81 – Todas as propostas de correção das estimativas  $p_z(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas LE truncadas sob deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  para o caso da placa de Griffith.

A Figura 82 mostra todas as propostas de correção das  $p_z(\theta)_M$  sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ .

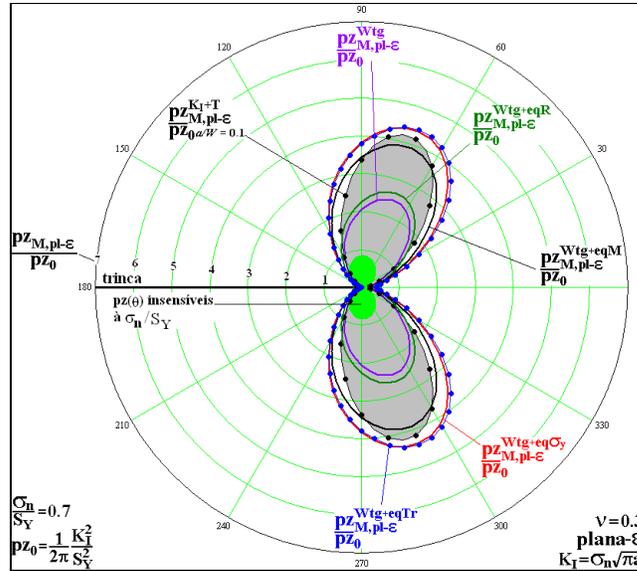


Figura 82 – Todas as propostas de correção das estimativas  $p_z(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas LE truncadas sob deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  para o caso da placa de Griffith.

A Figura 83 mostra todas as propostas de correção das  $p_z(\theta)_M$  sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ .

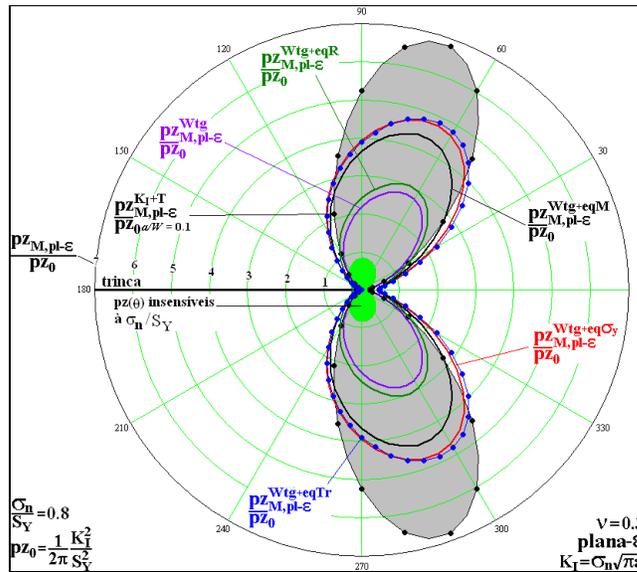


Figura 83 – Todas as propostas de correção das estimativas  $p_z(\theta)_M$  junto com as zonas plásticas LE truncadas sob deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  para o caso da placa de Griffith.

## 4.2. Proposta de correção para levar em consideração o efeito do encruamento do material

Esta seção tem três subseções. A primeira subseção mostra duas propostas de correção das zonas plásticas em que se utiliza o campo de tensões gerado por  $K_I$ . A segunda subseção mostra uma proposta de correção em que se usa o campo de tensões obtido a partir da função de tensão de Westergaard. A terceira subseção apresenta o caso da placa de Griffith em que se mostra as estimativas  $p_z(\theta)_M$  obtidas a partir da proposta de correção que usa uma relação exponencial entre a tensão e a coordenada  $r$  (Sousa *et al.*, 2010).

### 4.2.1. Proposta de correção que usa o campo de tensões gerado por $K_I$

Esta subseção é dividida em duas outras subseções. Essas duas subseções mostram as propostas feitas por Kujawaski & Ellyin (1986) para considerar o efeito do encruamento no tamanho e forma das zonas plásticas a partir do uso do  $K_I$  para representar o campo de tensões. A diferença básica entre essas duas propostas está na relação adotada entre tensão e deformação.

#### 4.2.1.1. Proposta que utiliza uma regra exponencial e $K_I$

Esta lei adota a seguinte relação entre tensão e deformação para a fase plástica,  $\sigma_{pl}$  e  $\varepsilon_{pl}$ :

$$\sigma_{pl} = S_Y \left( \frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_Y} \right)^{n_e}, \quad (74)$$

em que  $\varepsilon_Y$  é a deformação plástica correspondente ao começo do escoamento,  $n_e$  é o expoente do encruamento e  $S_Y$  é a tensão de escoamento. Kujawaski & Ellyin (1986) utilizaram a Eq. (74) e apresentaram a seguinte expressão para determinar as zonas plásticas:

$$p_{z,KE-Exp} = \frac{K_I^2}{S_Y^2 (1 + n_e) \pi}. \quad (75)$$

#### 4.2.1.2. Proposta que utiliza a equação de Ramberg-Osgood e o $K_I$

Esta estimativa de zona plástica utiliza a equação de Ramberg-Osgood para simular o comportamento do material, de acordo com a Eq. (21). Kujawaski & Ellyin (1986) partiram dessa equação e propuseram a seguinte expressão para a determinação das zonas plásticas:

$$pz_{KE-RO} = \frac{K_I^2}{S_Y^2 (1 + \tilde{n}^2)} \pi, \quad (76)$$

em que

$$\tilde{n} = \frac{1 + n_e \left( \frac{W_0^P}{W_0^E} \right)}{1 + \left( \frac{W_0^P}{W_0^E} \right)}, \quad (77)$$

e

$$W_0^P = \frac{1}{(1 + n_Y)} S_Y \varepsilon_Y \text{ e } W_0^E = \frac{S_Y^2}{2E}. \quad (78)$$

As duas próximas subseções apresentam as propostas de correção das zonas plásticas em que se utiliza o campo de tensões obtido a partir da função de tensão de Westergaard.

#### 4.2.2. Proposta de correção que usa o campo de tensões gerado pela função de tensão de Westergaard

Esta subseção apresenta a proposta em que se adota uma relação exponencial entre a tensão e a coordenada  $r$  (Sousa *et al*, 2010).

Na realidade, para que se possa levar em consideração os efeitos do encruamento no tamanho e forma das zonas plásticas é necessário que se tenha alguma expressão que relacione deformação e/ou tensão com as coordenadas polares;  $\varepsilon(r, \theta)$  e/ou  $\sigma(r, \theta)$ . Contudo, como este trabalho está usando um campo de tensões para determinar as  $pz(\theta)_M$  a partir do critério de escoamento de Mises para depois corrigir essas  $pz(\theta)_M$  para levar em consideração os efeitos do encruamento, é necessário que se tenha alguma relação  $\sigma(r, \theta)$  estabelecida. Caso se adote alguma relação entre  $\varepsilon(r, \theta)$  e  $r$ , é necessário que utilize uma relação

adicional entre  $\sigma$  e  $\varepsilon$  para que se tenha, posteriormente, a relação  $\sigma(r, \theta)$  desejada.

Ao se adotar esse procedimento de estimativa das  $p_z(\theta)_M$ , que tenta levar em consideração os efeitos do encruamento, espera-se que ao se considerar um material com bastante encruamento as estimativas  $p_z^{\text{Wtg+eqHard}}_M$  reproduzam as estimativas  $p_z(\theta)_M$ . Caso se considere um material perfeitamente plástico, espera-se que as  $p_z^{\text{Wtg+eqHard}}_M$  reproduzam as  $p_z^{\text{Wtg+eq}}_M$ . Em situações intermediárias, espera-se que à medida que o encruamento aumente, as  $p_z^{\text{Wtg+eq}}_M$  sejam cada vez menores, pois o material suportaria tensões maiores dentro das zonas plásticas. Para melhor compreensão das expectativas de comportamento das  $p_z^{\text{Wtg+eqHard}}_M$  e da necessidade que se tem de se obter  $\sigma(r, \theta)$ , apresenta-se a Figura 84.

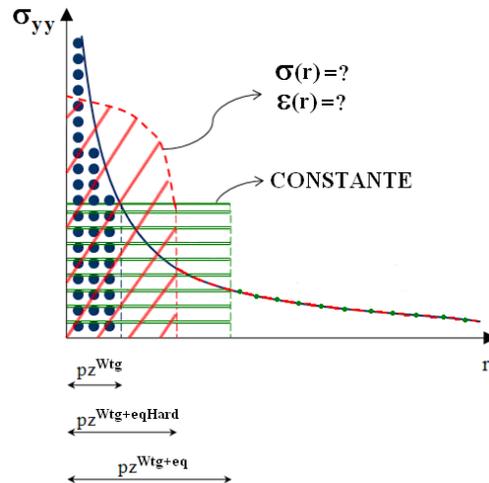


Figura 84 – Comportamento da componente de tensão  $\sigma_y$  e das estimativas  $p_z^{\text{Wtg}}_M$ ,  $p_z^{\text{Wtg+eqHard}}_M$  e  $p_z^{\text{Wtg+eq}}_M$  para um determinado valor de  $\theta$ .

Ao se analisar a Figura 84 é possível perceber que para uma determinada direção  $\theta$ , é necessário que se tenha uma expressão que estabeleça a relação entre a tensão e/ou a deformação em função da coordenada  $r$ . Com base nisso, esta subseção mostra a proposta que utiliza uma relação exponencial entre tensão e a coordenada polar  $r$  ( $p_z^{\text{Wtg+eqHard}}_{\text{Exp}-\sigma, r}$ ), (Sousa *et al*, 2010). Essa proposta pode ser vista pela Eq. (79):

$$\sigma = \alpha r^{1/(1+m)}, \quad (79)$$

em que  $\alpha$  e  $m$  são parâmetros que devem ser ajustados a partir da curva do modelo constitutivo do material.

A Figura 85 mostra como a Eq. (79) simula somente a fase plástica do comportamento do material.

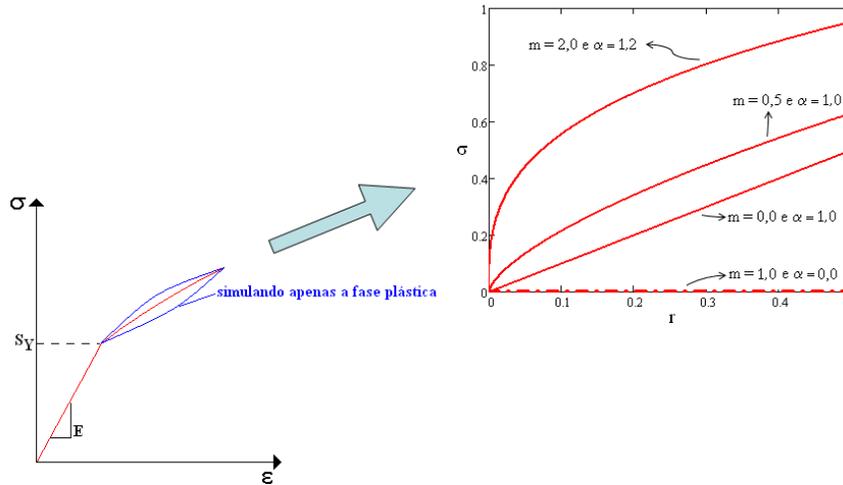


Figura 85 – Simulação da fase plástica de uma material que estabelece uma relação entre tensão e a coordenada polar  $r$  para vários valores de  $m$  e  $\alpha$ .

A hipótese básica nesta proposta é ajustar o modelo idealizado pela Eq. (79), que relaciona tensão ( $\sigma$ ) e posição ( $r$ ), com o comportamento plástico do material, que relaciona tensão ( $\sigma$ ) e deformação ( $\epsilon$ ). Essa hipótese é feita para que se tenha alguma maneira de comparar o modelo representado pela Eq. (79) com algum comportamento real do material. É importante lembrar mais uma vez que essa hipótese, assim como todas as outras correções, é apenas uma maneira qualitativa de se estimar os efeitos do encruamento no tamanho e forma das zonas plásticas.

Como o modelo proposto simula apenas a fase plástica do material, a estimativa  $p z_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma,r}$  pode ser feita compondo as duas áreas mostradas na Figura 86. Uma das áreas, denominada de  $A_{Linear}$ , é obtida da mesma forma feita por Rodriguez (2007). A outra área, denominada de  $A_{NaoLinear}$ , é obtida pela integração da Eq. (79) de zero até  $p z_M^{Wtg+eqHard}$ . A soma dessas duas áreas deve ser igual à área determinada pela integração da componente  $\sigma_{yy}$  de zero até  $p z_M^{Wtg}$ .

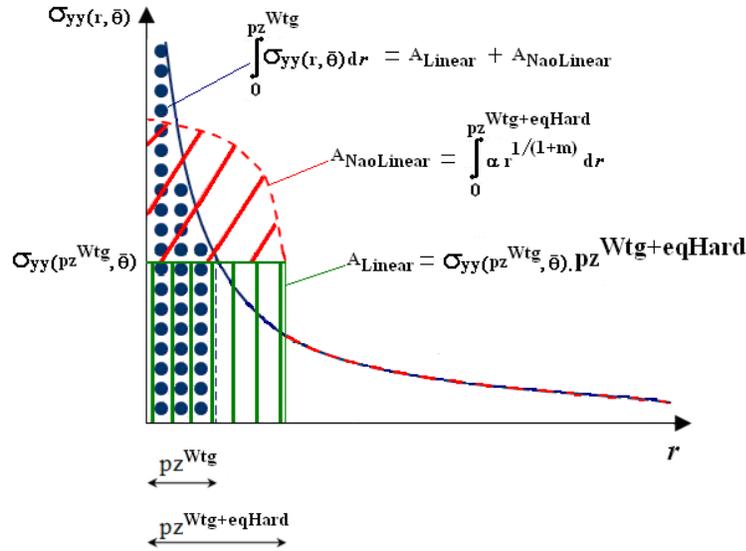


Figura 86 – Determinação da estimativa  $pz_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma,r}$  para um determinado valor de  $\bar{\theta}$  a partir da igualdade entre as áreas em azul pontilhado e  $A_{Total}$ , em que  $A_{Total} = A_{Linear} + A_{NaoLinear}$ .

Ao se expressar a ideia de composição de duas áreas, uma correspondente à parte linear elástica e outra que correspondente à parte plástica, a proposta apresentada nesta subseção pode ser resumida pela Eq. (80):

$$A_{Total} = A_{Linear} + A_{NaoLinear} = \int_0^{pz_M^{Wtg}} \sigma_{yy}(\sigma_n, r, \theta) dr, \tag{80}$$

em que

$$A_{Linear} = \sigma_{yy}(\sigma_n, pz_M^{Wtg}, \theta) pz_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma,r}, \tag{81}$$

e

$$A_{NaoLinear} = \int_0^{pz_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma,r}} [\alpha r^{1/(1+m)}] dr, \tag{82}$$

resultando em

$$\sigma_{yy}(\sigma_n, pz_M^{Wtg}, \theta) pz_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma,r} + \int_0^{pz_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma,r}} [\alpha r^{1/(1+m)}] dr = \int_0^{pz_M^{Wtg}} \sigma_{yy}(\sigma_n, r, \theta) dr. \tag{83}$$

O valor de  $pz_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma,r}$  que satisfizer a Eq. (83) será a zona plástica corrigida que considera os efeitos do encruamento conforme esta proposta.

Apesar de que toda a demonstração feita nesta subseção tenha utilizado a componente  $\sigma_{yy}$  para fazer a correção das zonas plásticas, é importante ressaltar

que a tensão equivalente de Mises também pode ser usada na correção das zonas plásticas do tipo  $pZ_M^{Wig+eqHardExp-\sigma,r}$ .

#### 4.2.3. Estimativas dos efeitos do encruamento nas zonas plásticas para o caso da placa de Griffith

Esta subsecção apresenta as zonas plásticas  $pZ_M^{Wig+eqHardExp-\sigma,r}$  para o exemplo da placa de Griffith para os dois casos planos. Neste exemplo, adota-se um módulo de Young igual a 73 GPa, para seis níveis de  $\sigma_r/S_Y$ , e para dois valores do expoente de encruamento ( $\alpha_e$ ). O coeficiente de encruamento,  $n_e$ , é dado como uma função de  $\alpha_e$ , conforme mostra a Eq. (84):

$$\alpha_e = \left( \frac{1}{0,8} \right)^{1/n_e}. \quad (84)$$

Por simplicidade, somente a proposta  $pZ_M^{Wig+eqHardExp-\sigma,r}$  e apenas a correção  $\sigma_{yy}$  são utilizadas nesta subsecção. Por causa disso, os resultados deste exemplo são chamados de  $pZ_M^h^{Wig+eqHardExp-\sigma_y}$ , em que o subscrito  $h$  significa o valor de  $\alpha_e$  adotado.

Os valores de  $\sigma_r/S_Y$  testados são: 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; e 0,8 para os casos de tensão e de deformação plana. Os valores de  $n_e$  são: 0,1 e 0,3. Os valores de  $m$  e  $\alpha$  do modelo  $pZ_M^{Wig+eqHardExp-\sigma,r}$ , Eq. (79), são ajustados visualmente a partir do comportamento da equação de Ramberg-Osgood para cada valor de  $n_e$  e  $\alpha_e$ . Para o caso em que  $n_e = 0,1$ , tem-se  $\alpha_e = 9,313$  e  $S_Y = 1,815 \cdot 10^8$  Pa. Para o caso em que  $n_e = 0,3$ ; tem-se  $\alpha_e = 2,104$  e  $S_Y = 7,21 \cdot 10^7$  Pa. O comportamento da equação de Ramberg-Osgood para os dois valores  $n_e$  adotados pode ser visto na Figura 87. Em todos os casos de  $\sigma_r/S_Y$ , mostra-se que para ( $\alpha_e = 0,0$ ) se recai na estimativa que considera materiais perfeitamente plásticos

$$pZ_M^h^{Wig+eqHardExp-\sigma_y} = pZ_M^{Wig+eq\sigma_y} \quad \text{para } h=0,0$$

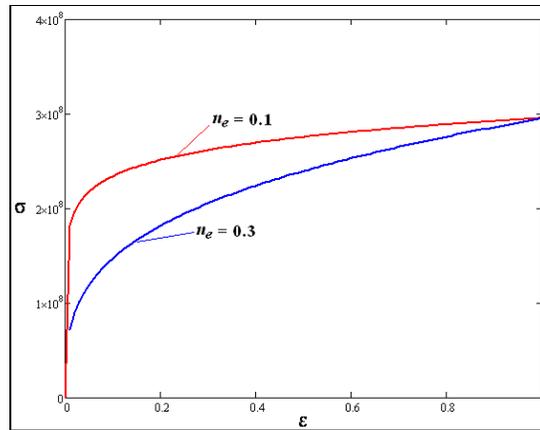


Figura 87 – Comportamento da equação de Ramberg-Osgood para  $\alpha_e = 0,1$  e  $\alpha_e = 0,3$ .

Para utilizar o modelo  $pz_M^{Wig+eqHardExp-\sigma,r}$  é necessário que se use somente a parte plástica do comportamento da equação de Ramberg-Osgood, conforme mostra a Figura 88.

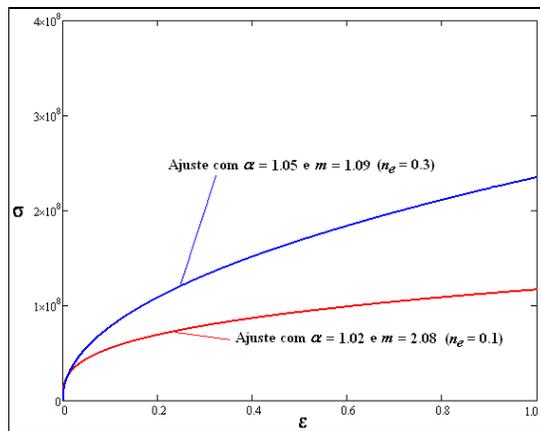


Figura 88 – Comportamento da equação de Ramberg-Osgood sem a parte elástica para  $\alpha_e = 0,1$  e  $\alpha_e = 0,3$ .

A Figura 88 também mostra os valores dos parâmetros  $\alpha$  e  $m$  do modelo  $pz_M^{Wig+eqHardExp-\sigma,r}$ . De acordo com essa figura, percebe-se que para  $n_e = 0,3$  tem-se um maior encruamento do que para  $n_e = 0,1$ . Dessa forma, esperam-se estimativas  $pz(\theta)_M$  maiores para esse caso do que para  $n_e = 0,3$ . Para o caso em que  $n_e = 0,1$ , tem-se  $\alpha = 1,02$  e  $m = 2,08$ . Para o caso em que  $n_e = 0,3$ , tem-se  $\alpha = 1,05$  e  $m = 1,09$ .

A Figura 89 mostra o ajuste de  $pZ_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma,r}$  a partir da equação de Ramberg-Osgood para  $n_e = 0,1$ .

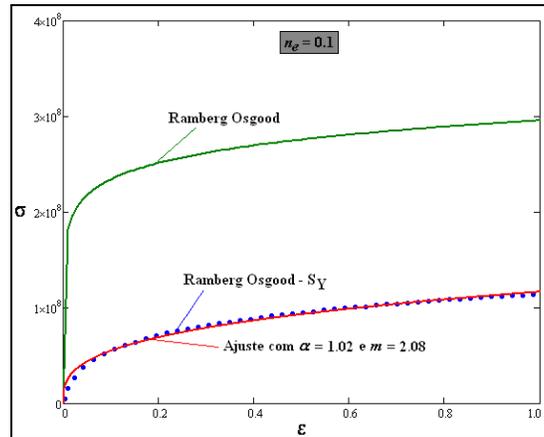


Figura 89 – O ajuste da equação de Ramberg-Osgood para  $\alpha_e = 0,1$ .

A Figura 90 mostra o ajuste de  $pZ_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma,r}$  a partir da equação de Ramberg-Osgood para  $n_e = 0,3$ .

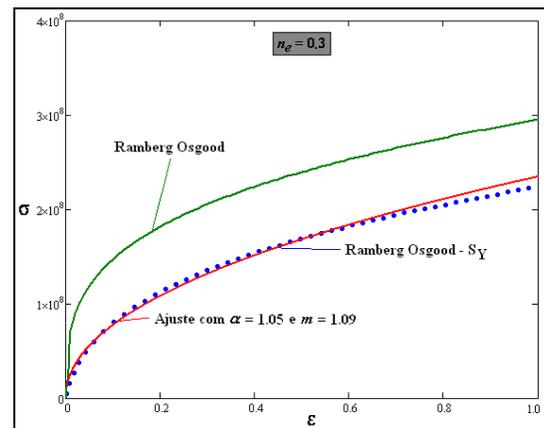


Figura 90 – O ajuste da equação de Ramberg-Osgood para  $\alpha_e = 0,3$ .

Nas próximas doze figuras, é possível observar que as estimativas

$pZ_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma_y}$  para  $h=0,0$ , que são iguais às estimativas  $pZ_M^{Wtg+eq\sigma_y}$ , são maiores que as

estimativas  $pZ_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma_y}$  para  $h=0,1$  e  $pZ_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma_y}$  para  $h=0,3$  para os dois estados planos. É

importante observar também que as estimativas  $pZ_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma_y}$  para  $h=0,1$  são maiores

que as estimativas  $pZ_M^{Wtg+eqHardExp-\sigma_y}$ , conforme o esperado. Esse fato também

acontece para os dois estados planos e para todos os valores de  $\sigma_n/S_Y$  adotados.

A Figura 91 mostra as estimativas de zonas plásticas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ .

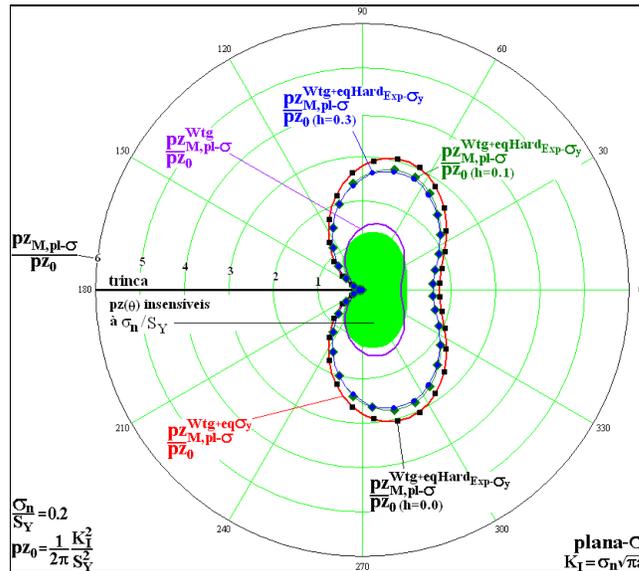


Figura 91 – Comparação entre as  $pZ$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $pZ$  corrigidas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ .

A Figura 92 mostra as estimativas de zonas plásticas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

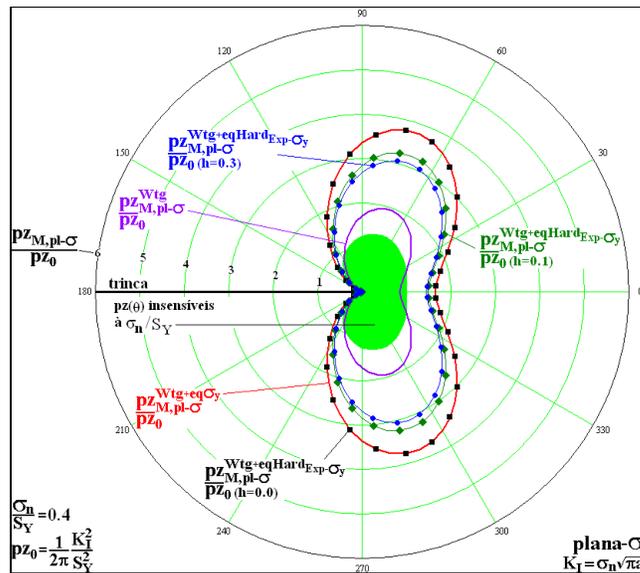


Figura 92 – Comparação entre as  $pz$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $pz$  corrigidas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

A Figura 93 mostra as estimativas de zonas plásticas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .

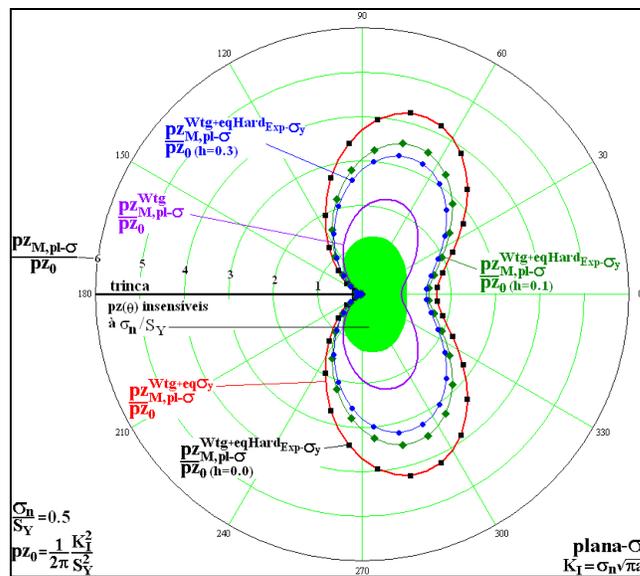


Figura 93 – Comparação entre as  $pz$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $pz$  corrigidas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .

A Figura 94 mostra as estimativas de zonas plásticas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ .

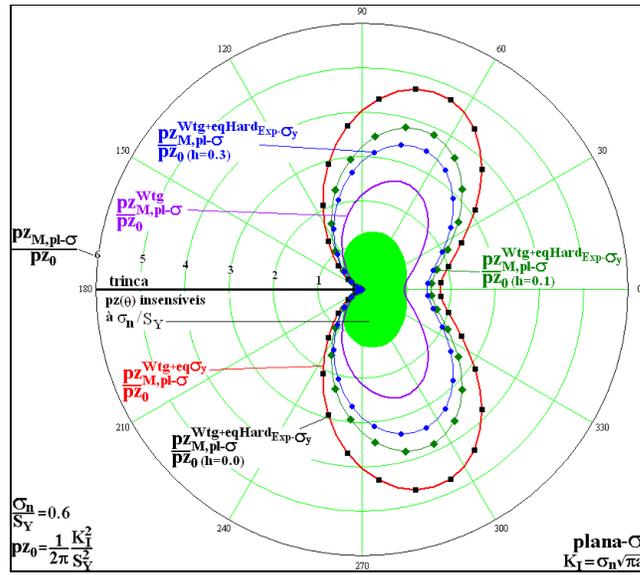


Figura 94 – Comparação entre as  $p_z$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $p_z$  corrigidas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/\sigma_Y = 0,6$ .

A Figura 95 mostra as estimativas de zonas plásticas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/\sigma_Y = 0,7$ .

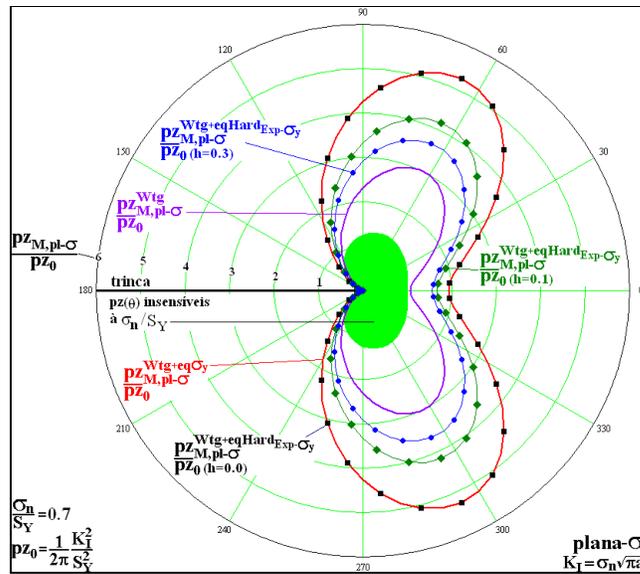


Figura 95 – Comparação entre as  $p_z$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $p_z$  corrigidas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/\sigma_Y = 0,7$ .

A Figura 96 mostra as estimativas de zonas plásticas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/\sigma_Y = 0,8$ .

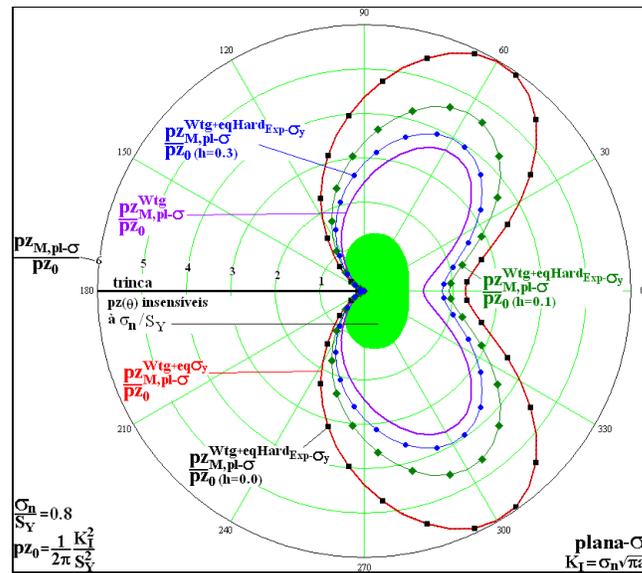


Figura 96 – Comparação entre as  $p_z$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $p_z$  corrigidas sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ .

A Figura 97 mostra as estimativas de zonas plásticas sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ .

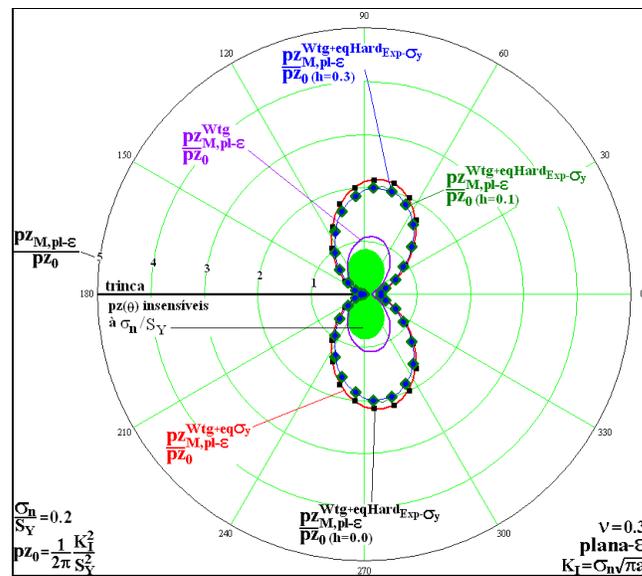


Figura 97 – Comparação entre as  $p_z$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $p_z$  corrigidas sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ .

A Figura 98 mostra as estimativas de zonas plásticas sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

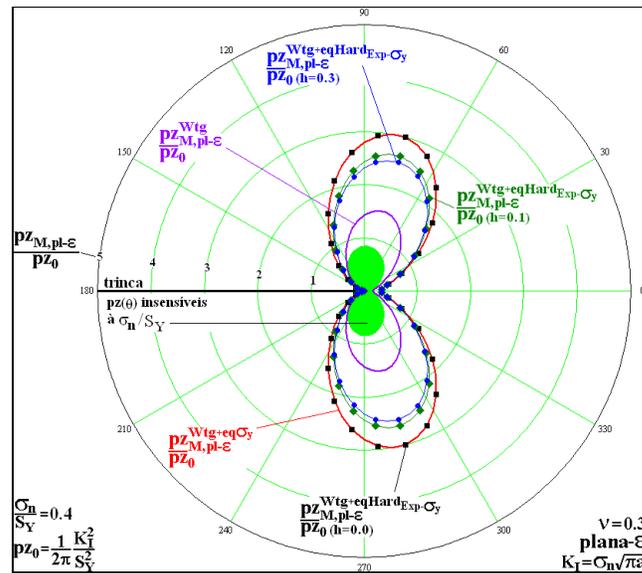


Figura 98 – Comparação entre as  $p_z$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $p_z$  corrigidas sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

A Figura 99 mostra as estimativas de zonas plásticas sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .

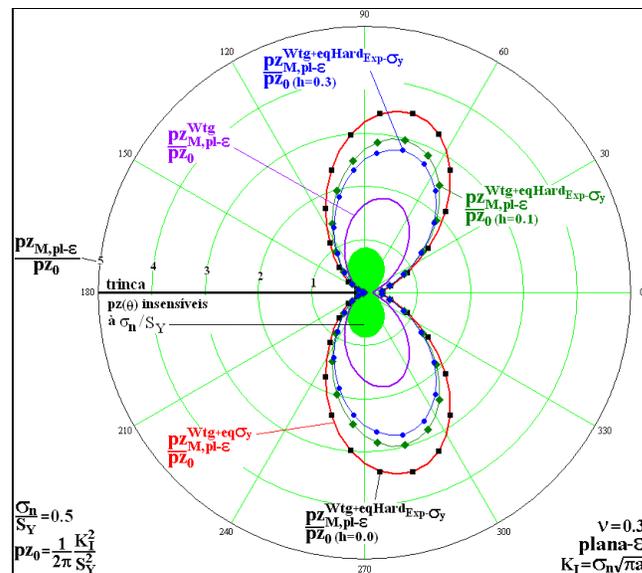


Figura 99 – Comparação entre as  $p_z$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $p_z$  corrigidas sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .

A Figura 100 mostra as estimativas de zonas plásticas sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ .

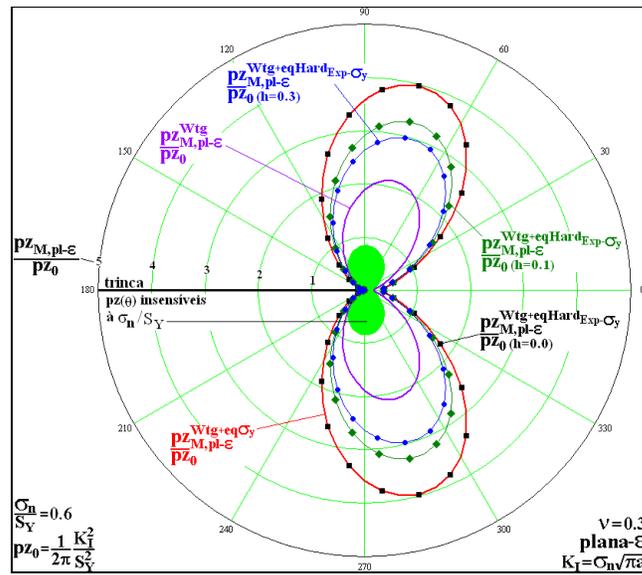


Figura 100 – Comparação entre as  $pz$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $pz$  corrigidas sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_y = 0,6$ .

A Figura 101 mostra as estimativas de zonas plásticas sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_y = 0,7$ .

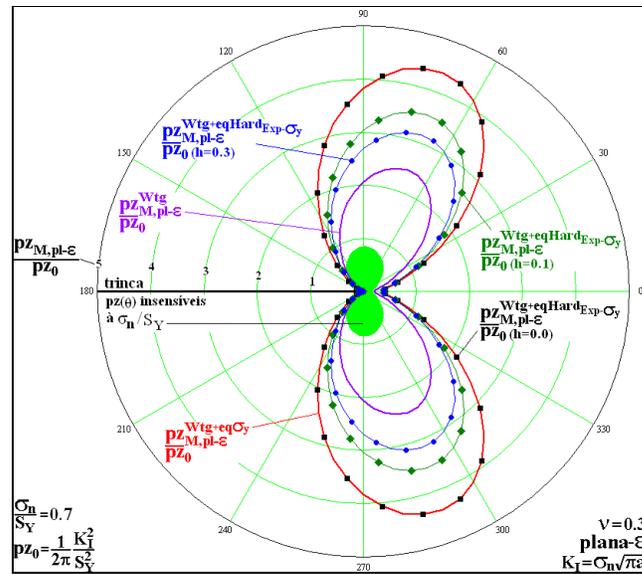


Figura 101 – Comparação entre as  $pz$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $pz$  corrigidas sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_y = 0,7$ .

A Figura 102 mostra as estimativas de zonas plásticas sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_y = 0,8$ .

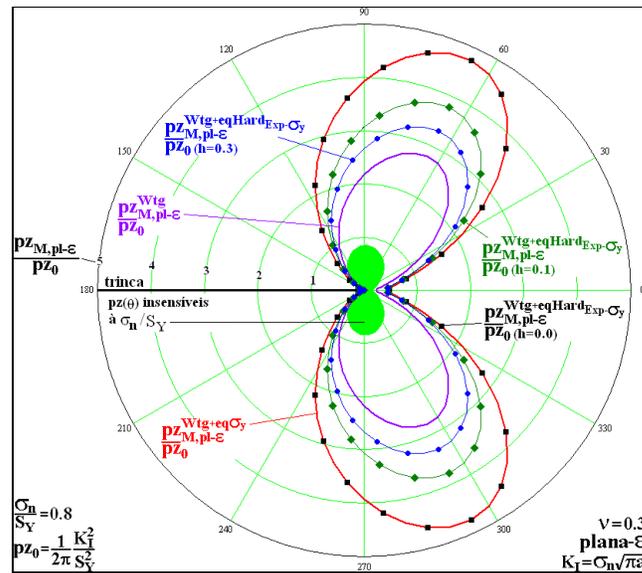


Figura 102 – Comparação entre as  $pz$  que consideram os efeitos do encruamento para  $h = 0,1$  e  $0,3$  com as  $pz$  corrigidas sob estado plano de deformação com  $\sigma_r/S_Y = 0,8$ .

### 4.3. Conclusões do capítulo

Como visto no Capítulo 3, até as zonas plásticas obtidas por campos de tensões lineares elásticos completos não são realistas por não considerarem o escoamento do material. Dessa maneira, este capítulo apresentou, baseado no trabalho pioneiro de Irwin (1958) e no trabalho de Rodriguez (2007), mais três propostas de correção das zonas plásticas lineares elásticas (LE) que consideram materiais perfeitamente plásticos. Em todas essas três propostas, considera-se o campo de tensões gerado a partir de uma função de tensão de Westergaard, conforme foi feito por Rodriguez. A ideia básica dessas correções é de que as forças que estão associadas às tensões superiores ao limite de escoamento do material devem ser redistribuídas, ou seja, devem ser equilibradas. Para que isso possa ocorrer, uma quantidade maior de material deforma plasticamente, fazendo com que as zonas plásticas originais, obtidas pelos campos de tensões LE, dobrem de tamanho, conforme verificado por Irwin. Em seguida, este capítulo apresentou, fundamentado nas ideias de Kujawski & Ellyin (1985), uma proposta de se fazer as correções nas zonas plásticas LE de tal forma que se considere também os efeitos do encruamento do material. Para estudar os efeitos do encruamento nas zonas plásticas, usou-se o caso da placa de Griffith com dois materiais com

comportamentos diferentes (um com maior encruamento do que o outro). Conforme o esperado, o material com maior encruamento apresentou zonas plásticas menores do que o material com o menor encruamento. Isso acontece devido ao fato de que com maior encruamento, o material suporta tensões mais elevadas dentro da zona plástica.

Todas as zonas plásticas corrigidas apresentadas neste capítulo partem de campos de tensões determinados analiticamente. Para os casos em que não se conhece ou em que não se tem um campo de tensões analítico, é imprescindível o uso de ferramentas numéricas. Dessa maneira, o próximo capítulo mostra a estimativa de zonas plásticas obtidas a partir de campos de tensões determinados numericamente. Dois métodos numéricos são usados. O Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método Híbrido dos Elementos de Contorno (MHEC).

## 5

### **Estimativas de zonas plásticas obtidas a partir do uso da Mecânica da Fratura Linear Elástica com os campos de tensões determinados numericamente**

Neste capítulo são mostradas as zonas plásticas obtidas a partir de uma análise linear elástica utilizando métodos numéricos. Conforme foi pesquisado durante o desenvolvimento deste trabalho, apenas duas funções de tensão de Westergaard foram encontradas. Uma para o caso da placa de Griffith e outra para uma placa retangular semi infinita tracionada. Portanto, para que se possa estudar as zonas plásticas em geometrias mais complicadas e carregamentos não convencionais é indispensável a utilização dos métodos numéricos.

Dentre os métodos numéricos mais estudados na engenharia estrutural, destacam-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Ambos os métodos têm sido aplicados à Mecânica da Fratura (MF).

No MEF destacam-se os elementos denominados de *Quarter Point*, que reproduzem a singularidade intrínseca do modelo matemático da MFLE. Já o MEC com suas soluções fundamentais singulares é uma opção natural para o problema da MF. Entretanto, o MEC que é utilizado nesta tese é o Método Híbrido dos Elementos de Contorno (MHEC). Esse método numérico pode ser mais bem explicado nos trabalhos de Dumont (1989), Dumont (1998), Dumont & Lopes (2003). O MHEC é utilizado neste trabalho a partir de um programa desenvolvido por Lopes (1998) e (2002) e com o uso de um algoritmo denominado de busca linear, que é explicado na próxima seção.

#### **5.1. Algoritmo de busca linear**

O cálculo das zonas plásticas feito a partir deste algoritmo é realizado em duas etapas, que são:

- 1) Faz-se uma busca incremental para um determinado valor de  $\theta$  a partir da ponta da trinca. Para cada incremento estabelecido, obtêm-se as tensões

$(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$  e  $\sigma_{xy})$  e, conforme o estado plano que se deseja analisar, determina-se a tensão equivalente de Mises. Essa primeira etapa termina quando se satisfizer  $\sigma_{Mises}(\sigma_n, r, \theta) < S_Y$ , conforme mostra a Figura 103, em que se tem  $\sigma_{Mises}(\sigma_n, r, \theta) = S_Y$  ao longo da linha vermelha.

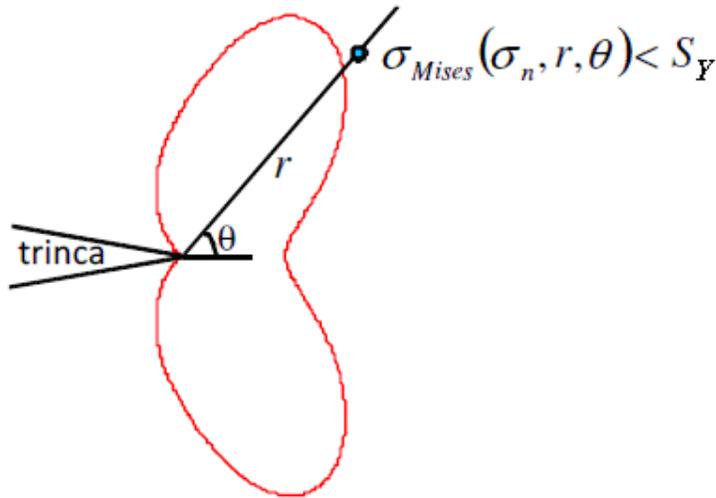


Figura 103 – Determinação do ponto que satisfaz  $\sigma_{Mises}(\sigma_n, r, \theta) < S_Y$  (Lopes *et al*, 2009).

2) Realiza-se a partir do método da bisseção a busca pelo ponto que satisfaz  $|\sigma_{Mises}(\sigma_n, r, \theta) - S_Y| < tol \therefore r = pz_M^{Wtg}$  dentro da tolerância  $tol$ . A Figura 104 mostra o ponto em que se determina  $pz_M^{Wtg}$ .

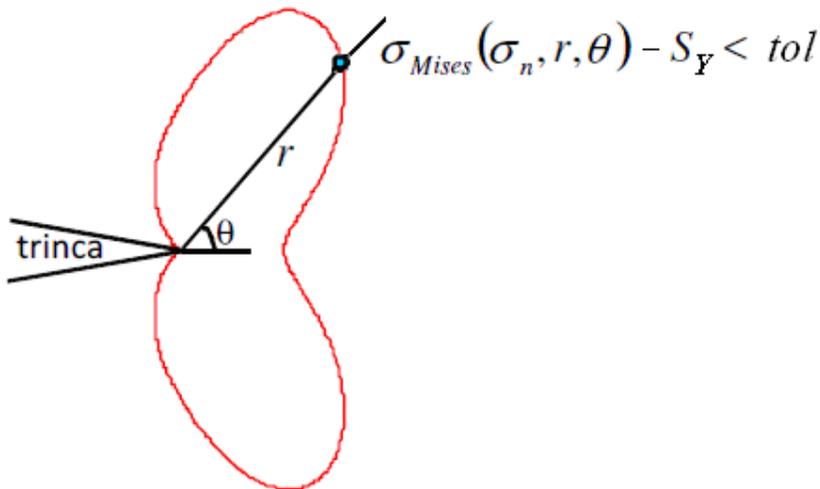


Figura 104 – Determinação do ponto que satisfaz  $\sigma_{Mises}(\sigma_n, r, \theta) - S_Y < tol$  (Lopes *et al*, 2009).

Apesar deste algoritmo poder ser utilizado tanto no MEF quanto no MHEC, ele só foi implementado no programa desenvolvido por Lopes (2002) que usa o

MHEC. A seguir se faz uma breve apresentação do MHEC, que é baseada no trabalho de Lopes (2002).

## **5.2. O Método Híbrido dos Elementos de Contorno aplicado à problemas da Mecânica da Fratura**

Como este trabalho utiliza o programa de Lopes (2002), apresenta-se, a seguir, um breve resumo da formulação desenvolvida no seu trabalho. Para maiores detalhes sobre o Método Híbrido dos Elementos de Contorno é necessário se consultar os trabalhos citados anteriormente de Dumont.

Lopes (1998) e (2002) desenvolveu várias formulações do MHEC para a MF. Primeiro, foi comprovado que a formulação inicial completa do MHEC pode ser aplicada sem nenhuma modificação quando se usa a técnica de subdivisões na análise de estruturas trincadas.

Posteriormente, foram desenvolvidas três formulações do MHEC para estruturas com condições de contorno do tipo Neumann, que permitem o cálculo do  $K_I$ . A primeira delas, denominada “Hipersingular”, tem a desvantagem de não permitir a obtenção do  $K_I$  de maneira satisfatória, porém, ao se utilizar a série de Williams, é possível obter o  $K_I$  com boa aproximação.

A segunda formulação, que utiliza a série de Williams como uma solução fundamental, permite o cálculo do  $K_I$  diretamente, introduzindo-o no sistema de equações como incógnita primária do problema. Contudo, essa formulação não permite o cálculo de Fatores de Intensidade de Tensão para trincas internas, fato que decorre da introdução de uma descontinuidade no campo de tensões em uma linha tangente às pontas da trinca.

A terceira formulação, que é utilizada neste trabalho, também introduz os Fatores de Intensidade de Tensão como incógnitas primárias do problema. Porém, em vez da série de Williams, a função completa de Westergaard, vide Eq. (85), é usada como solução fundamental.

A formulação que utiliza a função completa de Westergaard propõe que uma trinca genérica seja aproximada por uma sucessão de elementos retos de trinca. Esses elementos devem se sobrepor para garantir que todas as regiões da trinca, que será modelada, sofram o efeito da abertura de suas faces. A Figura 105 ilustra essa sobreposição, onde cinco elementos de trinca são utilizados para discretizar a trinca curva, que passa pelos nós numerados de 0 a 6.

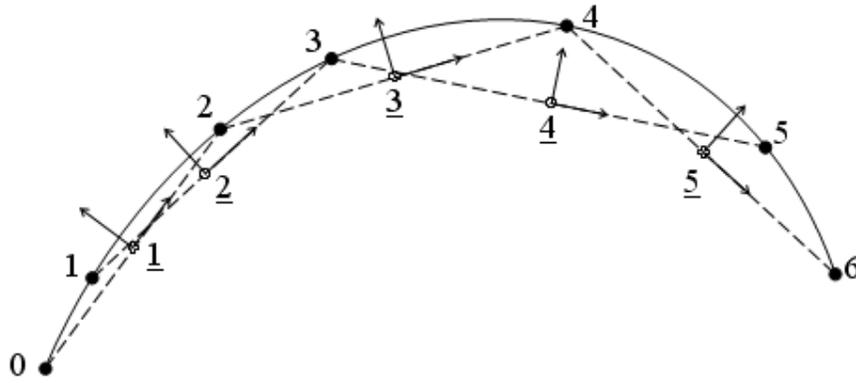
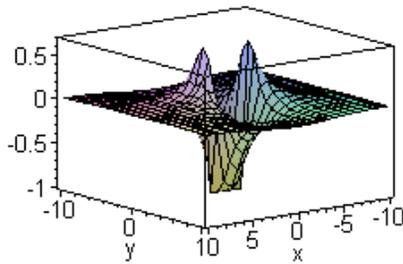


Figura 105 – Trinca curva genérica modelada como uma sucessão de elementos retos de trinca (Lopes, 2002).

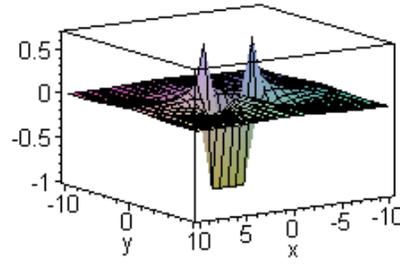
A função de tensão que fornece as forças de superfície utilizadas para a sobreposição descrita na Figura 105 é dada pela Eq. (85),

$$Z(z) = \sigma \left( \frac{\sqrt{z^2}}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right), \quad (85)$$

que é uma modificação da função de tensão de Westergaard para o caso da placa de Griffith. Essa modificação consiste em adicionar um termo constante para forçar um carregamento na trinca e zerar as sollicitações em pontos distantes. Sendo assim, as componentes de tensão  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{xx}$  são representadas na Figura 106(a) e Figura 106(b) respectivamente.



(a)



(b)

Figura 106 – Representação gráfica das componentes de tensão (a)  $\sigma_{yy}$  e (b)  $\sigma_{xx}$  (Lopes, 2002).

Lopes (2002) também testou essa formulação para determinar  $K_{II}$  e  $K_{III}$  em diversos problemas clássicos da MF, confirmando a boa representação do campo de tensões em pontos próximos à ponta da trinca. Entretanto, para o problema de

trincas de bordo, a utilização da função de Westergaard como solução fundamental precisa de maior investigação.

### 5.3. O Métodos dos Elementos Finitos aplicado à problemas da Mecânica da Fratura

Como o principal interesse da Mecânica da Fratura é a obtenção dos Fatores de Intensidade de Tensão, foram estudadas formas de se obter, utilizando-se o MEF, a mesma singularidade presente no campo de tensões gerado pelo  $K_I$ , que é da ordem de  $1/\sqrt{r}$ . Barsoum (1976) e Henshell & Shaw (1975) mostraram, de forma independente, que essa singularidade poderia ser obtida ao se mover os nós de meio de lado do elemento finito a um quarto de distância do nó da ponta da trinca. Esse tipo de elemento ficou conhecido como *Quarter Point*.

Entretanto, a obtenção desse campo analítico completo pode ser feita numericamente sem a necessidade do elemento *Quarter Point*, conforme é mostrado ao longo deste capítulo a partir das estimativas de zonas plásticas para diversos exemplos. O programa ANSYS (2001) foi utilizado na obtenção numérica dos campos de tensões e na posterior estimativa das zonas plásticas feitas com o uso do MEF.

Uma explicação mais detalhada sobre a obtenção das zonas plásticas estimadas numericamente pelo MEF a partir do ANSYS é feita no apêndice deste trabalho. Uma breve discussão sobre a sensibilidade das estimativas das zonas plásticas feitas pelo MEF em relação ao nível de refinamento da malha também é feita nesse apêndice.

A seguir, mostra-se o exemplo da placa de Griffith. Nesse exemplo, mostra-se que as estimativas numéricas obtidas pelo MHEC são iguais aos resultados obtidos a partir da função de tensão de Westergaard.

### 5.4. Estimativas de zonas plásticas obtidas numericamente para o exemplo da placa de Griffith

A placa de Griffith foi o primeiro caso em que se mostrou que a utilização do campo de tensões gerado a partir de  $K_I$  não é suficiente para prever o tamanho das zonas plásticas quando se tem uma alta relação  $\sigma_I/S_Y$ . Portanto, este é o primeiro exemplo em que se mostra que as estimativas de zonas plásticas obtidas

numericamente a partir do MHEC e do algoritmo de busca linear são idênticas as zonas plásticas obtidas a partir da função de tensão de Westergaard.

A Figura 107 mostra as estimativas de zonas plásticas obtidas analiticamente ( $pZ_{M,pl-\sigma}^{Wtg}$ ) e numericamente ( $pZ_{M,pl-\sigma}^{LE-MHEC}$ ) sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7$  e  $0,8$ .

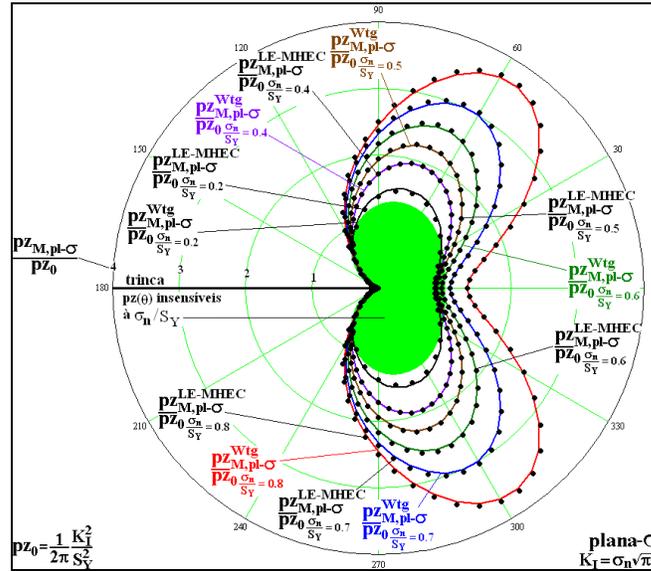


Figura 107 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de tensão para o caso da placa de Griffith.

A Figura 108 mostra as estimativas de zonas plásticas obtidas analiticamente ( $pZ_{M,pl-\epsilon}^{Wtg}$ ) e numericamente ( $pZ_{M,pl-\epsilon}^{LE-MHEC}$ ) sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7$  e  $0,8$ .

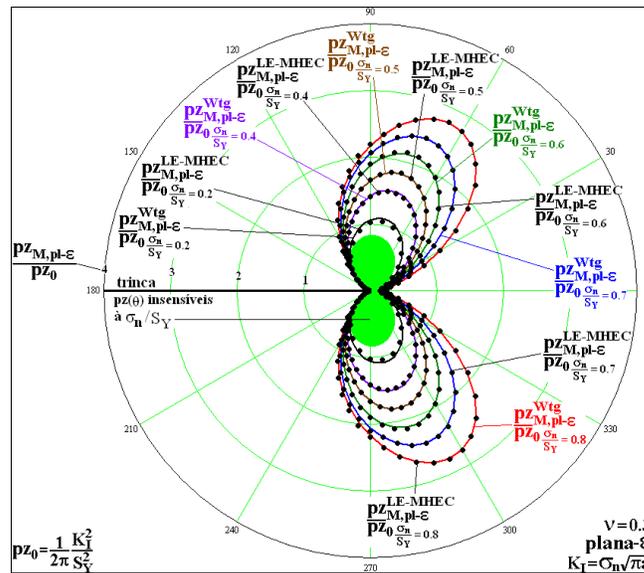


Figura 108 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de deformação para o caso da placa de Griffith.

Ao se analisar a Figura 107 e a Figura 108 é possível perceber que as estimativas de zonas plásticas obtidas numericamente a partir do MHEC são coincidentes com as estimativas analíticas geradas a partir do campo de tensões determinado pela função de tensão de Westergaard. Isso era esperado, pois o uso de métodos numéricos é feito justamente para se resolver problemas em que não se conhece a solução analítica. Como a solução completa do campo de tensões linear elástico, para problemas de trinca, é dada pela função de tensão de Westergaard, não há surpresa alguma que as estimativas  $p_z(\theta)_M$  obtidas numericamente fossem praticamente iguais às estimativas  $p_z^{Wtg}_M$  obtidas analiticamente a partir do campo de tensões gerado pela função de Westergaard correspondente ao problema estudado.

O próximo exemplo mostra o exemplo da placa retangular semi infinita com uma trinca central. Também se compara nesse exemplo as estimativas de zonas plásticas obtidas numericamente a partir do MHEC com as estimativas obtidas pela função de tensão de Westergaard.

### 5.5. Estimativas de zonas plásticas obtidas numericamente para o exemplo de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central

Este exemplo avalia numericamente, a partir do Método Híbrido dos Elementos de Contorno (MHEC) e de uma análise linear elástica, as estimativas das zonas plásticas ( $p_{z_M}^{LE-MHEC}$ ) feitas na subsecção 3.3.2. Nessa subsecção se utilizou a função de tensão de Westergaard apresentada por Eftis & Liebowitz (1972). É importante lembrar que a largura definida para o caso da placa retangular semi infinita com uma trinca central é igual a  $W$ . Neste exemplo, a largura da placa será considerada igual a  $2W$ . Assim, os valores de  $a/W$  iguais à 0,025; 0,050 e 0,091 serão considerados aqui como 0,050; 0,100 e 0,182.

As próximas doze figuras mostram a comparação entre as zonas plásticas obtidas numericamente pelo MHEC e as zonas plásticas obtidas analiticamente a partir da função de tensão de Westergaard. As seis primeiras tratam o caso de tensão plana e as últimas seis referem-se ao caso de deformação plana.

A Figura 109 mostra a comparação entre as estimativas de zonas plásticas  $p_{z_M}^{Wtg}$  e  $p_{z_M}^{LE-MHEC}$  sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  e para  $a/W = 0,050$ ; 0,100 e 0,182.

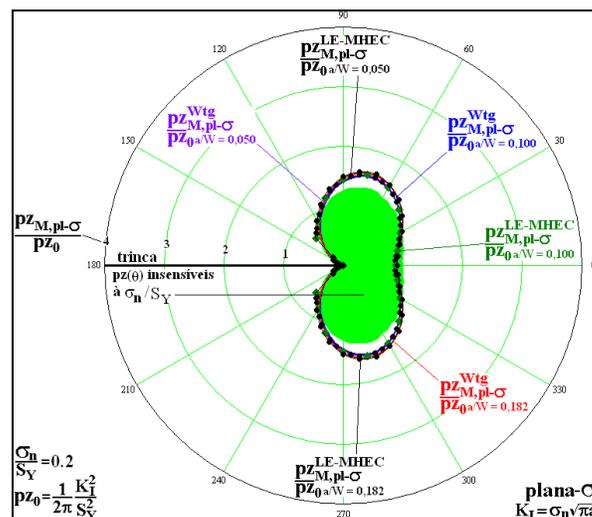


Figura 109 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central.

A Figura 110 mostra a comparação entre as estimativas de zonas plásticas  $pZ_M^{Wig}$  e  $pZ_M^{LE-MHEC}$  sob estado plano de tensão com  $\sigma_t/S_Y = 0,4$  e para  $a/W = 0,050; 0,100$  e  $0,182$ .

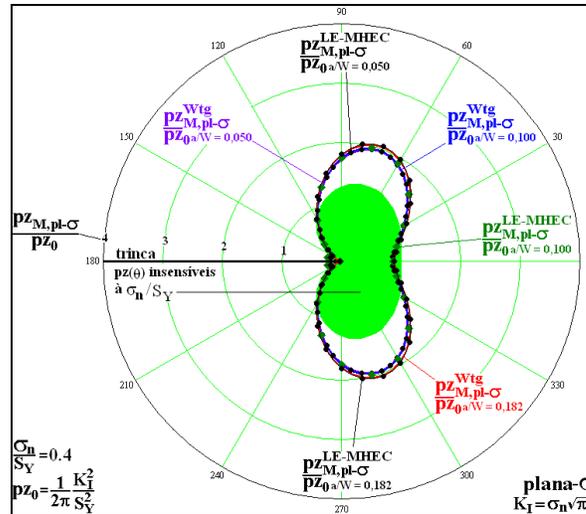


Figura 110 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de tensão com  $\sigma_t/S_Y = 0,4$  para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central.

A Figura 111 mostra a comparação entre as estimativas de zonas plásticas  $pZ_M^{Wig}$  e  $pZ_M^{LE-MHEC}$  sob estado plano de tensão com  $\sigma_t/S_Y = 0,5$  e para  $a/W = 0,050; 0,100$  e  $0,182$ .

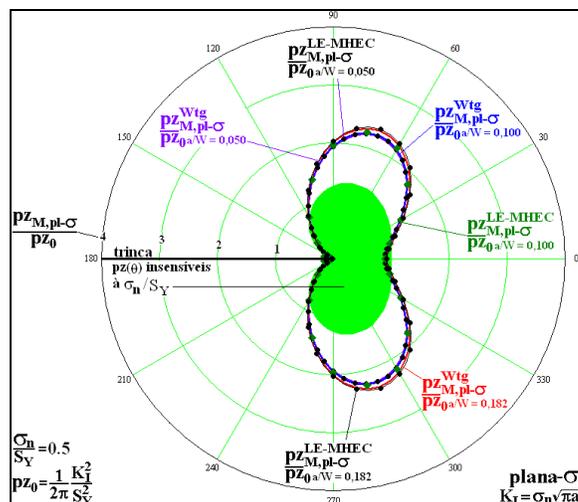


Figura 111 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de tensão com  $\sigma_t/S_Y = 0,5$  para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central.

A Figura 112 mostra a comparação das zonas plásticas obtidas analiticamente e numericamente para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  e para  $a/W = 0,050$ ; 0,100 e 0,182.

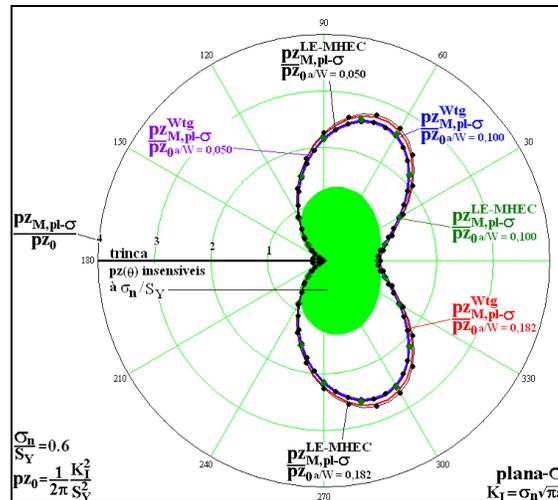


Figura 112 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central.

A Figura 113 mostra a comparação das zonas plásticas obtidas analiticamente e numericamente para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  e para  $a/W = 0,050$ ; 0,100 e 0,182.

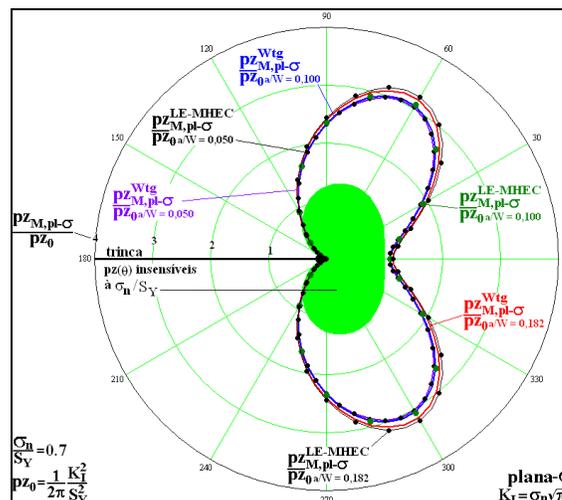


Figura 113 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central.

A Figura 114 mostra a comparação das zonas plásticas obtidas analiticamente e numericamente para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  e para  $a/W = 0,050$ ;  $0,100$  e  $0,182$ .

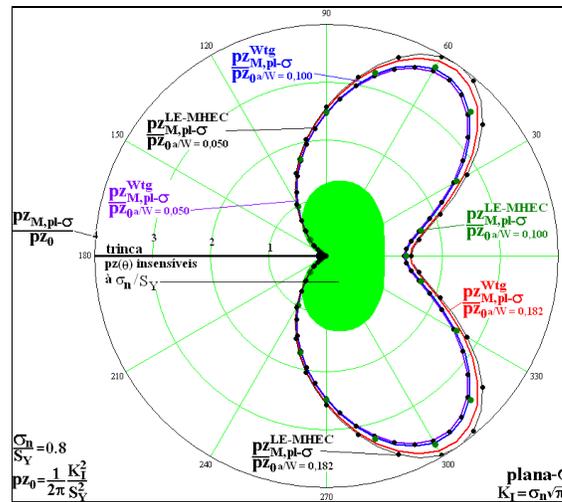


Figura 114 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de tensão com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central.

As próximas seis figuras tratam o caso de deformação plana. A Figura 115 mostra o caso com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  e para  $a/W = 0,050$ ;  $0,100$  e  $0,182$ .

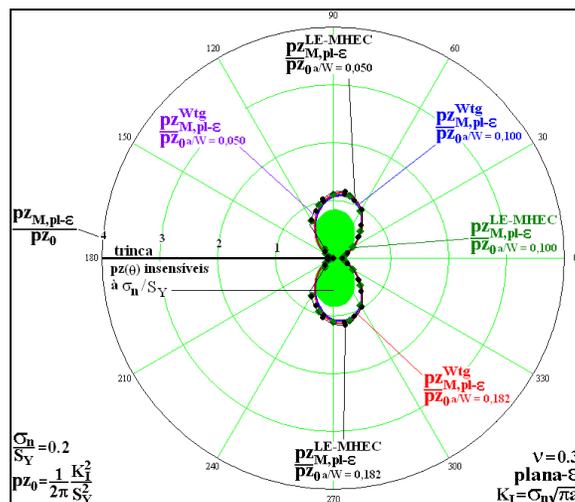


Figura 115 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central.

A Figura 116 mostra a comparação das zonas plásticas obtidas analiticamente e numericamente para  $\sigma_r/S_Y = 0,4$  e com  $a/W = 0,050$ ;  $0,100$  e  $0,182$ .

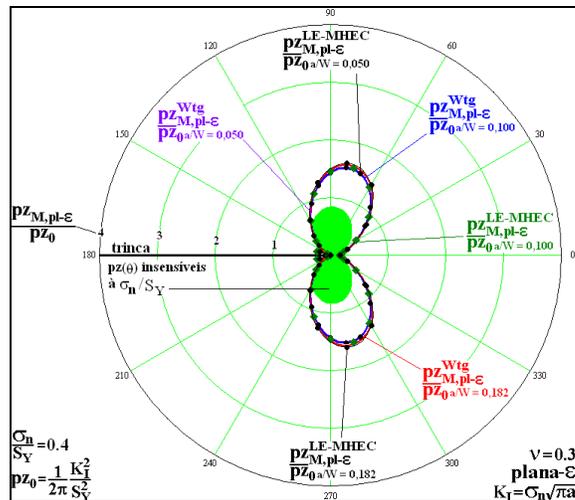


Figura 116 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de deformação com  $\sigma_r/S_Y = 0,4$  para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central.

A Figura 117 mostra a comparação das zonas plásticas obtidas analiticamente e numericamente para o caso com  $\sigma_r/S_Y = 0,5$  e para  $a/W = 0,050$ ;  $0,100$  e  $0,182$ .

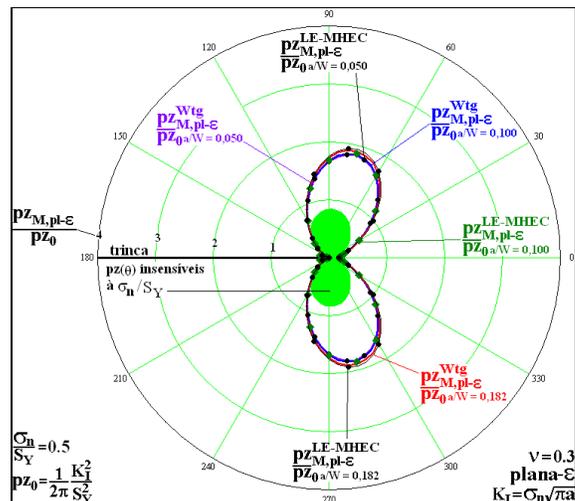


Figura 117 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de deformação com  $\sigma_r/S_Y = 0,5$  para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central.

A Figura 118 mostra a comparação das zonas plásticas obtidas analiticamente e numericamente para o caso com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  e para  $a/W = 0,050$ ; 0,100 e 0,182.

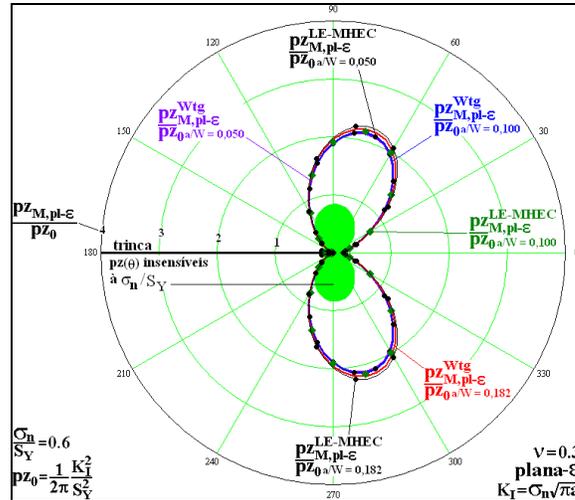


Figura 118 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central.

A Figura 119 mostra a comparação das zonas plásticas obtidas analiticamente e numericamente para o caso com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  e para  $a/W = 0,050$ ; 0,100 e 0,182.

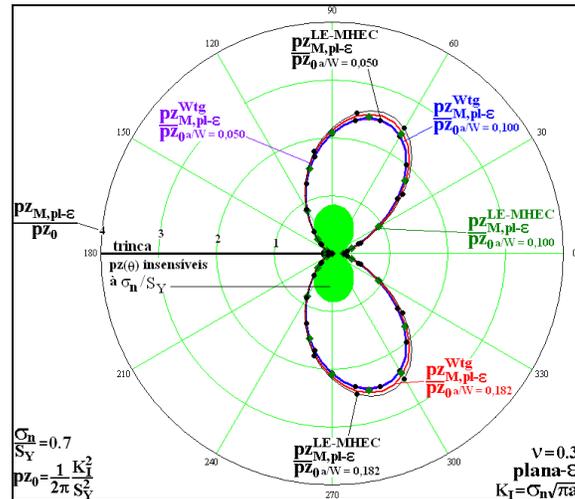


Figura 119 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de deformação com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central.

A Figura 120 mostra a comparação das zonas plásticas obtidas analiticamente e numericamente para o caso com  $\sigma_r/S_Y = 0,8$  e para  $a/W = 0,050$ ;  $0,100$  e  $0,182$ .

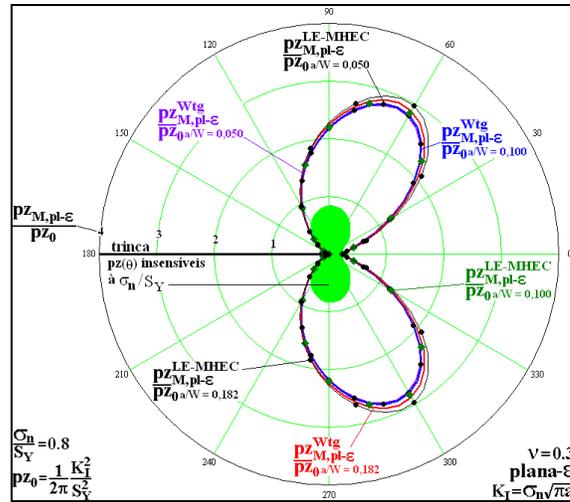


Figura 120 – Comparação entre as zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard e as obtidas numericamente pelo MHEC sob estado plano de deformação com  $\sigma_r/S_Y = 0,8$  para o caso de uma placa retangular semi infinita tracionada com uma trinca central.

Analisando as doze figuras anteriores, é possível perceber que para as relações  $a/W = 0,050$ ;  $0,100$  as estimativas numéricas das zonas plásticas obtidas a partir do MHEC são coincidentes com as estimativas analíticas para todos os casos da relação  $\sigma_r/S_Y$ . Já para a relação de  $a/W = 0,182$ , as estimativas numéricas das zonas plásticas só são coincidentes para  $\sigma_r/S_Y = 0,2$ ;  $0,4$  e  $0,5$ . Para  $\sigma_r/S_Y = 0,6$ ;  $0,7$  e  $0,8$ ; as estimativas numéricas geram resultados um pouco maiores que as estimativas obtidas pela função de tensão de Westergaard. Todas essas observações acontecem para ambos os estados planos.

Como para o caso da placa de Griffith todas as estimativas numéricas coincidiram com as estimativas obtidas pela função de tensão de Westergaard, pode-se supor que um dos possíveis motivos para o fato das estimativas numéricas do caso da placa retangular semi infinita com uma trinca central serem diferentes das estimativas obtidas a partir da função de tensão de Westergaard é que para  $a/W = 0,182$  a função de tensão de Westergaard não gere o resultado correto do campo de tensões. Apesar disso, o valor de  $a/W$  igual a  $0,182$  ainda está dentro do limite de aplicabilidade para a função de tensão de Westergaard, Eq. (28), recomendada por Eftis & Liebowitz (1972).

O próximo exemplo mostra o caso de uma placa retangular com uma trinca central sob flexo tração. Nesse exemplo, as estimativas são feitas pelo MHEC e pelo MEF.

### 5.6. Placa retangular com uma trinca central sob flexo tração

A Figura 121 mostra com detalhe o exemplo da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração. Os valores de  $K_I$  para cada ponta e para cada relação  $\sigma_n/S_Y$  são obtidas a partir do programa de Lopes (2002).

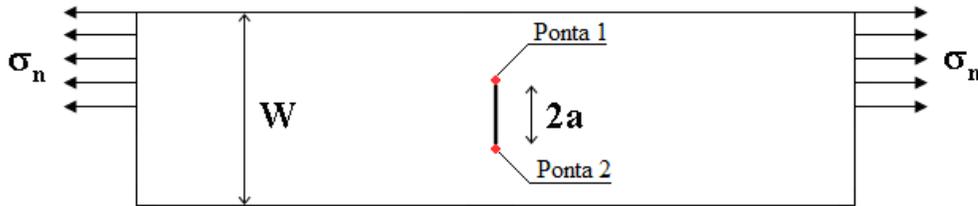


Figura 121 – Placa retangular com uma trinca central sob flexo tração.

Neste exemplo, o valor de  $W$  é fixo e igual a 10 cm. Três valores de  $a/W$  são estudados neste caso: 0,05; 0,1 e 0,4. Os valores de  $\sigma_n/S_Y$  estudados são: 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7 e 0,8. Neste exemplo, as estimativas das zonas plásticas são feitas a partir do MHEC ( $p z_M^{LE-MHEC}$ ) e do MEF ( $p z_M^{LE-MEF}$ ).

Para cada valor de  $a/W$  é possível mostrar os efeitos da relação  $\sigma_n/S_Y$  na estimativas das zonas plásticas. A Figura 122(a) mostra o efeito da relação  $\sigma_n/S_Y$  nas zonas plásticas para  $a/W = 0,05$  sob tensão plana para ponta 1. A Figura 122(b) mostra o efeito da relação  $\sigma_n/S_Y$  nas zonas plásticas para um  $a/W = 0,05$  sob tensão plana para ponta 2.

A Figura 123(a) mostra o efeito da relação  $\sigma_n/S_Y$  nas zonas plásticas para  $a/W = 0,1$  sob tensão plana para ponta 1. A Figura 123(b) mostra o efeito da relação  $\sigma_n/S_Y$  nas zonas plásticas para  $a/W = 0,1$  sob tensão plana para ponta 2.

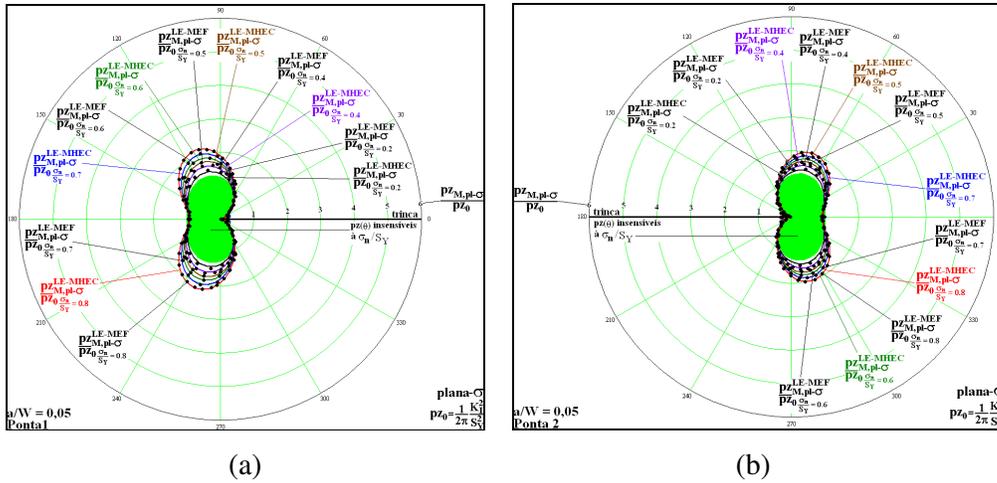


Figura 122 – Efeito da relação  $\sigma_n/S_y$  nas zonas plásticas sob tensão plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com  $a/W = 0,05$  para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 123 mostra o caso em que se fixa a relação  $a/W = 0,1$ .

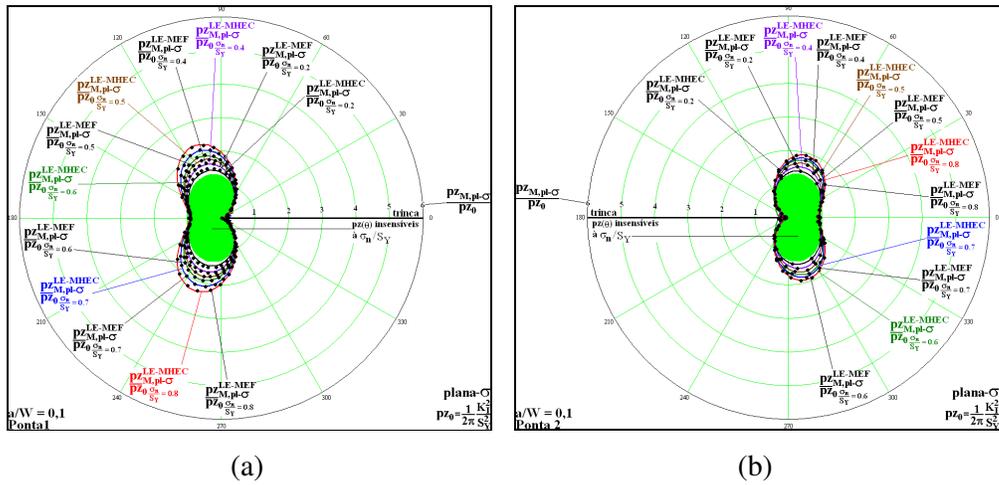


Figura 123 – Efeito da relação  $\sigma_n/S_y$  nas zonas plásticas sob tensão plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com  $a/W = 0,1$  para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 124 mostra o caso em que se fixa a relação  $a/W = 0,4$ . Para manter a mesma escala das outras figuras e para facilitar a visualização dos resultados, as estimativas das zonas plásticas obtidas pelo MEF correspondentes à  $\sigma_n/S_y = 0,5$  e  $0,6$  são omitidas na Figura 124(b).



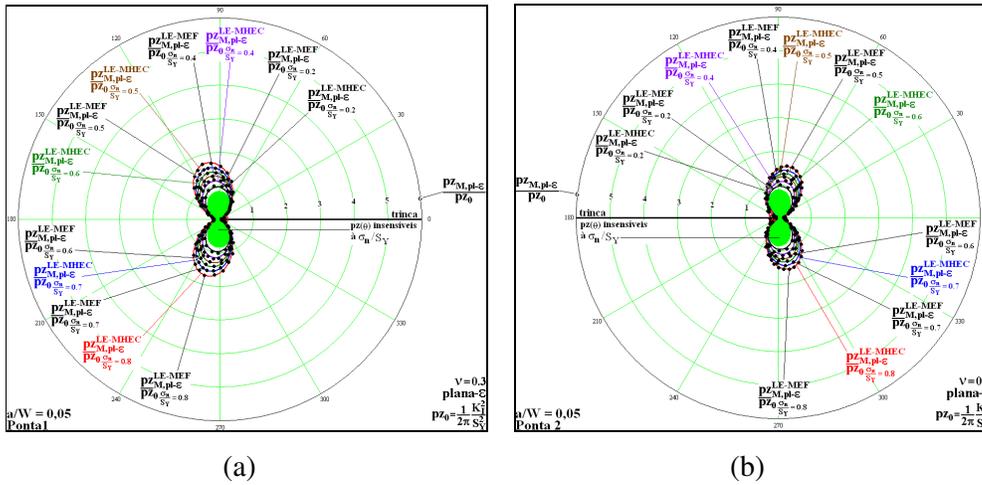


Figura 125 – Efeito da relação  $\sigma_r/S_y$  nas zonas plásticas sob deformação plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com  $a/W = 0,05$  para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 126 mostra o caso em que se fixa a relação  $a/W = 0,1$ .

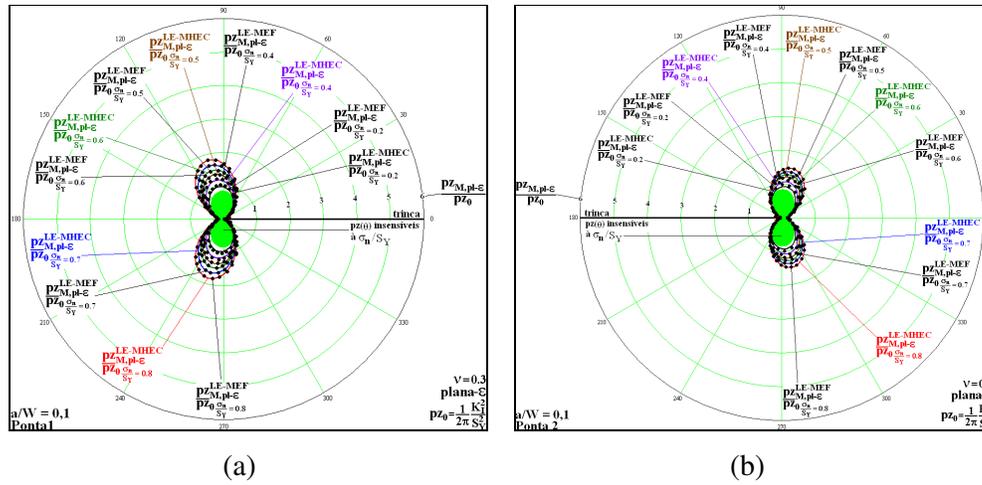


Figura 126 – Efeito da relação  $\sigma_r/S_y$  nas zonas plásticas sob deformação plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com  $a/W = 0,1$  para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 127 mostra o caso em que se fixa a relação  $a/W = 0,4$ . Para manter a mesma escala das outras figuras e para facilitar a visualização dos resultados, as estimativas das zonas plásticas obtidas por MEF correspondentes à  $\sigma_r/S_y = 0,4$ ; 0,5 e 0,6 são omitidas na Figura 127(b).

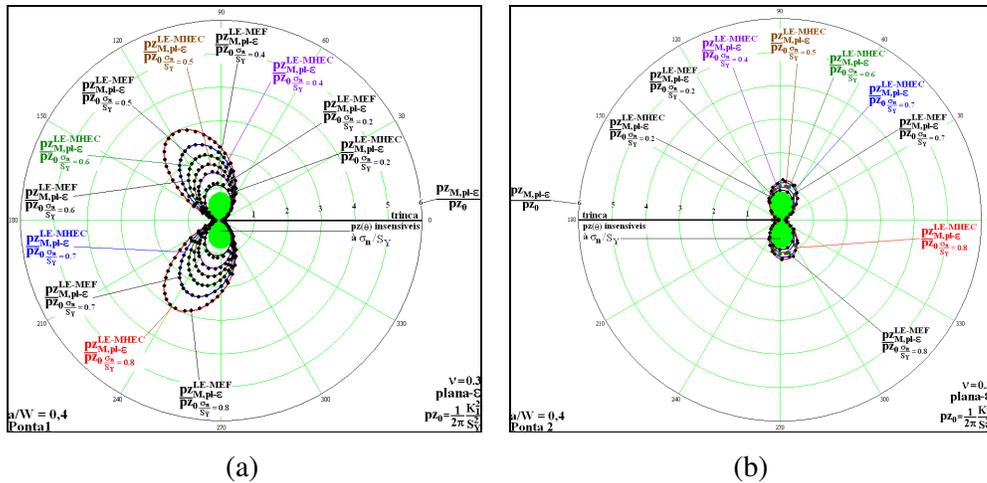


Figura 127 – Efeito da relação  $\sigma_n/S_Y$  nas zonas plásticas sob deformação plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com  $a/W = 0,4$  para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

Para avaliar o efeito da relação  $a/W$  no tamanho das zonas plásticas, é necessário se fixar um valor de  $\sigma_n/S_Y$ . Dessa forma, A Figura 128 mostra o efeito de  $a/W$  na estimativa das zonas plásticas para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ . Para manter a mesma escala das outras figuras e para facilitar a visualização dos resultados, as estimativas das zonas plásticas obtidas pelo MEF correspondentes à  $a/W = 0,05; 0,10$  e  $0,40$  são omitidas na Figura 128.

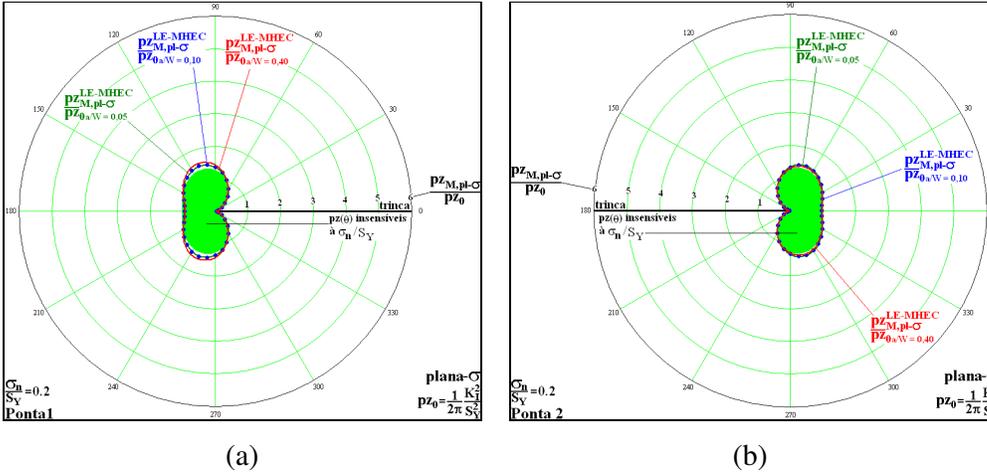


Figura 128 – Efeito da relação  $a/W$  nas zonas plásticas sob tensão plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 129 mostra o efeito de  $a/W$  na estimativa das zonas plásticas para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ . Nesse exemplo, também se omite as zonas plásticas obtidas a partir do MEF que correspondem à  $a/W = 0,05$  e  $0,10$ .

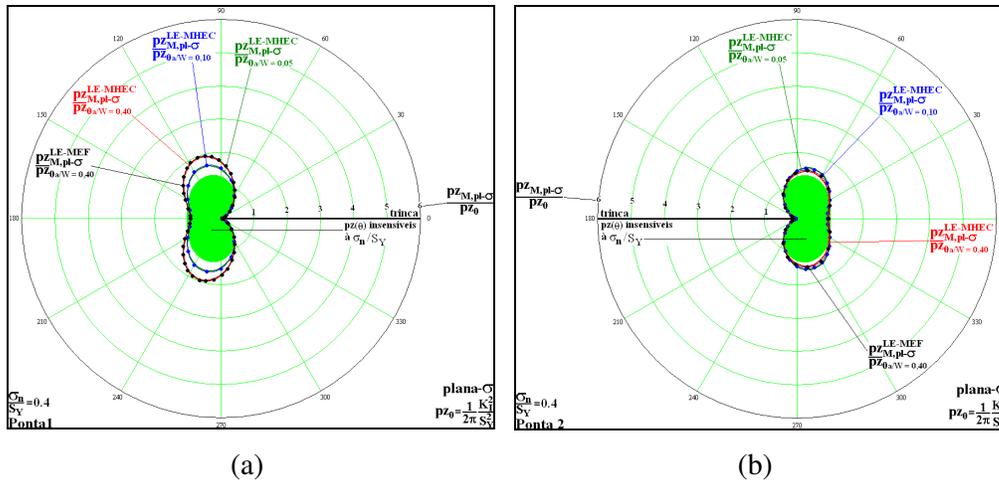


Figura 129 – Efeito da relação  $a/W$  nas zonas plásticas sob tensão plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com  $\sigma_r/S_Y = 0,4$  para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 130 mostra o efeito de  $a/W$  na estimativa das zonas plásticas para o caso de tensão plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,5$ . Assim como no exemplo anterior, as zonas plásticas obtidas a partir do MEF correspondentes à  $a/W = 0,05$  e  $0,10$  são omitidas.

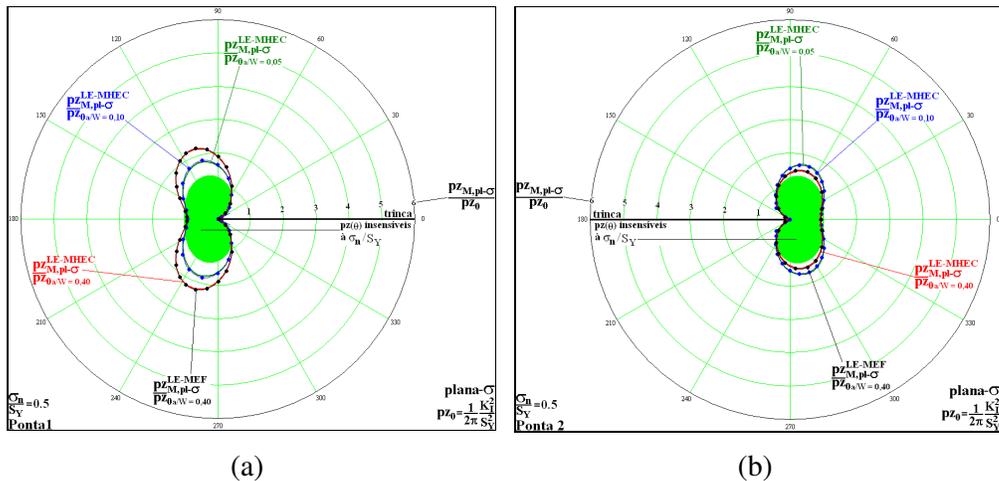


Figura 130 – Efeito da relação  $a/W$  nas zonas plásticas sob tensão plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com  $\sigma_r/S_Y = 0,5$  para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 131 mostra o efeito de  $a/W$  na estimativa das zonas plásticas para o caso de tensão plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,6$ . Nesse exemplo também se omite as zonas plásticas obtidas a partir do MEF correspondentes à  $a/W = 0,05$  e  $0,10$ .

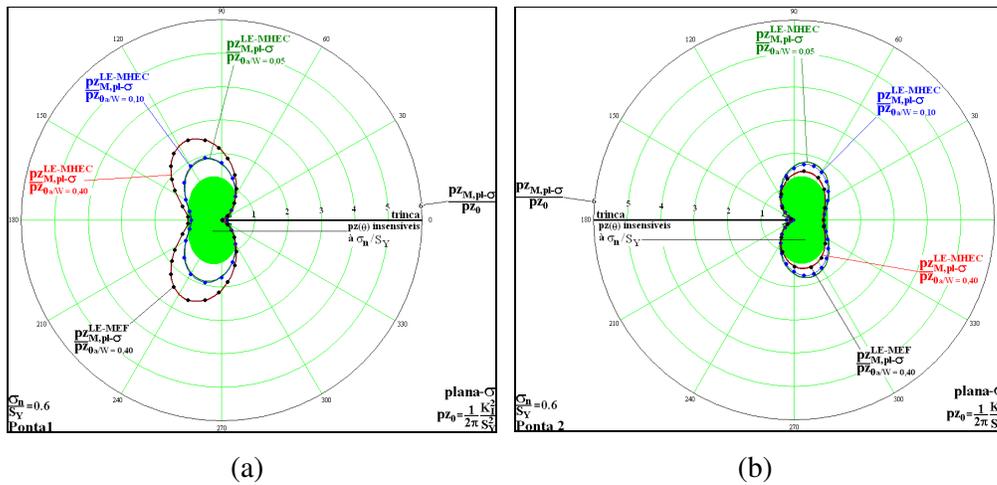


Figura 131 – Efeito da relação  $a/W$  nas zonas plásticas sob tensão plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexão tração com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 132 mostra o efeito de  $a/W$  na estimativa das zonas plásticas para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ .

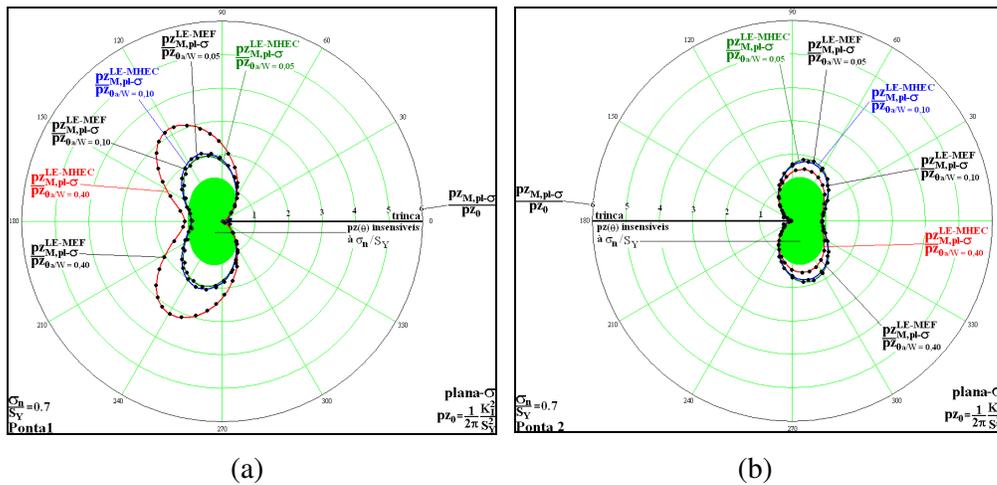


Figura 132 – Efeito da relação  $a/W$  nas zonas plásticas sob tensão plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexão tração com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 133 mostra o efeito de  $a/W$  na estimativa das zonas plásticas para o caso tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ .

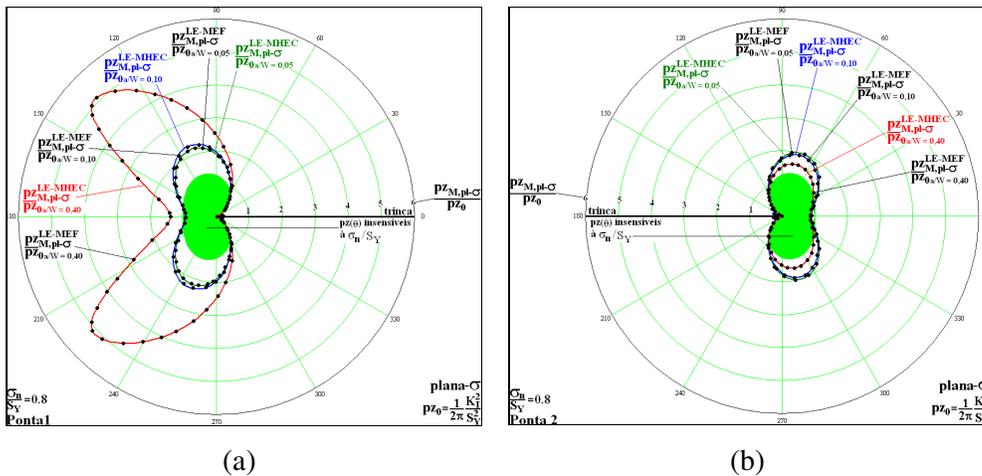


Figura 133 – Efeito da relação  $a/W$  nas zonas plásticas sob tensão plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 134 mostra o efeito de  $a/W$  na estimativa das zonas plásticas para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ . Como aconteceu para os casos de tensão plana, alguns resultados obtidos a partir do MEF são omitidos. Quando eles forem colocados, estarão explicitamente identificados nas figuras.

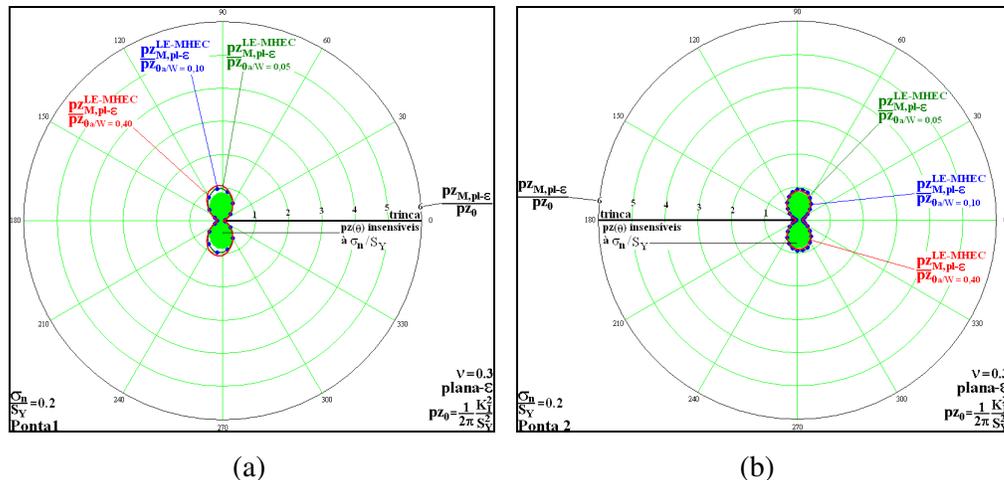


Figura 134 – Efeito da relação  $a/W$  nas zonas plásticas sob deformação plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 135 mostra o efeito de  $a/W$  na estimativa das zonas plásticas para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

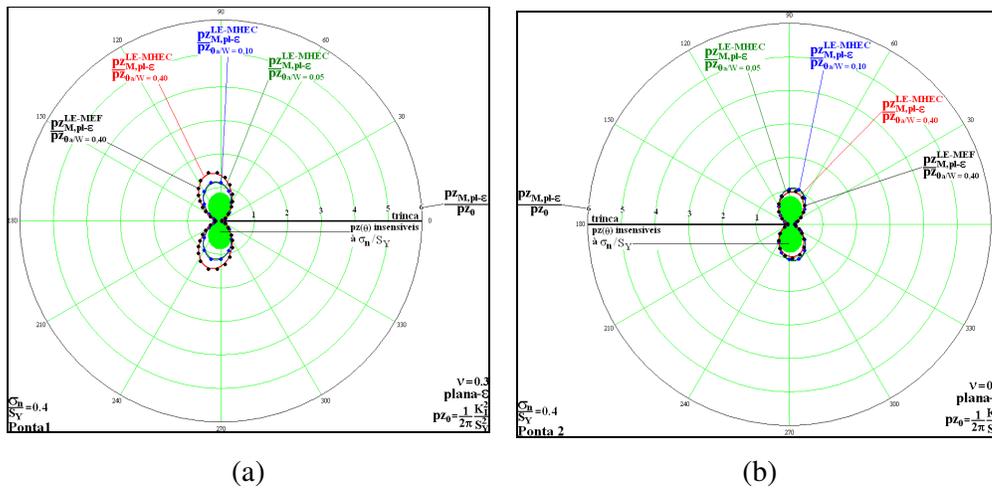


Figura 135 – Efeito da relação  $a/W$  nas zonas plásticas sob deformação plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com  $\sigma_r/S_Y = 0,4$  para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 136 mostra o efeito de  $a/W$  na estimativa das zonas plásticas para o caso de deformação plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,5$ .

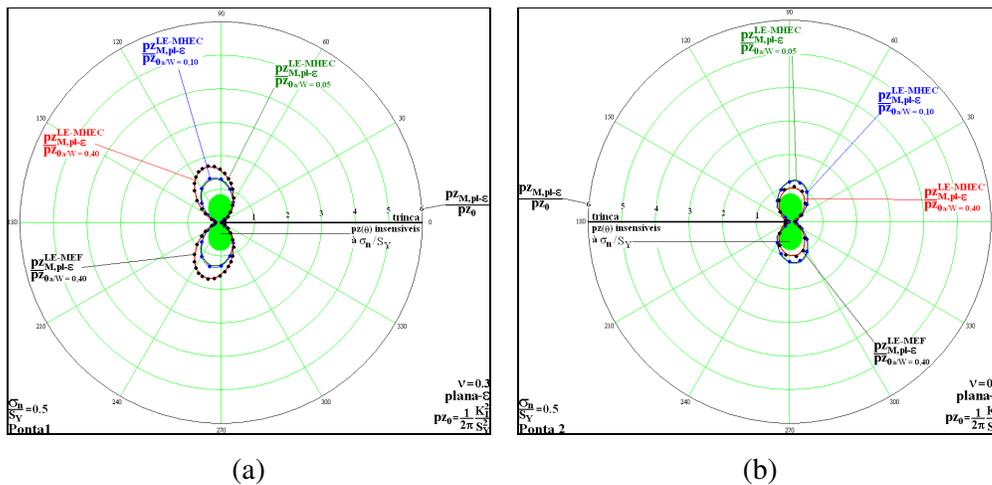


Figura 136 – Efeito da relação  $a/W$  nas zonas plásticas sob deformação plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com  $\sigma_r/S_Y = 0,5$  para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 137 mostra o efeito de  $a/W$  na estimativa das zonas plásticas para o caso de deformação plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,6$ .

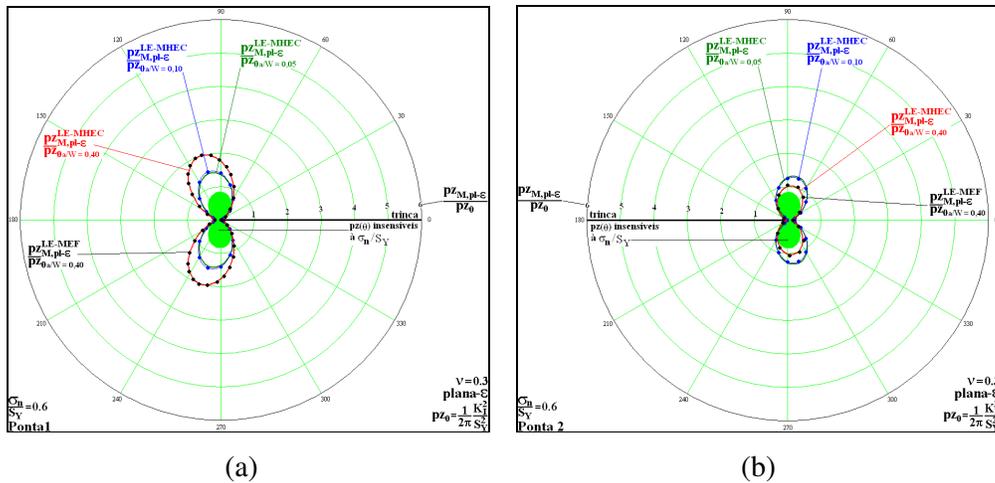


Figura 137 – Efeito da relação  $a/W$  nas zonas plásticas sob deformação plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com  $\sigma_t/S_Y = 0,6$  para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 138 mostra o efeito de  $a/W$  na estimativa das zonas plásticas para o caso de deformação plana com  $\sigma_t/S_Y = 0,7$ .

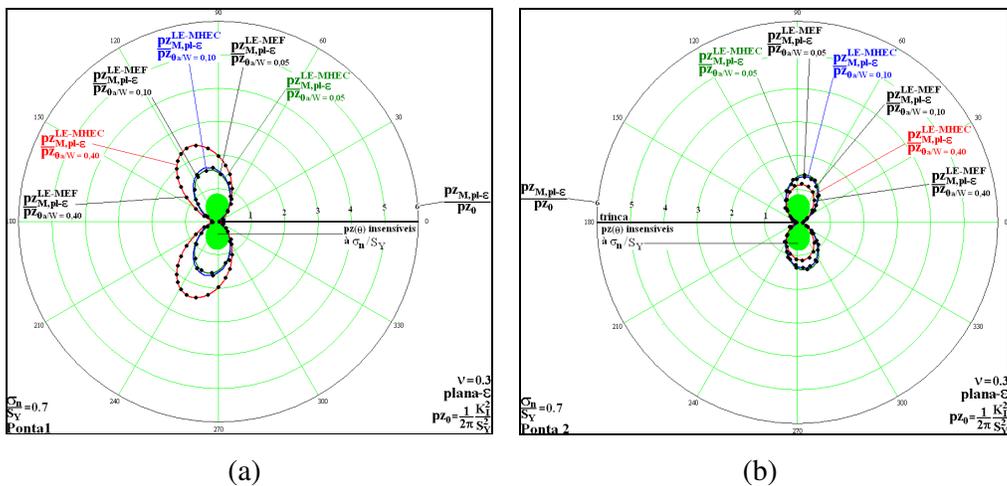


Figura 138 – Efeito da relação  $a/W$  nas zonas plásticas sob deformação plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com  $\sigma_t/S_Y = 0,7$  para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

A Figura 139 mostra o efeito de  $a/W$  na estimativa das zonas plásticas para o caso de deformação plana com  $\sigma_t/S_Y = 0,8$ .

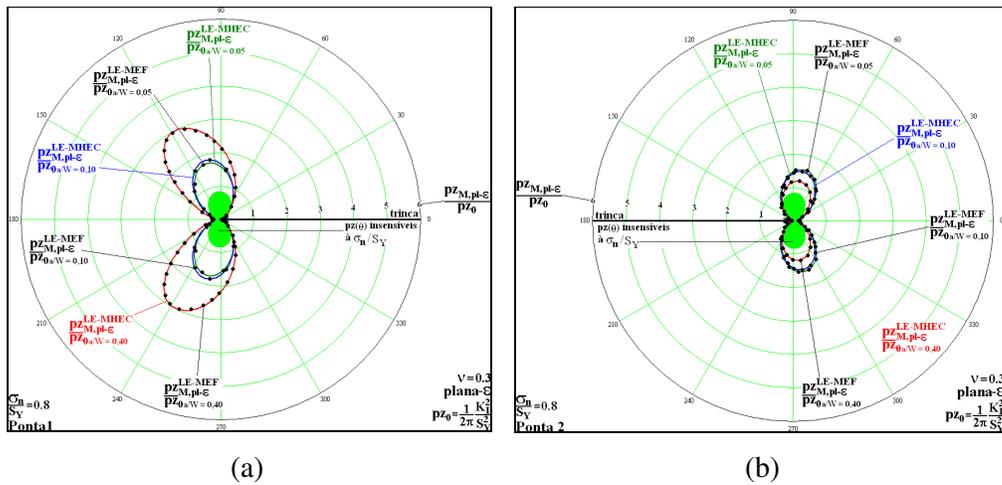


Figura 139 – Efeito da relação  $a/W$  nas zonas plásticas sob deformação plana para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  para (a) ponta 1 e (b) ponta 2.

O exemplo da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração é importante para mostrar que, para baixos valores de  $\sigma_n/S_Y$ , as estimativas das zonas plásticas obtidas por uma análise numérica linear são bem próximas das zonas plásticas estimadas pelo campo de tensões obtido a partir de  $K_I$ . Entretanto, quanto maior for o valor  $\sigma_n/S_Y$ , mais distante essas duas estimativas ficam entre si. Esse fato acontece para as duas pontas do caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração e também já foi constatado no exemplo da placa de Griffith e na placa retangular semi infinita com uma trinca central.

Em relação ao efeito da relação  $a/W$ , pode-se constatar que ele é diferente para cada ponta. Para a ponta 1, que está mais tracionada, quanto maior for o valor de  $a/W$ , maior será o tamanho da zona plástica para um mesmo valor de  $\sigma_n/S_Y$ . Esse fato acontece para os dois estados planos. Para a ponta 2, que está menos tracionada, quanto maior for o valor de  $a/W$ , menor será o tamanho da zona plástica para um mesmo valor de  $\sigma_n/S_Y$ . Esse fato acontece para os dois estados planos.

O próximo exemplo é importantíssimo para o estudo desta tese, pois ele mostra que para baixos valores  $\sigma_n/S_Y$  o uso de  $K_I$  representa bem a intensidade do campo de tensões em corpos trincados, independentemente do contorno do corpo. Essa independência é mostrada a partir da análise de três espécimes diferentes: o

CCT (Center Cracked Tension), o SENB (Single Edge Notched Bend) e o SENT (Single Edge Notched Tension).

### 5.7. Estimativa de zonas plásticas em espécimes diferentes sob um mesmo Fator e Intensidade de Tensão

Este exemplo avalia as zonas plásticas de três espécimes diferentes sob um mesmo  $K_I$  para um determinado valor de  $\sigma_n/S_Y$ . Para baixos valores de  $\sigma_n/S_Y$ ,  $\sigma_n/S_Y < 0,5$ ; nota-se que as zonas plásticas dos três espécimes são diferentes, mas ficam bem próximas das zonas plásticas obtidas a partir do campo de tensões determinado por  $K_I$ . A medida que a relação  $\sigma_n/S_Y$  cresce, as zonas plásticas dos três espécimes começam a ficar cada vez mais diferentes entre si e maiores que a zona plástica obtida pelo campo de tensões obtido por  $K_I$ .

Em seguida, mostra-se separadamente para cada estado plano, os efeitos de  $\sigma_n/S_Y$  para cada espécime.

O valor adotado de  $K_I$  é igual a  $30 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ . A expressão de  $K_I$  para cada espécime foi obtida a partir de Anderson (1995). O espécime SENT pode ser visualizado mais detalhadamente na Figura 140.

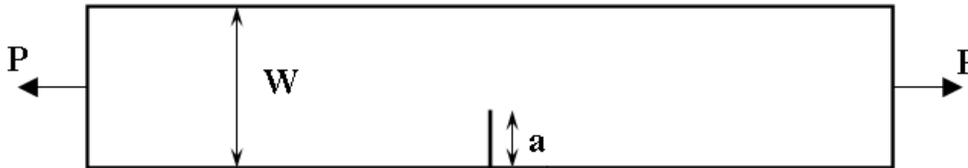


Figura 140 – Espécime SENT (adaptada de Anderson, 1995).

A expressão de  $K_I$  para o espécime SENT é dada pela Eq. (86):

$$K_I^{SENT} = \frac{P}{t\sqrt{W}} \frac{\sqrt{2 \tan\left(\frac{\pi a}{2W}\right)}}{\cos\left(\frac{\pi a}{2W}\right)} \left[ 0,752 + 2,02\left(\frac{a}{W}\right) + 0,37\left(1 - \sin\left(\frac{\pi a}{2W}\right)^3\right) \right], \quad (86)$$

em que  $t$  é espessura.

O espécime SENB pode ser visualizado mais detalhadamente na Figura 141.

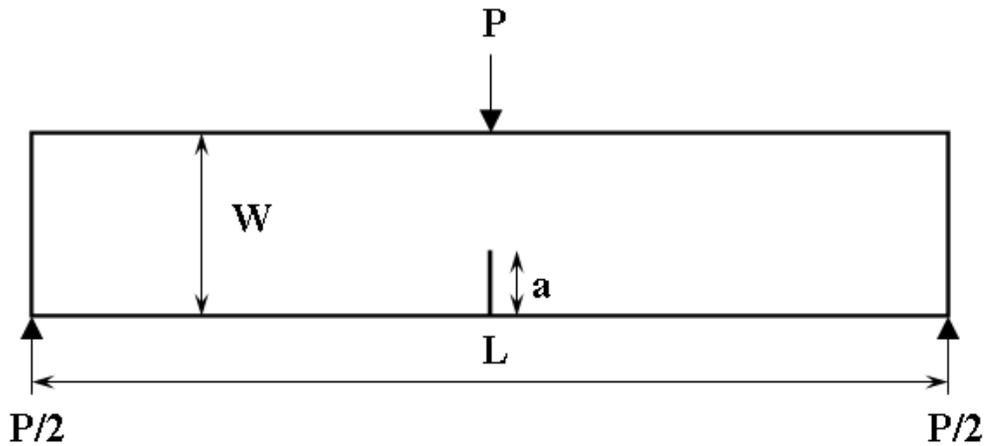


Figura 141 – Espécime SENB (adaptada de Anderson, 1995).

A expressão de  $K_I$  para o espécime SENB é dada pela Eq. (87):

$$K_I^{SENB} = \frac{P}{t\sqrt{W}} \frac{3 \frac{L}{W} \sqrt{\frac{a}{W}}}{2 \left(1 + 2 \frac{a}{W}\right) \left(1 - \frac{a}{W}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[ 1,99 + \right. \\ \left. - \frac{a}{W} \left(1 - \frac{a}{W}\right) \left\{ 2,15 - 3,93 \left(\frac{a}{W}\right) + 2,7 \left(\frac{a}{W}\right)^2 \right\} \right] \quad (87)$$

em que  $t$  é a espessura do espécime.

O espécime CCT pode ser visualizado mais detalhadamente na Figura 142.

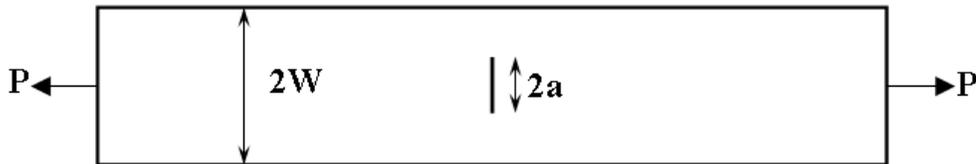


Figura 142 – Espécime CCT (adaptada de Anderson, 1995).

A expressão de  $K_I$  para o espécime CCT é dada pela Eq. (88):

$$K_I^{CCT} = \frac{P}{t\sqrt{W}} \sqrt{\frac{\pi a}{4W} \sec\left(\frac{\pi a}{2W}\right)} \left[ 1 - 0,025 \left(\frac{a}{W}\right)^2 + 0,06 \left(\frac{a}{W}\right)^4 \right] \quad (88)$$

em que  $t$  é a espessura do espécime.

Com a expressão de  $K_I$  para cada espécime, os valores de  $a$  e  $W$  foram ajustados de tal maneira que satisfizessem o valor de  $K_I = 30 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  e o valor de  $\sigma_n/S_Y$  estabelecido, conforme pode ser visto no apêndice deste trabalho. É importante mencionar que o valor de  $\sigma_n$  foi calculado sem se considerar a

presença da trinca. Dessa forma, a Figura 143 mostra as zonas plásticas para os três espécimes a partir de uma análise linear elástica feita pelo MEF para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ .

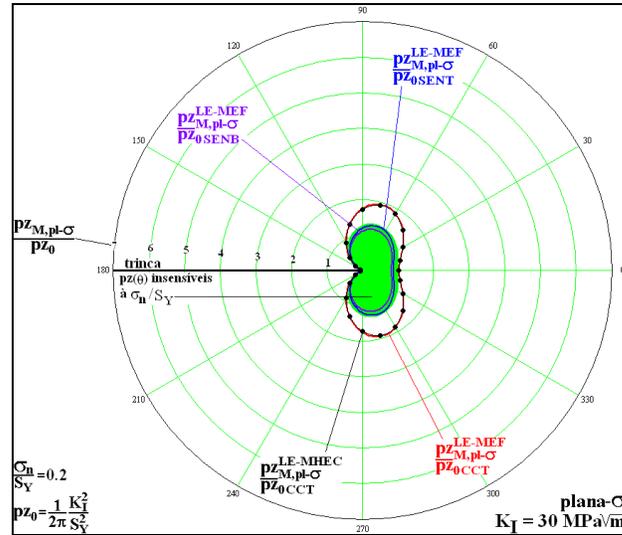


Figura 143 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ .

A Figura 144 mostra as zonas plásticas para os três espécimes a partir de uma análise linear elástica feita pelo MEF para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

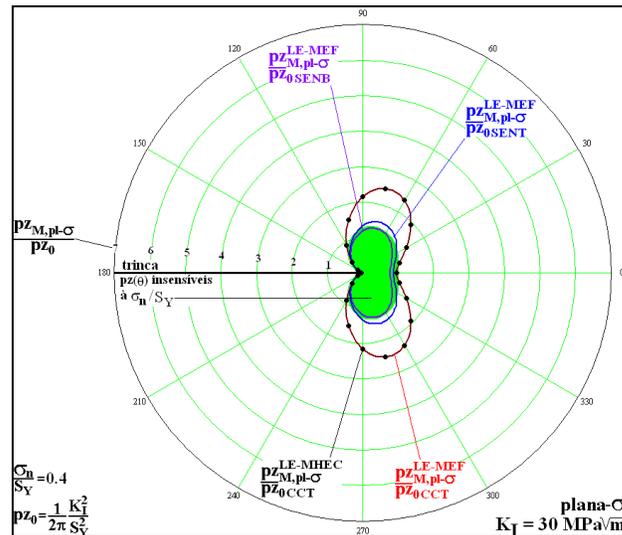


Figura 144 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

A Figura 145 mostra as zonas plásticas para os três espécimes a partir de uma análise linear elástica feita pelo MEF para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .

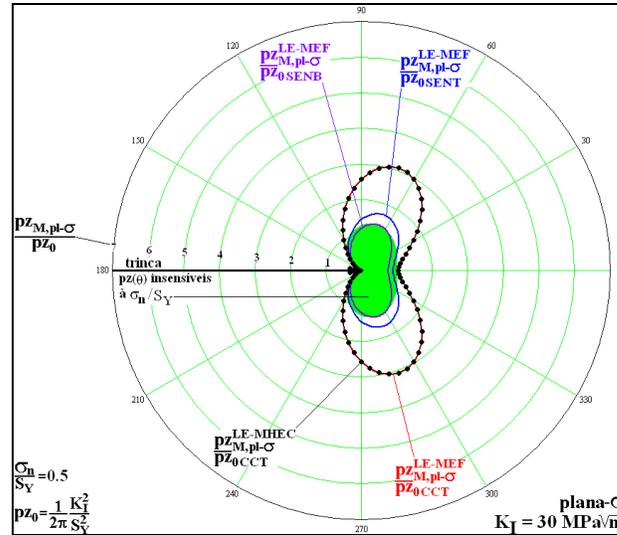


Figura 145 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .

A Figura 146 mostra as zonas plásticas para os três espécimes a partir de uma análise linear elástica feita pelo MEF para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ .

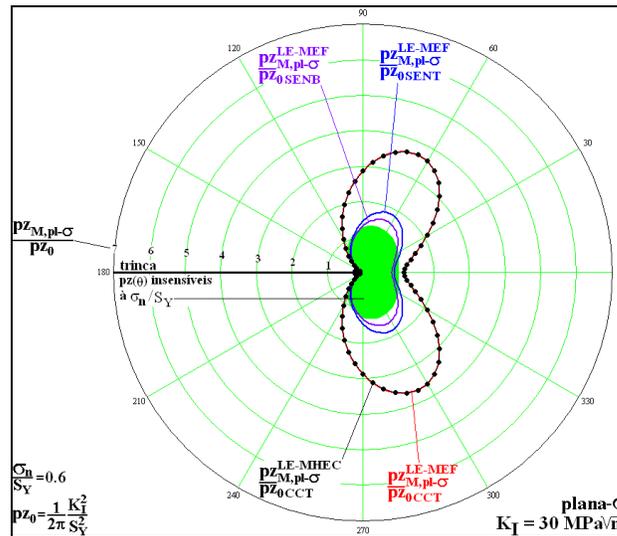


Figura 146 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ .

A Figura 147 mostra as zonas plásticas para os três espécimes a partir de uma análise linear elástica feita pelo MEF para o caso de tensão plana com  $\sigma_{II}/S_Y = 0,7$ .

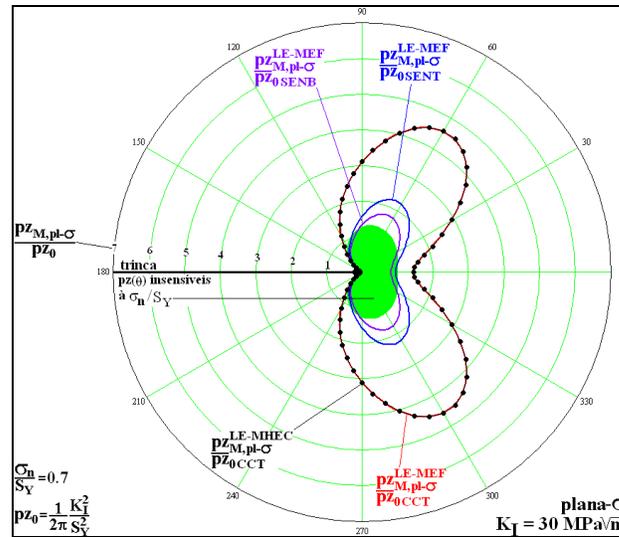


Figura 147 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob tensão plana para  $\sigma_{II}/S_Y = 0,7$ .

A Figura 148 mostra as zonas plásticas para os três espécimes a partir de uma análise linear elástica feita pelo MEF para o caso de tensão plana com  $\sigma_{II}/S_Y = 0,8$ .

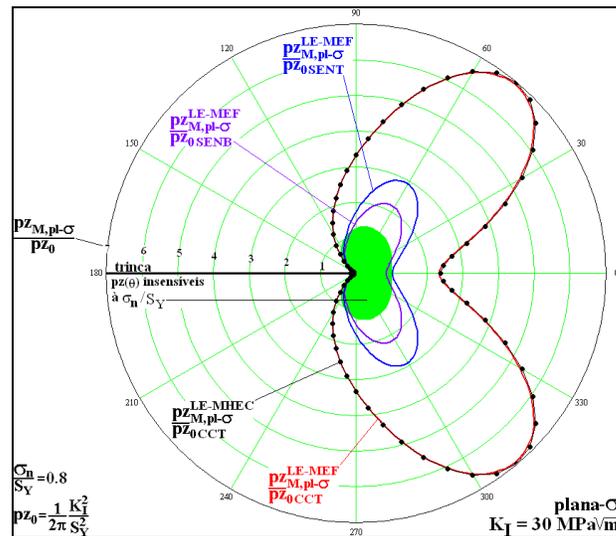


Figura 148 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob tensão plana para  $\sigma_{II}/S_Y = 0,8$ .

A Figura 149 mostra as zonas plásticas para os três espécimes a partir de uma análise linear elástica feita pelo MEF para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ .

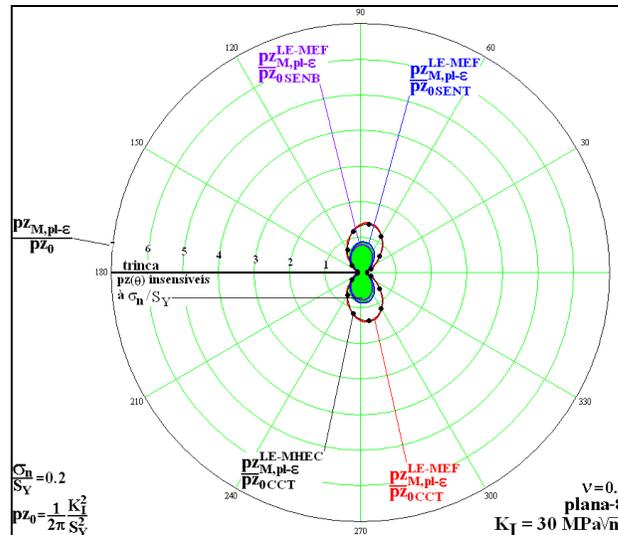


Figura 149 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ .

A Figura 150 mostra as zonas plásticas para os três espécimes a partir de uma análise linear elástica feita pelo MEF para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

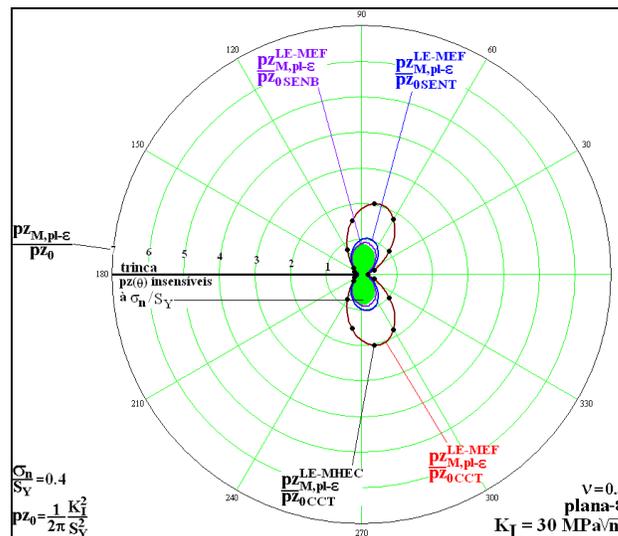


Figura 150 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

A Figura 151 mostra as zonas plásticas para os três espécimes a partir de uma análise linear elástica feita pelo MEF para o caso de deformação plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,5$ .

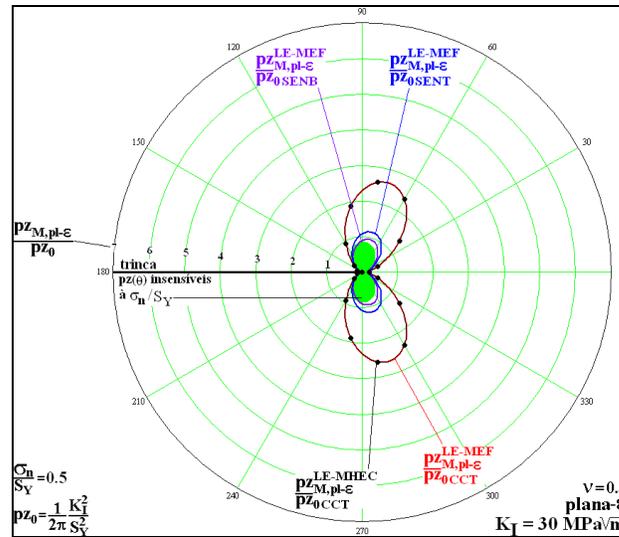


Figura 151 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob deformação plana para  $\sigma_r/S_Y = 0,5$ .

A Figura 152 mostra as zonas plásticas para os três espécimes a partir de uma análise linear elástica feita pelo MEF para o caso de deformação plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,6$ .

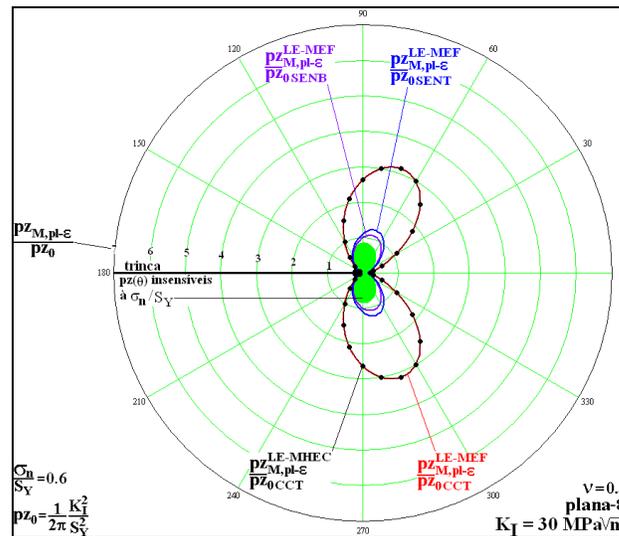


Figura 152 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob deformação plana para  $\sigma_r/S_Y = 0,6$ .

A Figura 153 mostra as zonas plásticas para os três espécimes a partir de uma análise linear elástica feita pelo MEF para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ .

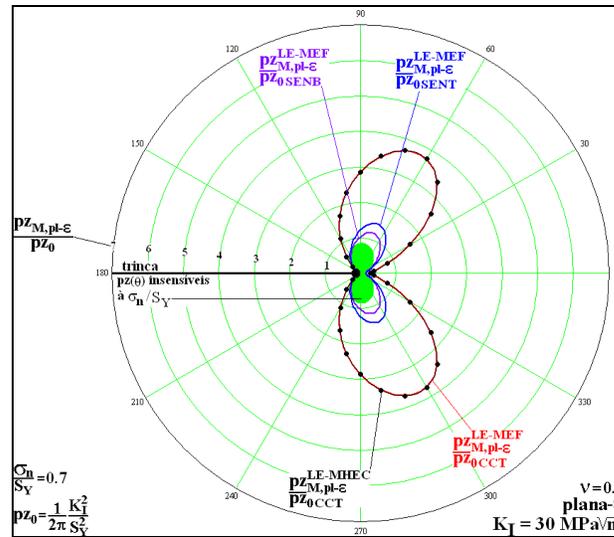


Figura 153 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ .

A Figura 154 mostra as zonas plásticas para os três espécimes a partir de uma análise linear elástica feita pelo MEF para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ .

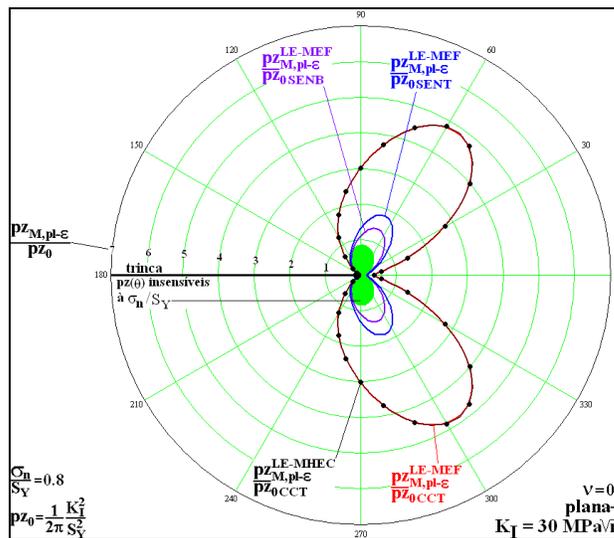


Figura 154 – Zonas plásticas dos espécimes CCT, SENB e SENT, obtidas pelo MEF sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ .

A Figura 155 mostra as zonas plásticas estimadas para o espécime CCT sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7$  e  $0,8$ .

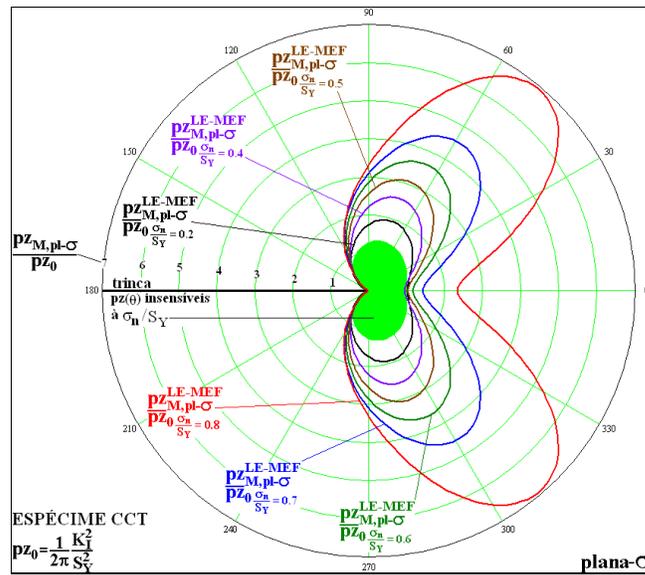


Figura 155 – Zonas plásticas para o espécime CCT obtidas pelo MEF sob tensão plana.

A Figura 156 mostra as zonas plásticas estimadas para o espécime CCT sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7$  e  $0,8$ .

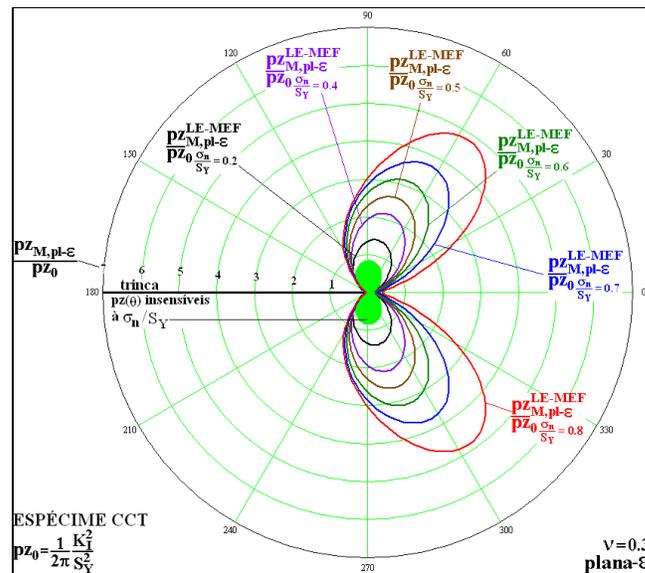


Figura 156 – Zonas plásticas para o espécime CCT obtidas pelo MEF sob deformação plana.

A Figura 157 mostra as zonas plásticas estimadas para o espécime SENT sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7$  e  $0,8$ .

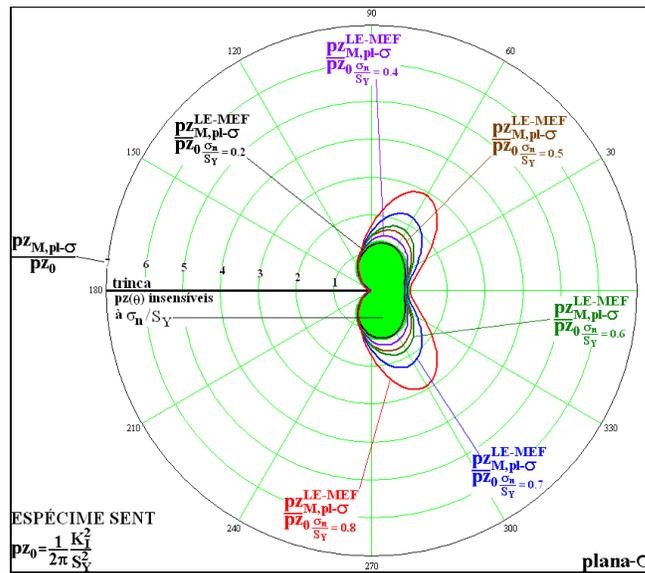


Figura 157 – Zonas plásticas para o espécime SENT obtidas pelo MEF sob tensão plana.

A Figura 158 mostra as zonas plásticas estimadas para o espécime SENT sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7$  e  $0,8$ .

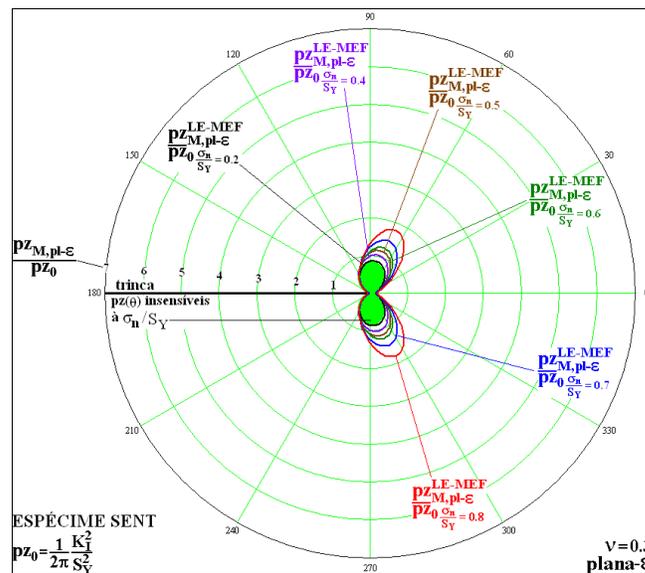


Figura 158 – Zonas plásticas para o espécime SENT obtidas pelo MEF sob deformação plana.

A Figura 159 mostra as zonas plásticas estimadas para o espécime SENB sob tensão plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7$  e  $0,8$ .

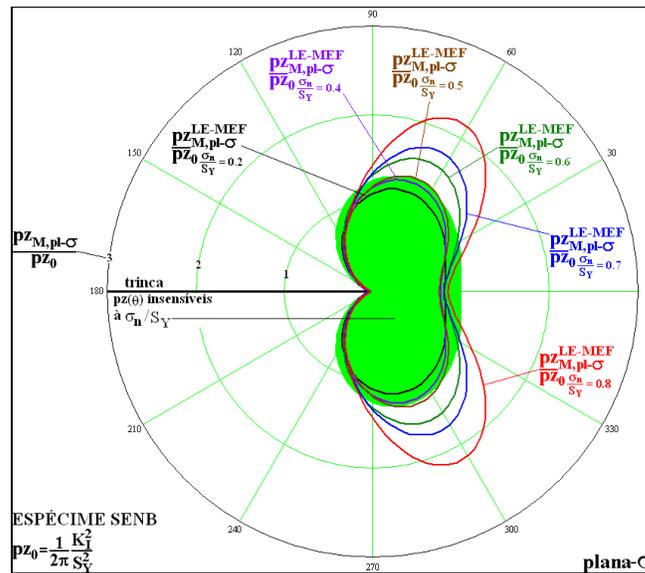


Figura 159 – Zonas plásticas para o espécime SENB obtidas pelo MEF sob tensão plana.

A Figura 160 mostra as zonas plásticas estimadas para o espécime SENB sob deformação plana para  $\sigma_n/S_Y = 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7$  e  $0,8$ .

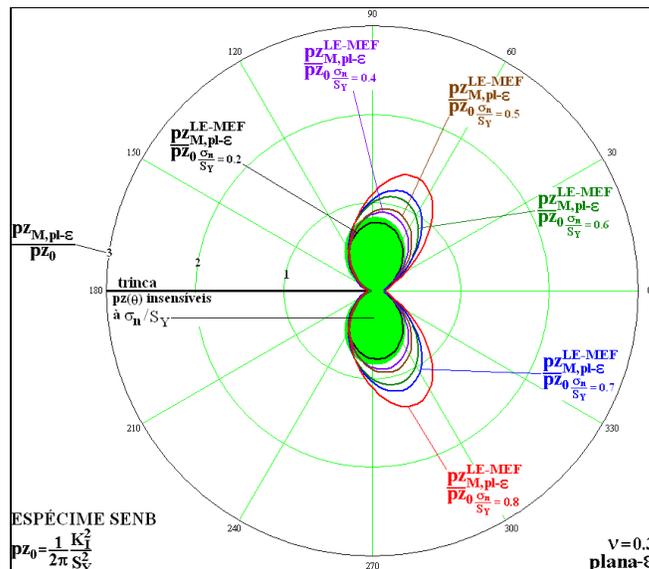


Figura 160 – Zonas plásticas para o espécime SENB obtidas pelo MEF sob deformação plana.

## 5.8. Conclusões do capítulo

Neste capítulo mostrou-se o uso de dois métodos numéricos diferentes para estimar as zonas plásticas lineares elásticas (LE). Exceto para níveis bem grosseiros de refinamentos de malha, tanto o Método dos Elementos de Finitos

(MEF) quanto o Método Híbrido dos Elementos de Contorno (MHEC) são ferramentas poderosas para estimar as zonas plásticas LE.

As estimativas das  $p_z(\theta)_M$  geradas pela função de tensão de Westergaard obtidas para o caso da placa de Griffith foram reproduzidas pelo MHEC, ratificando a ineficiência dos campos de tensões LE gerados a partir de  $K_I$  e de  $K_{II}$  mais  $T$ -stress para estimar  $p_z(\theta)_M$  para altos valores de  $\sigma_r/S_Y$ . Foi mostrado, para o exemplo da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração, que os campos de tensões obtidos numericamente pelo MHEC geram zonas plásticas sensíveis ao nível de  $\sigma_r/S_Y$ , ao tipo de carregamento e aos parâmetros geométricos, como a relação de  $a/W$ , diferentemente do que acontece quando se utiliza o campo de tensões LE gerados por  $K_I$ .

Este capítulo também estudou as estimativas das zonas plásticas de três espécimes diferentes sob um mesmo  $K_I$  para um determinado valor de  $\sigma_r/S_Y$ . Foi mostrado que para baixos valores de  $\sigma_r/S_Y$ ,  $\sigma_r/S_Y < 0,5$ ; as zonas plásticas dos três espécimes são diferentes, mas bem próximas das zonas plásticas obtidas a partir do campo de tensões determinado por  $K_I$ . Contudo, a medida que a relação  $\sigma_r/S_Y$  cresce, as zonas plásticas dos três espécimes começam a ficar cada vez mais diferentes entre si e maiores que a zona plástica obtida pelo campo de tensões obtido por  $K_I$ . Nesse mesmo exemplo se mostrou os efeitos de  $\sigma_r/S_Y$  para os três espécimes.

De forma similar ao que foi feito Capítulo 3, todas as zonas plásticas estimadas neste capítulo apresentam tensões maiores que a tensão de escoamento em seus interiores. Dessa maneira, o próximo capítulo mostra, apenas para o caso de materiais perfeitamente plásticos, o tratamento numérico para considerar a correção da singularidade no campo de tensões LE. Esse tratamento é similar ao que foi feito no Capítulo 4 para o caso em que o campo de tensões é obtido analiticamente.

## 6

### **Tratamento numérico das propostas de correções das zonas plásticas obtidas por uma análise numérica linear elástica para levar em consideração os efeitos do escoamento do material**

Este capítulo é similar ao Capítulo 4, que trata das propostas de correção das zonas plásticas lineares elásticas que buscam levar em consideração os efeitos do escoamento dos materiais no tamanho e forma das  $p_z(\theta)_M$ . A diferença é que neste capítulo as correções das  $p_z(\theta)_M$  são feitas numericamente. As quatro propostas de correção descritas na seção 4.1, que consideram o caso de um material perfeitamente plástico, podem ser aplicadas tanto pelo MEF quanto pelo MHEC. Entretanto, apenas as correções que consideram componente de tensão  $\sigma_{yy}$  e a tensão equivalente de Mises ( $\sigma_{Mises}$ ) foram implementadas no programa de Lopes (2002). Essas duas propostas de correção são mostradas em três exemplos que são divididos em três seções. A primeira seção mostra o caso da placa de Griffith. A segunda seção mostra o caso da placa retangular sob tração com uma trinca central e a terceira seção mostra o exemplo da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração. Por fim, a quarta seção apresenta as conclusões deste capítulo.

Para um melhor controle de convergência na integração numérica, permite-se que se subdivida o intervalo de integração conforme o critério de convergência adotado. No caso estudado, o intervalo de integração sempre é compreendido entre 0 a  $p_z^W_M$ .

A Figura 161 mostra o caso em que se subdivide o intervalo de integração, que inicialmente tem apenas um elemento e três pontos de Gauss, em outro com quatro elementos e doze pontos de Gauss.

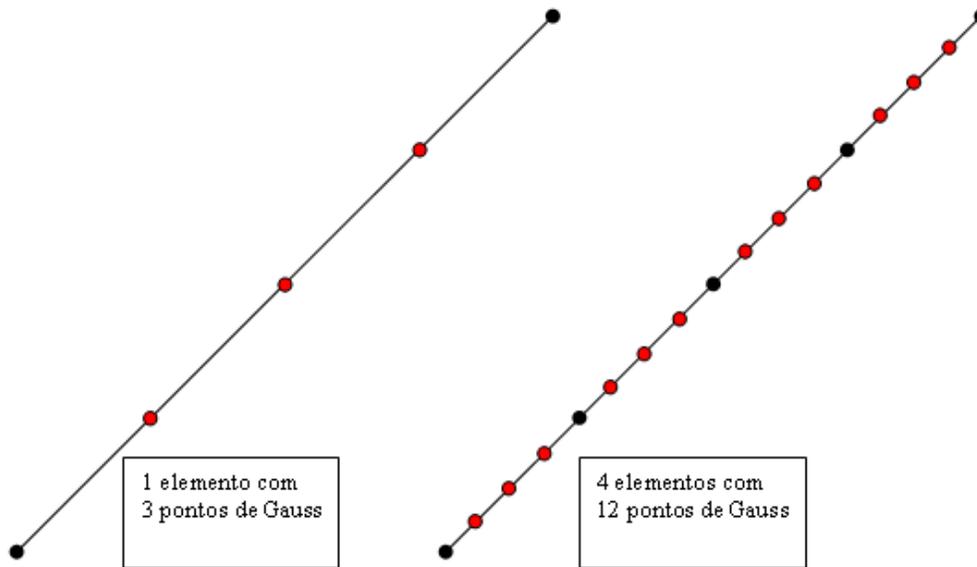


Figura 161 – Subdivisão do intervalo de integração numérica.

Assim, devido ao tratamento numérico, a Eq. (59) resulta na Eq. (89),

$$pZ_M^{Wig+eq\sigma_y} = \frac{1}{\sigma_{yy}(\sigma_n, pZ_M^{Wig}, \theta)} \sum_{i=1}^{NE} \left( \sum_{j=1}^{NPG} w_{ij} \sigma_{yy}(\sigma_n, r_{ij}, \theta) \right), \quad (89)$$

em que  $NE$  é o número de elementos usados na subdivisão,  $NPG$  é o número de pontos de Gauss usados dentro de cada elemento  $i$ , e  $w$  simboliza os pesos da integração numérica. Por outro lado, a Eq. (66) resulta na Eq. (90).

$$pZ_M^{Wig+eqM} = \frac{1}{S_Y} \sum_{i=1}^{NE} \left( \sum_{j=1}^{NPG} w_{ij} \sigma_{Mises}(\sigma_n, r_{ij}, \theta) \right). \quad (90)$$

A próxima seção mostra como a correção numérica da singularidade reproduz as mesmas estimativas obtidas pela correção feita analiticamente. Nessa próxima seção se estuda o exemplo da placa de Griffith.

### 6.1. Correção numérica das zonas plásticas para o caso da placa de Griffith

Esta seção mostra as estimativas das zonas plásticas obtidas numericamente que correspondem ao caso da placa de Griffith em que se considera a componente  $\sigma_{yy} \left( pZ_M^{LE-MHEC+eq\sigma_y} \right)$  e a tensão equivalente de Mises  $\left( pZ_M^{LE-MHEC+eqM} \right)$  na correção. Essas estimativas são comparadas com os mesmos resultados mostrados na subseção 4.1.7. Nessas comparações é possível rever os efeitos da relação  $\sigma_r/S_Y$  no tamanho das zonas plásticas.

A Figura 162 mostra, para o caso de tensão plana, a comparação entre as zonas plásticas corrigidas obtidas numericamente a partir do MHEC com as zonas plásticas corrigidas analiticamente. Nessa correção considera-se a componente  $\sigma_{yy}$ . Seis níveis são testados,  $\sigma_n/S_Y = 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7$  e  $0,8$ .

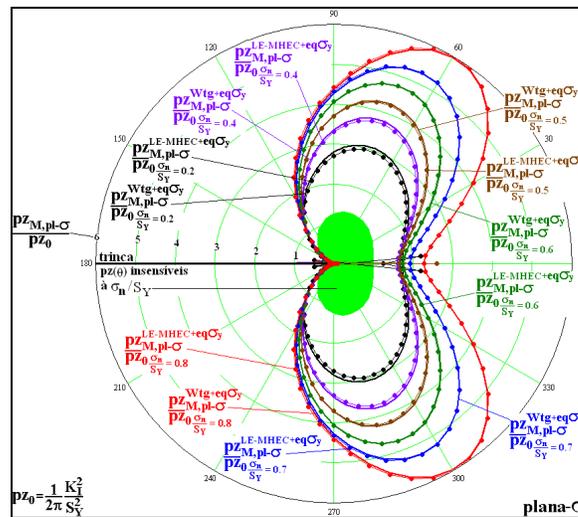


Figura 162 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas pela componente  $\sigma_{yy}$  obtidas numericamente e as zonas plásticas corrigidas pela componente  $\sigma_{yy}$  obtidas analiticamente para o caso sob tensão plana.

A Figura 163 mostra, para o caso em tensão plana, a comparação entre as zonas plásticas corrigidas numericamente e as zonas plásticas corrigidas analiticamente em que se usa  $\bar{\sigma}_{Mises}$ .

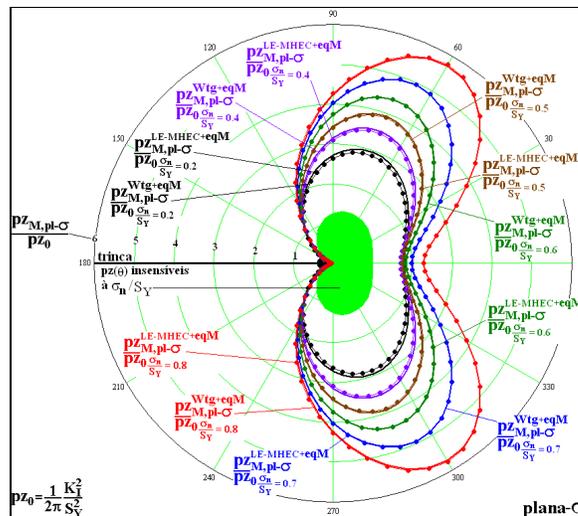


Figura 163 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas pela componente  $\bar{\sigma}_{Mises}$  obtidas numericamente e as zonas plásticas corrigidas por  $\bar{\sigma}_{Mises}$  obtidas analiticamente para o caso sob tensão plana.

A Figura 164 mostra, para o caso de deformação plana, a comparação entre as zonas plásticas corrigidas numericamente e as zonas plásticas corrigidas analiticamente em que se usa a componente  $\sigma_{yy}$ .

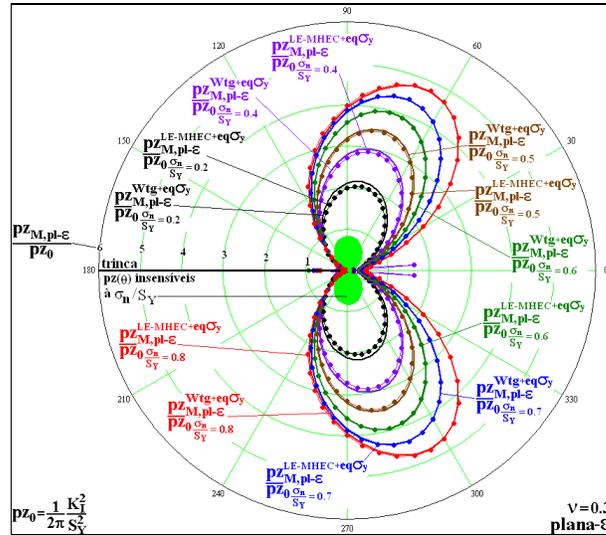


Figura 164 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas pela componente  $\sigma_{yy}$  obtidas numericamente e as zonas plásticas corrigidas pela componente  $\sigma_{yy}$  obtidas analiticamente para o caso em deformação plana.

A Figura 165 é parecida com a Figura 164. A diferença é que no caso da Figura 165 se usa  $\sigma_{Mises}$ .

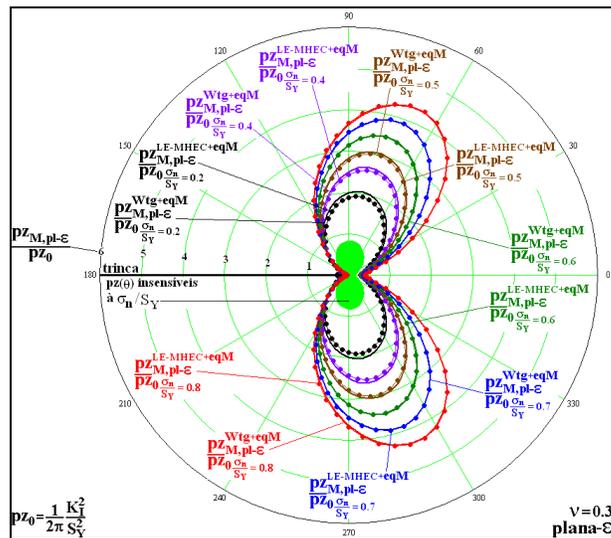


Figura 165 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas pela componente  $\sigma_{Mises}$  obtidas numericamente e as zonas plásticas corrigidas por  $\sigma_{Mises}$  obtidas analiticamente para o caso em deformação plana.



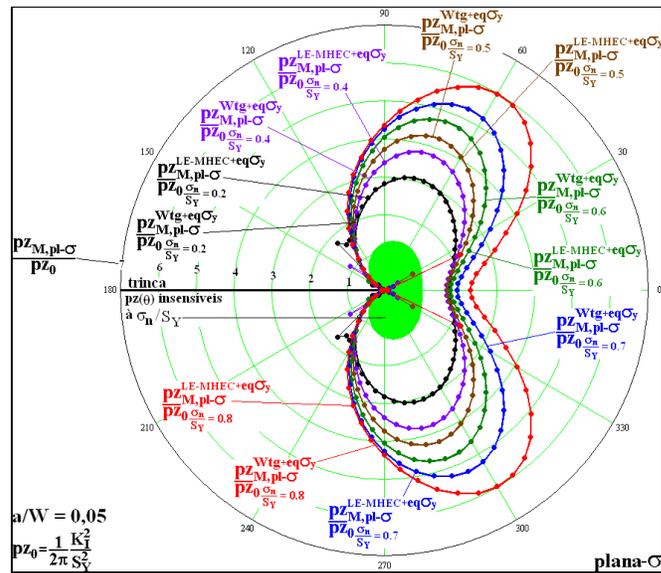


Figura 167 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas por  $\sigma_{yy}$ , obtidas numericamente e analiticamente para o caso sob tensão plana com  $a/W = 0,05$ .

A Figura 168 é parecida com a Figura 166. A diferença é que na Figura 168 a relação  $a/W$  estudada é igual à 0,10.

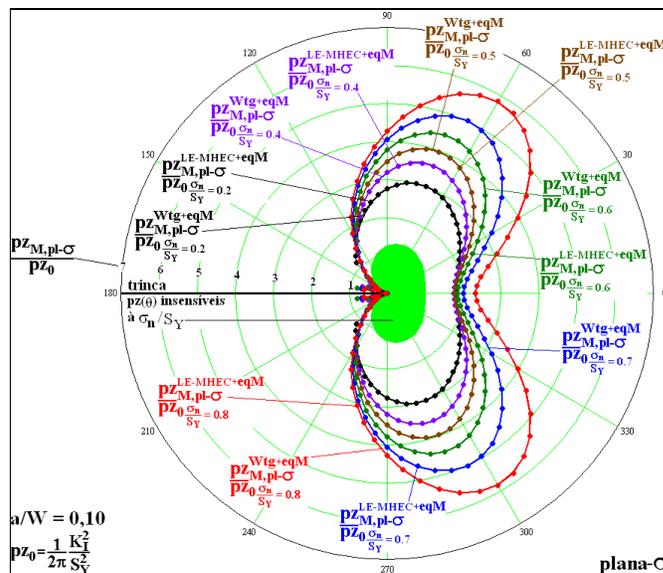


Figura 168 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas por  $\sigma_{Mises}$  obtidas numericamente e analiticamente para o caso sob tensão plana com  $a/W = 0,1$ .

A Figura 169 é parecida com a Figura 167. A diferença é que na Figura 169 a relação  $a/W$  estudada é igual à 0,10.

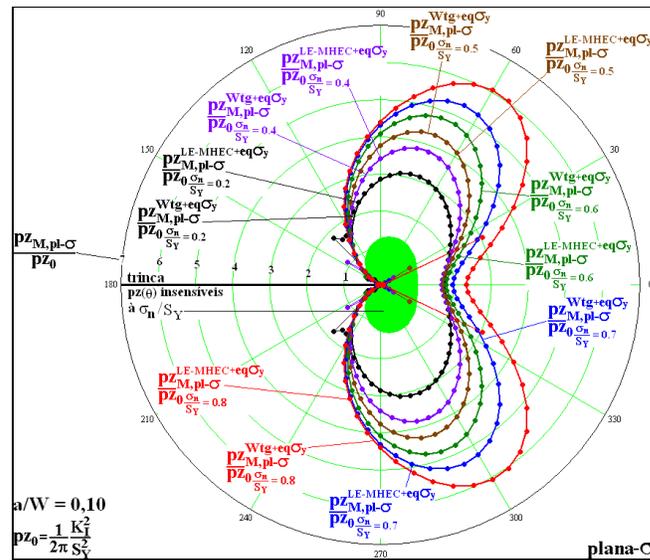


Figura 169 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas por  $\sigma_{yy}$  obtidas numericamente e analiticamente para o caso sob tensão plana com  $a/W = 0,1$ .

A Figura 170 é parecida com a Figura 166 e com a Figura 168. A diferença é que na Figura 170 a relação  $a/W$  estudada é igual à 0,18.

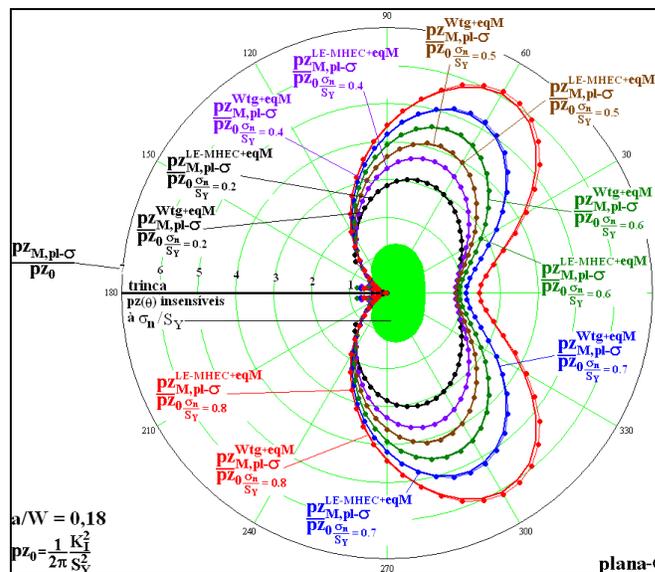


Figura 170 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas por  $\sigma_{Mises}$  obtidas numericamente e analiticamente para o caso em tensão plana com  $a/W = 0,18$ .

A Figura 171 é parecida com a Figura 167 e com a Figura 169. A diferença é que na Figura 171 a relação  $a/W$  estudada é igual à 0,18.

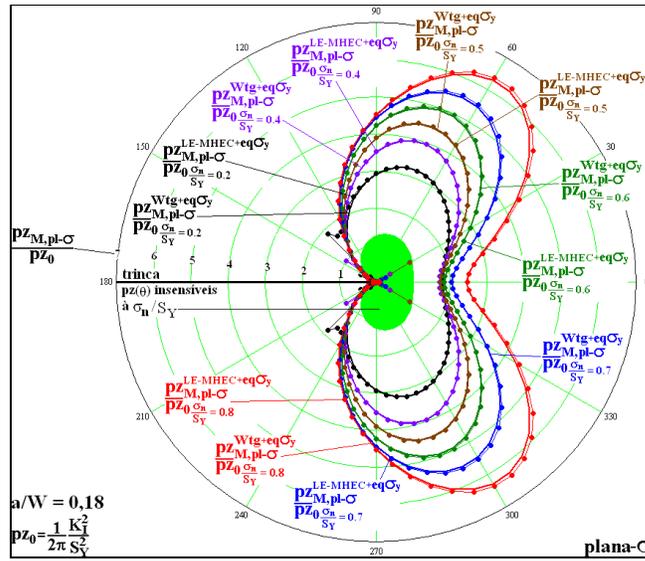


Figura 171 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas por  $\sigma_{yy}$  obtidas numericamente e as analiticamente para o caso sob tensão plana com  $a/W = 0,18$ .

A Figura 172 mostra para o caso em deformação plana a comparação entre as zonas plásticas corrigidas numericamente e analiticamente a partir de  $\sigma_{Mises}$  para  $a/W = 0,05$ .

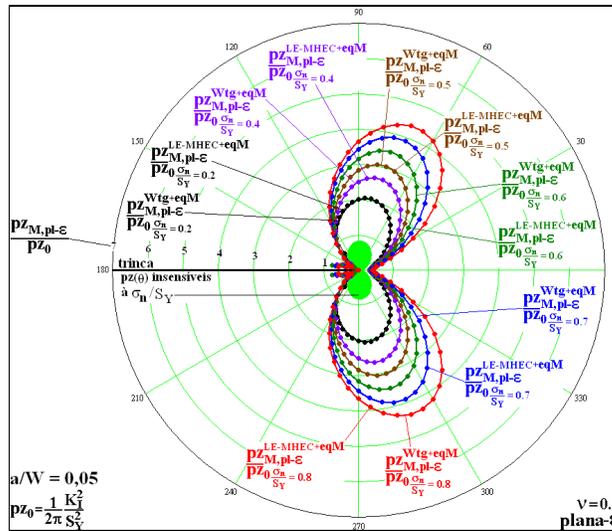


Figura 172 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas por  $\sigma_{Mises}$  obtidas numericamente e analiticamente para o caso em deformação plana com  $a/W = 0,05$ .

A Figura 173 mostra para o caso em deformação plana a comparação entre as zonas plásticas corrigidas numericamente e analiticamente a partir de  $\sigma_{yy}$  para  $a/W = 0,05$ .

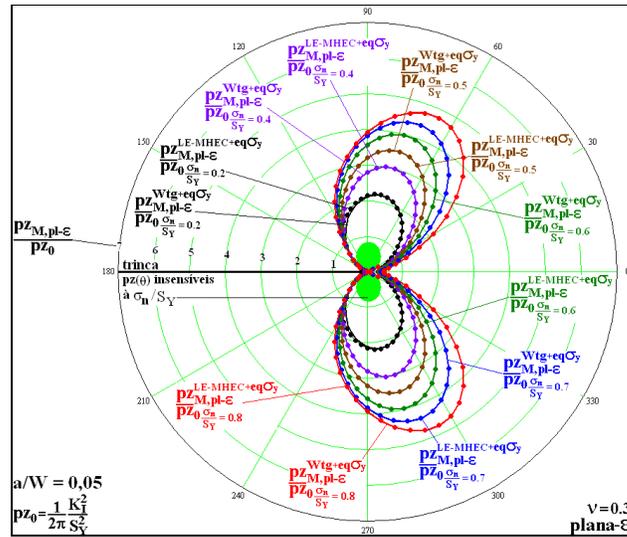


Figura 173 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas por  $\sigma_{yy}$  obtidas numericamente e analiticamente para o caso em deformação plana com  $a/W = 0,05$ .

A Figura 174 é parecida com a Figura 172. A diferença é que na Figura 174 a relação  $a/W$  estudada é igual à 0,10.

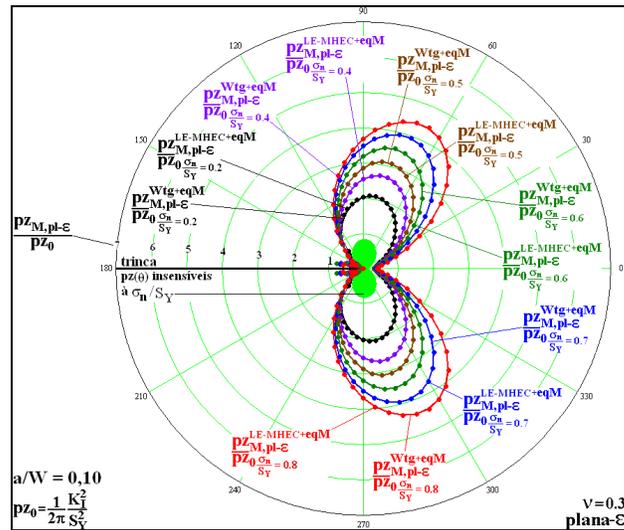


Figura 174 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas por  $\sigma_{Mises}$  obtidas numericamente e analiticamente para o caso em deformação plana com  $a/W = 0,10$ .

A Figura 175 é parecida com a Figura 173. A diferença é que na Figura 175 a relação  $a/W$  estudada é igual à 0,10.

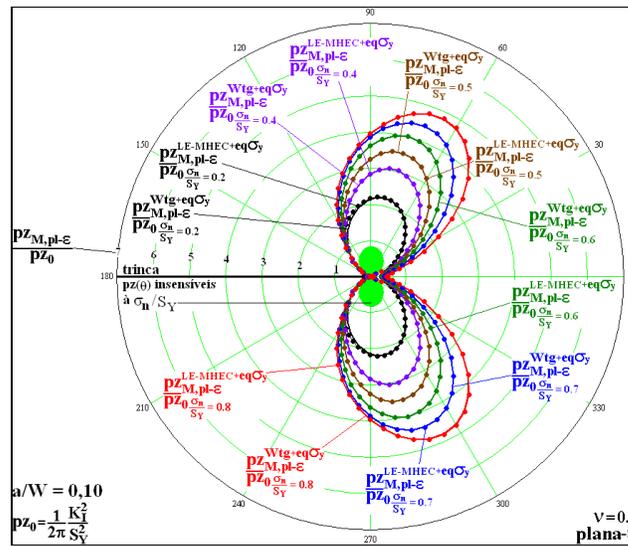


Figura 175 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas por  $\sigma_{yy}$  obtidas numericamente e analiticamente para o caso em deformação plana com  $a/W = 0,10$ .

A Figura 176 é parecida com a Figura 172 e com a Figura 174. A diferença é que na Figura 176 a relação  $a/W$  estudada é igual à 0,18.

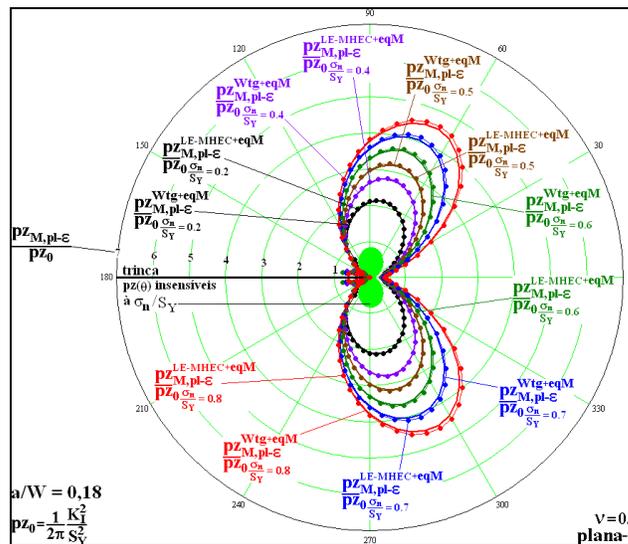


Figura 176 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas por  $\sigma_{Mises}$  obtidas numericamente e analiticamente para o caso em deformação plana com  $a/W = 0,18$ .

A Figura 177 é parecida com a Figura 173 e com a Figura 175. A diferença é que na Figura 177 a relação  $a/W$  estudada é igual à 0,18.

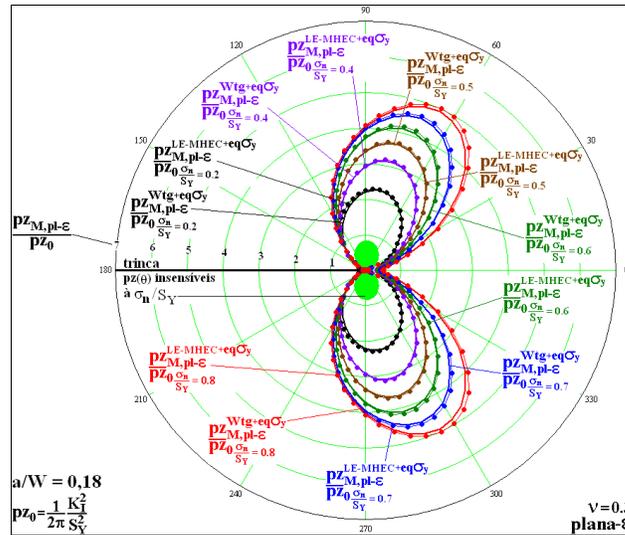


Figura 177 – Comparação entre as zonas plásticas corrigidas por  $\sigma_{yy}$  obtidas numericamente e analiticamente para o caso em deformação plana com  $a/W = 0,18$ .

O próximo exemplo estudado é o da placa retangular com uma trinca central sob tração.

### 6.3. Correção numérica das zonas plásticas para o caso da placa retangular com uma trinca central sob flexo tração

Os mesmo três valores de  $a/W$  estudados para o caso das zonas plásticas sem correção serão estudados nesta seção. Os efeitos de  $a/W$ , assim como o efeito de  $\sigma_r/S_Y$ , já foram vistos para as zonas plásticas sem a correção da singularidade. Portanto, nesta seção, apenas se mostra as zonas plásticas corrigidas em que se considera um material perfeitamente plástico.

A Figura 178 mostra as zonas plásticas corrigidas em que se usa a tensão equivalente de Mises,  $\sigma_{Mises}$ , e a componente  $\sigma_{yy}$  para a correção para o caso de tensão plana com  $a/W = 0,05$ .

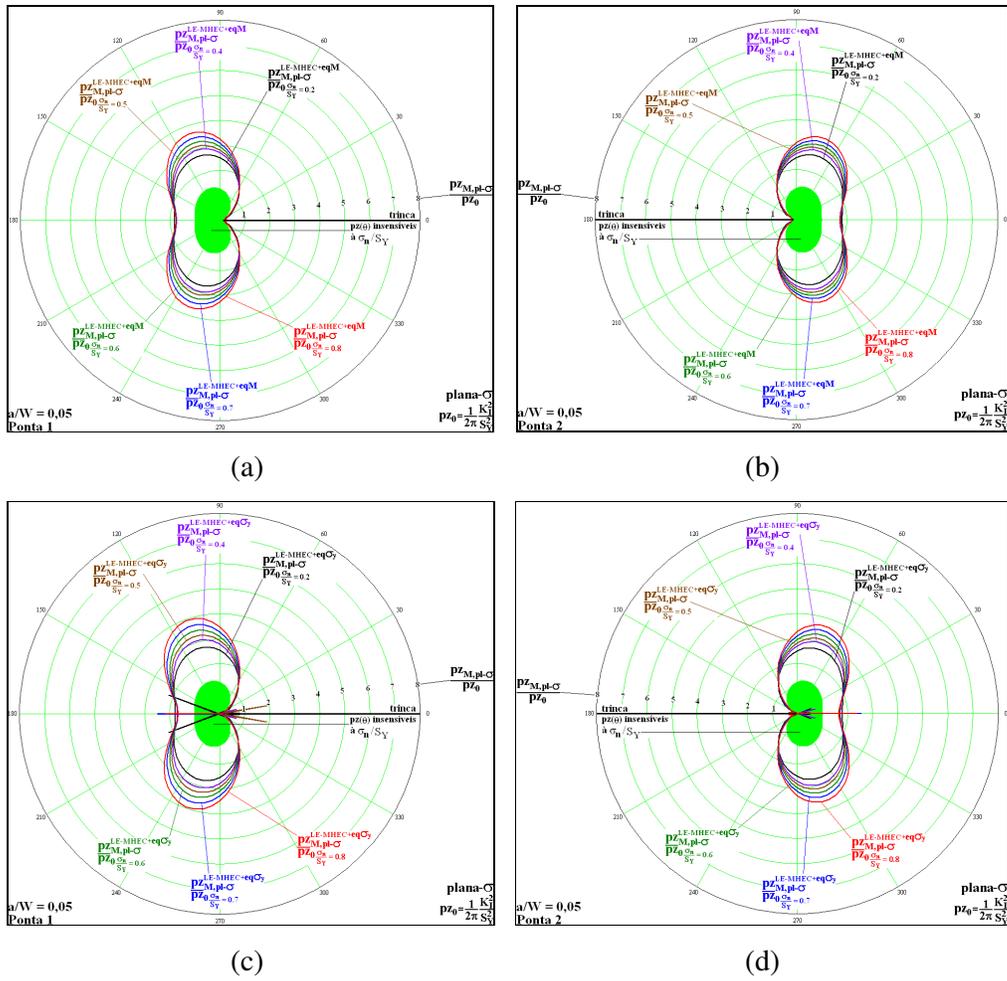


Figura 178 – Efeito de  $\sigma_y/S_y$  nas zonas plásticas corrigidas numericamente para  $a/W = 0,05$  sob tensão plana para (a) ponta 1 considerando  $\sigma_{Mises}$ ; (b) ponta 2 considerando  $\sigma_{Mises}$ ; (c) ponta 1 considerando  $\sigma_{yy}$  e (d) ponta 2 considerando  $\sigma_{yy}$ .

A Figura 179 mostra as zonas plásticas corrigidas em que se usa a tensão equivalente de Mises,  $\sigma_{Mises}$ , e a componente  $\sigma_{yy}$  para a correção para o caso de tensão plana com  $a/W = 0,10$ .

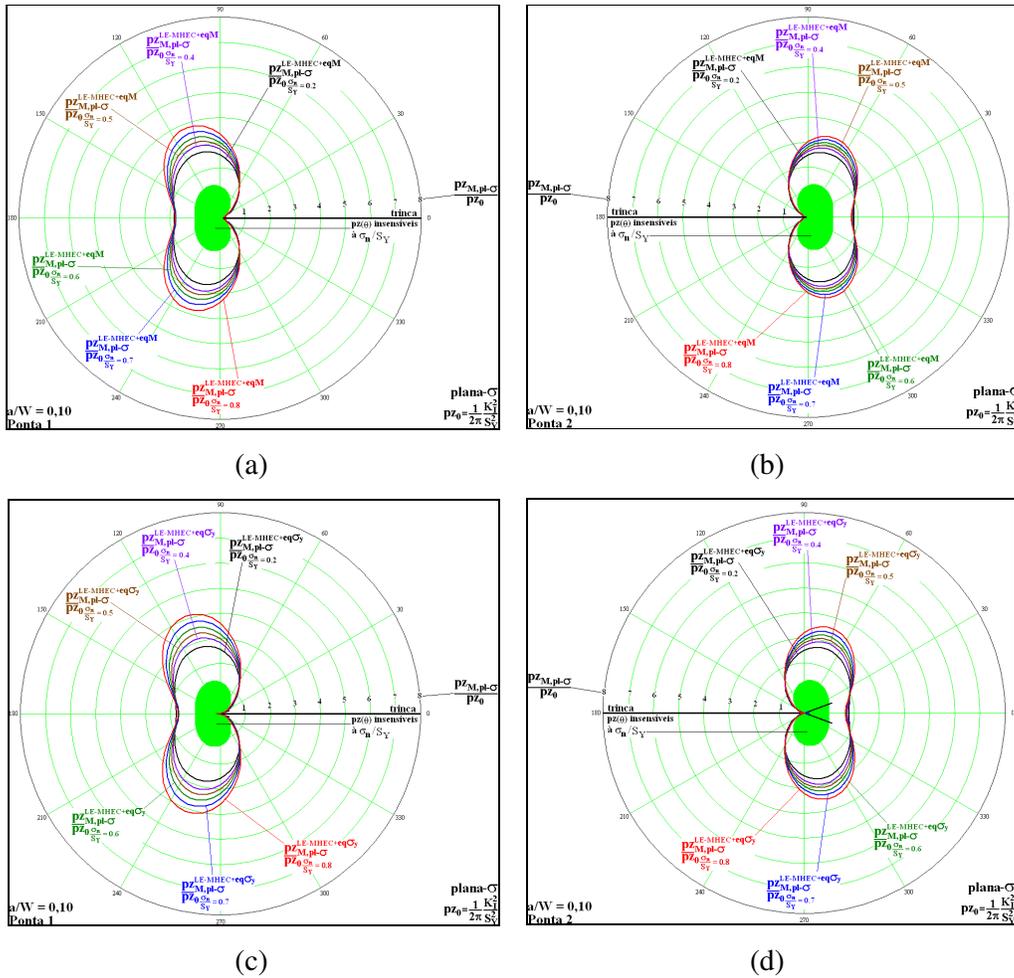


Figura 179 – Efeito de  $\sigma_n/S_y$  nas zonas plásticas corrigidas numericamente para  $a/W = 0,10$  em tensão plana para (a) ponta 1 considerando  $\sigma_{Mises}$ ; (b) ponta 2 considerando  $\sigma_{Mises}$ ; (c) ponta 1 considerando  $\sigma_{yy}$  e (d) ponta 2 considerando  $\sigma_{yy}$ .

A Figura 180 mostra as zonas plásticas corrigidas em que se usa a tensão equivalente de Mises,  $\sigma_{Mises}$ , e a componente  $\sigma_{yy}$  para a correção para o caso de tensão plana com  $a/W = 0,40$ .

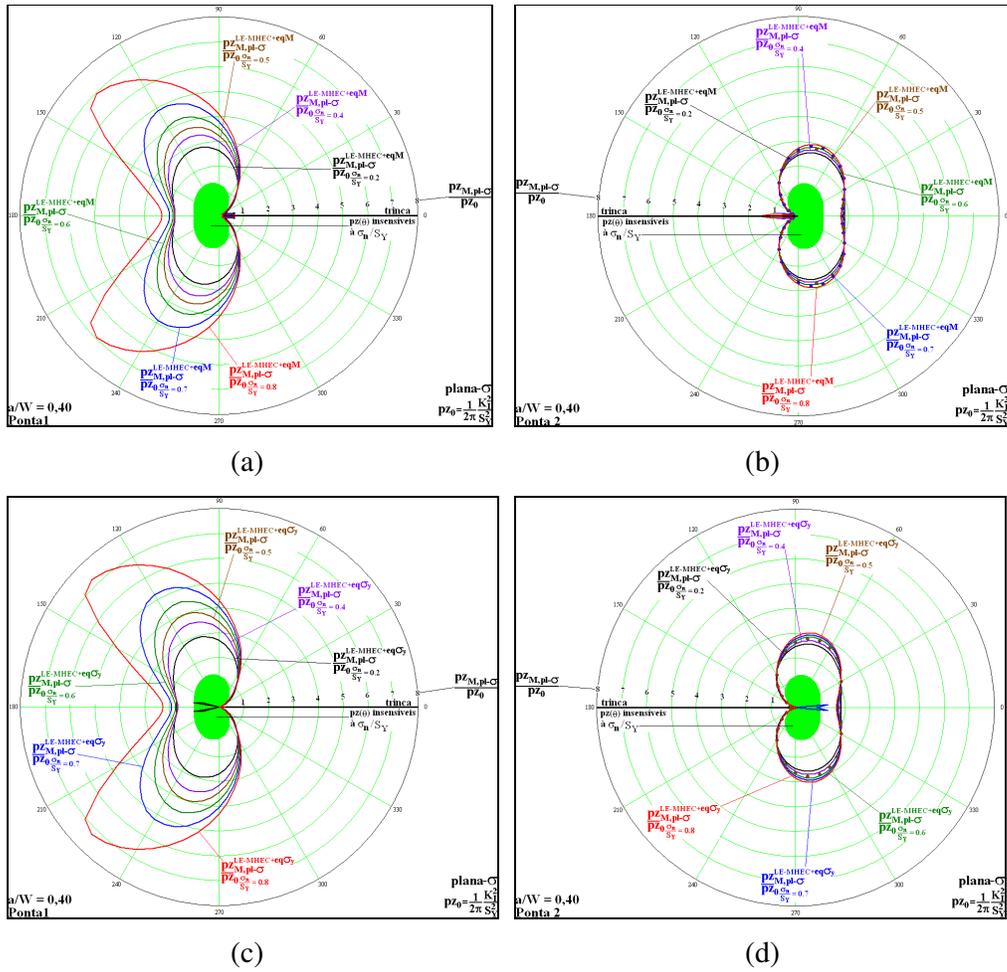


Figura 180 – Efeito de  $\sigma_n/S_Y$  nas zonas plásticas corrigidas numericamente para  $a/W = 0,40$  em tensão plana para (a) ponta 1 considerando  $\sigma_{Mises}$ ; (b) ponta 2 considerando  $\sigma_{Mises}$ ; (c) ponta 1 considerando  $\sigma_{yy}$  e (d) ponta 2 considerando  $\sigma_{yy}$ .

A Figura 181 mostra as zonas plásticas corrigidas em que se usa a tensão equivalente de Mises,  $\sigma_{Mises}$ , e a componente  $\sigma_{yy}$  para a correção para o caso de deformação plana para  $a/W = 0,05$ .



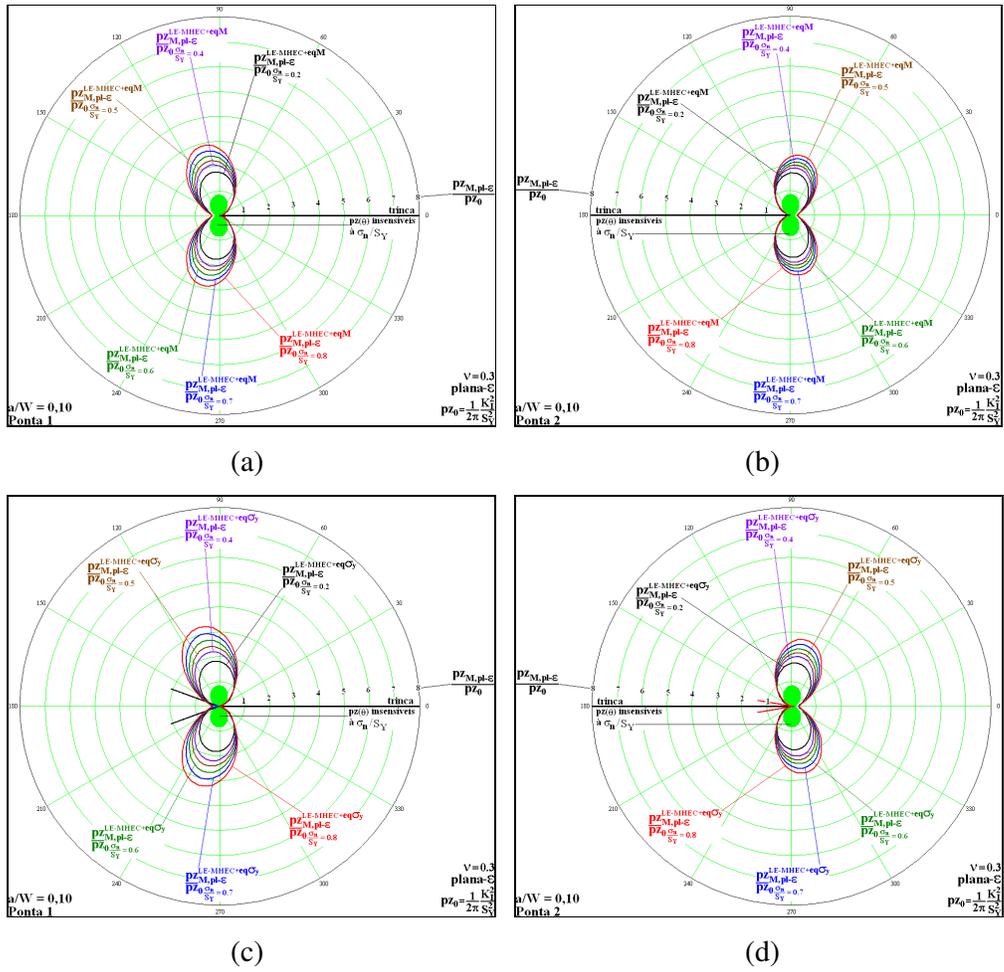


Figura 182 – Efeito de  $\sigma_h/S_Y$  nas zonas plásticas corrigidas numericamente para  $a/W = 0,10$  em deformação plana para (a) ponta 1 considerando  $\sigma_{Mises}$ ; (b) ponta 2 considerando  $\sigma_{Mises}$ ; (c) ponta 1 considerando  $\sigma_{yy}$  e (d) ponta 2 considerando  $\sigma_{yy}$ .

A Figura 183 mostra as zonas plásticas corrigidas em que se usa a tensão equivalente de Mises,  $\sigma_{Mises}$ , e a componente  $\sigma_{yy}$  para a correção para o caso de deformação plana com  $a/W = 0,40$ .

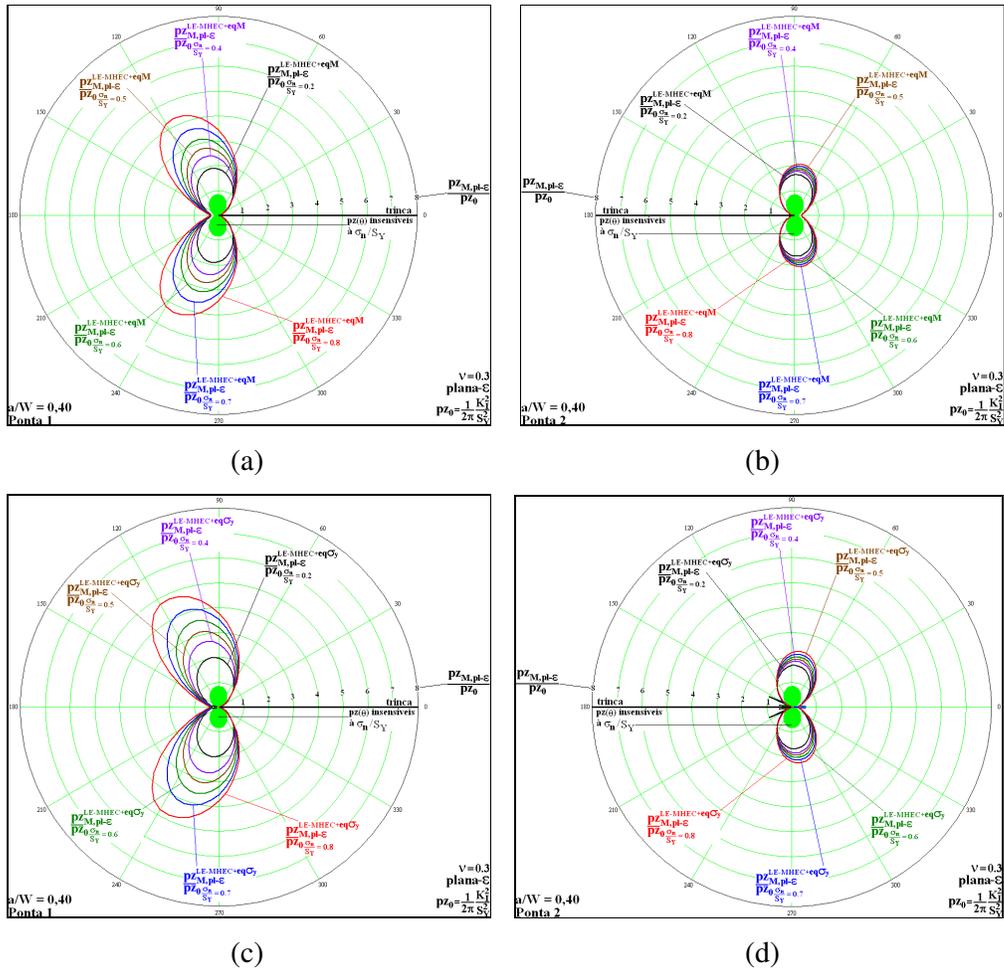


Figura 183 – Efeito de  $\sigma_r/S_y$  nas zonas plásticas corrigidas numericamente para  $a/W = 0,40$  em deformação plana para (a) ponta 1 considerando  $\sigma_{Mises}$ ; (b) ponta 2 considerando  $\sigma_{Mises}$ ; (c) ponta 1 considerando  $\sigma_{yy}$  e (d) ponta 2 considerando  $\sigma_{yy}$ .

## 6.4. Conclusões do capítulo

Este capítulo mostrou, em três exemplos, que as mesmas correções analíticas das zonas plásticas propostas no Capítulo 4 podem ser feitas numericamente. Para os exemplos da placa de Griffith e da placa retangular tracionada com uma trinca central, este capítulo mostrou que as zonas plásticas corrigidas numericamente são praticamente iguais às zonas plásticas corrigidas analiticamente. O terceiro exemplo foi o de uma placa retangular com uma trinca central sob flexo tração. Nos três exemplos estudados, foi verificado que as zonas

plásticas corrigidas são bem maiores que as zonas plásticas obtidas apenas pelo campo de tensões obtido por  $K_I$  para todos os níveis de  $\sigma_r/S_Y$ .

Todas as zonas plásticas corrigidas neste capítulo partem da hipótese feita por Irwin (1958) para o caso da placa de Griffith, pois elas partem das estimativas lineares elásticas (LE) para depois sim levar em consideração os efeitos do escoamento do material. Dessa maneira, essas estimativas possuem um carácter qualitativo, pois devido à singularidade da formulação matemática, o problema da estimativa das zonas plásticas é intrinsecamente não linear. Zonas plásticas estimadas a partir de uma análise não linear são apresentadas no próximo capítulo.

## 7

### **Estimativas de zonas plásticas obtidas numericamente a partir de uma análise não linear**

Como visto anteriormente, o problema de determinar a quantidade de material plastificado na frente da ponta de trincas é intrinsecamente não linear. Entretanto, a MFLE utiliza o  $K_I$ , que é um parâmetro linear elástico, para representar o campo de tensões e para fazer previsões de fratura. O estudo dos limites de aplicabilidade de  $K_I$  para representar o campo de tensões e o consequente uso deste campo para estimar as zonas plásticas é o principal foco de pesquisa deste trabalho. Contudo, foi visto no Capítulo 3 que as zonas plásticas obtidas a partir de um função de tensão de Westergaard possuem incompatibilidades físicas, pois o campo de tensões que as determinam geram tensões singulares na ponta das trincas. Por causa disso, quatro propostas de correção foram feitas no Capítulo 4 como tentativa de melhorar as estimativas das zonas plásticas geradas a partir de um campo de tensões singular. Essas quatro tentativas consideram um material perfeitamente plástico.

No Capítulo 6, estimaram-se zonas plásticas obtidas a partir de um campo de tensões determinado numericamente, em que se considera duas correções propostas no Capítulo 4. Neste capítulo, essas estimativas de zonas plásticas feitas no Capítulo 6 são comparadas com as zonas plásticas obtidas a partir de uma análise não linear feita com o uso do MEF disponibilizado no programa ANSYS ( $P_M^{EP-MEF}$ ). Dentro desse enfoque, este capítulo é dividido em cinco seções. A primeira seção apresenta o modelo constitutivo utilizado no programa ANSYS (2001). A segunda seção faz uma breve explicação sobre os parâmetros que indicam a qualidade da resposta da análise não linear feita pelo programa ANSYS (2001). A terceira seção mostra as estimativas das zonas plásticas obtidas a partir da análise não linear feita no programa ANSYS para o exemplo de uma placa retangular com uma trinca central sob tração. A quarta seção é parecida com a terceira seção, a diferença é que o exemplo estudado dessa vez é uma placa

retangular com uma trinca central sob flexo tração. Por último, a quinta seção apresenta as conclusões deste capítulo.

### 7.1. O modelo constitutivo

O modelo constitutivo utilizado no programa ANSYS (2001) para simular a não linearidade do material é denominado de multilinear elástico, conforme mostra a Figura 184.

Pontos	$\epsilon$	$\sigma$
1	0	0
2	0.001	75
3	0.002	150
4	0.003	225
5	0.004	240
6	0.005	250
7	0.025	300
8	0.060	355
9	0.100	390
10	0.150	420
11	0.200	435
12	0.250	449
13	0.275	450

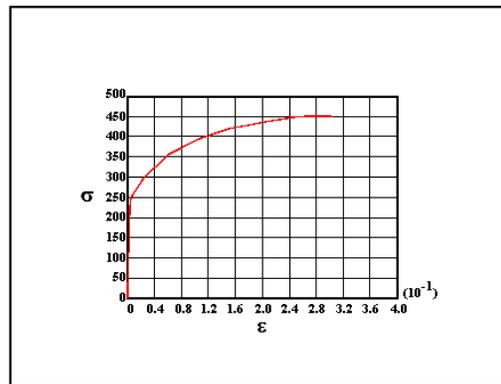


Figura 184 – Modelo multilinear elástico utilizado pelo programa ANSYS (adaptada de ANSYS, 2001).

Entretanto, por simplicidade, este trabalho só trata o modelo bilinear elástico que pode ser reproduzido pelo modelo multilinear, conforme mostra a Figura 185.

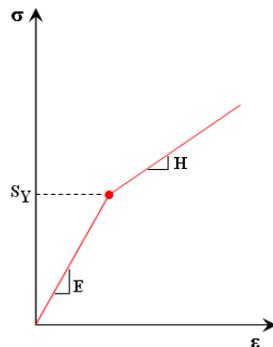


Figura 185 – Modelo bilinear elástico utilizado.

O modelo bilinear, mostrado na Figura 185, é determinado por apenas dois pontos. Esses dois pontos determinam as duas fases do material. A fase elástica é determinada pela tensão de escoamento ( $S_Y$ ) e pelo módulo de elasticidade do material ( $E$ ) e a fase plástica é determinada pela deformação plástica e pelo coeficiente de encruamento ( $H$ ). Para  $H = 99,9\%E$ , o modelo bilinear simula uma

análise linear a partir de uma análise incremental. Para  $H = 1\%E$ , o modelo bilinear simula o caso de um material perfeitamente plástico. Para casos intermediários,  $99,9\%E > H > 1\%E$ , os efeitos do encruamento podem ser simulados. É importante enfatizar que a situação com  $H = 0$ , que seria a simulação real do caso de um material perfeitamente plástico, gera dificuldades adicionais de convergência da análise. Por esses problemas adicionais não acontecerem para a situação em que  $H = 1\%E$  e por esse valor ser bem próximo de  $H = 0$ , as zonas plásticas elastoplásticas obtidas para  $H = 1\%E$  são comparadas com as zonas plásticas lineares elásticas corrigidas. Outras informações necessárias para a realização de uma análise não linear são apresentadas na próxima seção

## 7.2. Parâmetros de controle da análise não linear

A utilização dos parâmetros de controle de uma análise não linear, como o incremento de carga e deslocamento, o número máximo de iteração e o controle de erro, são bem explicados no manual eletrônico do ANSYS (2001). Nesse manual estão detalhados todos os procedimentos que devem ser feitos para se realizar uma análise não linear. Além disso, o manual já fornece dicas sobre quais valores esses parâmetros devem ter para que se possa modelar o caso de um material com pouco encruamento. Independentemente dos parâmetros utilizados, o ANSYS (2001) indica a convergência da solução tanto em termos de deslocamento quanto em termos de força. Essa indicação é feita a partir de um gráfico, conforme mostra a Figura 186.

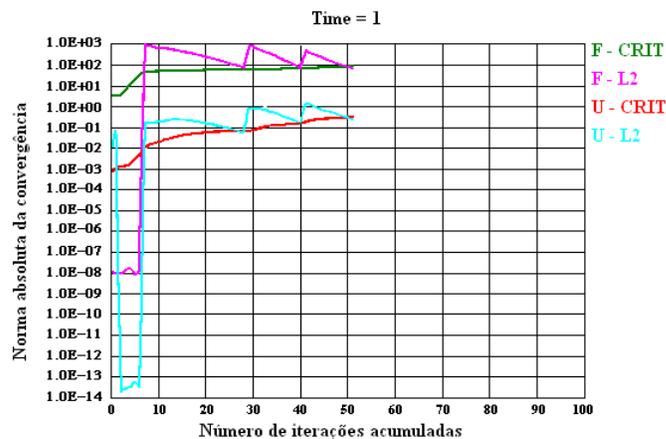


Figura 186 – Gráfico que indica a convergência da análise feita pelo ANSYS (2001) – adaptada de ANSYS (2001).

É importante ressaltar que todas as zonas plásticas mostradas nas próximas seções satisfizeram o critério de convergência utilizado pelo programa ANSYS (2001), conforme mostra a Figura 186.

### 7.3. Placa retangular sob tração com uma trinca central – análise não linear

Este exemplo pode ser visualizado com mais detalhe na Figura 19. Seis valores de  $\sigma_r/S_Y$  são utilizados: 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7 e 0,8. Dois valores de  $a/W$  são usados: 0,10 e 0,15. Quinze valores do coeficiente  $H$  são testados, que são: 1% $E$ , 3% $E$ , 5% $E$ , 7% $E$ , 9% $E$ , 10% $E$ , 20% $E$ , 30% $E$ , 40% $E$ , 50% $E$ , 60% $E$ , 70% $E$ , 80% $E$ , 90% $E$  e 99,9% $E$ .

Com todas essas informações diferentes é possível avaliar os efeitos de  $\sigma_r/S_Y$ , de  $a/W$  e do encruamento no tamanho e forma das zonas plásticas obtidas a partir de uma análise não linear  $(p_{M,a/W=C1,H=C2\%E}^{EP-MEF})$ , em que  $C1$  indica a relação  $a/W$  adotada e  $C2$  indica a porcentagem que relaciona o coeficiente  $H$  com o  $E$ . Dessa maneira, esta seção é dividida em duas subseções. A primeira subseção mostra o efeito do encruamento ( $H$ ) e da relação  $\sigma_r/S_Y$  nas zonas plásticas para os dois estados planos e para as duas relações  $a/W$  adotadas. A segunda subseção mostra os efeitos de  $a/W$  para todos os valores de  $\sigma_r/S_Y$  utilizados. Além disso, essa subseção mostra que para  $H = 99,9\%E$  as zonas plásticas  $p_{M,a/W=C1,H=99,9\%E}^{EP-MEF}$  elastoplásticas reproduzem as estimativas lineares elásticas obtidas numericamente  $(p_{M}^{LE-MHEC})$  e compara as estimativas numéricas lineares elásticas corrigidas  $(p_{M}^{LE-MHEC+eq})$  com as estimativas elastoplásticas  $(p_{M,a/W=C1,H=1\%E}^{EP-MEF})$ .

#### 7.3.1. Efeito do encruamento nas zonas plásticas elastoplásticas

A Figura 187 mostra as zonas plásticas elastoplásticas  $(p_{M,a/W=C1,H=C2\%E}^{EP-MEF})$  para os quinze valores de  $H$  estudados para o caso de tensão plana para  $a/W = 0,10$  e para  $\sigma_r/S_Y = 0,2$ .

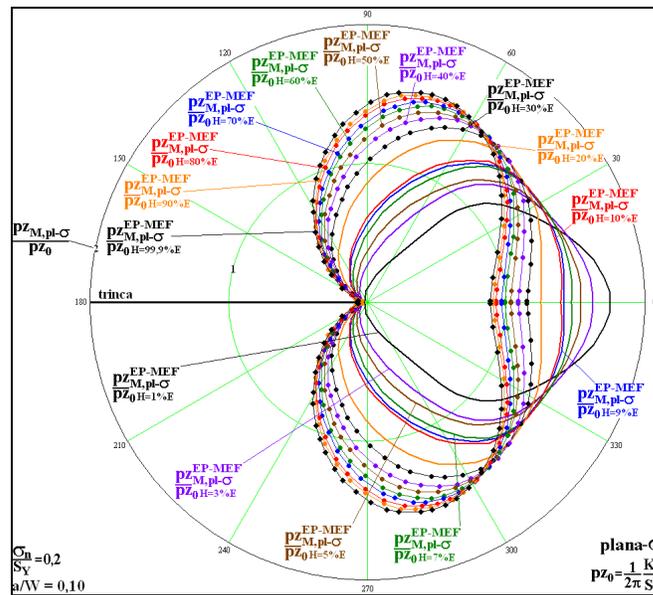


Figura 187 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pZ_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana, para  $\sigma_n/S_y = 0,2$ , com  $a/W = 0,10$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados.

A Figura 188 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para os quinze valores de  $H$  estudados para o caso de tensão plana com  $a/W = 0,15$  e com  $\sigma_n/S_y = 0,2$ .

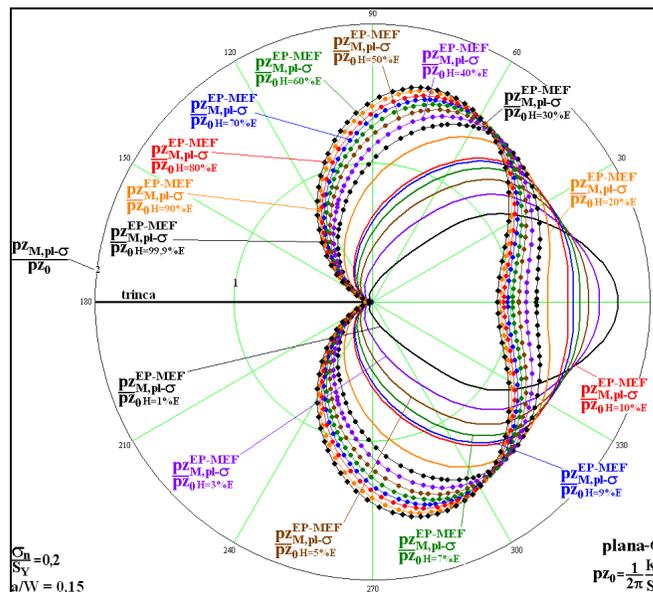


Figura 188 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pZ_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana, para  $\sigma_n/S_y = 0,2$ , com  $a/W = 0,15$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados.

A Figura 189 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para os valores de  $H$  estudados para o caso de tensão plana com  $a/W = 0,10$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

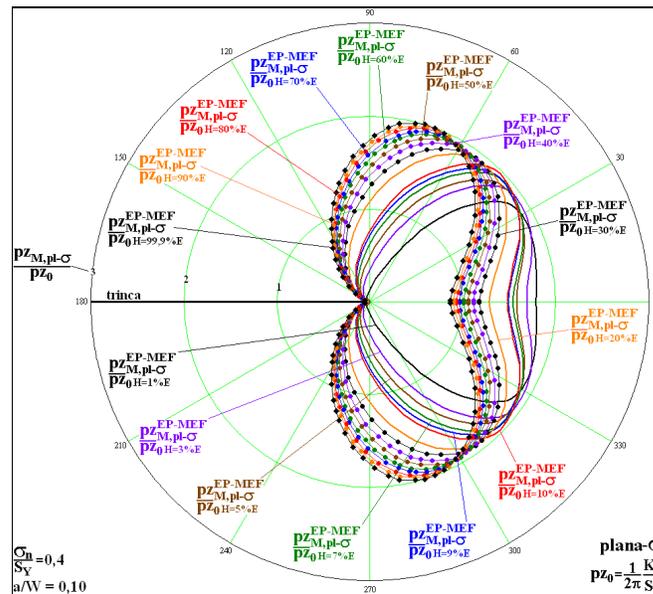


Figura 189 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p_z^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ , com  $a/W = 0,10$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados.

A Figura 190 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para os valores de  $H$  estudados para o caso de tensão plana com  $a/W = 0,15$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

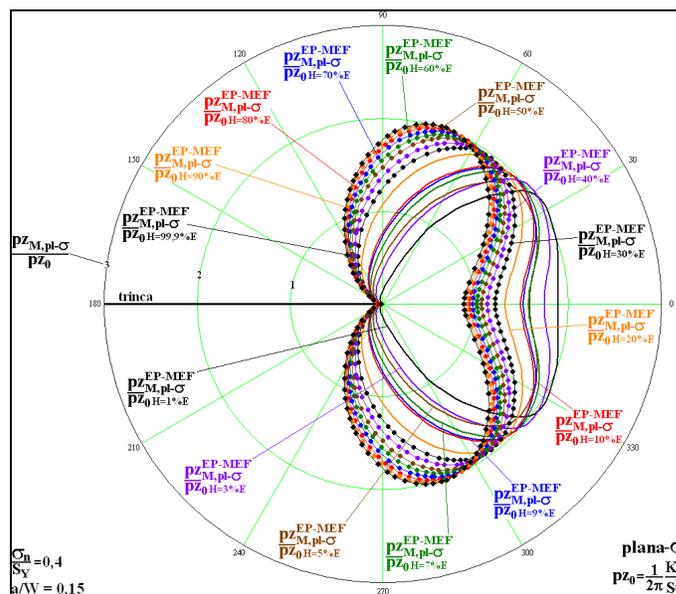


Figura 190 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p_z^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ , com  $a/W = 0,15$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados.

A Figura 191 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para os valores de  $H$  estudados para o caso de tensão plana com  $a/W = 0,10$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .

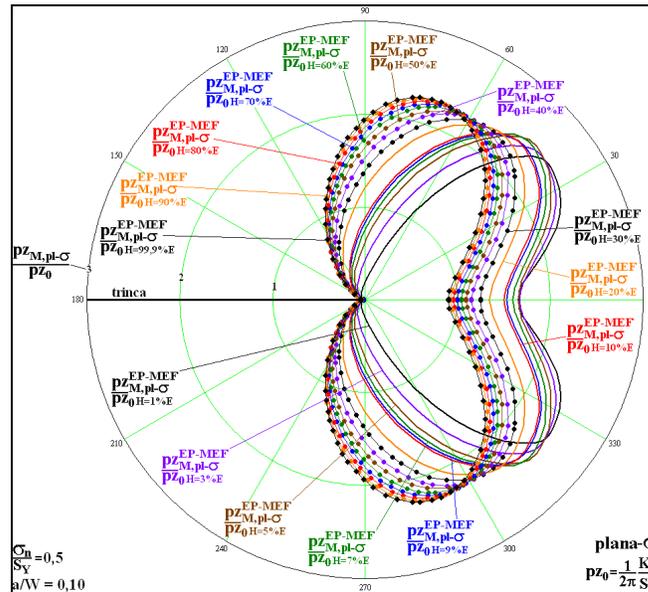


Figura 191 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pz_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ , com  $a/W = 0,10$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados.

A Figura 192 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para os valores de  $H$  estudados para o caso de tensão plana com  $a/W = 0,15$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .

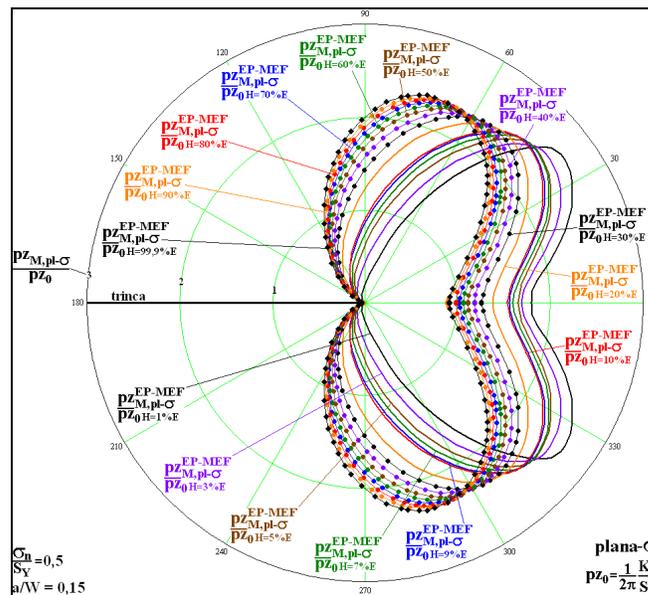


Figura 192 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pz_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ , com  $a/W = 0,15$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados.

A Figura 193 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para os valores de  $H$  estudados para o caso de tensão plana com  $a/W = 0,10$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ .

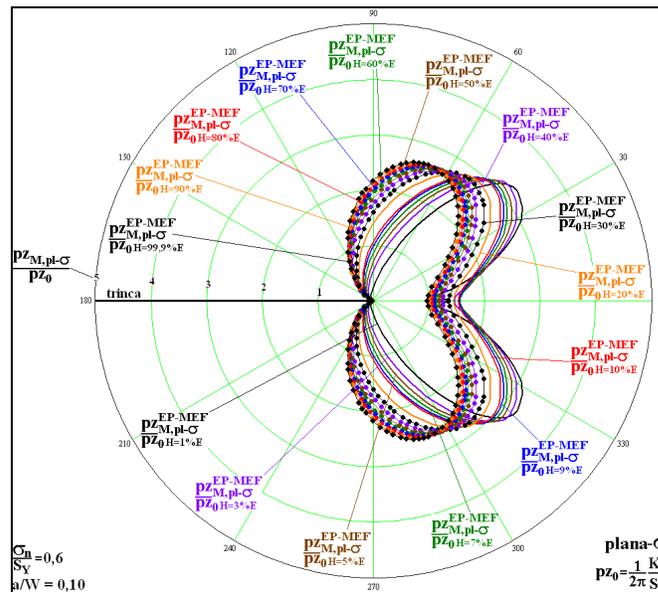


Figura 193 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pz_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ , com  $a/W = 0,10$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados.

A Figura 194 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para os valores de  $H$  estudados para o caso de tensão plana com  $a/W = 0,15$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ .

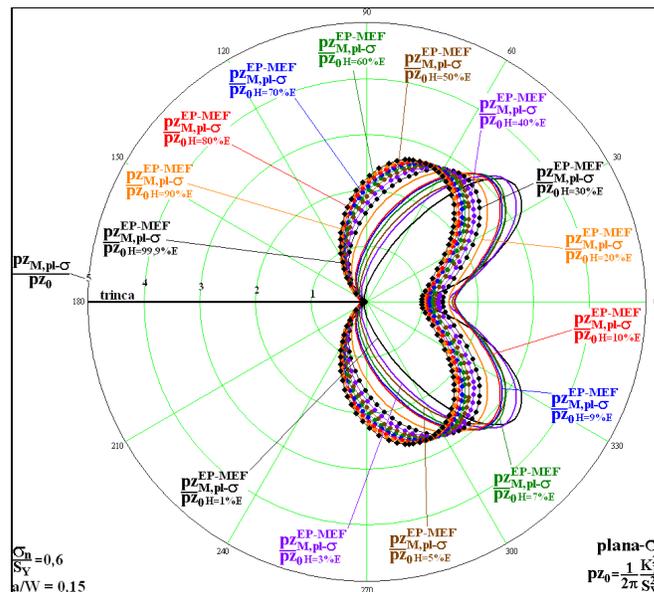


Figura 194 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pz_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ , com  $a/W = 0,15$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados.

A Figura 195 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para os valores de  $H$  estudados para o caso de tensão plana com  $a/W = 0,10$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ .

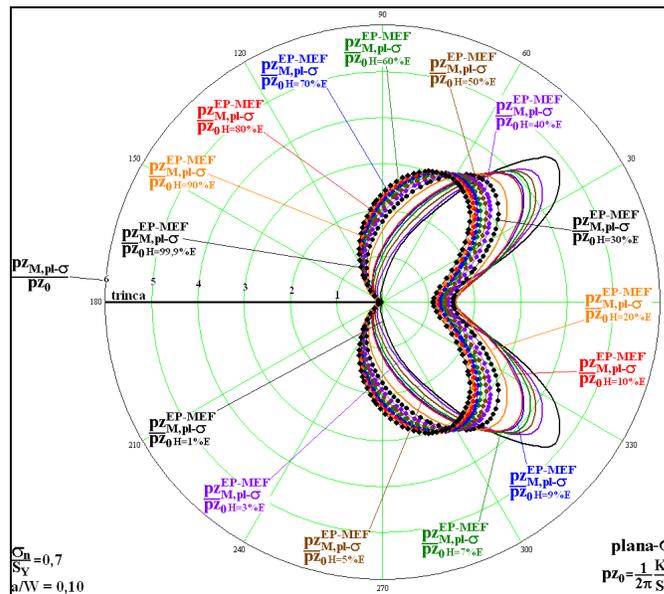


Figura 195 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pz_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ , com  $a/W = 0,10$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados.

A Figura 196 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para os valores de  $H$  estudados para o caso de tensão plana com  $a/W = 0,15$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ .

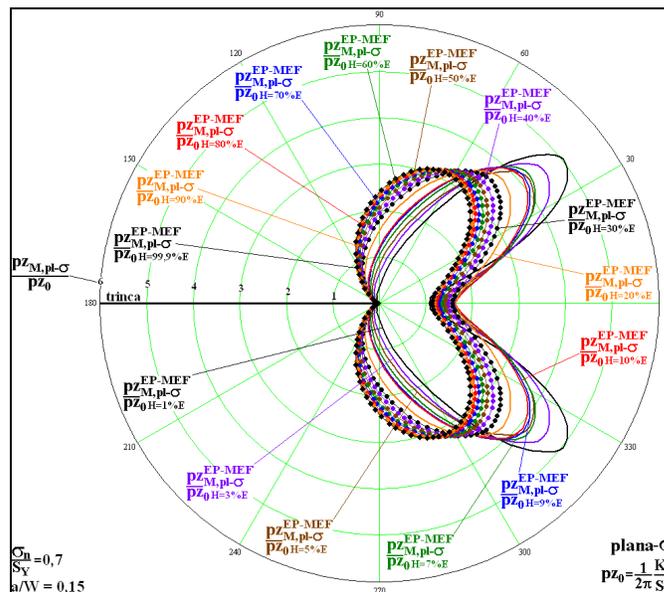


Figura 196 – Estimativas numérica feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pz_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ , com  $a/W = 0,15$  e com os valores de coeficiente de encruamento  $H$  adotados.

A Figura 197 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para os valores de  $H$  estudados para o caso de tensão plana com  $a/W = 0,10$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ .

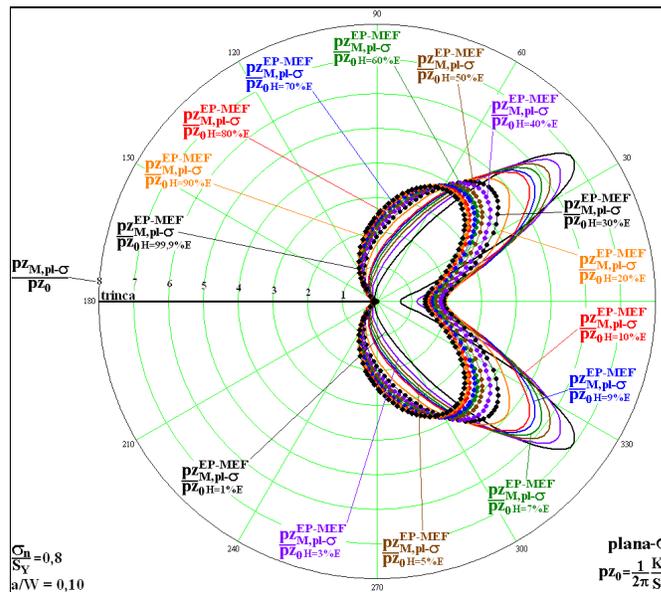


Figura 197 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pz_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ , com  $a/W = 0,10$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados.

A Figura 198 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para os valores de  $H$  estudados para o caso de tensão plana com  $a/W = 0,15$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ .

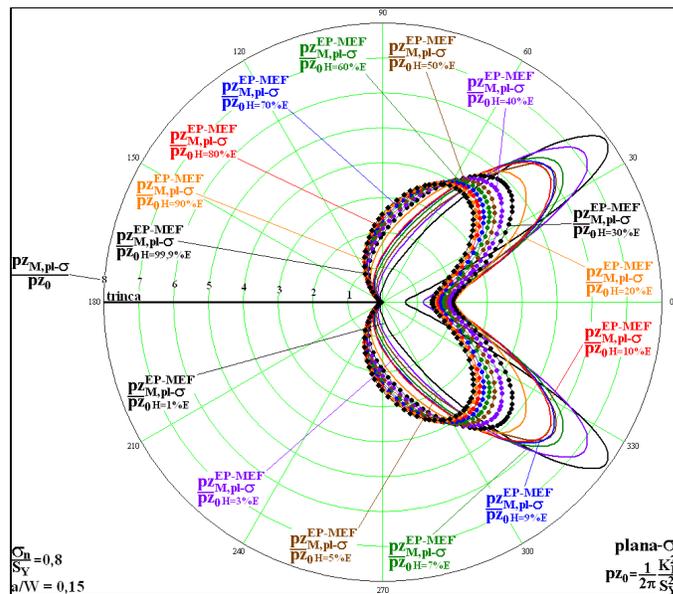


Figura 198 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pz_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ , com  $a/W = 0,15$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados.

A Figura 199 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para os valores de  $H$  estudados para o caso de deformação plana com  $a/W = 0,10$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ .

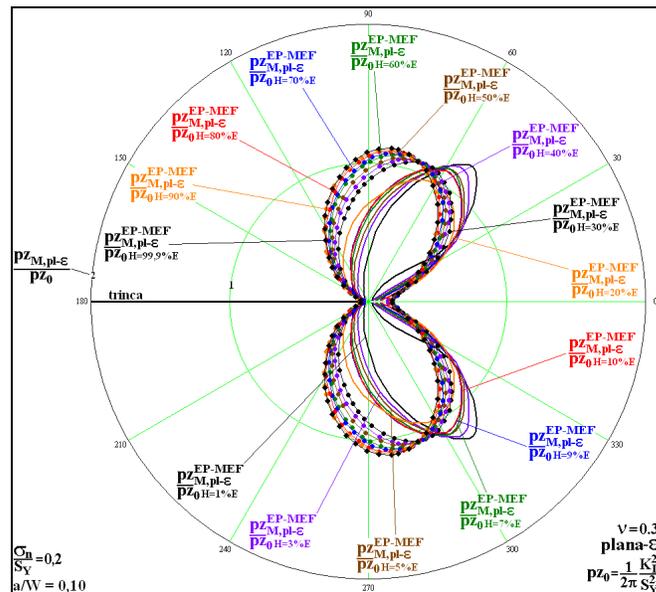


Figura 199 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pz_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ , com  $a/W = 0,10$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados.

A Figura 200 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para os valores de  $H$  estudados para o caso de deformação plana com  $a/W = 0,15$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ .

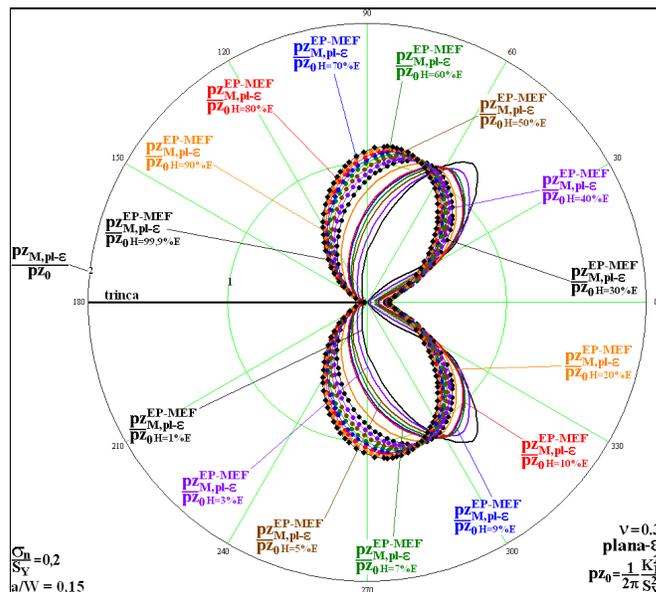


Figura 200 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pz_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$ , com  $a/W = 0,15$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados.

A Figura 201 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para os valores de  $H$  estudados para o caso de deformação plana com  $a/W = 0,10$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

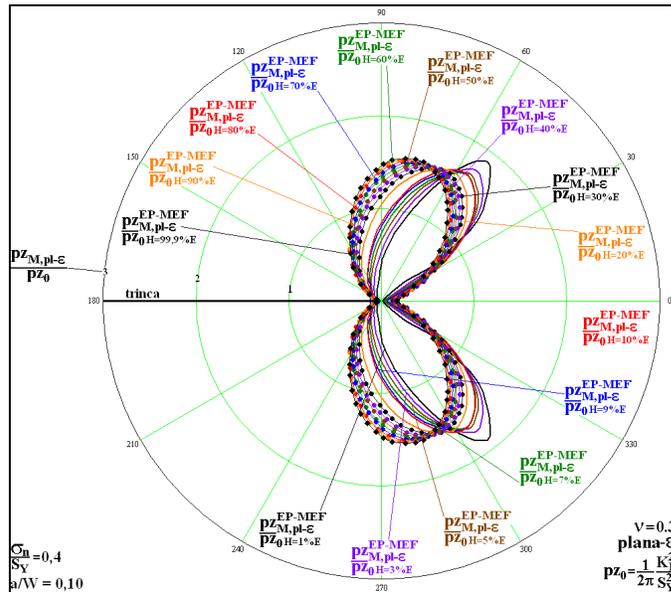


Figura 201 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pz_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ , com  $a/W = 0,10$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados.

A Figura 202 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para os valores de  $H$  estudados para o caso de deformação plana com  $a/W = 0,15$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

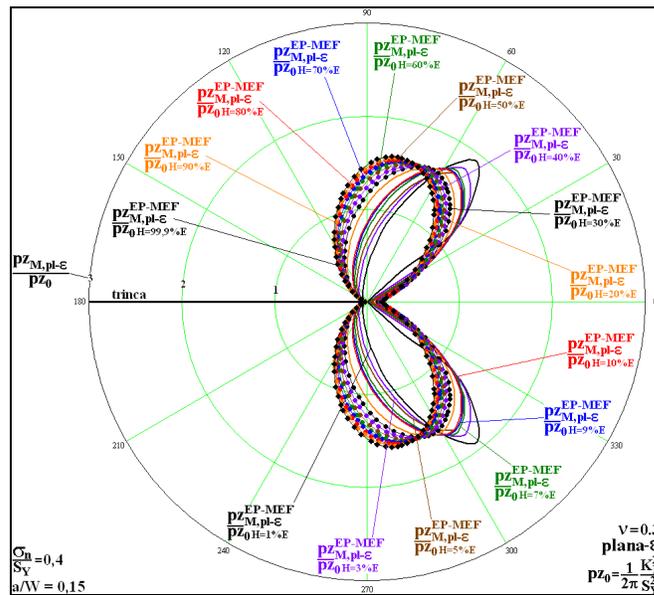


Figura 202 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pz_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ , com  $a/W = 0,15$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados.

A Figura 203 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para os valores de  $H$  estudados para o caso de deformação plana com  $a/W = 0,10$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .

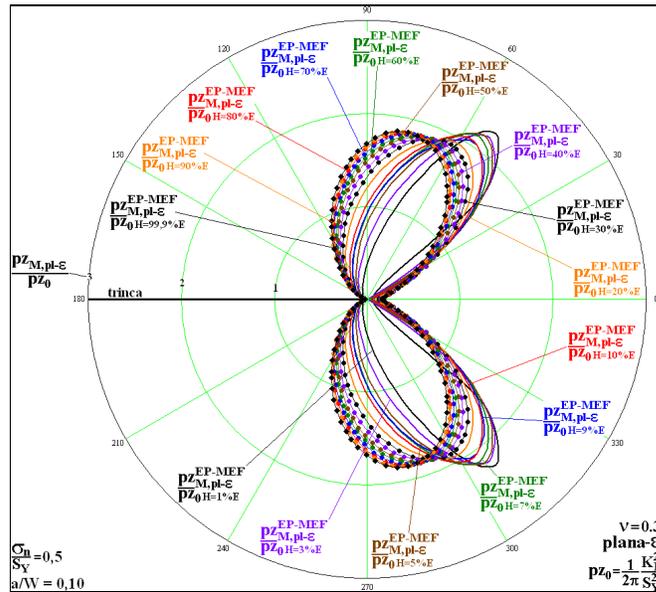


Figura 203 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pz_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ , com  $a/W = 0,10$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados.

A Figura 204 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para os valores de  $H$  estudados para o caso de deformação plana com  $a/W = 0,15$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ .

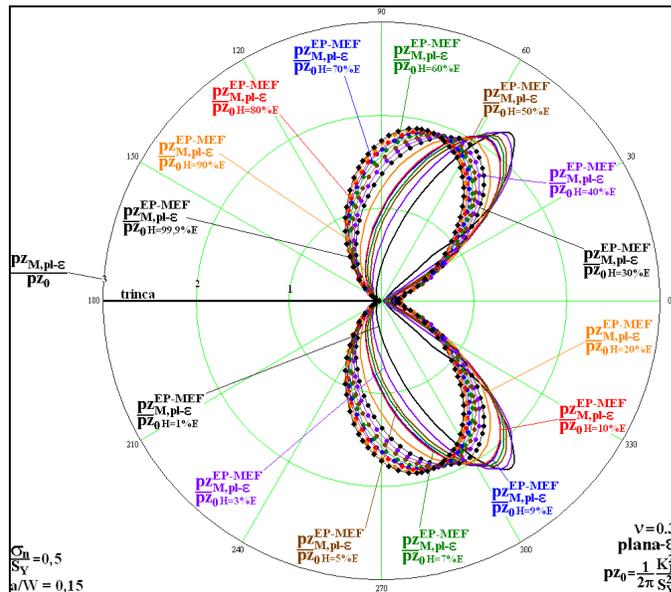


Figura 204 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pz_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$ , com  $a/W = 0,15$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados.

A Figura 205 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para os valores de  $H$  estudados para o caso de deformação plana com  $a/W = 0,10$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ .

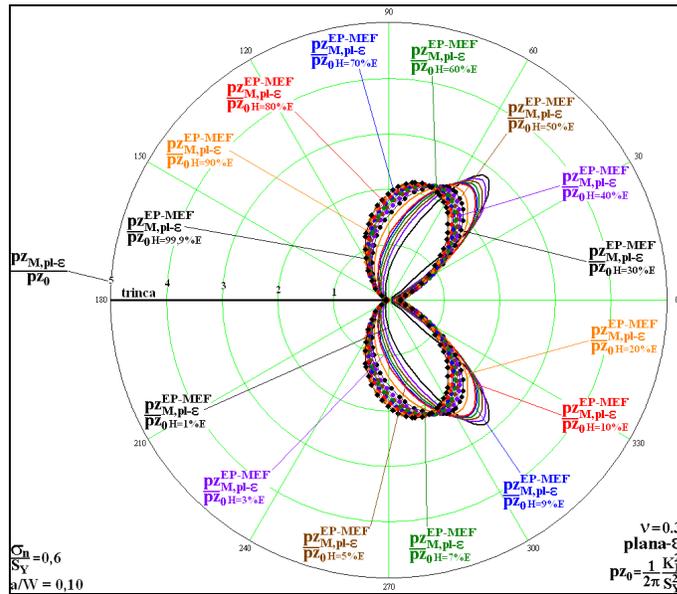


Figura 205 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pz_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ , com  $a/W = 0,10$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados.

A Figura 206 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para os valores de  $H$  estudados para o caso de deformação plana com  $a/W = 0,15$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ .

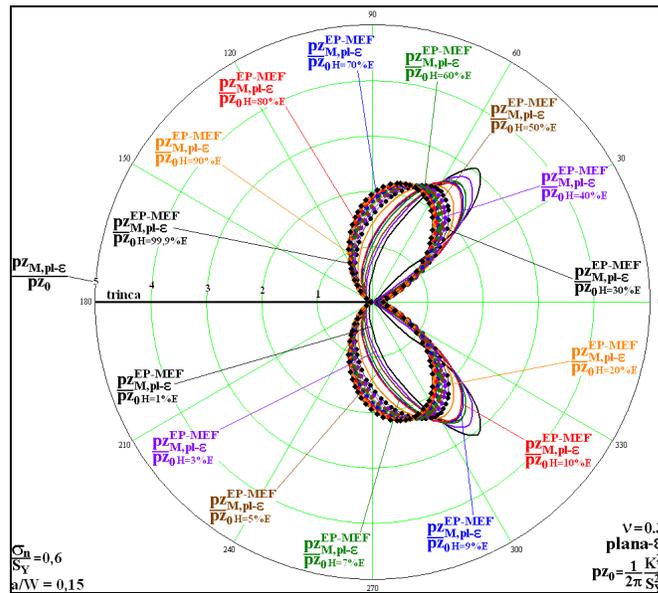


Figura 206 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pz_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$ , com  $a/W = 0,15$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados.

A Figura 207 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para os valores de  $H$  estudados para o caso de deformação plana com  $a/W = 0,10$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ .

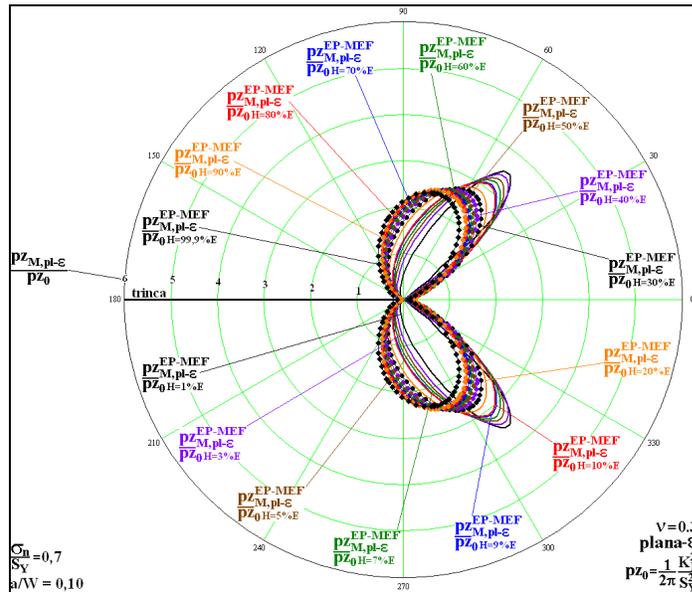


Figura 207 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pz_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ , com  $a/W = 0,10$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados.

A Figura 208 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para os valores de  $H$  estudados para o caso de deformação plana com  $a/W = 0,15$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ .

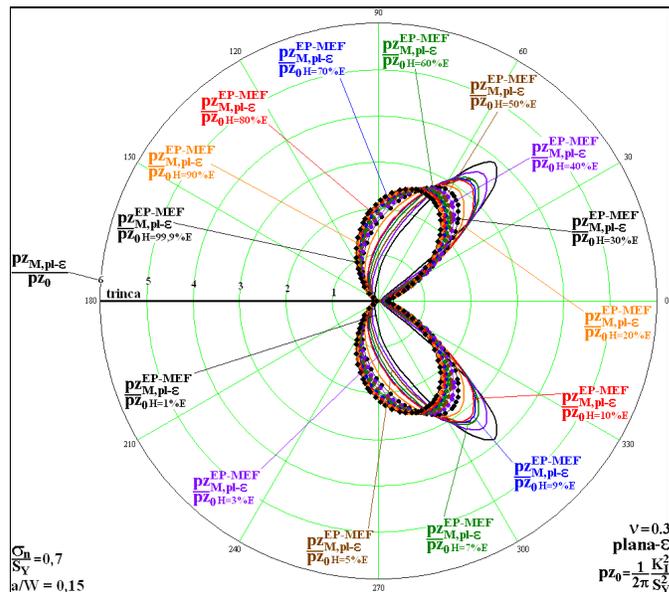


Figura 208 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pz_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$ , com  $a/W = 0,15$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados.

A Figura 209 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para os valores de  $H$  estudados para o caso de deformação plana com  $a/W = 0,10$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ .

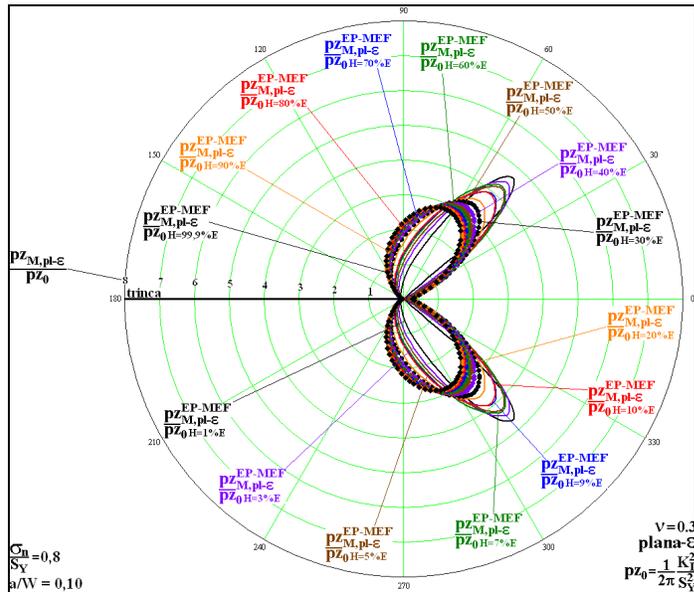


Figura 209 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pz_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ , com  $a/W = 0,10$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados.

A Figura 210 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para os valores de  $H$  estudados para o caso de deformação plana com  $a/W = 0,15$  e com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ .

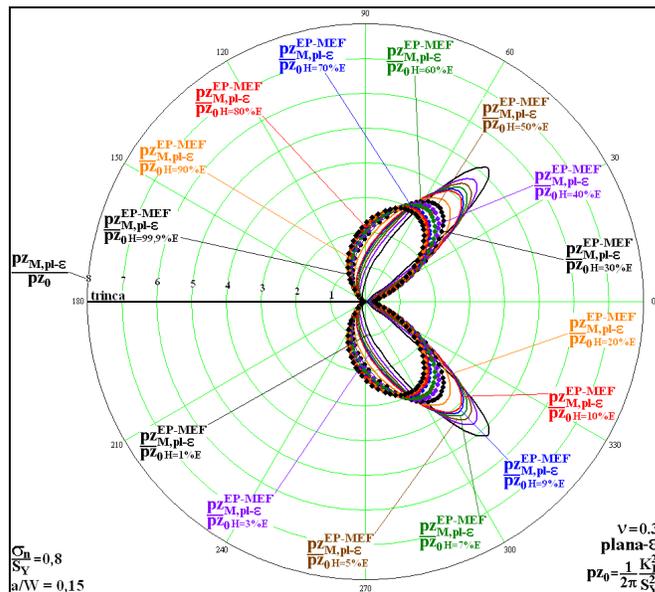


Figura 210 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pz_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana, para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$ , com  $a/W = 0,15$  e com os valores do coeficiente de encruamento  $H$  adotados.

As 24 figuras anteriores mostram os efeitos do encruamento na estimativa das zonas plásticas obtidas a partir de uma análise não linear para duas relações  $a/W$  e para os dois estados planos. Analisando essas figuras, dois fatos podem ser observados. Primeiro, a mudança do encruamento de  $H = 99,9\%E$  até a  $H = 1\%E$  gera uma transição suave na estimativa das zonas plásticas. Esse fato reforça o uso do procedimento numérico utilizado, pois não há nenhuma mudança brusca nos resultados, o que poderia indicar algum problema de convergência numérica. O segundo fato que deve ser comentado e que é mais fácil de ser observado para os casos em tensão plana, é que a mudança de  $H$  parece alterar apenas a forma das zonas plásticas, sendo que para baixos níveis de  $\sigma_n/S_Y$  e para baixos valores de  $H$  (materiais próximos do modelo perfeitamente plásticos) as zonas plásticas crescem na direção paralela ao plano da trinca. Ao se manter os valores de  $H$  baixos, as zonas plásticas crescem em uma direção em torno de  $45^\circ$  em relação ao plano da trinca à medida que se aumenta o valor de  $\sigma_n/S_Y$ , conforme mostra a Figura 197 e a Figura 198.

A comparação entre as zonas plásticas obtidas por uma análise não linear ( $pZ_{M,a/W=C1,H=C2\%E}^{EP-MEF}$ ) e as zonas plásticas corrigidas ( $pZ_M^{LE-MHEC+eq}$ ), assim como um estudo sobre os efeitos do parâmetro geométrico  $a/W$ , são feitos na próxima subseção.

### **7.3.2. Efeito do parâmetro $a/W$ nas zonas plásticas elastoplásticas e comparação entre essas zonas plásticas com as zonas plásticas corrigidas**

Esta subseção apresenta doze figuras, seis que mostram o caso em tensão plana e seis que mostram o caso em deformação plana. Para cada figura, fixa-se o valor  $\sigma_n/S_Y$  e se mostra as zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 1\%E$  e  $H = 99,9\%E$  para os dois valores de  $a/W$  estudados (0,10 e 0,15). Também se mostra, em cada figura, as zonas plásticas lineares elásticas obtidas pelo MHEC ( $pZ_M^{LE-MHEC}$ ) e as zonas plásticas corrigidas em que se considera um material perfeitamente plástico ( $pZ_M^{LE-MHEC+eq}$ ). Dessa forma, a Figura 211 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  para o caso em tensão plana e para os valores de  $H$  iguais à  $1\%E$  e  $99,9\%E$ .

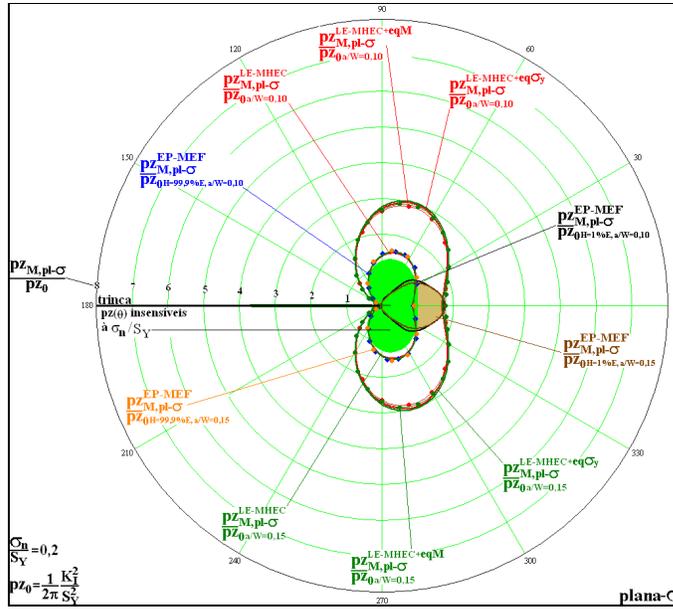


Figura 211 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 99,9\%E$  e  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $pZ_M^{LE-MHEC}$  e  $pZ_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de tensão para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  e com  $a/W = 0,10$  e  $a/W = 0,15$ .

A Figura 212 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  para o caso em tensão plana e para os valores de  $H$  iguais à  $1\%E$  e  $99,9\%E$ .

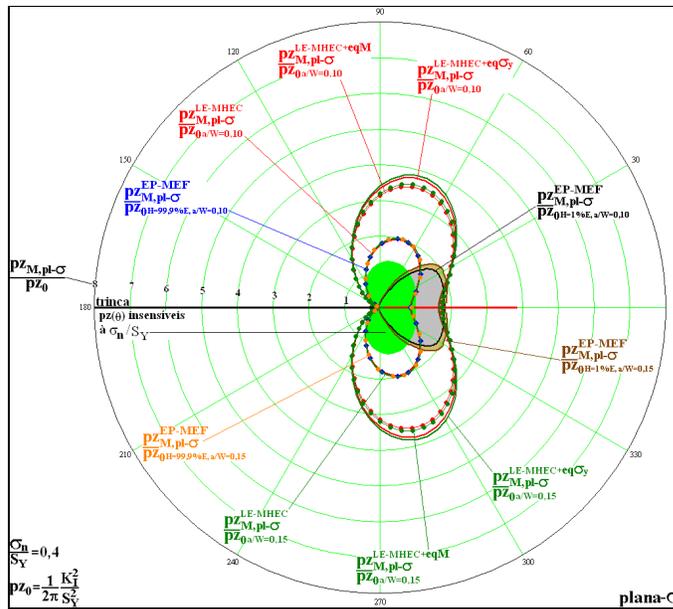


Figura 212 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 99,9\%E$  e  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $pZ_M^{LE-MHEC}$  e  $pZ_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de tensão para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  e com  $a/W = 0,10$  e  $a/W = 0,15$ .

A Figura 213 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$  para o caso em tensão plana e para os valores de  $H$  iguais à  $1\%E$  e  $99,9\%E$ .

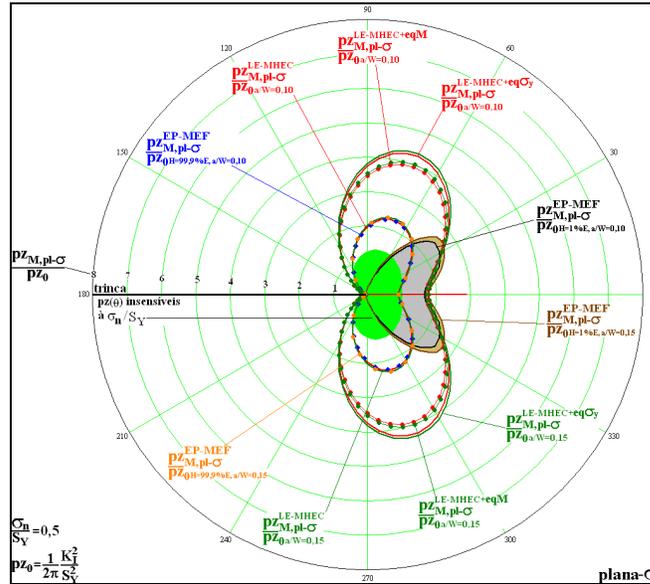


Figura 213 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 99,9\%E$  e  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $pZ_M^{LE-MHEC}$  e  $pZ_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de tensão para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$  e com  $a/W = 0,10$  e  $a/W = 0,15$ .

A Figura 214 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  para o caso em tensão plana e para os valores de  $H$  iguais à  $1\%E$  e  $99,9\%E$ .

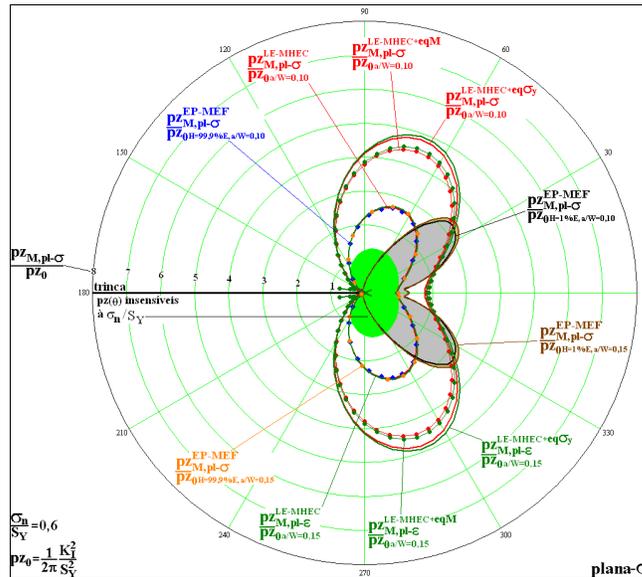


Figura 214 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 99,9\%E$  e  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $pZ_M^{LE-MHEC}$  e  $pZ_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de tensão para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  e com  $a/W = 0,10$  e  $a/W = 0,15$ .

A Figura 215 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  para o caso em tensão plana e para os valores de  $H$  iguais à  $1\%E$  e  $99,9\%E$ .

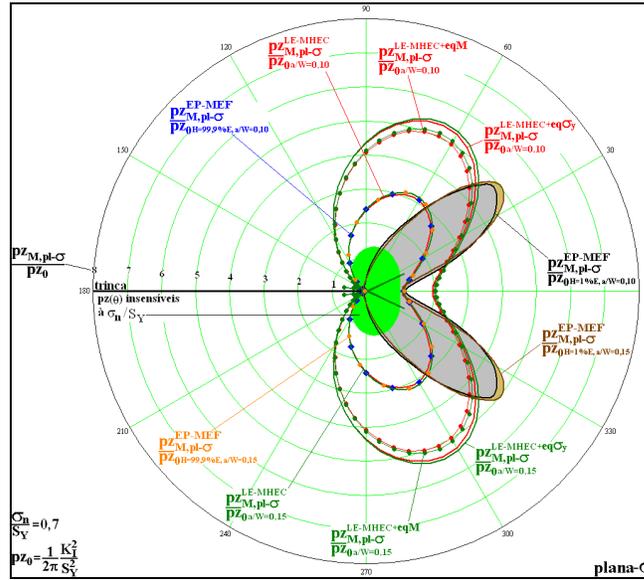


Figura 215 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 99,9\%E$  e  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $pz_M^{LE-MHEC}$  e  $pz_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de tensão para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  e com  $a/W = 0,10$  e  $a/W = 0,15$ .

A Figura 216 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  para o caso em tensão plana e para os valores de  $H$  iguais à  $1\%E$  e  $99,9\%E$ .

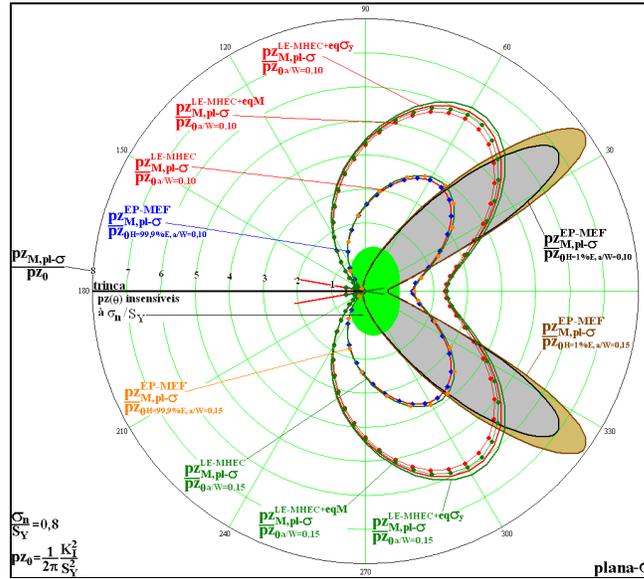


Figura 216 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 99,9\%E$  e  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $pz_M^{LE-MHEC}$  e  $pz_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de tensão para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  e com  $a/W = 0,10$  e  $a/W = 0,15$ .

A Figura 217 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para  $\sigma_r/S_Y = 0,2$  para o caso em deformação plana e para os valores de  $H$  iguais à  $1\%E$  e  $99,9\%E$ .

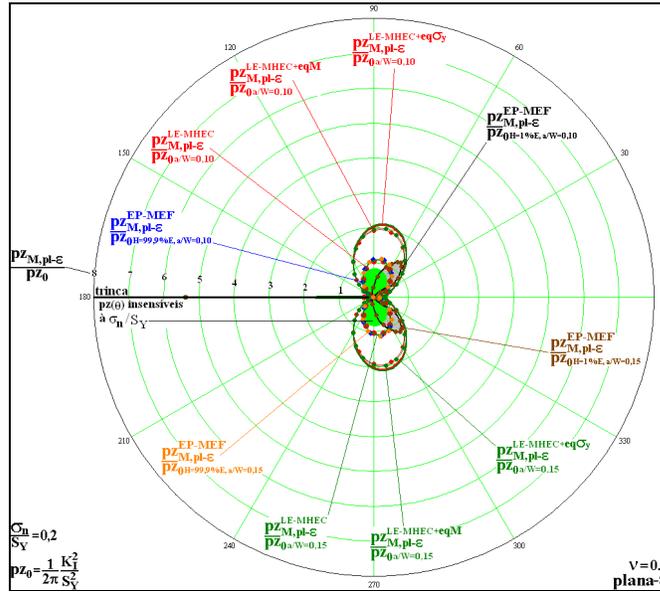


Figura 217 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 99,9\%E$  e  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $pZ_M^{LE-MHEC}$  e  $pZ_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de deformação para  $\sigma_r/S_Y = 0,2$  e com  $a/W = 0,10$  e  $a/W = 0,15$ .

A Figura 218 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para  $\sigma_r/S_Y = 0,4$  para o caso em deformação plana e para os valores de  $H$  iguais à  $1\%E$  e  $99,9\%E$ .

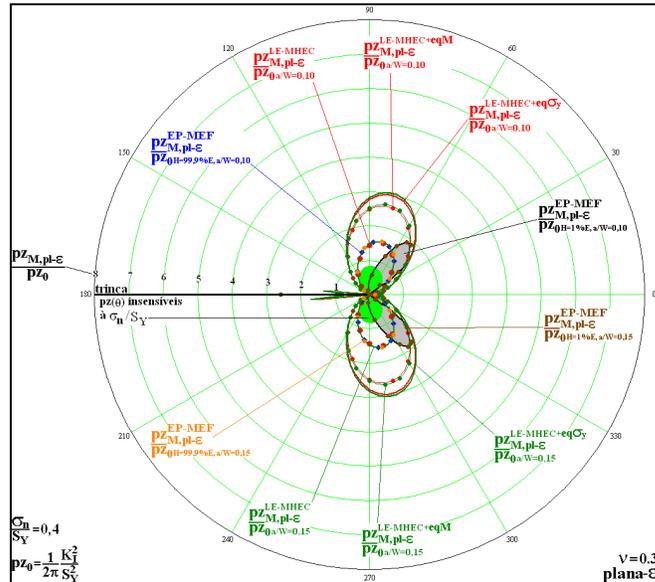


Figura 218 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 99,9\%E$  e  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $pZ_M^{LE-MHEC}$  e  $pZ_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de deformação para  $\sigma_r/S_Y = 0,4$  e com  $a/W = 0,10$  e  $a/W = 0,15$ .

A Figura 219 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para  $\sigma_r/S_Y = 0,5$  para o caso em deformação plana e para os valores de  $H$  iguais à  $1\%E$  e  $99,9\%E$ .

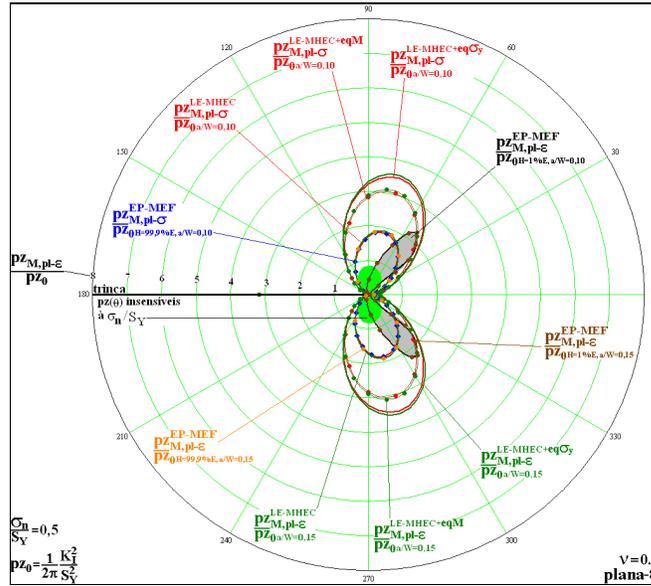


Figura 219 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 99,9\%E$  e  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $pZ_M^{LE-MHEC}$  e  $pZ_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de deformação para  $\sigma_r/S_Y = 0,5$  e com  $a/W = 0,10$  e  $a/W = 0,15$ .

A Figura 220 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para  $\sigma_r/S_Y = 0,6$  para o caso em deformação plana e para os valores de  $H$  iguais à  $1\%E$  e  $99,9\%E$ .

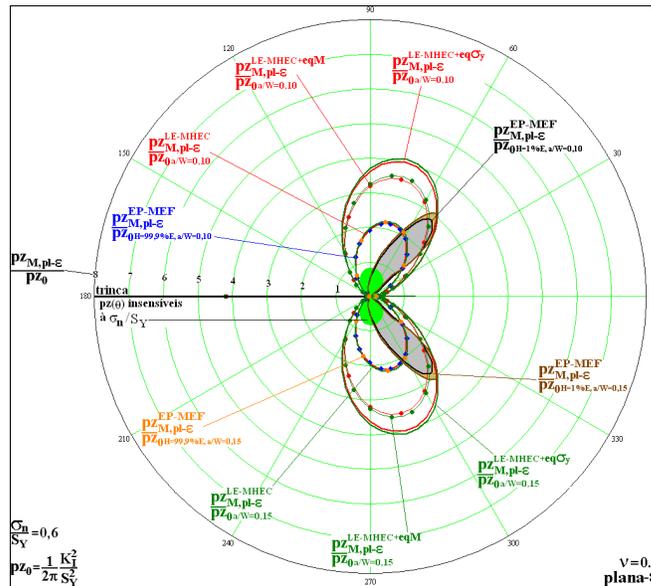


Figura 220 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 99,9\%E$  e  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $pZ_M^{LE-MHEC}$  e  $pZ_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de deformação para  $\sigma_r/S_Y = 0,6$  e com  $a/W = 0,10$  e  $a/W = 0,15$ .

A Figura 221 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para  $\sigma_r/S_Y = 0,7$  para o caso em deformação plana e para os valores de  $H$  iguais à  $1\%E$  e  $99,9\%E$ .

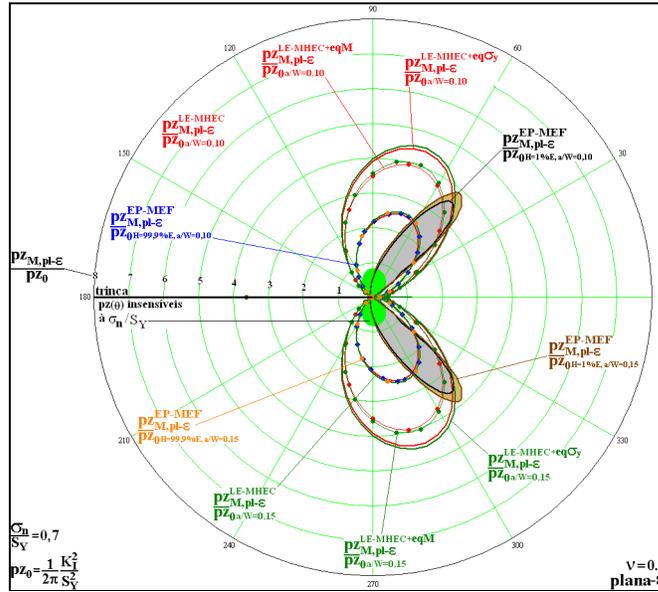


Figura 221 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 99,9\%E$  e  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $pz_M^{LE-MHEC}$  e  $pz_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de deformação para  $\sigma_r/S_Y = 0,7$  e com  $a/W = 0,10$  e  $a/W = 0,15$ .

A Figura 222 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para  $\sigma_r/S_Y = 0,8$  para o caso em deformação plana e para os valores de  $H$  iguais à  $1\%E$  e  $99,9\%E$ .

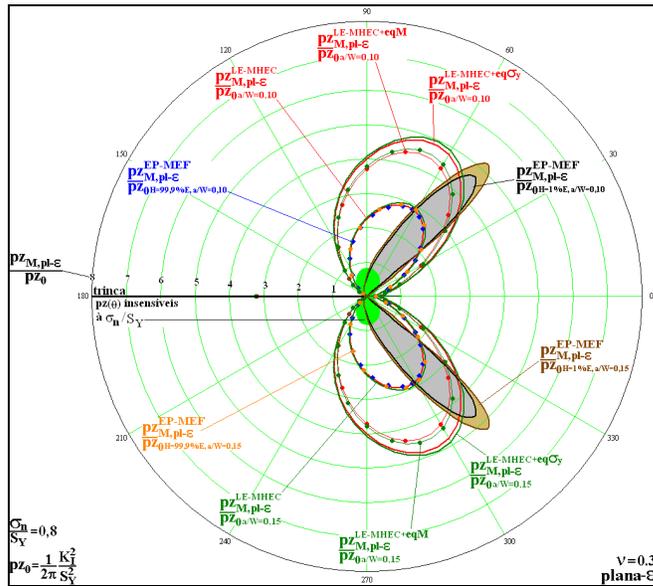


Figura 222 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 99,9\%E$  e  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $pz_M^{LE-MHEC}$  e  $pz_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de deformação para  $\sigma_r/S_Y = 0,8$  e com  $a/W = 0,10$  e  $a/W = 0,15$ .

Ao se analisar as doze figuras anteriores, é possível perceber que para um valor fixo de  $\sigma_n/S_Y$ , as zonas plásticas para  $a/W = 0,15$  são maiores que as zonas plásticas obtidas para  $a/W = 0,10$ . Essa diferença aumenta a medida que se aumenta o valor de  $\sigma_n/S_Y$  e ocorre para as zonas plásticas  $p z_M^{LE-MHEC}$ , para as zonas plásticas  $p z_M^{LE-MHEC+eq}$ , e para as zonas plásticas elastoplásticas  $(p z_{M,a/W,H}^{EP-MEF})$ .

Em relação a comparação entre as zonas plásticas  $p z_M^{LE-MHEC+eq}$  e as zonas plásticas  $p z_{M,a/W,H}^{EP-MEF}$ , é possível perceber que para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y \leq 0,5$  as zonas plásticas  $p z_M^{LE-MHEC+eq}$  são praticamente iguais às zonas plásticas  $p z_{M,a/W,H}^{EP-MEF}$  para  $\theta = 0^\circ$ , conforme foi previsto por Irwin (1958). A diferença é que Irwin utilizou o campo de tensões linear elástico gerado por  $K_I$  e as zonas plásticas corrigidas nas figuras anteriores foram obtidas pelo campo de tensões linear elástico gerado numericamente pelo MHEC. Para direções diferentes de  $\theta = 0^\circ$ , percebe-se que a diferença entre as estimativas elastoplásticas e as estimativas lineares elásticas corrigidas são consideravelmente grandes.

Conforme visto na subseção 7.3.1., para  $H = 1\%E$ , as zonas plásticas, sob tensão plana, crescem em uma direção em torno de  $45^\circ$  em relação ao plano da trinca à medida que se aumenta o valor de  $\sigma_n/S_Y$ .

#### 7.4. Placa retangular com uma trinca central sob flexo tração

Este exemplo pode ser visualizado com mais detalhe na Figura 121. Seis valores de  $\sigma_n/S_Y$  são utilizados: 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7 e 0,8. Dois valores de  $a/W$  são usados: 0,05 e 0,40 com o tamanho da trinca ( $2a$ ) igual a 1 cm. Sete valores do coeficiente  $H$  são testados, que são:  $1\%E$ ,  $3\%E$ ,  $5\%E$ ,  $7\%E$ ,  $9\%E$ ,  $20\%E$  e  $40\%E$ .

Com todas essas informações diferentes é possível avaliar os efeitos de  $\sigma_n/S_Y$ , de  $a/W$  e do encruamento no tamanho e forma das zonas plásticas obtidas a partir de uma análise não linear  $(p z_{M,a/W=C1,H=C2\%E}^{EP-MEF})$ , em que  $C1$  indica a relação  $a/W$  adotada e  $C2$  indica a porcentagem que relaciona o coeficiente  $H$  com o  $E$ .

Dessa maneira, esta seção é dividida em duas subseções. A primeira subseção mostra o efeito do encruamento ( $H$ ) e da relação  $\sigma_n/S_Y$  nas zonas plásticas para os dois estados planos e para as duas relações  $a/W$  adotadas. A segunda subseção mostra os efeitos de  $a/W$  para todos os valores de  $\sigma_n/S_Y$  utilizados. A estimativa linear elástica é obtida numericamente a partir do MHEC ( $pZ_M^{LE-MHEC}$ ). As estimativas numéricas lineares elásticas corrigidas ( $pZ_M^{LE-MHEC+eq}$ ) que são obtidas a partir do uso do MHEC são comparadas com as estimativas elastoplásticas ( $pZ_{M,a/W=C1,H=1\%E}^{EP-MEF}$ ) obtidas a partir do ANSYS (2001).

**7.4.1. Efeito do encruamento nas zonas plásticas elastoplásticas**

A Figura 223 mostra as zonas plásticas elastoplásticas ( $pZ_{M,a/W=C1,H=C2\%E}^{EP-MEF}$ ) para os sete valores de  $H$  estudados para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  e  $a/W = 0,05$ .

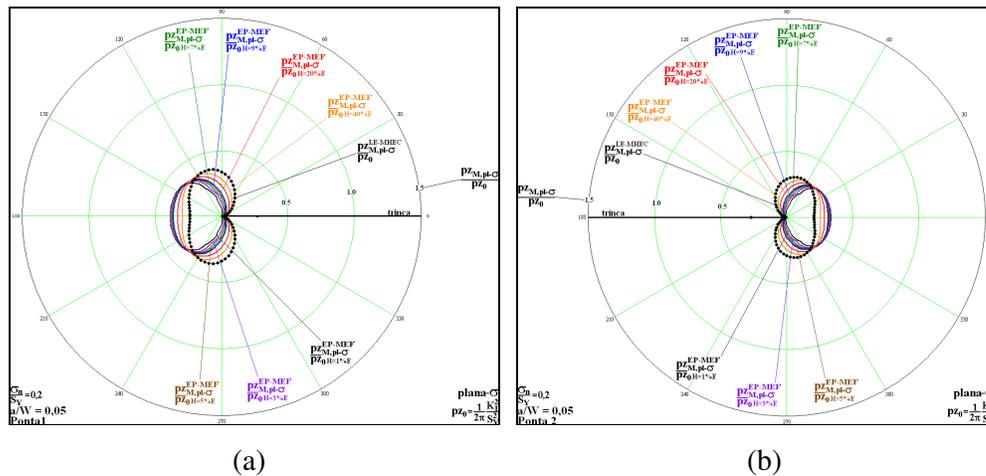


Figura 223 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pZ_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,05$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 224 mostra as zonas plásticas elastoplásticas ( $pZ_{M,a/W=C1,H=C2\%E}^{EP-MEF}$ ) para os sete valores de  $H$  estudados para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  e  $a/W = 0,40$ .

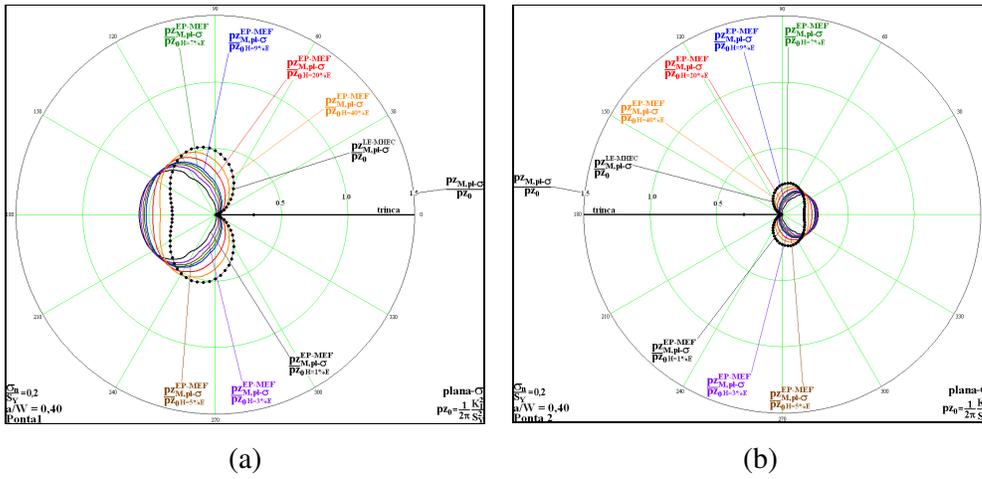


Figura 224 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p_z^M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_y = 0,2$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 225 mostra as zonas plásticas elastoplásticas ( $p_z^M^{EP-MEF}$ ,  $a/W=C1, H=C2\% E$ ) para os sete valores de  $H$  estudados para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_y = 0,4$  e  $a/W = 0,05$ .

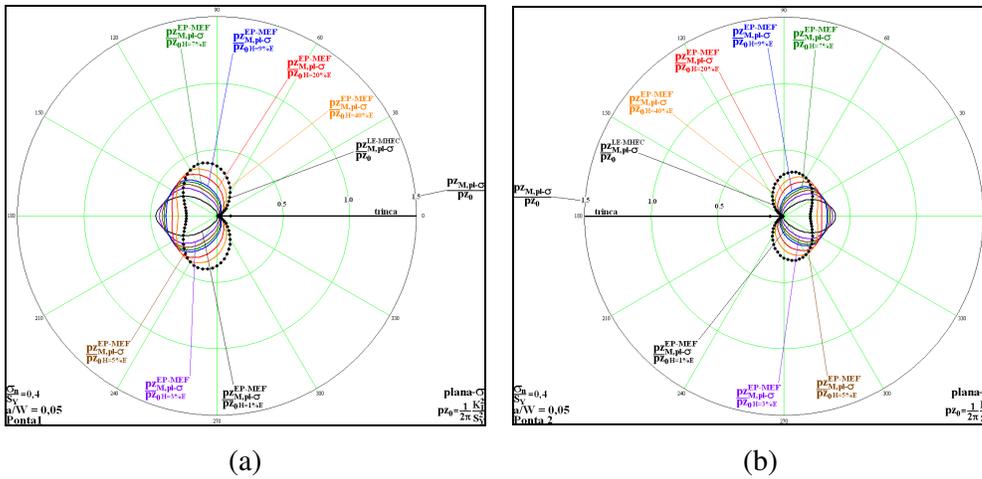


Figura 225 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p_z^M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_y = 0,4$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,05$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 226 mostra as zonas plásticas elastoplásticas ( $p_z^M^{EP-MEF}$ ,  $a/W=C1, H=C2\% E$ ) para os sete valores de  $H$  estudados para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_y = 0,4$  e  $a/W = 0,40$ .

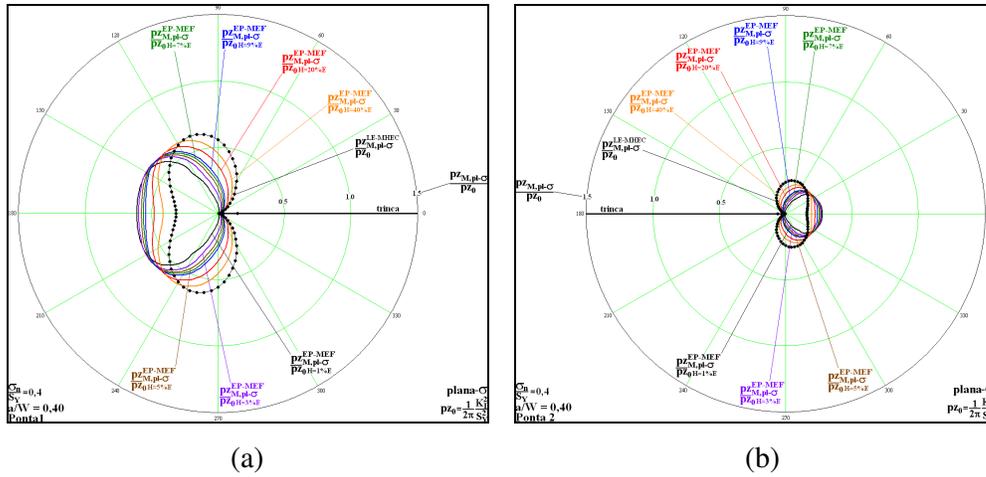


Figura 226 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p_z_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,4$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 227 mostra as zonas plásticas elastoplásticas ( $p_z_{M,a/W=C1,H=C2\%E}$ ) para os sete valores de  $H$  estudados para o caso de tensão plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,5$  e  $a/W = 0,05$ .

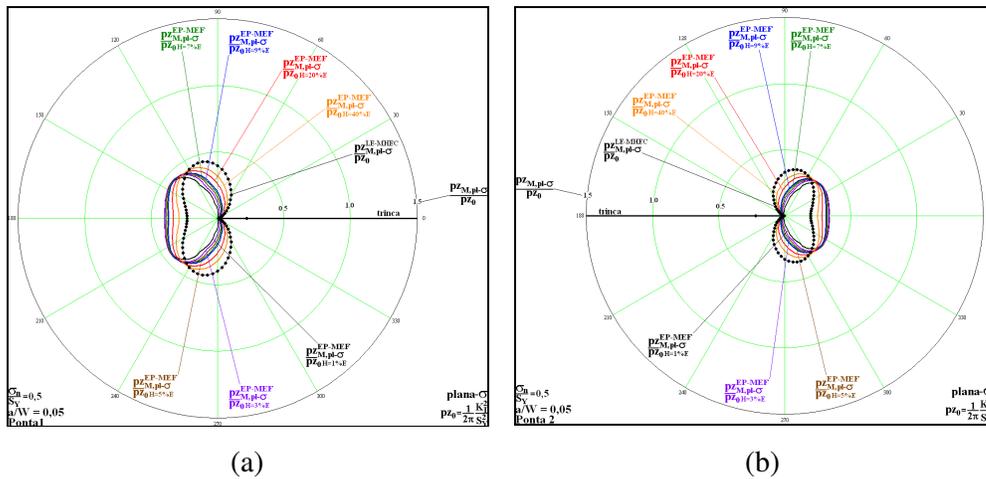


Figura 227 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p_z_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,5$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,05$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 228 mostra as zonas plásticas elastoplásticas ( $p_z_{M,a/W=C1,H=C2\%E}$ ) para os sete valores de  $H$  estudados para o caso de tensão plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,5$  e  $a/W = 0,40$ .

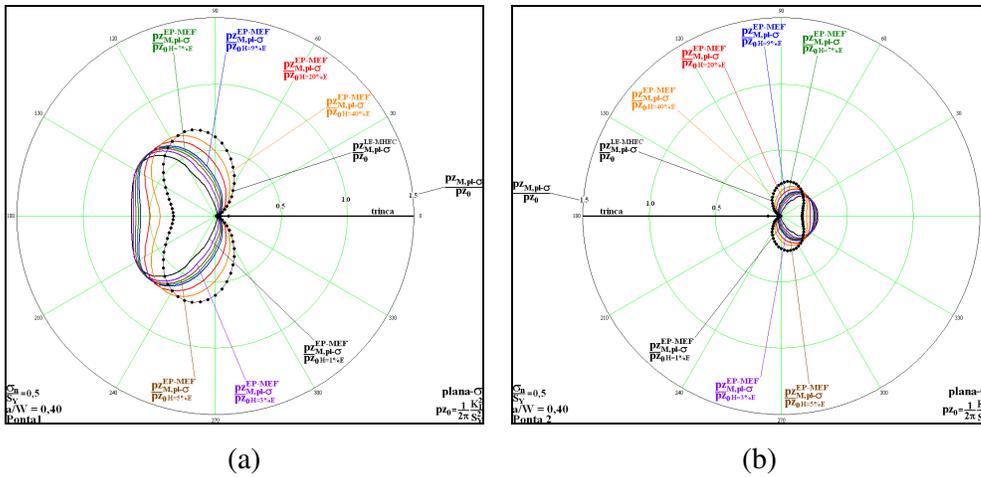


Figura 228 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pzM^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,5$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 229 mostra as zonas plásticas elastoplásticas ( $pzM,a/W=C1,H=C2\%E$ ) para os sete valores de  $H$  estudados para o caso de tensão plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,6$  e  $a/W = 0,05$ .

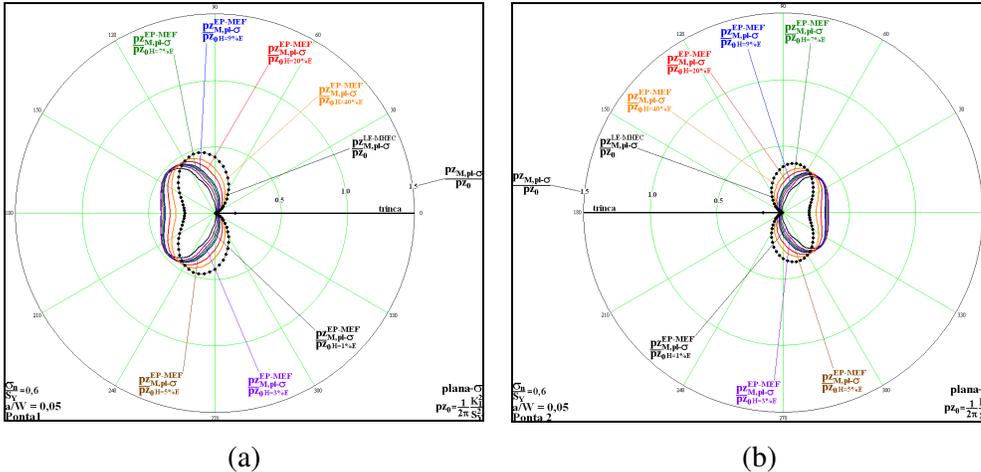


Figura 229 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pzM^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,6$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,05$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 230 mostra as zonas plásticas elastoplásticas ( $pzM,a/W=C1,H=C2\%E$ ) para os sete valores de  $H$  estudados para o caso de tensão plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,6$  e  $a/W = 0,40$ .

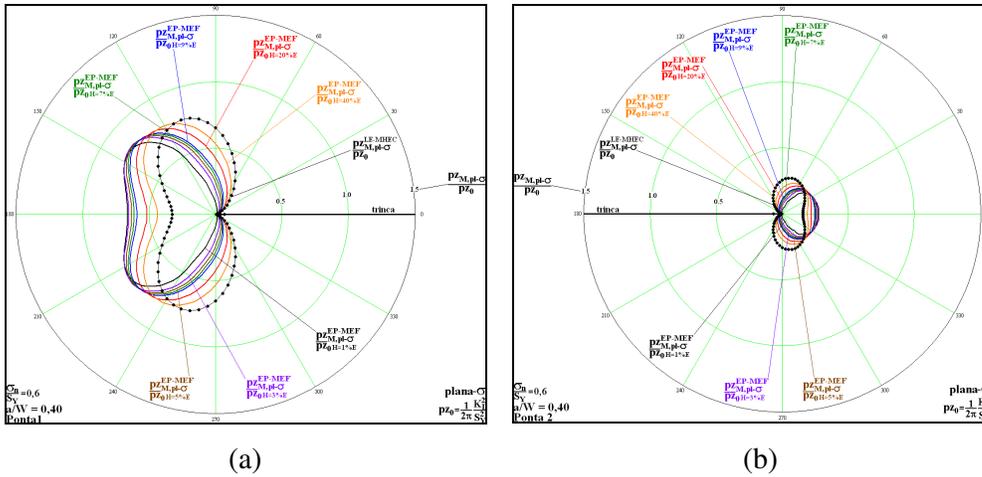


Figura 230 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pz_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 231 mostra as zonas plásticas elastoplásticas ( $pzM,a/W=C1,H=C2\%E$ ) para os sete valores de  $H$  estudados para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  e  $a/W = 0,05$ .

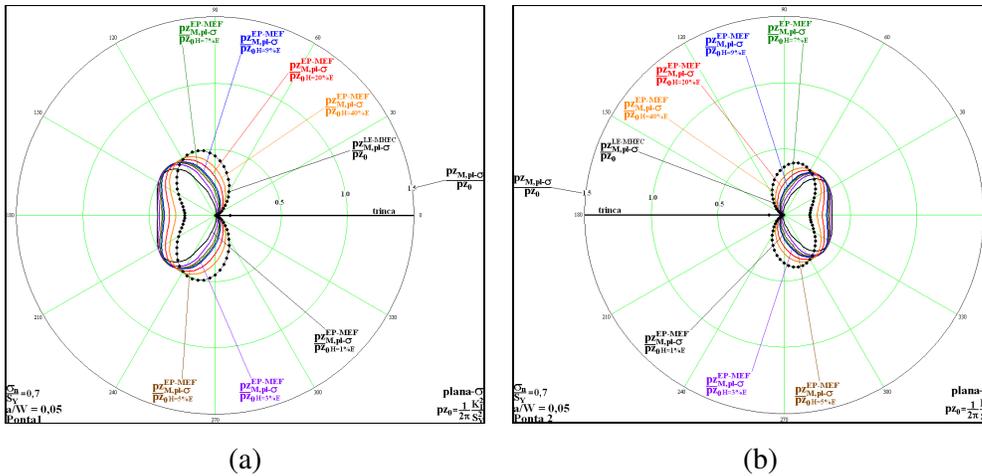


Figura 231 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pzM^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,05$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 232 mostra as zonas plásticas elastoplásticas ( $pzM,a/W=C1,H=C2\%E$ ) para os sete valores de  $H$  estudados para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  e  $a/W = 0,40$ .

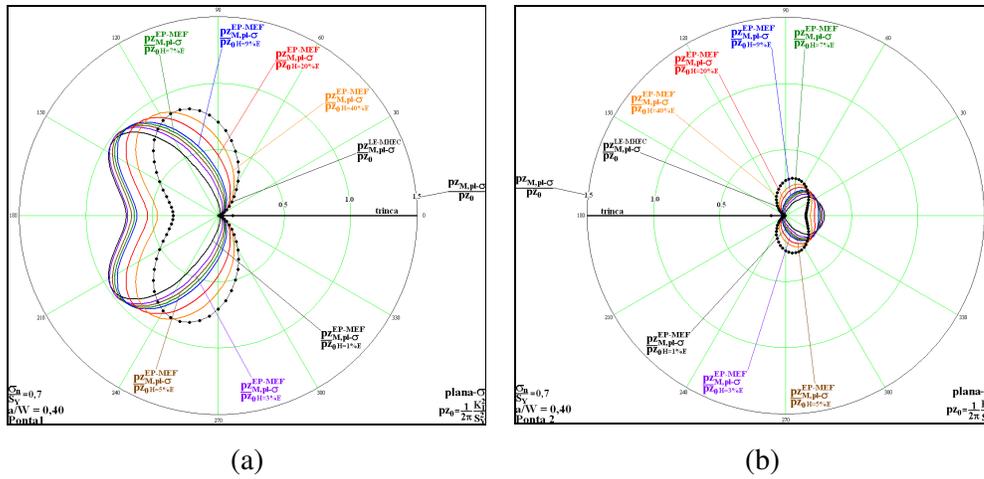


Figura 232 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pz_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,7$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 233 mostra as zonas plásticas elastoplásticas ( $pz_{M,a/W=C1,H=C2\%E}^{EP-MEF}$ ) para os sete valores de  $H$  estudados para o caso de tensão plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,8$  e  $a/W = 0,05$ .

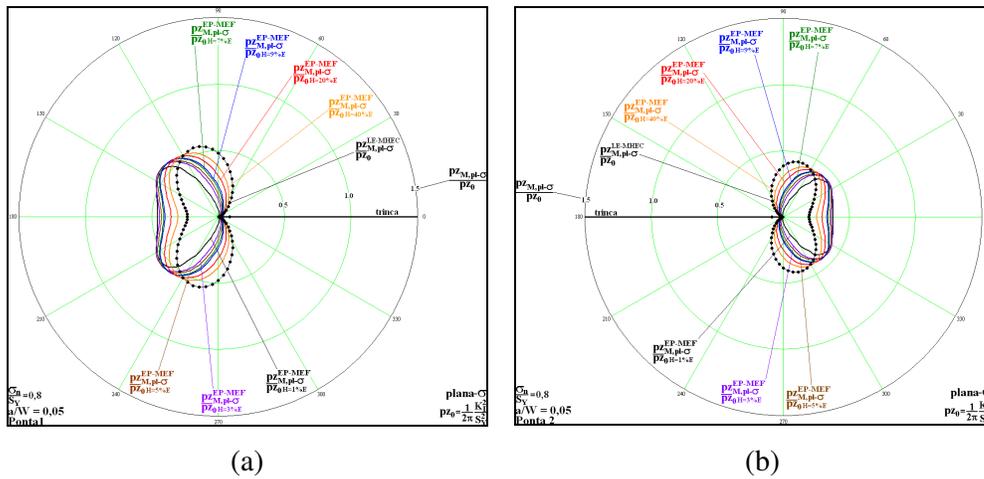


Figura 233 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pz_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,8$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,05$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 234 mostra as zonas plásticas elastoplásticas ( $pz_{M,a/W=C1,H=C2\%E}^{EP-MEF}$ ) para os sete valores de  $H$  estudados para o caso de tensão plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,8$  e  $a/W = 0,40$ .

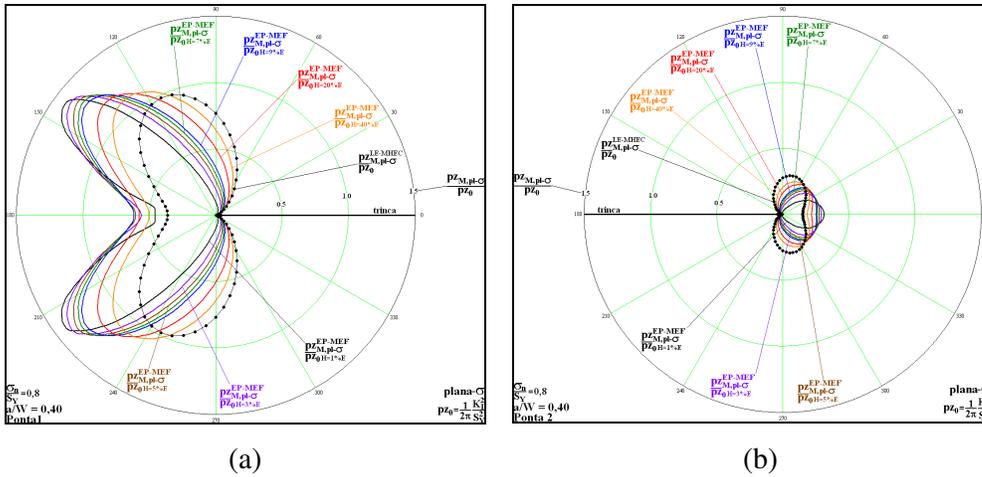


Figura 234 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pZ_M^{EP-MEF}$  para o caso de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 235 mostra as zonas plásticas elastoplásticas ( $pZ_{M,a/W=C1,H=C2\%E}^{EP-MEF}$ ) para os sete valores de  $H$  estudados para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  e  $a/W = 0,05$ .

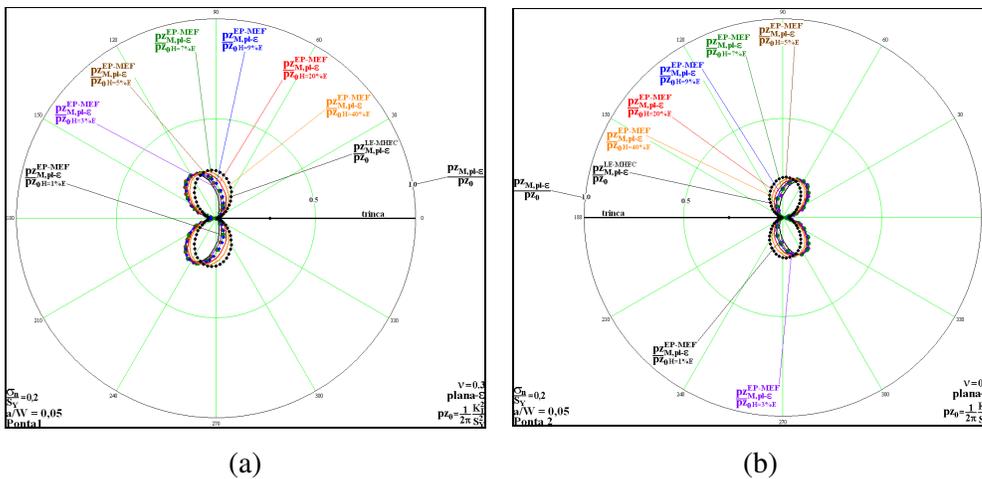


Figura 235 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pZ_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,05$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 236 mostra as zonas plásticas elastoplásticas ( $pZ_{M,a/W=C1,H=C2\%E}^{EP-MEF}$ ) para os sete valores de  $H$  estudados para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  e  $a/W = 0,40$ .

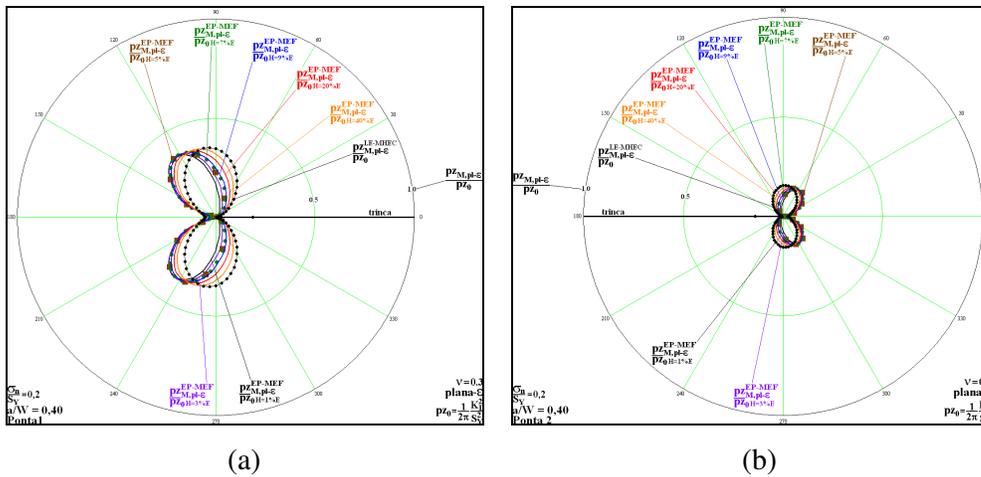


Figura 236 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p_z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_y = 0,2$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 237 mostra as zonas plásticas elastoplásticas ( $p_z_{M,a/W=C1,H=C2\%E}$ ) para os sete valores de  $H$  estudados para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_y = 0,4$  e  $a/W = 0,05$ .

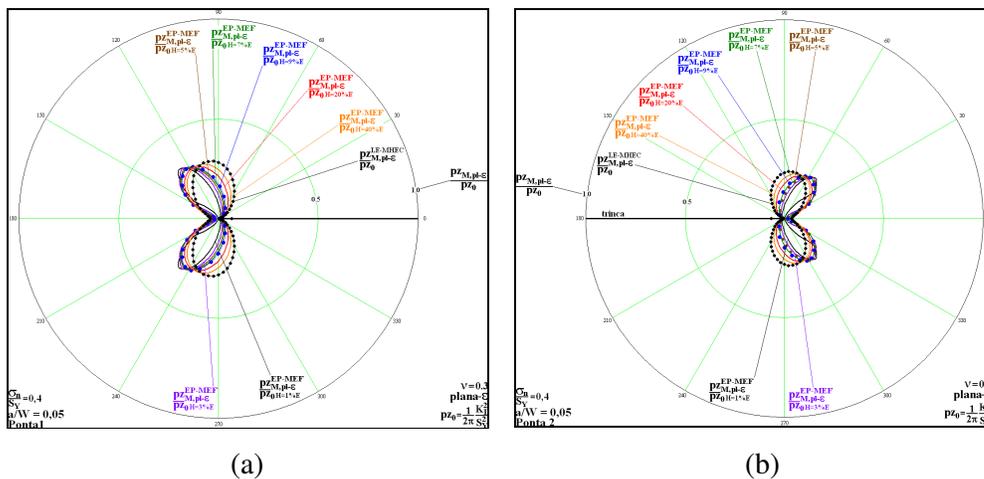


Figura 237 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p_z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_y = 0,4$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,05$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 238 mostra as zonas plásticas elastoplásticas ( $p_z_{M,a/W=C1,H=C2\%E}$ ) para os sete valores de  $H$  estudados para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_y = 0,4$  e  $a/W = 0,40$ .

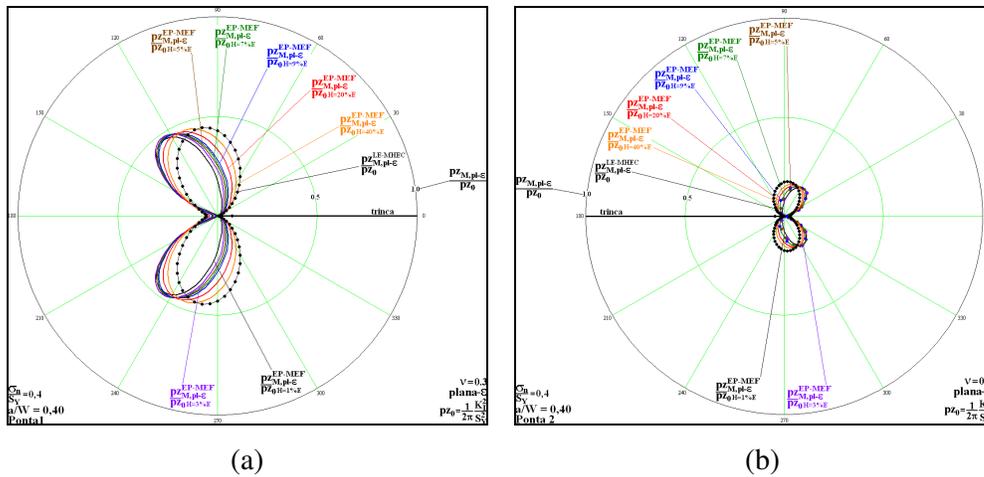


Figura 238 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p_z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 239 mostra as zonas plásticas elastoplásticas ( $p_z_{M,a/W=C1,H=C2\%E}$ ) para os sete valores de  $H$  estudados para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$  e  $a/W = 0,05$ .

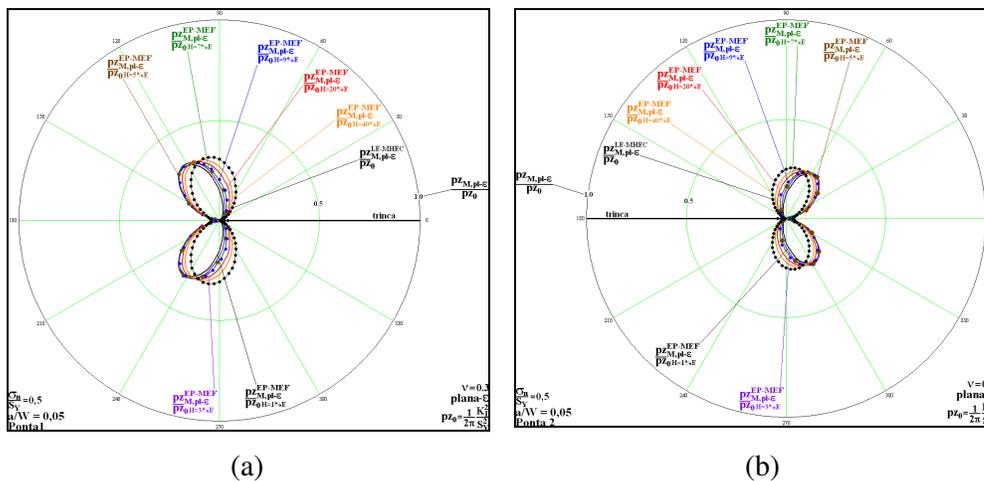


Figura 239 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p_z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,05$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 240 mostra as zonas plásticas elastoplásticas ( $p_z_{M,a/W=C1,H=C2\%E}$ ) para os sete valores de  $H$  estudados para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,5$  e  $a/W = 0,40$ .

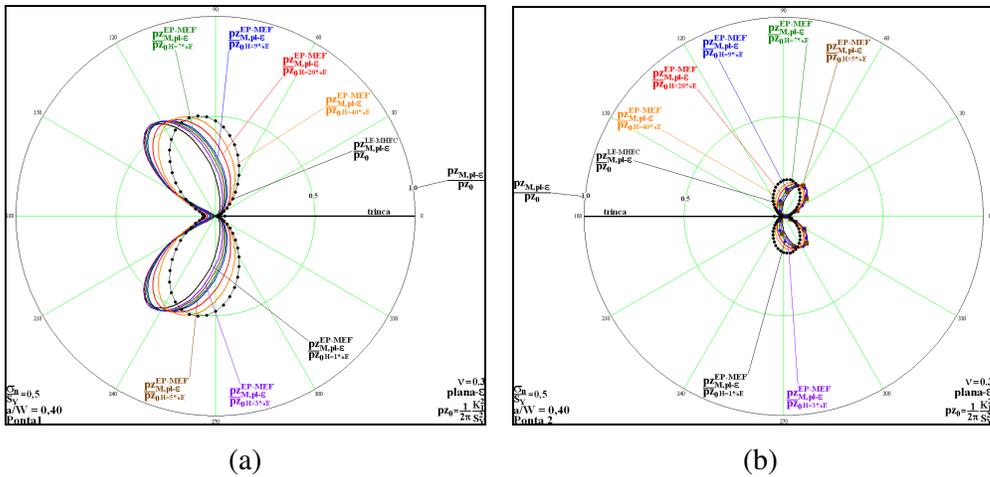


Figura 240 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p_z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_y = 0,5$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 241 mostra as zonas plásticas elastoplásticas ( $p_z_{M,a/W=C1,H=C2\%E}$ ) para os sete valores de  $H$  estudados para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_y = 0,6$  e  $a/W = 0,05$ .

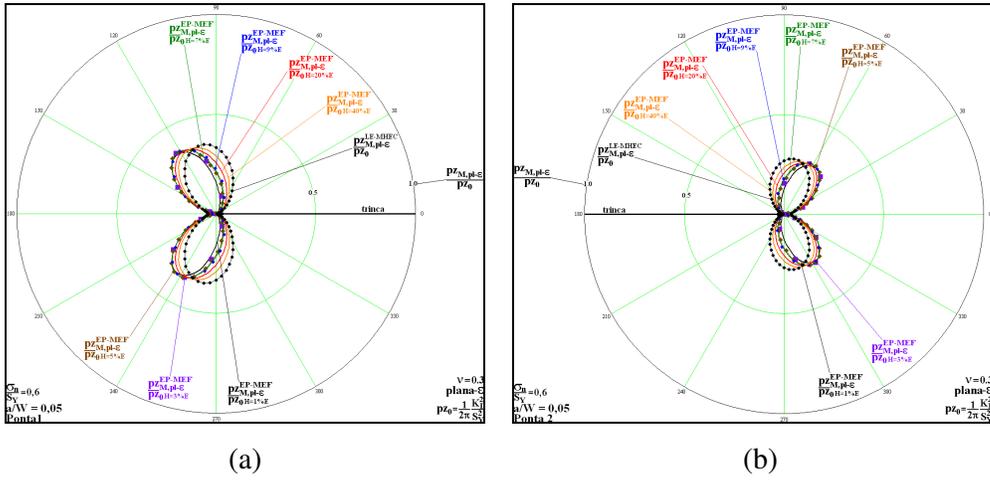


Figura 241 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p_z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_y = 0,6$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,05$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 242 mostra as zonas plásticas elastoplásticas ( $p_z_{M,a/W=C1,H=C2\%E}$ ) para os sete valores de  $H$  estudados para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_y = 0,6$  e  $a/W = 0,40$ .

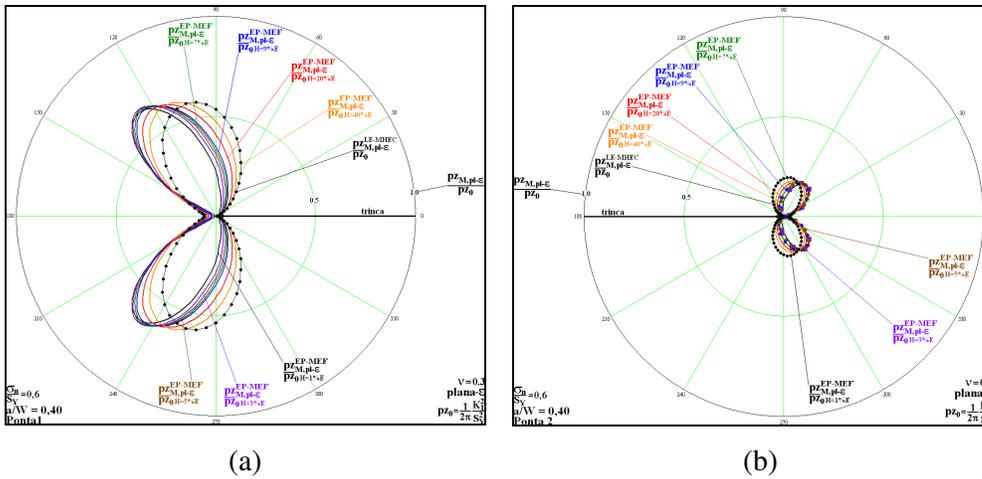


Figura 242 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p_z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_y = 0,6$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 243 mostra as zonas plásticas elastoplásticas ( $p_z_M^{EP-MEF}$ ) para os sete valores de  $H$  estudados para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_y = 0,7$  e  $a/W = 0,05$ .

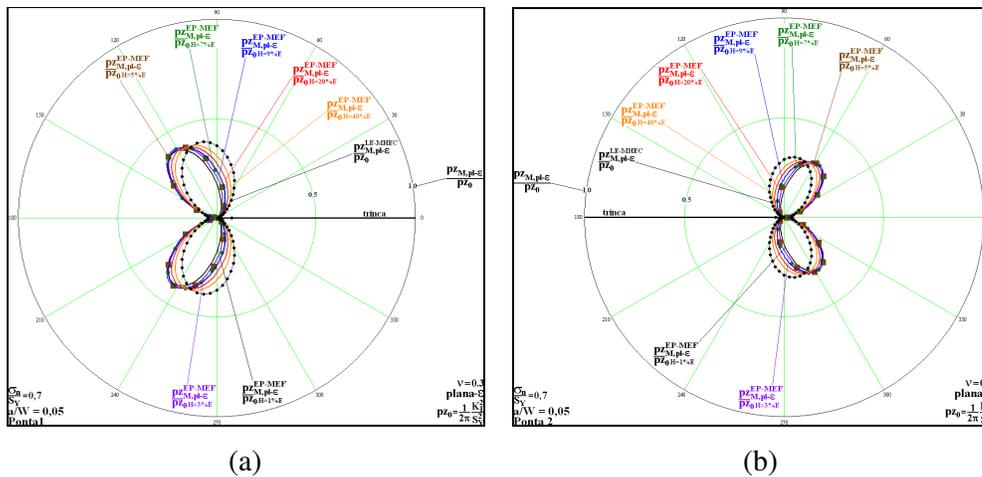


Figura 243 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p_z_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_y = 0,7$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,05$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 244 mostra as zonas plásticas elastoplásticas ( $p_z_M^{EP-MEF}$ ) para os sete valores de  $H$  estudados para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_y = 0,7$  e  $a/W = 0,40$ .

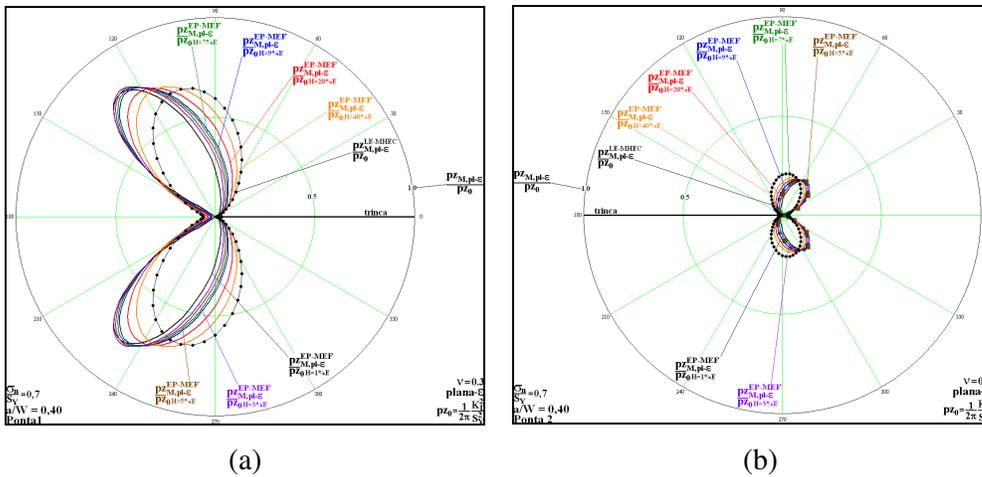


Figura 244 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pZ_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_y = 0,7$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 245 mostra as zonas plásticas elastoplásticas ( $pZ_{M,a/W=C1,H=C2\%E}$ ) para os sete valores de  $H$  estudados para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_y = 0,8$  e  $a/W = 0,05$ .

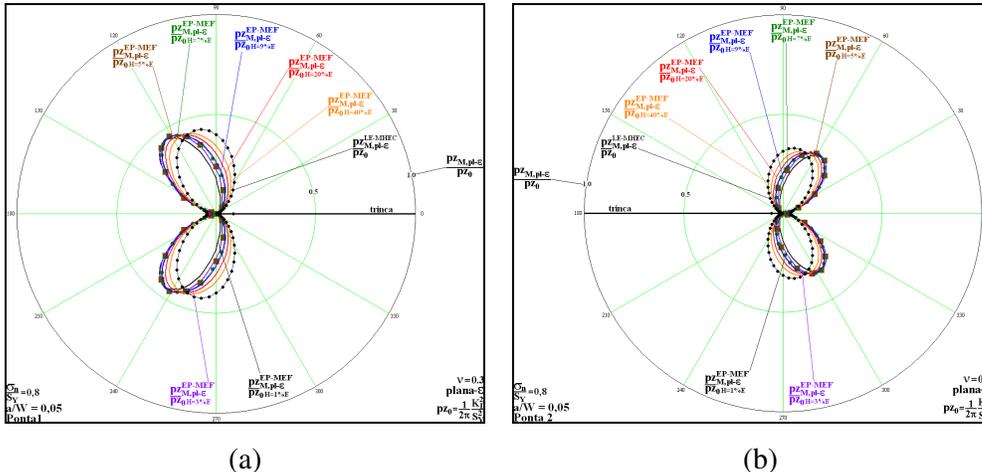


Figura 245 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $pZ_M^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_y = 0,8$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,05$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 246 mostra as zonas plásticas elastoplásticas ( $pZ_{M,a/W=C1,H=C2\%E}$ ) para os sete valores de  $H$  estudados para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_y = 0,8$  e  $a/W = 0,40$ .

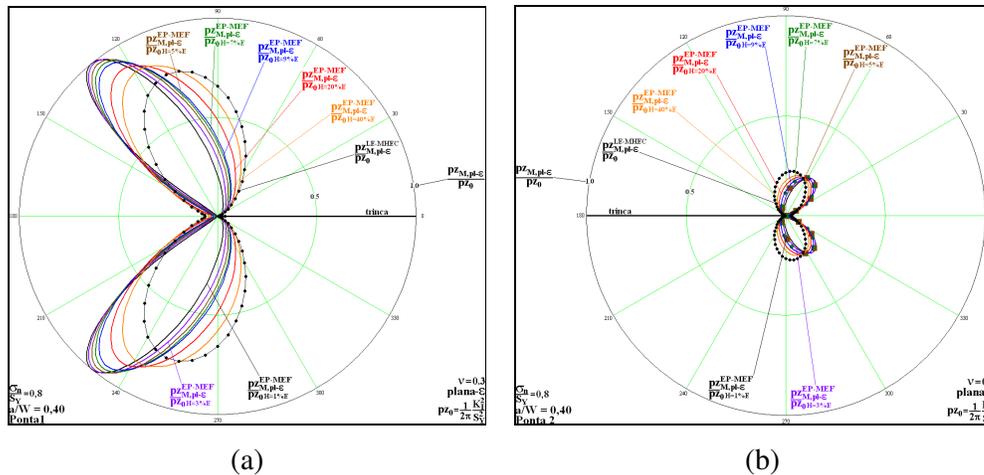


Figura 246 – Estimativas numéricas feitas pelo programa ANSYS (2001) das  $p_{z_M}^{EP-MEF}$  para o caso de deformação plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  para os sete valores de  $H$  adotados e com a relação de  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

As 24 figuras anteriores mostram os efeitos do encruamento na estimativa das zonas plásticas obtidas a partir de uma análise não linear para duas relações  $a/W$  e para os dois estados planos. Igualmente ao que acontece para o exemplo da placa retangular com trinca central sob tração, dois fatos podem ser observados. Primeiro, a mudança do encruamento gera uma mudança suave na estimativa das zonas plásticas. Esse fato reforça o uso do procedimento numérico utilizado, pois não há nenhuma mudança brusca nos resultados, o que poderia indicar algum problema de convergência numérica. O segundo fato que deve ser comentado e que é mais fácil de ser observado para os casos em tensão plana, é que a mudança de  $H$  parece alterar apenas a forma das zonas plásticas, sendo que para baixos níveis de  $\sigma_n/S_Y$  e para baixos valores de  $H$  (materiais próximos do modelo perfeitamente plásticos) as zonas plásticas crescem na direção paralela ao plano da trinca. Ao se manter os valores de  $H$  baixos, as zonas plásticas crescem em uma direção em torno de  $45^\circ$  em relação ao plano da trinca à medida que se aumenta o valor de  $\sigma_n/S_Y$ , conforme mostra a Figura 234(a). Além desses dois fatos que também puderam ser verificados no exemplo da placa retangular com trinca central sob tração, este exemplo apresenta outro fato importante. Ao se manter a relação  $\sigma_n/S_Y$  fixa e ao se aumentar o valor de  $a/W$  de 0,05 para 0,40 é possível perceber que as zonas plásticas correspondentes à ponta mais tracionada (ponta 1) aumentam de tamanho. Em contrapartida, as zonas plásticas correspondentes à

ponta menos tracionada (ponta 2) diminuem de tamanho. Essa diminuição das zonas plásticas correspondentes à ponta 2 pode ser justificada pelo fato de que ao se aumentar o valor de  $a/W$  de 0,05 para 0,40 a placa retangular com uma trinca central sob flexo tração fica menos tracionada e mais fletida.

A comparação entre as zonas plásticas obtidas por uma análise não linear  $(p_{z_M}^{EP-MEF})$  e as zonas plásticas corrigidas  $(p_{z_M}^{LE-MHEC+eq})$ , assim como um estudo sobre os efeitos do parâmetro geométrico  $a/W$  são feitos na próxima subseção.

#### **7.4.2. Efeito do parâmetro $a/W$ nas zonas plásticas elastoplásticas e comparação entre essas zonas plásticas com as zonas plásticas corrigidas**

Esta subseção apresenta doze figuras, seis que mostram o caso em tensão plana e seis que mostram o caso em deformação plana. As duas pontas de trincas são analisadas em cada figura. Para cada uma delas, fixa-se o valor  $\sigma_n/S_Y$  e se mostra as zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 1\%E$  para os dois valores de  $a/W$  estudados (0,05 e 0,40). Também se mostra, em cada figura, as zonas plásticas lineares elásticas obtidas pelo MHEC  $(p_{z_M}^{LE-MHEC})$  e as zonas plásticas corrigidas em que se considera um material perfeitamente plástico  $(p_{z_M}^{LE-MHEC+eq})$ . Dessa forma, a Figura 247 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  para o caso sob tensão plana e para  $H = 1\%E$ .

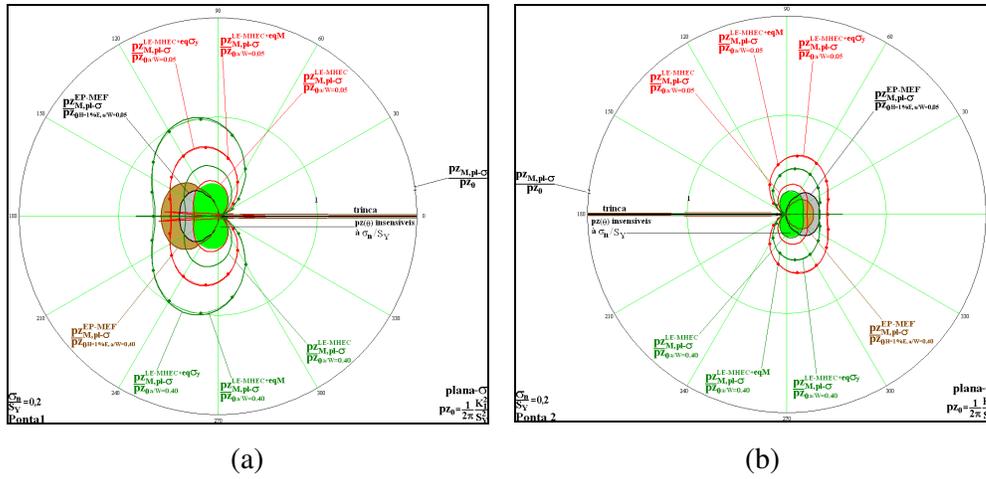


Figura 247 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $p_z_M^{LE-MHEC}$  e  $p_z_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de tensão para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  e com  $a/W = 0,05$  e  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 248 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  para o caso sob tensão plana e para  $H = 1\%E$ .

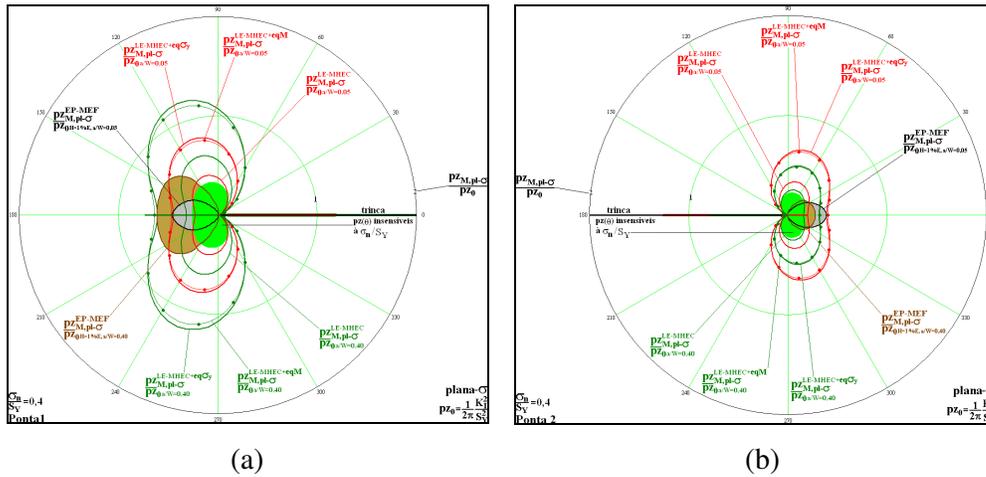


Figura 248 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $p_z_M^{LE-MHEC}$  e  $p_z_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de tensão para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  e com  $a/W = 0,05$  e  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 249 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$  para o caso sob tensão plana e para  $H = 1\%E$ .

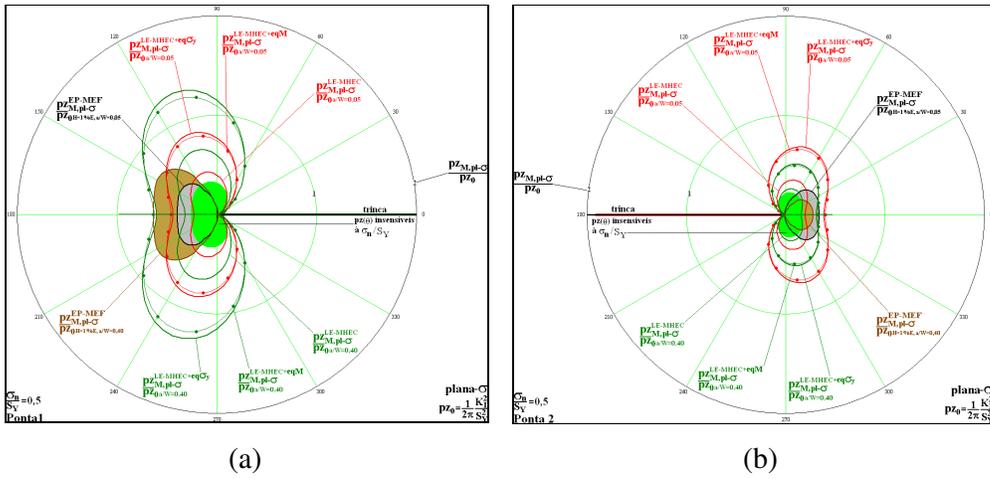


Figura 249 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $p_z_M^{LE-MHEC}$  e  $p_z_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de tensão para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$  e com  $a/W = 0,05$  e  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 250 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  para o caso sob tensão plana e para  $H = 1\%E$ .

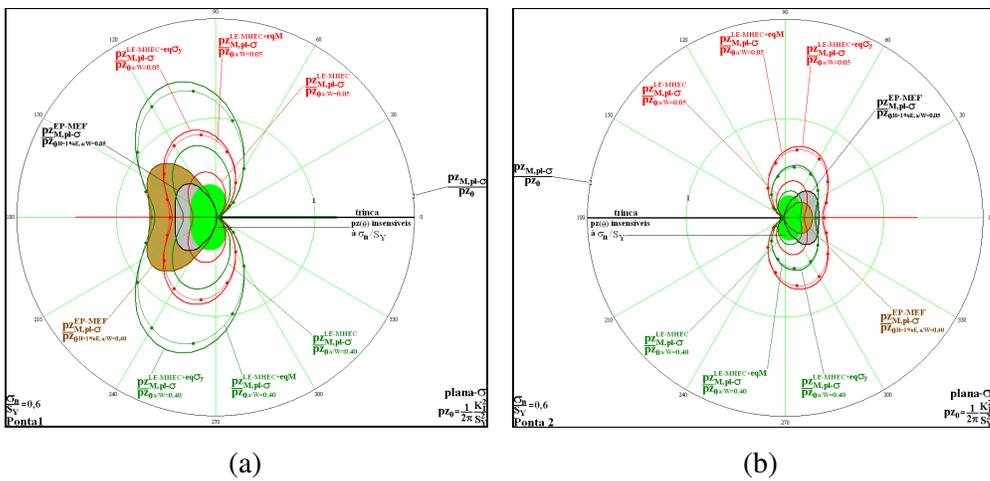


Figura 250 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $p_z_M^{LE-MHEC}$  e  $p_z_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de tensão para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  e com  $a/W = 0,05$  e  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 251 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  para o caso sob tensão plana e para  $H = 1\%E$ .

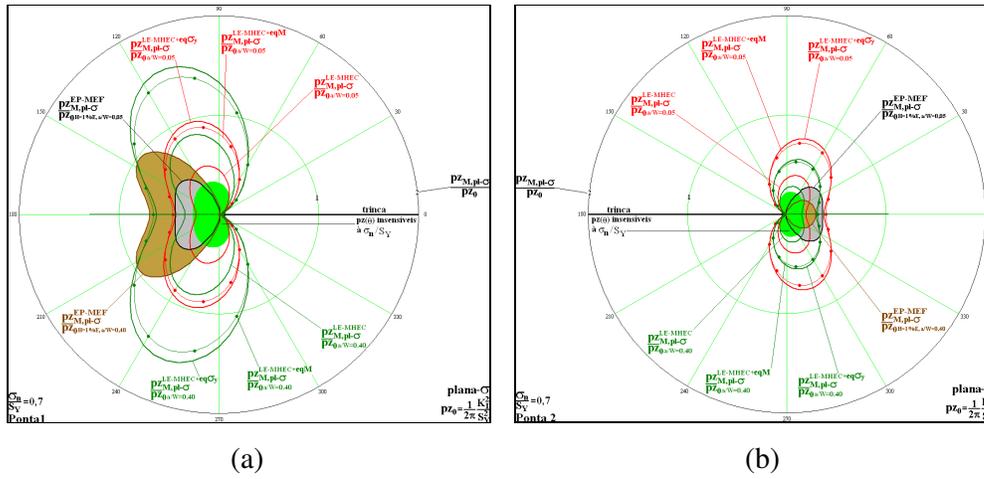


Figura 251 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $pZ_M^{LE-MHEC}$  e  $pZ_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de tensão para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  e com  $a/W = 0,05$  e  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 252 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  para o caso sob tensão plana e para os valores de  $H$  igual a  $1\%E$ .

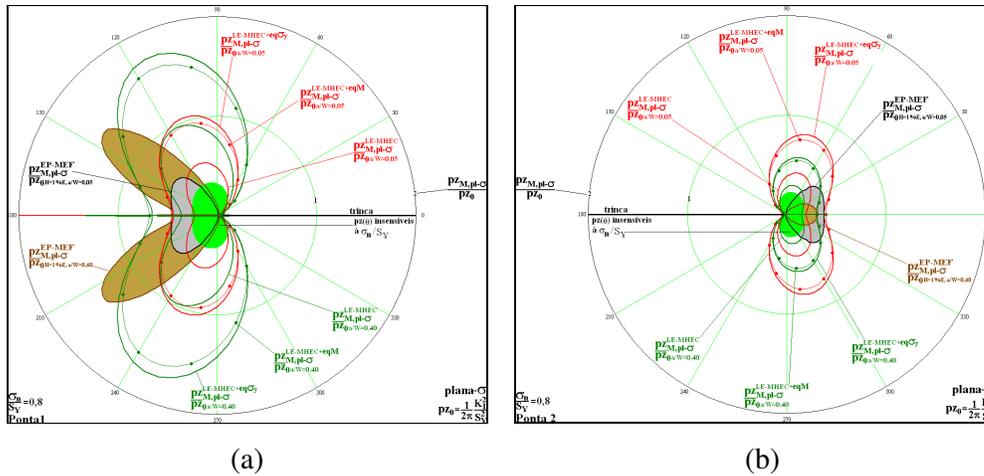


Figura 252 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $pZ_M^{LE-MHEC}$  e  $pZ_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de tensão para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  e com  $a/W = 0,05$  e  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

As próximas seis figuras correspondem ao caso de deformação plana. A Figura 253 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  para o caso sob deformação plana e para  $H = 1\%E$ .

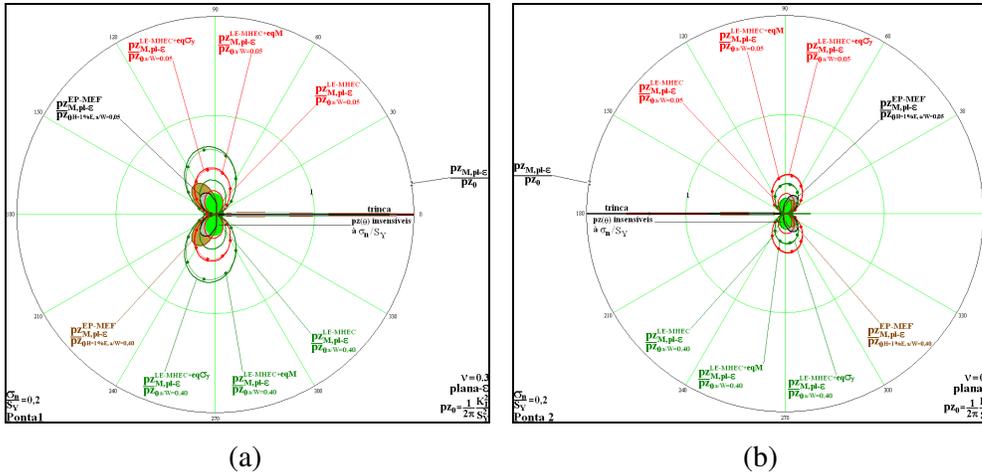


Figura 253 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $p_z_M^{LE-MHEC}$  e  $p_z_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de deformação para  $\sigma_n/S_Y = 0,2$  e com  $a/W = 0,05$  e  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 254 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  para o caso sob deformação plana e para  $H = 1\%E$ .

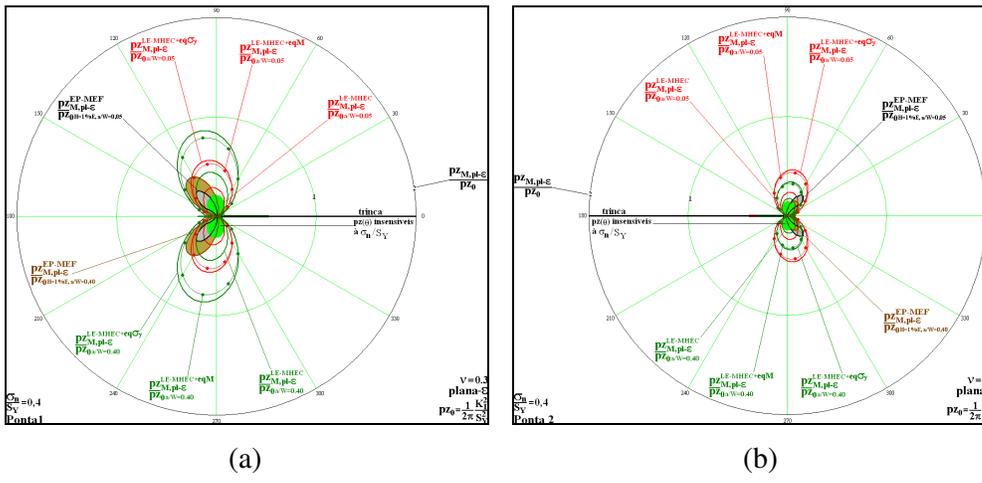


Figura 254 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $p_z_M^{LE-MHEC}$  e  $p_z_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de deformação para  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  e com  $a/W = 0,05$  e  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 255 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$  para o caso sob deformação plana e para  $H = 1\%E$ .

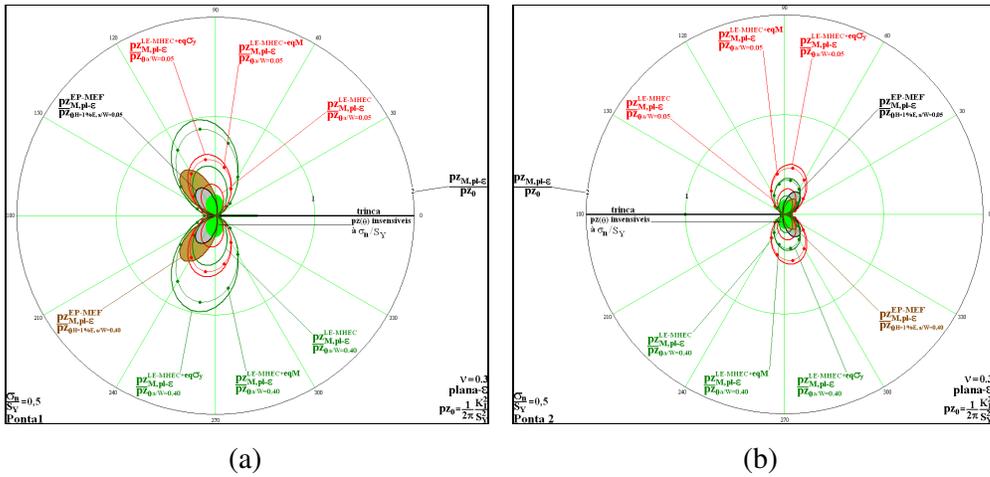


Figura 255 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $p_z_M^{LE-MHEC}$  e  $p_z_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de deformação para  $\sigma_n/S_Y = 0,5$  e com  $a/W = 0,05$  e  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 256 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  para o caso sob deformação plana e para os valores de  $H$  igual a  $1\%E$ .

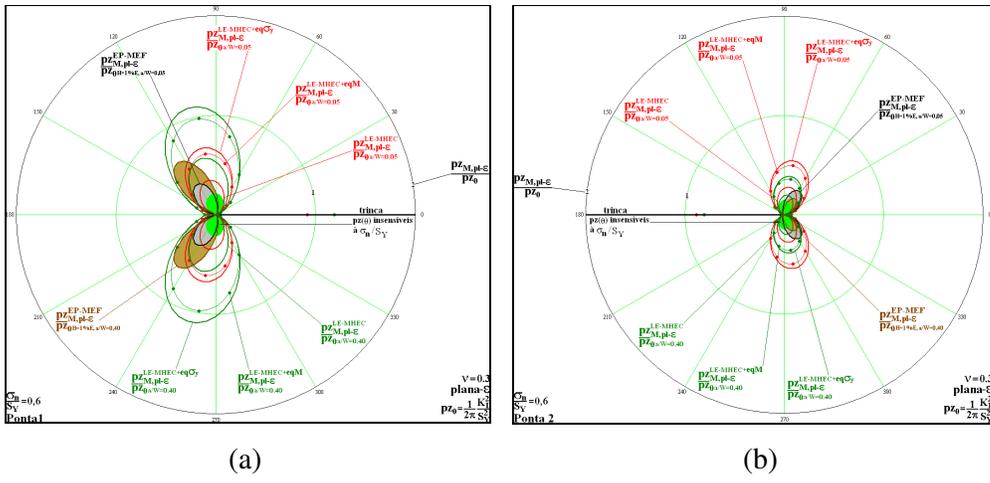


Figura 256 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $p_z_M^{LE-MHEC}$  e  $p_z_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de deformação para  $\sigma_n/S_Y = 0,6$  e com  $a/W = 0,05$  e  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 257 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  para o caso sob deformação plana e para  $H = 1\%E$ .

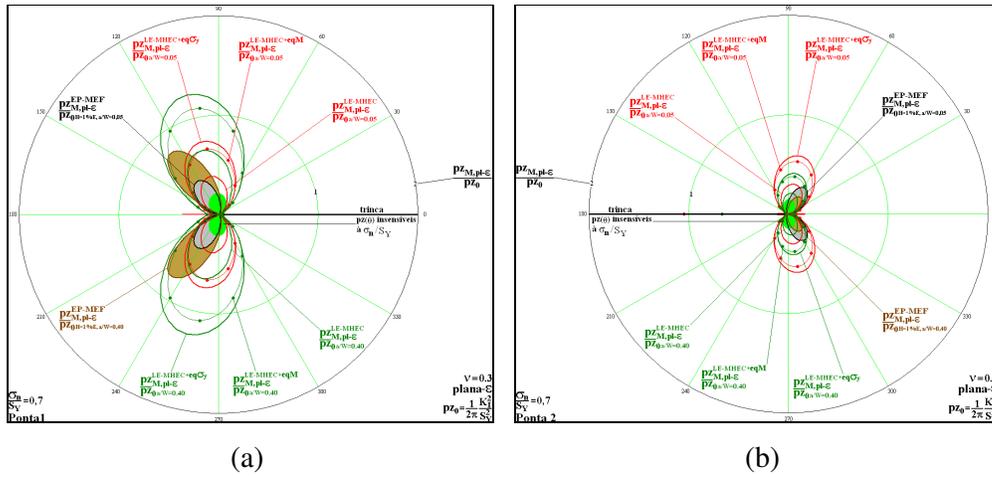


Figura 257 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $pZ_M^{LE-MHEC}$  e  $pZ_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de deformação para  $\sigma_n/S_Y = 0,7$  e com  $a/W = 0,05$  e  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

A Figura 258 mostra as zonas plásticas elastoplásticas para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  para o caso sob deformação plana e para  $H = 1\%E$ .

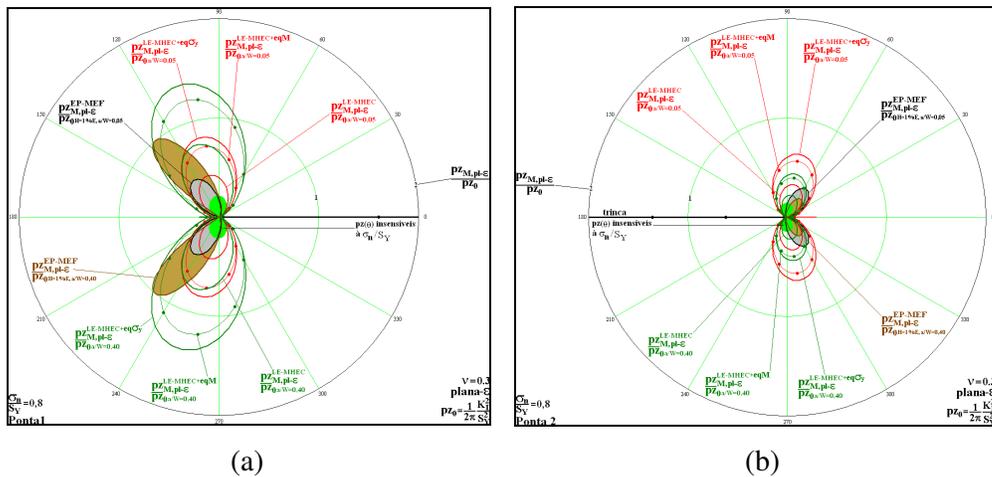


Figura 258 – Zonas plásticas elastoplásticas para  $H = 1\%E$  e zonas plásticas  $pZ_M^{LE-MHEC}$  e  $pZ_M^{LE-MHEC+eq}$  sob um estado plano de deformação para  $\sigma_n/S_Y = 0,8$  e com  $a/W = 0,05$  e  $a/W = 0,40$  para (a) ponta 1 e para (b) ponta 2.

Ao se analisar as doze figuras anteriores é possível perceber que para um valor fixo de  $\sigma_n/S_Y$  as zonas plásticas correspondentes à ponta 1 para  $a/W = 0,40$  são maiores que as zonas plásticas obtidas para  $a/W = 0,05$ . Já para a ponta 2, ao se manter fixo o valor de  $\sigma_n/S_Y$ , percebe-se que as zonas plásticas para  $a/W = 0,40$

são menores que as zonas plásticas obtidas para  $a/W = 0,05$ . Os efeitos do valor de  $a/W$  nas zonas plásticas são maiores à medida que se aumenta o valor de  $\sigma_y/S_Y$ .

Em relação a comparação entre as zonas plásticas  $pz_M^{LE-MHEC+eq}$  e as zonas plásticas  $pz_{M,a/W,H}^{EP-MEF}$ , é possível perceber que para o caso de tensão plana com  $\sigma_y/S_Y = 0,2$  as zonas plásticas  $pz_M^{LE-MHEC+eq}$  são diferentes das zonas plásticas  $pz_{M,a/W,H}^{EP-MEF}$  em todas as direções e inclusive para o plano da trinca, conforme mostra a Figura 247. Esse fato ocorre para os dois valores de  $a/W$  e para as duas pontas. Para o caso de tensão plana com  $\sigma_y/S_Y = 0,4$ , as zonas plásticas  $pz_M^{LE-MHEC+eq}$  são praticamente iguais às zonas plásticas  $pz_{M,a/W,H}^{EP-MEF}$  na direção do plano da trinca, para o caso em que  $a/W$  é igual a 0,05 e para as duas pontas. Para  $a/W = 0,4$ , as zonas plásticas  $pz_M^{LE-MHEC+eq}$  são praticamente iguais às zonas plásticas  $pz_{M,a/W,H}^{EP-MEF}$  na direção do plano da trinca apenas para a ponta 1. Para o caso de tensão plana com  $\sigma_y/S_Y = 0,5$ , as zonas plásticas  $pz_M^{LE-MHEC+eq}$  são praticamente iguais às zonas plásticas  $pz_{M,a/W,H}^{EP-MEF}$  na direção do plano da trinca apenas para a ponta 1 e somente para  $a/W = 0,4$ . Para o caso de tensão plana com  $\sigma_y/S_Y = 0,6$ , as zonas plásticas  $pz_M^{LE-MHEC+eq}$  são diferentes das zonas plásticas  $pz_{M,a/W,H}^{EP-MEF}$  em todas as direções e inclusive para plano da trinca, conforme mostra a Figura 250. Para o caso de tensão plana com  $\sigma_y/S_Y = 0,7$ , as zonas plásticas  $pz_M^{LE-MHEC+eq}$  são praticamente iguais às zonas plásticas  $pz_{M,a/W,H}^{EP-MEF}$  na direção do plano da trinca, para as duas pontas e para o caso em que  $a/W$  é igual a 0,05. Para  $a/W = 0,4$ , as zonas plásticas  $pz_M^{LE-MHEC+eq}$  são praticamente iguais às zonas plásticas  $pz_{M,a/W,H}^{EP-MEF}$  na direção do plano da trinca apenas para a ponta 2. Para o caso de tensão plana com  $\sigma_y/S_Y = 0,8$ , as zonas plásticas  $pz_M^{LE-MHEC+eq}$  são praticamente iguais às zonas plásticas  $pz_{M,a/W,H}^{EP-MEF}$  na direção do plano da trinca para as duas pontas e para o caso em que  $a/W$  é igual a 0,05. Para  $a/W = 0,4$ , as zonas plásticas  $pz_M^{LE-MHEC+eq}$  são praticamente iguais às zonas plásticas  $pz_{M,a/W,H}^{EP-MEF}$  na direção do plano da trinca apenas para a ponta 2.

Para o estado plano de deformação é possível perceber, independentemente do valor de  $\sigma_y/S_Y$ , que as zonas plásticas  $p_{z_M}^{LE-MHEC+eq}$  e as zonas plásticas  $p_{z_{M,a/W,H}}^{EP-MEF}$  são bem parecidas apenas na direção paralela ao plano da trinca. Isso acontece porque todas as componentes de tensão são bem pequenas nessa direção.

## 7.5. Conclusões do capítulo

Fundamentado no fato de que as estimativas de zonas plásticas obtidas a partir de campos de tensões lineares elásticos singulares é um problema intrinsecamente não linear, este capítulo mostrou as estimativas não lineares de zonas plásticas para dois exemplos. Nesses dois exemplos se estudou os efeitos do encruamento ( $H$ ), de  $a/W$  e de  $\sigma_y/S_Y$  nas zonas plásticas. Essas estimativas não lineares com  $H = 1\%E$  foram comparadas com as estimativas de zonas plásticas obtidas pelo campo de tensões lineares e corrigidas pela componente de tensão  $\sigma_y$  e pela tensão de Mises ( $\sigma_{Mises}$ ). O ponto mais importante que deve ser destacado é que dependendo do valor de  $a/W$  e de  $\sigma_y/S_Y$  essas duas estimativas de zonas plásticas são iguais para a direção paralela ao plano da trinca, fato que já tinha sido levantado por Irwin (1957). Entretanto, para as outras direções, as duas estimativas são bem diferentes.

## 8 Conclusões

Este trabalho mostrou a ineficiência das estimativas de zonas plásticas que usam o Fator de Intensidade de Tensão ( $K$ ) para descrever o campo de tensões que representam corpos trincados. O  $K$  foi originalmente utilizado como o principal parâmetro da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE). A ineficiência de  $K_I$ , Fator de Intensidade de Tensão em modo I de trincamento, para descrever o campo de tensões foi mostrada no Capítulo 1, em que se estimou as zonas plásticas presentes na ponta da trinca de uma placa infinita uniaxialmente tracionada (placa de Griffith). Foi mostrado nesse exemplo que as zonas plásticas normalizadas são insensíveis à relação  $\sigma_r/S_Y$ .

O Capítulo 2 apresentou a revisão bibliográfica do trabalho. Nessa revisão se comentou sobre o trabalho de Inglis (1913) que deu origem à Mecânica da Fratura (MF). Foi mostrado nesse capítulo que o Fator de Intensidade de Tensão foi obtido, independentemente, por Irwin (1957) que usou a função de Westergaard, e por Williams (1957) que utilizou uma série trigonométrica com infinitos termos. Série que ficou conhecida como série de Williams. Em seguida, comentou-se que a função de tensão de Westergaard e a série de Williams são maneiras diferentes de expressar a solução para o problema linear elástico de corpos trincados. O Capítulo 2 também apresentou alguns trabalhos que tentaram gerar funções de tensões de Westergaard para outras condições de contorno. Em seguida, comentou-se sobre a tentativa de estender a aplicabilidade da MFLE a partir do uso conjunto de  $K_I$  e da  $T$ -stress para representar o campo tensões na MFLE. Por último, o Capítulo 2 comentou sobre os trabalhos que se propuseram a obter medidas experimentais das zonas plásticas.

Como o Capítulo 1 mostrou que as zonas plásticas normalizadas são insensíveis à relação entre a tensão nominal e a tensão de escoamento do material ( $\sigma_r/S_Y$ ), o Capítulo 3 avaliou as estimativas de zonas plásticas normalizadas a partir dos campos de tensões obtidos por  $K_I$ ,  $K_I$  com adição da  $T$ -stress, pela série de Williams e pela função de tensão de Westergaard. Além disso esse capítulo

confirmou, em termos de estimativa de zonas plásticas normalizadas, que a *T-stress* corresponde ao primeiro termo constante de ordem zero da série de Williams. Em seguida, analisando o exemplo da placa de Griffith, mostrou-se que o campo de tensões gerado a partir da série de Williams nada mais é do que escrever a função de tensão de Westergaard em forma de uma série infinita. A equivalência entre a série de Williams e a função de tensão de Westergaard foi mostrada em termos de estimativa de zonas plásticas normalizadas, pois, independentemente do valor  $\sigma_r/S_Y$ , as duas estimativas são idênticas conforme se aumenta o número de termos da série. Como a solução linear elástica de corpos trincados é obtida a partir da série de Williams ou da função de tensão de Westergaard correspondente ao problema estudado, o Capítulo 3 mostrou para o exemplo da placa de Griffith que os campos de tensões obtidos a partir de  $K_I$  e de  $K_{II}$  mais *T-stress* são válidos apenas em regiões bem próximas à ponta das trincas. Para finalizar, o Capítulo 3 identificou que o problema de utilizar o campo de tensões linear elástico completo obtido a partir da função de tensão de Westergaard ou da série de Williams é o fato de que esses campos geram tensões singulares na ponta das trincas. Essa singularidade é característica do problema matemático. Entretanto, ela não reproduz o comportamento mecânico, pois nenhum material suporta tensão infinita.

Para tentar contornar o problema da singularidade dos campos de tensões lineares elásticos, o Capítulo 4 apresentou, baseado nos trabalhos de Irwin (1958) e de Rodriguez (2007), três propostas de correção das zonas plásticas obtidas por um campo de tensões linear elástico e que consideram materiais perfeitamente plásticos. Essas correções partem da hipótese de que as forças que estariam associadas à tensões superiores ao limite de escoamento do material devem ser redistribuídas. Para que isso aconteça, é necessário que uma quantidade maior de material deforme plasticamente. Com isso, foi mostrado que as zonas plásticas originais, obtidas por campos de tensões lineares elásticos, dobram de tamanho após a correção. Esse fato já tinha sido verificado por Irwin (1957). Além disso, esse capítulo apresentou, fundamentado nas ideias de Kujawski & Ellyin (1985), uma proposta de fazer as correções nas zonas plásticas normalizadas de tal forma que se considere também os efeitos do encruamento do material. Esses efeitos do encruamento nas zonas plásticas foram estimados a partir da análise da placa de Griffith para dois materiais diferentes. Conforme o esperado, o material com

maior encruamento apresentou zonas plásticas menores do que o material com o menor encruamento. Isso aconteceu devido ao fato de que, com maior encruamento, o material suporta tensões mais elevadas dentro da zona plástica.

Como alternativa para casos em que não se conhece a solução linear elástica completa do problema estudado, o Capítulo 5 mostrou que tanto o Método dos Elementos Finitos (MEF) quanto o Método Híbrido dos Elementos de Contorno (MHEC) são ferramentas poderosas para estimar as zonas plásticas lineares elásticas presentes na ponta de trincas. Esse fato foi mostrado primeiramente para o exemplo da placa de Griffith, em que as zonas plásticas normalizadas geradas pelos campos de tensões lineares elásticos analíticos foram reproduzidas pelos dois métodos numéricos. Em seguida, esse capítulo mostrou, a partir do exemplo de uma placa retangular com uma trinca central sob flexo tração, que os campos de tensões obtidos numericamente pelo MHEC geram zonas plásticas sensíveis ao nível de  $\sigma_I/S_Y$ , ao tipo de carregamento e aos parâmetros geométricos, como a relação de  $a/W$ , diferentemente do que acontece quando se utiliza o campo de tensões LE gerados por  $K_I$ . O tópico mais importante desse capítulo foi o estudo sobre as estimativas das zonas plásticas feitas para três espécimes diferentes sujeitos a um mesmo  $K_I$  e a um mesmo valor de  $\sigma_I/S_Y$ . Foi mostrado que para baixos valores de  $\sigma_I/S_Y$  ( $\sigma_I/S_Y < 0,5$ ) as zonas plásticas dos três espécimes são diferentes, mas bem próximas das zonas plásticas obtidas a partir do campo de tensões determinado por  $K_I$ . Contudo, à medida que a relação  $\sigma_I/S_Y$  cresce, as zonas plásticas dos três espécimes começam a ficar cada vez mais diferentes entre si e maiores que a zona plástica obtida pelo campo de tensões obtido por  $K_I$ .

Todas as estimativas de zonas plásticas feitas no Capítulo 5 não consideraram nenhuma das propostas de correção apresentadas no Capítulo 4. A implementação e os resultados das estimativas de zonas plásticas corrigidas numericamente foram feitas no Capítulo 6. Entretanto, apenas os casos em que se considera material perfeitamente plástico e que utiliza a componente  $\sigma_{yy}$  e a tensão de Mises na correção foram implementados. Essa implementação foi feita somente no programa de Lopes (2002) que usa o MHEC. Três exemplos foram estudados nesse capítulo. Para os exemplos da placa de Griffith e da placa retangular com uma trinca central sob tração, foi mostrado que zonas plásticas corrigidas numericamente são praticamente iguais às zonas plásticas corrigidas

analiticamente. O terceiro exemplo, que não apresenta uma solução analítica conhecida, foi o caso de uma placa retangular com uma trinca central sob flexo tração. Nos três exemplos estudados, foi verificado que as zonas plásticas corrigidas são bem maiores que as zonas plásticas normalizadas obtidas apenas pelo campo de tensões obtido por  $K_I$  para todos os níveis de  $\sigma_r/S_Y$ .

Ainda no Capítulo 6, foi levantada a questão de que todas as zonas plásticas corrigidas consideradas neste trabalho são fundamentadas na hipótese feita por Irwin (1958) para o caso da placa de Griffith, pois elas partem das estimativas lineares elásticas para depois sim levar em consideração os efeitos do escoamento do material. Entretanto, devido à singularidade da formulação matemática, essas estimativas possuem um carácter apenas qualitativo, pois o problema da estimativa das zonas plásticas à frente da ponta de trincas é intrinsecamente não linear. Com base nessa ideia da não linearidade, o Capítulo 7 apresentou estimativas de zonas plásticas obtidas numericamente via o MEF e a partir de uma análise não linear. Todas as análises não lineares são feitas a partir da utilização do programa ANSYS (2001) e da consideração do modelo constitutivo bilinear, que possui duas fases. A primeira fase desse modelo é determinada pela tensão de escoamento e pelo módulo de Young ( $E$ ). A segunda fase é determinada pela deformação plástica e pelo coeficiente de encruamento ( $H$ ). Dois exemplos foram estudados nesse capítulo. O primeiro exemplo foi o de uma placa retangular com uma trinca central sob tração e o segundo exemplo foi o de uma placa retangular com uma trinca central sob flexo tração. Dois valores de  $a/W$  e seis valores de  $\sigma_r/S_Y$  foram utilizados em ambos os exemplos. Foi estudado, em cada um dos exemplos, os efeitos de  $H$  nas estimativas das zonas plásticas normalizadas. A conclusão obtida foi que a variação de  $H$  pareceu alterar mais a forma do que o tamanho das zonas plásticas. Além do estudo dos efeitos de  $H$  nas zonas plásticas, a principal contribuição desse capítulo foi a comparação entre as zonas plásticas lineares elásticas corrigidas numericamente e que consideram materiais perfeitamente plásticos com as zonas plásticas obtidas a partir de uma análise não linear e que usa  $H = 1\%E$ , situação que mais se assemelha ao caso de um material perfeitamente plástico. A constatação que se obteve foi que as correções resultam em zonas plásticas bem diferentes das zonas plásticas geradas a partir de uma análise não linear. Entretanto, para alguns valores de  $\sigma_r/S_Y$  e para determinados

valores de  $a/W$ , as zonas plásticas corrigidas são bem próximas das zonas plásticas obtidas por análise não linear na direção paralela ao plano da trinca. Esse resultado é coerente com o que já tinha sido proposto por Irwin (1958).

É possível destacar os seguintes itens como as principais conclusões e as principais contribuições deste trabalho:

- Os campos de tensões gerados a partir da utilização de  $K_I$  ou de  $K_I$  mais  $T$ -stress não são suficientes para se estimar zonas plásticas quando o nível de  $\sigma_r/S_Y$  for alto.
- A conclusão de que os campos de tensões gerados por  $K_I$  e por  $K_I$  mais  $T$ -stress não são suficientes para se estimar zonas plásticas para altos níveis de  $\sigma_r/S_Y$  pode ser obtida a partir do momento que se mostrou que esses dois campos são na verdade partes do campo de tensões completo, que pode ser obtido analiticamente por uma função de tensão de Westergaard ou numericamente a partir do MHEC ou do MEF.
- A incompletude dos campos de tensões gerados por  $K_I$  e por  $K_I$  mais  $T$ -stress também foi mostrada em termos de estimativa de zonas plásticas quando se analisou a placa de Griffith. Nesse exemplo, que possui uma função de tensão de Westergaard conhecida, mostrou-se que  $K_I$  e a  $T$ -stress são termos da expansão da função de tensão de Westergaard em termos da série de Williams. Nessa verificação foi constatado que quanto maior o valor  $\sigma_r/S_Y$ , mais termos são necessários na série de Williams para se reproduzir as estimativas de zonas plásticas obtidas pelo campo de tensões gerado pela função de tensão de Westergaard.
- Com base na ideia de Irwin (1958) que utiliza o campo de tensões gerado por  $K_I$  e que corrige as zonas plásticas na direção paralela ao plano da trinca a partir da consideração de um material perfeitamente plástico, e na ideia de Rodriguez (2007) que utiliza o campo de tensões gerado pela função de tensão de Westergaard e que corrige as zonas plásticas em todas as direções a partir da consideração de um material perfeitamente plástico, este trabalho apresentou três formas de correção das zonas plásticas lineares elásticas que partem da consideração de um material perfeitamente plástico e uma proposta de correção que levam em consideração os efeitos do encruamento nessas zonas plásticas.

- Este trabalho mostrou, em termos de estimativa de zonas plásticas, que o MHEC que utiliza a função de tensão de Westergaard como solução fundamental (Lopes, 2002) e (Dumont & Lopes, 2003) pode ser utilizado de forma eficiente para se calcular valores de  $K$  para geometrias arbitrárias que apresentem trincas internas. Essa constatação é feita partir da verificação que as zonas plásticas obtidas pelo MHEC são praticamente iguais às zonas plásticas obtidas pela função de tensão de Westergaard.
- A partir da utilização do programa DEMO-IMO, este trabalho mostrou que o MEF gera estimativas de zonas plásticas iguais às estimativas obtidas pelo MHEC.
- Com a comparação entre as zonas plásticas normalizadas corrigidas numericamente e as zonas plásticas elastoplásticas obtidas pelo programa ANSYS (2001), foi possível constatar que as propostas de correção só geram bons resultados nas direções paralelas ao plano das trincas. Esse fato já tinha sido constatado por Irwin (1958). Entretanto, Irwin utilizou o campo de tensões obtido a partir de  $K_I$ . Este trabalho utilizou a proposta feita por Rodriguez (2007) que usa o campo de tensões linear elástico completo.
- Por mostrar que os campos de tensões obtidos a partir de  $K_I$  ou por  $K_I$  mais  $T$ -stress são partes da solução linear elástica completa, e que por isso, esses campos de tensões não devem ser utilizados para estimar o tamanho de zonas plásticas em altos níveis de  $\sigma_r/S_Y$ , este trabalho apresenta como conclusão o fato de que o fraturamento de peças trincadas não deve ser previsto, de forma indiscriminada, a partir da comparação entre  $K$  e uma medida de tenacidade,  $K_{IC}$  por exemplo.
- Este trabalho também apresenta como grande contribuição na área de pesquisa na qual ele está inserido, a extensa quantidade de estimativas de zonas plásticas obtidas linearmente de forma analítica e numérica e de zonas plásticas obtidas a partir de uma análise numérica não linear.

Como sugestão para trabalhos futuros, este trabalho propõe:

- A realização de estimativas numéricas lineares e não lineares de zonas plásticas para corpos com trincas tridimensionais.

- O estudo do efeito da espessura nas zonas plásticas tridimensionais e a comparação dessas zonas plásticas com as zonas plásticas correspondentes aos estados planos apresentadas neste trabalho.
- A obtenção de medidas de zonas plásticas obtidas a partir de ensaios laboratoriais. Área de pesquisa que tem sido desenvolvida no laboratório de fotoelasticidade do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio.
- O desenvolvimento de pesquisa que consiga relacionar as estimativas de zonas plásticas obtidas linearmente e das zonas plásticas obtidas a partir de uma análise não linear com a tenacidade das peças trincadas.
- O desenvolvimento de pesquisa que consiga relacionar as medidas das zonas plásticas obtidas experimentalmente com a tenacidade das peças trincadas.

## 9

### Referências bibliográficas

ANDERSON, T.L. **Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications**. 2.ed. CRC Press, 1995.

ANSYS. **Manual eletrônico** (<http://www.mece.ualberta.ca/tutorials/ansys/>). 2001.

ASTM. Annual Book of ASTM Standards. American Society for Testing Materials, Philadelphia, 1970.

BARSOUM, R.S. **On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.10, p.25-37, 1976.

BEGLEY, J.A., LANDES, J.D. **The J-Integral as a Fracture Criterion. Fracture Toughness**, Proceedings of the 1971 National Symposium on Fracture Mechanics Part II, ASTM STP 514, American Society for Testing and Materials. p. 1-26, 1972.

BÉTEGON, C., HANCOCK, J.W. **Two-Parameter characterization of elastic-plastic crack-tip fields**. Journal of Applied Mechanics, v.58, p.104-110, 1991.

BILBY, B.A., CARDEW, G.E., GOLDTHORPE, M.R., HOWARD, I.C. **A finite element investigation of the effect of specimen geometry on the fields of stress and strain at the tip of stationary cracks. Size Effects in Fracture**, I. Mech. E, London, p.37-46, 1986.

BROBERG, K.B. **Crack-growth criteria and non-linear fracture mechanics**. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, v.19, p.407-418, 1971.

BROEK, D. **Some considerations on slow crack growth**. International Journal of Fracture Mechanics, v.4, p. 19-34, 1968.

BROEK, D. **A study on ductile fracture**. Nat. Aerospace Inst. Amsterdam, Rept. TR 71021, 1971.

BROEK, D. **Correlation between stretch zone size and fracture toughness**. Engineering Fracture Mechanics, v.6, p.173-181, 1974.

BROEK, D. **The Practical Use of Fracture Mechanics**, Kluwer, 1988.

BURDEKIN, F.M., STONE, D.E.W. **The crack opening displacement approach to fracture mechanics in yielding materials.** The Journal of Strain Analysis for Engineering Design, v.1, p.145-153, 1966.

CARDEW, G.E., GOLDTHORPE, M.R., HOWARD, I.C., KFOURI, A.P. **On the elastic T-term.** In: Fundamentals of Deformation and Fracture. Edited by B.A. Bilby, K.J. Miller and J.R. Willis Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

CAROTHERS, S.D. **Plane Strain: The Direct Determination of Stress.** Proceedings of the Royal Society of London, series A, v.97, p.110-123, 1920.

CASTRO, J.T.P., MEGGIOLARO, M.A. **Fadiga - Técnicas e Práticas de Dimensionamento Estrutural sob Cargas Reais de Serviço: V. I - Iniciação de Trincas.** 1.ed. Rio de Janeiro: Copyright, 2009.

CASTRO J.T.P., MEGGIOLARO, M.A. **Fadiga - Técnicas e Práticas de Dimensionamento Estrutural sob Cargas Reais de Serviço: V. II - Propagação de Trincas, Efeitos Térmicos e Estocásticos.** 1.ed. Rio de Janeiro: Copyright, 2009.

CASTRO, J.T.P., SOUSA, R.A., LOPES, A.A.O., MARTHA, L.F. **Comparing improved crack tip plastic zone estimates considering corrections based on T-stress and on complete stress fields.** First IJFatigue & FFEMS Joint Workshop on Characterisation Crack Tip Stress Fields, p. 58-65, Forni di Sopra, Itália, 2011.

CHANG, T, Li, G., HOU, J. **Effects of applied stress level on plastic zone size and opening stress ratio of a fatigue crack.** International Journal of Fatigue, v.27, p.519-526, 2005.

CHEN, Y.H., TIAN, W.Y. **A semi-infinite interface crack interacting with subinterface matrix cracks in dissimilar anisotropic materials. II numerical results and discussion.** International Journal of Fracture, v.37, p.7731-7742, 2000.

CHEN, C.S., KRAUSE, R., PETTIT, R.G., BANKS-SILLS, L., INGRAFFEA, A.R., **Numerical assessment of T-stress computation using a p-version finite element method.** International Journal of Fracture, v.107, p.177-199, 2001.

DE WIT, R., FIELDS, R.J., IRWIN, G.R. **Use of thickness reduction to estimate fracture toughness.** Constraint Effects in Fracture Theories and Applications ASTM STP 1171, E.M. Hackett, K.-H. Schwalbe and R.H. Dodds. Eds., American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 361-382, 1993.

DU, Z.Z., HANCOCK, J.W. **The effect of non-singular stresses on crack tip constraint.** Journal of the Mechanics and Physics of Solids, v.39, p.555-567, 1991.

DUGDALE, D.S. **Yielding of Steel Sheets Containing Slits.** Journal of the Mechanics and Physics of Solids, v.8, n.2, p.100-104, 1960.

DUMONT, N.A. **The Hybrid Boundary Element Method: An Alliance Between Mechanical Consistency And Simplicity.** Applied Mechanics Reviews, v.42, p.s54-s63, 1989.

DUMONT, N.A. **An Assessment Of The Spectral Properties Of The Matrix G Used In The Boundary Element Methods.** Journal of Computational Mechanics, v.22, p.32-41, 1998.

DUMONT, N.A., LOPES, A.A.O. **On the Explicit Evaluation of Stress Intensity Factors in the Hybrid Boundary Element Method.** Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, v.26, p.151-165, 2003.

EFITS, J., LIEBOWITZ, H. **On the Modified Westergaard Equations for Certain Plane Crack Problems.** International Journal of Fracture Mechanics, v.8, p.383-392, 1972.

FETT, T. **A compendium of T-stress solution.** Institut für Materialforschung. (<http://bibliothek.fzk.de/zb/berichte/FZKA6057.pdf>), 1998.

GANTI, S., PARKS, D.M. **Elastic-plastic fracture mechanics of strength-mismatched interface cracks.** In: Mahidhara, R.K.; Geltmacher, A.B.; Matic, P.; Sadananda, K. (Eds.), Advances in Fracture. The Minerals, Metals and Materials Society, Warren-dale, Pennsylvania, p.13-25, 1997.

GERBERICH, W.W., HEMMINGS, P.L. **Fractographic observations of stretched regions in front of fatigue cracks.** Transactions of the American Society for Metals, v.62, p.540-543, 1969.

GRIFFITH, A.A. **The phenomenon of rupture and flow in solids.** Philosophical Transactions of the Royal Society series A, v.221, p.163-198, 1920.

GRIFFIS, G.A., SPRETNAK, J.W. **A suggestion on the nature of the plastic stretched zone.** Metall. Trans, v.1, p. 550-551, 1970.

HENSHELL, R.D., SHAW, K.G. **Crack tip finite elements are unnecessary.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.9, p.495-507, 1975.

HILTON, P.D., HUTCHINSON, J.W. **Plastic intensity factors for cracked plates.** Engineering Fracture Mechanics, v.3, p.435-451, 1971.

HUTCHINSON, J.W. **Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material.** Journal of the Mechanics and Physics of Solids, v.16, p.13-31, 1968, *a*.

HUTCHINSON, J.W. **Plastic stress and strain fields at a crack tip.** Journal of the Mechanics and Physics of Solids, v.16, p. 337-347, 1968, *b*.

INGLIS, C.E. **Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners.** Transactions of the Institution of Naval Architects. v.55, p.219-230, 1913.

IRWIN, G.R. **Onset of Fast Crack Propagation in High Strength Steel and Aluminum Alloys.** Proceedings of 1955 Sagamore Conference on Strength Limitations of Metals, Syracuse University, N.Y., March, v.2, p.289-305, 1956.

IRWIN, G.R. **Analysis of Stress and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate.** Journal of Applied Mechanics, v.24, p.361-364, 1957.

IRWIN, G.R. **Discussion.** Proc.SESA, v.16, p.93, 1958.

ISHIKAWA, K., TSUYA, K. **Plastic deformation around the tip of a stopped brittle crack in the Robertson test with a temperature gradient.** Engineering Fracture Mechanics, v.6, p.671-679, 1974.

KANG, K.J., BEOM, H.G. **Plastic zone size near the crack tip in a constrained ductile layer under mixed mode loading.** Engineering Fracture Mechanics, v.66, p.257-268, 2000.

KARIHALOO, B.L., XIAO, Q.Z. **Higher order terms of the crack tip asymptotic field for a notched three-point-bend beam.** International Journal of Fracture, v.112, p.111-128, 2001.

KFOURI, A.P. **Some evaluations of the elastic T-stress using Eshelby's method.** International Journal of Fracture, v.30, p.301-315, 1986.

KIM, Do-H., KANG, Ki-Ju. **Two parameter approach for elastic-plastic fracture of short cracked specimens under mixed mode loading.** International Journal of Fracture, v.116, p.245-273, 2002.

KIM, Y.J., LIN, G., CORNEC, A., BROCKS, W., SCHWALBE, K.H. **On the maximum stresses in the constraint ductile layer under small scale yielding conditions.** International Journal of Fracture, v.75, p.9-16, 1996.

KUDARI, S.K., MAITI, B., RAY, K.K. **The effect of specimen geometry on plastic zone size: a study using the J integral.** The Journal of Strain Analysis for Engineering Design, v.42, p.125-136, 2007.

KUDARI, S.K., KODANCHA, K.G. **On the relationship between J-integral and CTOD for CT and SENB specimens.** Frattura ed integrità strutturale, v.6, p.3-10, 2008.

KUJAWSKI, D., ELLYIN, F. **On the size of plastic zone ahead of crack tip.** Engineering Fracture Mechanics, v.25, p.229-236, 1986.

LARSSON, S.G., CARLSSON, A.J. **Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials.** Journal of the Mechanics and Physics of Solids, v.21, p.263-277, 1973.

LEEVEERS, P.S., RADON, J.C. **Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries.** International Journal of Fracture, v.19, p.311-325, 1982.

LI, Q., ZHENG, W., SHU, H. **A review of the effect of a/W ratio on fracture toughness (III) – theoretical analysis.** Journal of Marine Science and Application, v.4, p.1-4, 2005.

LIEBOWITZ, H., EFTIS, J. **On nonlinear effects in fracture mechanics.** Engineering Fracture Mechanics, v.3, p.267-281, 1971.

LOPES, A.A.O. **O Método Híbrido dos Elementos de Contorno Aplicado a Problemas de Mecânica da Fratura.** Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio, Rio de Janeiro – RJ – Brasil, 1998.

LOPES, A.A.O. **Determinação de fatores de intensidade de tensão com o método híbrido dos elementos de contorno.** Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio, Rio de Janeiro – RJ – Brasil, 2002.

LOPES, A.A.O., SOUSA, R.A., MARTHA, L.F., CASTRO, J.T.P., DUMONT, N.A. **Determinação de zonas plásticas usando a mecânica da fratura linear elástica e o método dos elementos de contorno.** Anais do 30 CILAMCE / Congresso Íbero Latino Americano sobre Métodos Computacionais de Engenharia, Búzios – Rio de Janeiro, Brasil, 2009.

MALIK, S.N., FU, L.S. **Elasto-plastic analysis for a finite thickness rectangular plate containing a through-thickness central crack.** International Journal of Fracture, v.18, p. 45-63, 1982.

McMEEKING, R.M., PARKS, D.M. **On Criteria for J-Dominance of crack-tip fields in large-scale yielding.** ASTM special technical publication, p.175-194, 1979.

MISEREZ, A., ROSSOLL, A., MORTENSEN, A. **Investigation of crack-tip in high volume fraction particulate metal matrix composites.** Engineering Fracture Mechanics, v.71, p.2385-2406, 2004.

NÁDAI, A. **Über die Spannungsverteilung in einer durch eine Einzelkraft belasteten rechteckigen Platte.** Der Bauingenieur, v.2, p.11-16, 1921.

NAKAMURA, T., PARKS, D.M. **Three-Dimensional stress field near the crack front of a thin elastic plate.** Journal of Applied Mechanics, v.55, p.805-813, 1988.

NAKAMURA, T., PARKS, D.M. **Three-Dimensional crack front fields in a thin ductile plate.** Journal of the Mechanics and Physics of Solids, v.38, p.787-812, 1990.

NAKAMURA, T., PARKS, D.M. **Determination of elastic T-stress along three-dimensional crack fronts using an interaction integral.** International Journal of Solids and Structures, v.29, p.1597-1611, 1992.

NASGRO. **Manual do programa.** v. 3, NASA, 1998.

NEWMAN, J.C.Jr., CREWS, J.H.Jr., BIGELOW, C.A., DAWICKE, D.S. **Variations of a global constraint factor in cracked bodies under tension and**

**bending loads.** Constraint Effects in Fracture Theories and Applications: Second Volume, ASTM STP 1244, M.Kirk and A. Bakker. Eds., American Society for Testing and Materials, p.21-42, 1995.

NORMA E399. **Standard Test Method for Plane-Strain Fracture Toughness of Metallic Materials.** ASTM Standards, v. 03.01, 1990.

NORMA E561. **Standard Practice for R-Curve Determination.** ASTM Standards, v. 03.01, 1999.

NORMA E740. **Standard Practice for Fracture Testing with Surface-Crack Tension Specimens.** ASTM Standards, v. 03.01, 1988.

NORMA E813. **Test Method for  $J_{IC}$ , a Measure of Fracture Toughness.** ASTM Standards, 1987.

NORMA E1152. **Test Method for Determining J-R Curves.** ASTM Standards, 1995.

NORMA E1221. **Standard Test Method for Determining Plane-Strain Crack-Arrest Fracture Toughness,  $K_{Ia}$ , of Ferritic Steels.** ASTM Standards, v. 03.01, 1996.

NORMA E1290. **Standard Test Method for Crack-Tip Opening Displacement (CTOD) Fracture Toughness Measurement.** ASTM Standards, v. 03.01, 2003.

NORMA E1304. **Standard Test Method for Plane-Strain (Chevron-Notch) Fracture Toughness of Metallic Materials.** ASTM Standards, v. 03.01, 1989.

NORMA E1737. **Test Method for J-Integral Characterization of Fracture Toughness.** ASTM Standards, 1996.

NORMA E1820. **Standard Test Method for Measurement of Fracture Toughness.** ASTM Standards, v. 03.01, 2001.

O'DOWD, N.P., SHIH, C.F. **Family of crack-tip fields characterized by triaxiality parameter.** Journal of the Mechanics and Physics of Solids, v.39, p.939-963, 1991.

RAMESH, K.; GUPTA, S., KELKAR, A.A. **Evaluation of stress field parameters in fracture mechanics by photoelasticity-revisited.** Engineering Fracture Mechanics, v.56, p.25-45, 1997.

RICE, J.R. Fracture: An Advanced Treatise (edited by Liebowitz, H.), **Vol. II, Mathematical Fundamentals**, Academic Press, New York, 191, 1968, *a*.

RICE, J.R. **A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks.** Journal of Applied Mechanics, v.35, p.379-386, 1968, *b*.

RICE, J.R., ROSENGREN, G.F. **Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material.** Journal of the Mechanics and Physics of Solids, v.16, p1:12, 1968.

RICE, J.R. **Limitations to the small scale yielding approximation for crack tip plasticity.** Journal of the Mechanics and Physics of Solids, v.22, p.17-26, 1974.

RODRIGUEZ, H.Z. **Efeito da tensão nominal no tamanho e forma da zona plástica.** Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio, Rio de Janeiro – RJ – Brasil, 2007.

RODRIGUEZ, H.Z, CASTRO, J.T.P, MEGGIOLARO, M.A. **Nominal stress effects on the size and shape of plastic zones.** Low Cycle Fatigue, Alemanha, 2008.

SANFORD, R.J. **A Critical Re-Examination of the Westergaard Method for Solving Opening-Mode Crack Problems.** Mechanics Research Communications. v.6, p.289-294, 1979.

SHAM, T.L. **The determination of elastic T-term using higher order weight functions.** International Journal of Fracture, v.48, p.81-102, 1991.

SIH, G.C. **On The Westergaard Method of Crack Analysis.** International Journal Fracture Mechanics, v.2, p.628-640, 1966.

SMITH, D.J., AYATOLLAHI, M.R., PAVIER, M.J. **The role of T-stress in brittle fracture for linear elastic materials under mixed-mode loading.** Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, v.24, p.137-150, 2001.

SMITH, E. **The size of the cohesive zone at a crack tip.** Engineering Fracture Mechanics, v.7, p.285-289, 1975.

SOMMER, E., AURICH, D. **On the effect of constraint on ductile fracture. Defect Assessment in Components – Fundamentals and Applications,** ESIS/EGF9, Blauel, J.G. and Schwalbe, K.-H. (Eds.), Mechanical Engineering Publications, London, 141-174, 1991.

SOUSA, R.A., MARTHA, L.F., CASTRO, J.T.P., LOPES, A.A.O., MIRANDA, A.C.O. **Parâmetros que influenciam nas medidas de zonas plásticas usando a mecânica da fratura linear elástica.** Anais do 30 CILAMCE / Congresso Íbero Latino Americano sobre Métodos Computacionais de Engenharia, Búzios – Rio de Janeiro, Brasil, 2009.

SOUSA, MARTHA, L.F., CASTRO, J.T.P., LOPES. **Modelos que avaliam a influência do encruamento no tamanho e na forma da zona plástica.** Anais do 31 CILAMCE / Congresso Íbero Latino Americano sobre Métodos Computacionais de Engenharia, Buenos Aires, Argentina, 2010.

SPITZIG, W.A. **A fractographic feature of plane strain fracture.** Transactions of the American Society for Metals, v.61, p.344-349, 1968.

SU, K.L, SUN, H.Y. **A brief note on elastic T-stress for centred crack in anisotropic plate.** International Journal of Fracture, v.131, p.53-58, 2005.

SUN, C.T., FARRIS, T.N. **On the Completeness of the Westergaard Stress Functions.** International Journal of Fracture, v.40, p.73-77, 1989.

TADA, H., PARIS, P.C., IRWIN, G.R. **The Stress Analysis of Cracks Handbooks.** 2 ed. Paris Productions, Inc., St. Louis, 1985.

TAN, C.L., WANG, X. **The use of quarter-point crack tip elements for T-stress determination in boundary element method analysis.** Engineering Fracture Mechanics, v.70, p. 2247-2252, 2003.

TAY, T.E., TAY, C.M., TAY, C.J. **Crack tip and notch tip plastic zone size measurement by the laser speckle technique.** Engineering Fracture Mechanics, v.52, p.879-893, 1995.

TRACEY, D.M. **Finite element solutions for crack-tip behavior in small scale yielding.** Journal of Engineering Materials and Technology, v.98, p.146-151, 1976.

UNGER, D. J. **Analytical Fracture Mechanics.** Dover, 2001.

VITVITSKII, P.M; PANASYUK, V.V.; YAREMA, S.Ya. **Plastic Deformation Around Crack and Fracture Criteria.** Engineering Fracture Mechanics, v.7, p.305-319, 1975.

VROMAN, G.A. **Material thickness effect on critical stress intensity.** Monograph n° 106, TRW Space and Technology Group; 1983.

WALLIN, K. **The size effect in  $K_{IC}$  results.** Engineering Fracture Mechanics, v.22, p.149-163, 1985.

WANG, X. **Elastic T-stress solutions for penny-shaped cracks under tension and bending.** Engineering Fracture Mechanics, v.71, p.2283-2298, 2004.

WANG, Y.Y. **On the two-parameter characterization of elastic-plastic crack front fields in surface cracked plates.** In: Hackett, E.M.; Schwalbe, K.H.; Dodds, R.H., eds. Constraint Effects in Fracture. ASTM STP 1171. American Society for Testing and Materials, p.120-138, 1993.

WANG, Y.Y., PARKS, D.M. **Evaluation of the elastic T-stress in surface cracked plates using the line-spring method.** International journal of Fracture, v.56, p.25-40, 1992.

WEISS, B.-Z., MEYERSON, M.R. **Plastic zone formation and fatigue crack extension during high cyclic bending of steels.** Engineering Fracture Mechanics, v.3, p.475-491, 1971.

WELLS, A.A.; POST, D. **The Dynamic Stress Distribution Surrounding a Running Crack—A Photoelastic Analysis.** Proc. SESA, v.16, p.69, 1958.

WESTERGAARD, H.M. **Bearing Pressures and Cracks.** Journal of Applied Mechanics, v.6, p.49-53, 1939.

WILLIAMS, M.L. **On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack.** Journal of Applied Mechanics, v.24, p.109-114, 1957.

YANG, Y.Y., MUNZ, D., SCKUHR, M.A. **Evaluation of the plastic zone in an elastic-plastic dissimilar materials joint.** Engineering Fracture Mechanics, v.56, p.691-710, 1997.

YUAN, H., BROCKS, W. **Quantification of constraint effects in three-dimensional crack front fields.** Journal of the Mechanics Physics Solids, v.46, p.219-241, 1997.

ZHANG, Z.L., HAUGE, M.; THALOW, C. **The effect of T-stress on the near tip stress field of an elastic-plastic interface crack.** In: Karihaloo, B.L.; Mai, Y.-W.; Ripley, M.I.; Ritchie, R.O. (Eds.), Proceedings of the Ninth International Conference on Fracture, Pergamon, Amsterdam, p.2643-2650, 1997.

ZHAO, L.G., TONG, J., BYRNE, J. **Stress intensity factor and elastic T-stress for corner cracks.** International Journal of fracture, v.109, p.209-225, 2001.

ZHU, P., YANG, L., LI, Z., SUN, J. **The shielding effects of the crack-tip plastic zone.** International Journal of Fracture, v. 161, p. 131-139, 2010.

## Apêndice

O apêndice deste trabalho é dividido em três seções. A primeira seção mostra o processo de obtenção das zonas plásticas feitas a partir do uso do programa DEMO-IMO, desenvolvido pelo Tecgraf/PUC-Rio, que captura a fronteira elastoplástica resultante do pós-processamento da análise de elementos finitos. A segunda seção mostra a sensibilidade das estimativas das zonas plásticas feitas a partir do Método dos Elementos Finitos (MEF) em relação ao nível de refinamento da malha e faz uma breve comparação dessas estimativas com as estimativas feitas pelo Método Híbrido dos Elementos de Contorno (MHEC). A terceira seção apresenta o programa desenvolvido em Mathcad que foi usado na seção 5.7 para determinar os valores do comprimento da trinca, largura da placa e da força aplicada nos espécimes CCT, SENT e SENB de tal forma que se pudesse manter fixo o valor de  $K_I$  e de  $\sigma_n/S_Y$  de cada espécime.

### **A.1. Obtenção das zonas plásticas a partir do pós-processamento da análise de elementos finitos**

No exemplo estudado nesta seção, adota-se um material com tensão de escoamento igual à 250 MPa. Devido ao alto gradiente de tensões presente nas proximidades da ponta das trincas, o modelo de elementos finitos é dividido em vários subdomínios, cada um com diferentes graus de refinamento da malha. Para ilustrar melhor esse procedimento, mostra-se a Figura A.1.

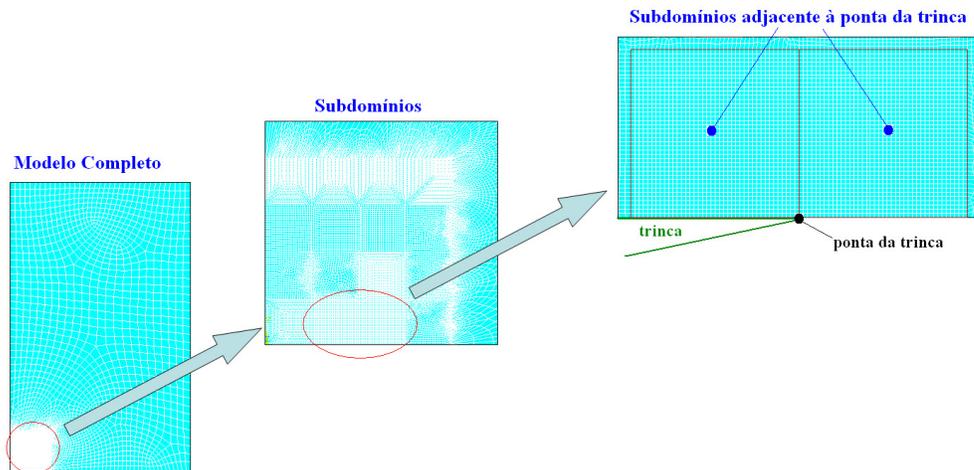


Figura A.1 – Divisão do modelo completo do espécime CCT em subdomínios com diferentes graus de refinamento da malha.

Após criar os subdomínios do modelo e resolver o sistema de equações para o caso plano (tensão plana para este exemplo), visualiza-se no programa ANSYS (2001) as tensões nodais segundo o critério de escoamento de Mises e se limita a tensão máxima ao valor da tensão de escoamento, conforme mostra a Figura A.2.

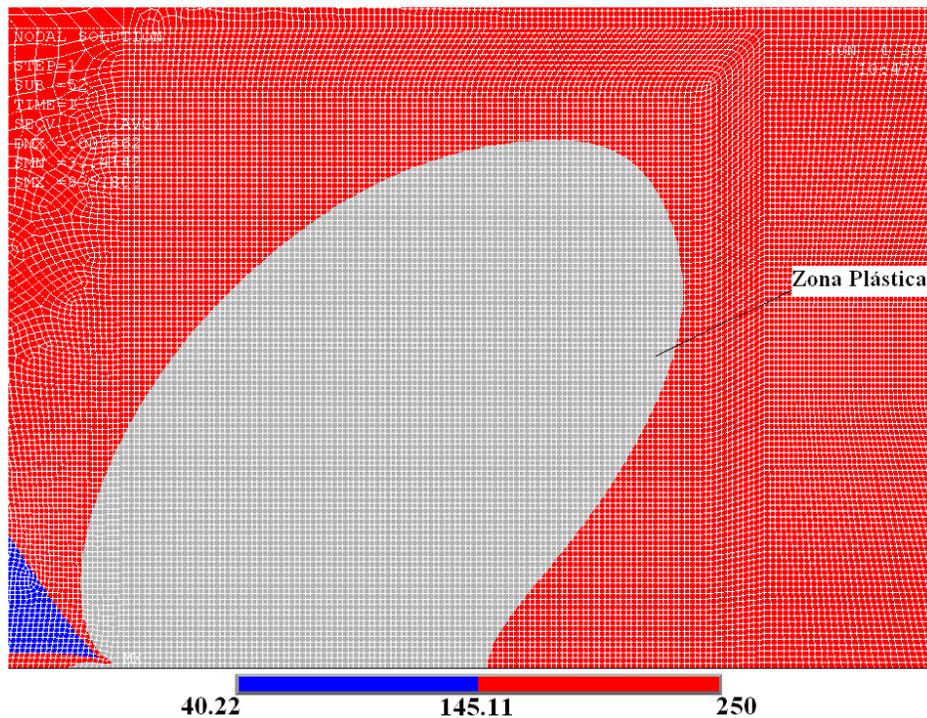


Figura A.2 – Resposta nodal da tensão equivalente de Mises com a tensão máxima limitada a tensão de escoamento em que se visualiza a zona plástica na ponta da trinca para o modelo do espécime CCT sob tensão plana.

A parte que não está colorida (cor cinza) na Figura A.2 é a zona plástica do exemplo estudado. Para se obter o contorno elastoplástico, aproveitam-se os subdomínios de tamanhos conhecidos para servirem referência ao programa DEMO-IMO. A Figura A.3 mostra o resultado do tratamento da Figura A.2 em que se delimita as fronteiras de um subdomínio adjacente à ponta da trinca que servirão de escala para o programa DEMO-IMO.

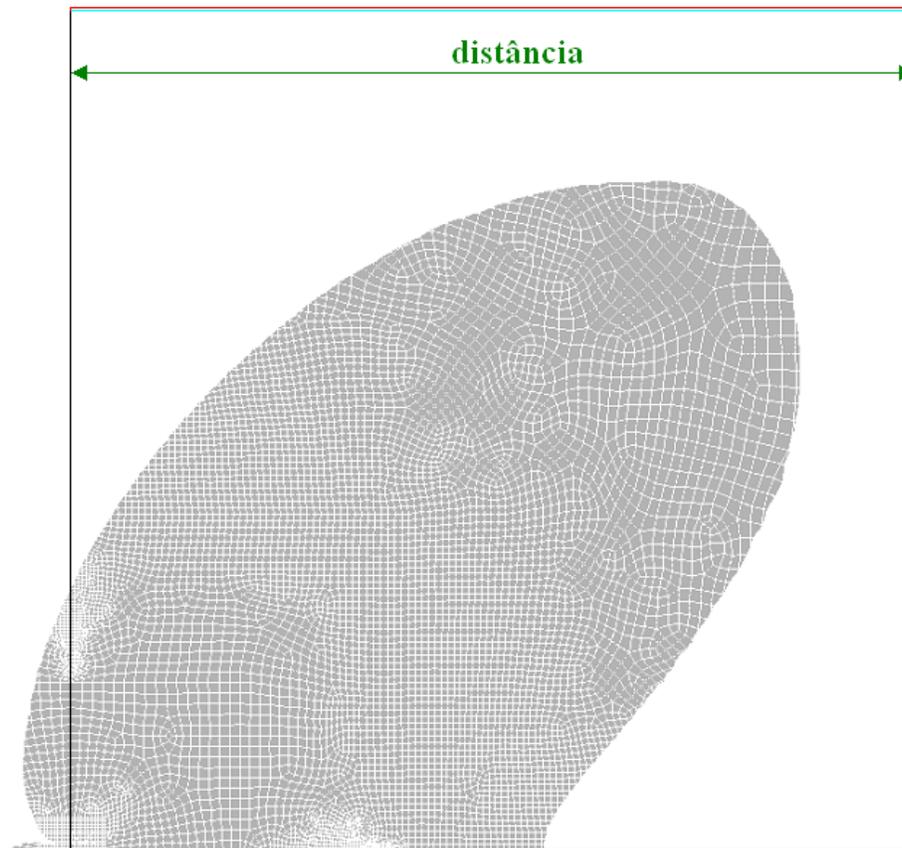


Figura A.3 – Uso do programa DEMO-IMO após se delimitar a fronteira de um subdomínio adjacente à ponta da trinca em que se conhece previamente as suas dimensões.

Na Figura A.3 o valor *distância* é conhecido e serve de escala para o programa DEMO-IMO. Após se definir os limites do subdomínio e a escala do modelo, os pontos sob fronteira elastoplástica são coletados manualmente, conforme mostra a Figura A.4. A curva vermelha mostrada na Figura A.4 é a zona plástica utilizada ao longo de todo este trabalho.

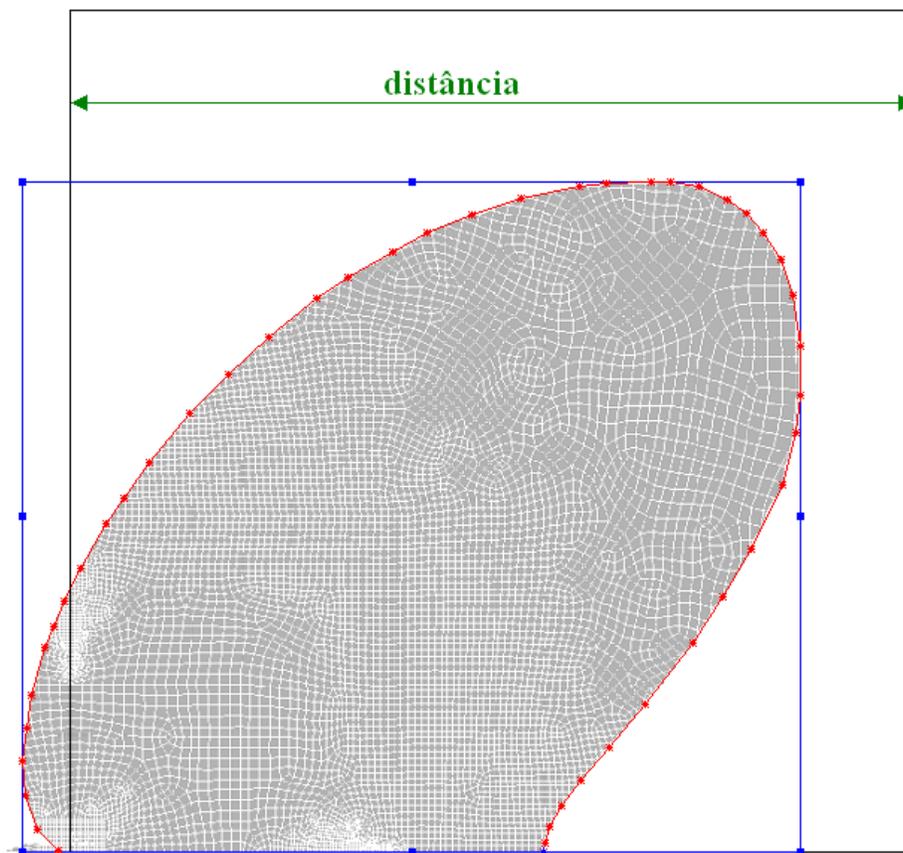


Figura A.4 – Obtenção da zona plástica a partir do uso do programa DEMO-IMO.

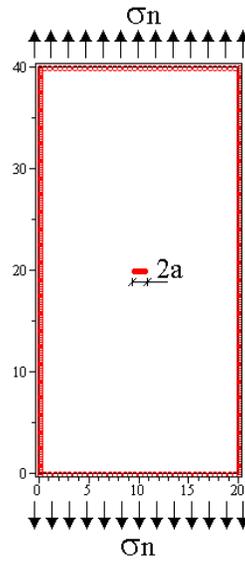
A próxima seção deste apêndice faz uma breve discussão sobre a sensibilidade das zonas plásticas obtidas por uma análise numérica feita por elementos finitos em relação ao nível de refinamento da malha.

## **A.2. Sensibilidade das estimativas das zonas plásticas obtidas pelo método dos elementos finitos em relação ao nível de refinamento da malha**

Para mostrar a sensibilidade das estimativas das zonas plásticas em relação ao nível de refinamento da malha, adotou-se uma relação  $\sigma_r/S_Y = 0,4$  para uma relação de  $a/W = 0,1$  para o espécime CCT sob estado plano de tensão. Entretanto, é importante ressaltar que todas as estimativas de zonas plásticas obtidas a partir do uso do MEF que foram apresentadas ao longo deste trabalho foram testadas em relação ao nível de refinamento da malha.

Foram necessários cinco níveis de refinamento da malha de elementos finitos para se fazer com que a estimativa das zonas plásticas obtidas pelo MEF fossem

coincidentes com as estimativas de zonas plásticas obtidas pelo MHEC. A malha de elementos de contorno usada nesse exemplo pode ser visualizada na Figura A.5, em que  $NE$  o número de elementos utilizados no contorno e  $NET$  indica o número de elementos utilizados na trinca.



$$NE = 400 \text{ 1D},$$

$$NET = 30 \text{ 1D}$$

Figura A.5 – Obtenção da zona plástica a partir do uso do programa DEMO-IMO.

Três dos cinco níveis de refinamento de malha utilizados no programa ANSYS (2001) podem ser visualizadas na Figura A.6.

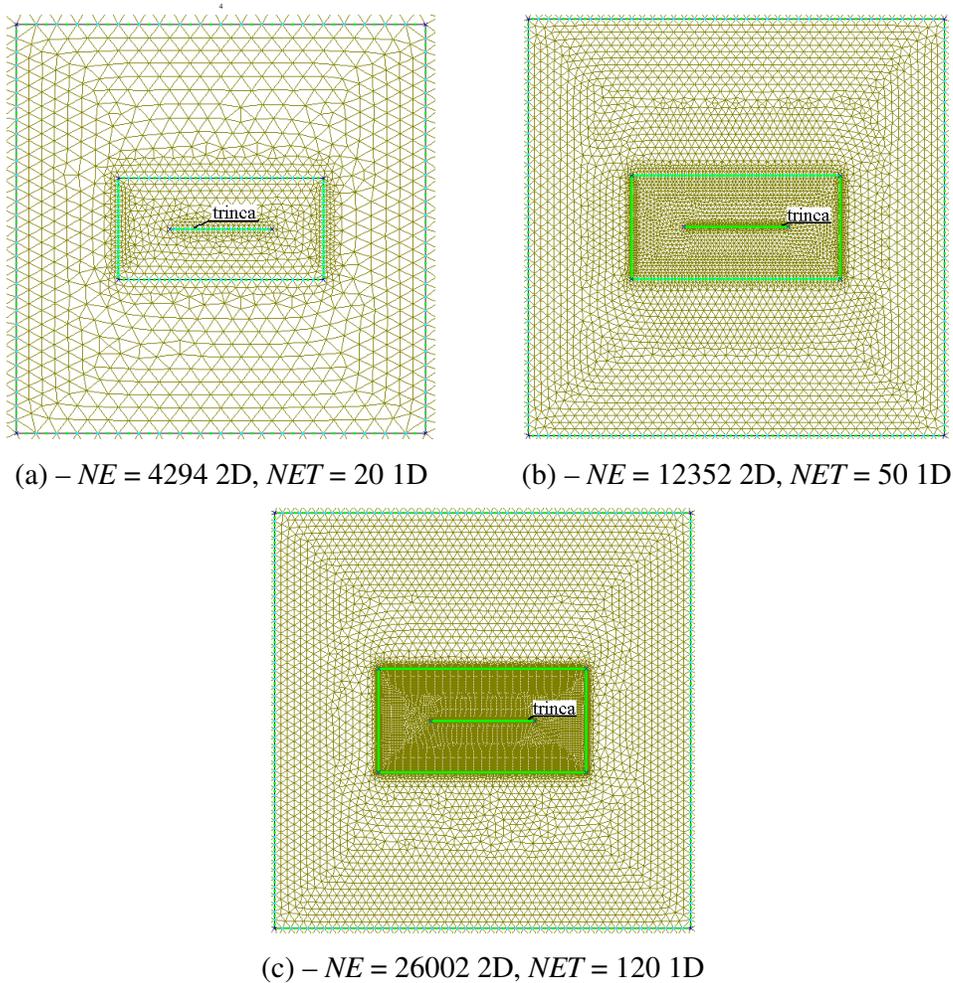


Figura A.6 – Detalhe de três dos cinco níveis de refinamento utilizados nas malhas de elementos finitos para o estado de tensão plana, com  $\sigma_x/S_y = 0,4$  e para  $a/W = 0,10$ , em que (a) mostra o menor nível de refinamento usado, (b) mostra um nível de refinamento intermediário e (c) mostra o maior nível de refinamento usado na estimativa das zonas plásticas.

A Figura A.7 mostra a zona plástica  $pz_M^{LE-MHEC}$  para o único nível de refinamento usado no MHEC, conforme mostra a Figura A.5 e a zona plástica  $pz_M^{LE-MEF}$  estimada para o primeiro nível de refinamento usado no MEF.

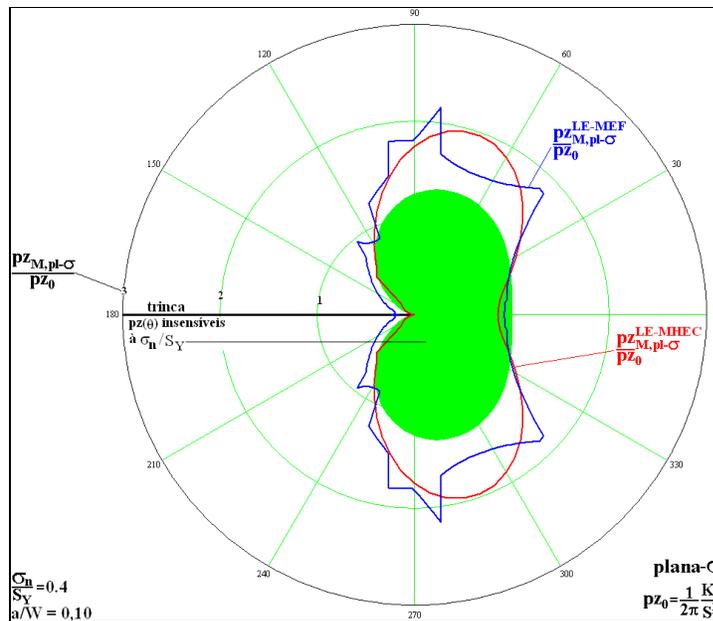


Figura A.7 – Zonas plásticas lineares elásticas estimadas pelo MHEC e pelo MEF sob estado de tensão plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,4$  e com  $a/W = 0,10$  para o exemplo do espécime CCT para o primeiro nível de refinamento da malha de elementos finitos.

A Figura A.8 mostra a zona plástica  $pz_M^{LE-MHEC}$  para o único nível de refinamento usado no MHEC, conforme mostra a Figura A.5 e a zona plástica  $pz_M^{LE-MEF}$  estimada para o segundo nível de refinamento usado no MEF.

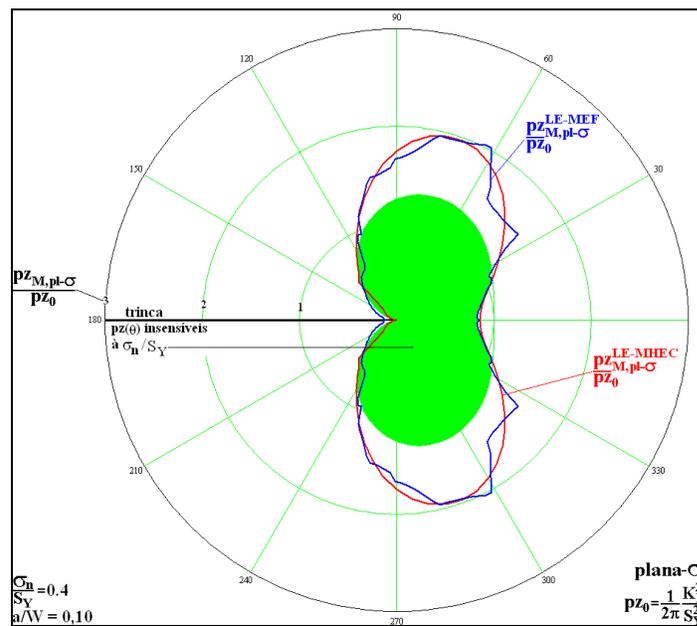


Figura A.8 – Zonas plásticas lineares elásticas estimadas pelo MHEC e pelo MEF sob estado de tensão plana com  $\sigma_r/S_Y = 0,4$  e com  $a/W = 0,10$  para o exemplo do espécime CCT para o segundo nível de refinamento da malha de elementos finitos.

A Figura A.9 mostra a zona plástica  $pZ_M^{LE-MHEC}$  para o único nível de refinamento usado no MHEC, conforme mostra a Figura A.5 e a zona plástica  $pZ_M^{LE-MEF}$  estimada para o terceiro nível de refinamento usado no MEF.

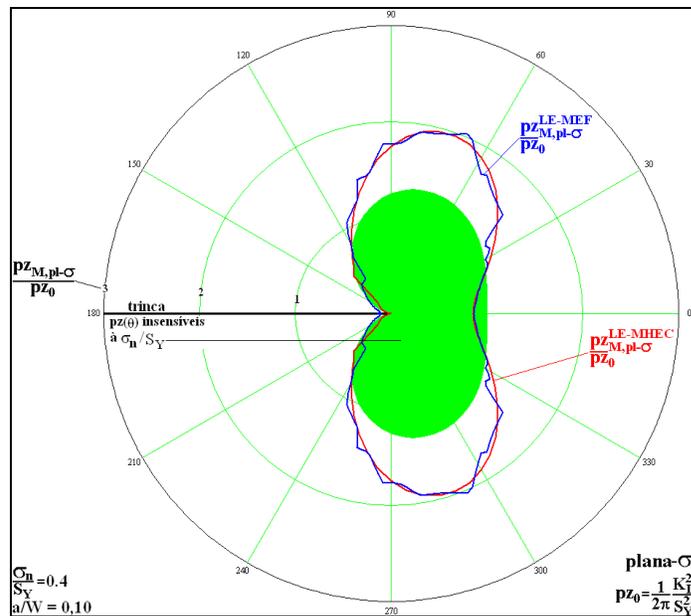


Figura A.9 – Zonas plásticas lineares elásticas estimadas pelo MHEC e pelo MEF sob estado de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  e com  $a/W = 0,10$  para o exemplo do espécime CCT para o terceiro nível de refinamento da malha de elementos finitos.

A Figura A.10 mostra a zona plástica  $pZ_M^{LE-MHEC}$  para o único nível de refinamento usado no MHEC, conforme mostra a Figura A.5 e a zona plástica  $pZ_M^{LE-MEF}$  estimada para o quarto nível de refinamento usado no MEF.

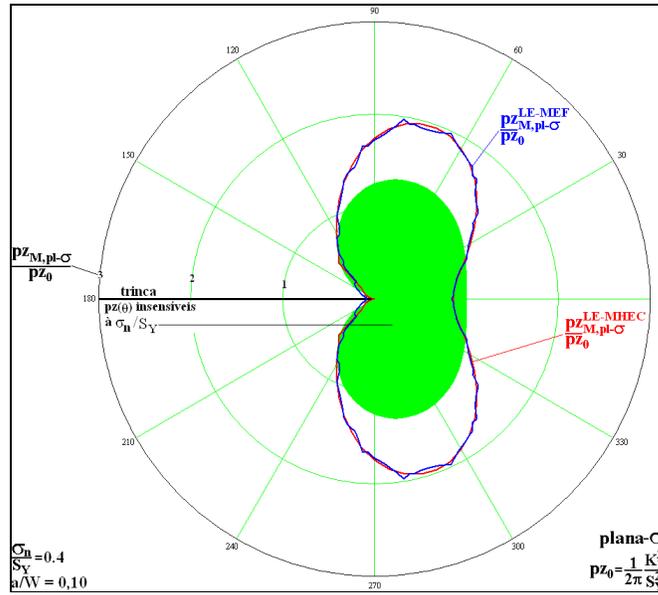


Figura A.10 – Zonas plásticas lineares elásticas estimadas pelo MHEC e pelo MEF para um estado de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  e com  $a/W = 0,10$  para o exemplo do espécime CCT para o quarto nível de refinamento da malha de elementos finitos.

A Figura A.11 mostra a zona plástica  $pZ_M^{LE-MHEC}$  para o único nível de refinamento usado no MHEC, conforme mostra a Figura A.5 e a zona plástica  $pZ_M^{LE-MEF}$  estimada para o quinto nível de refinamento usado no MEF.

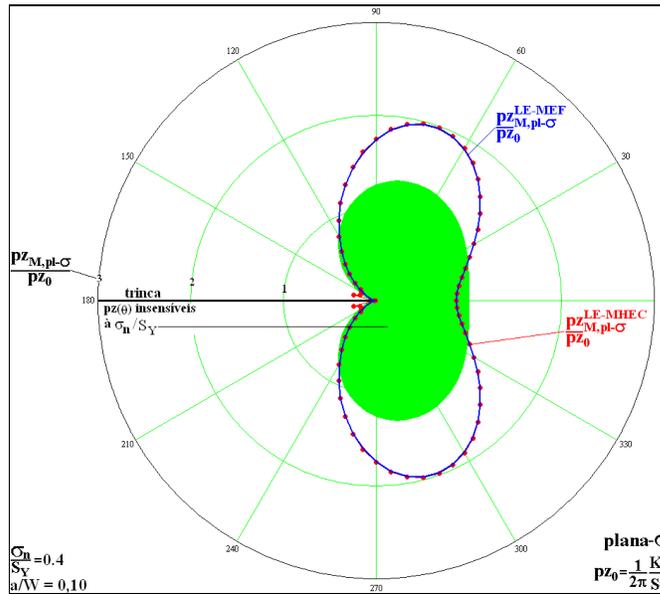


Figura A.11 – Zonas plásticas lineares elásticas estimadas pelo MHEC e pelo MEF sob estado de tensão plana com  $\sigma_n/S_Y = 0,4$  e com  $a/W = 0,10$  para o exemplo do espécime CCT para o quinto nível de refinamento da malha de elementos finitos.

### A.3. Programa desenvolvido que ajusta os valores da geometria e da carga dos espécimes CCT, SENT e SENB sob um mesmo $K_I$ e mesmo valor de $\sigma_n/S_Y$

A Figura A.12 mostra o programa desenvolvido para calcular os valores da geometria e da carga dos espécimes CCT, SENT e SENB de tal maneira que se mantenha fixo os valores de  $K_I$  e de  $\sigma_n/S_Y$ . Na Figura A.12 o valor utilizado de  $\sigma_n/S_Y = 0,4$ .

**FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO PARA O ESPÉCIME SENT**

$$K_{I\text{SENT}}(P, a, w, B) := \frac{P}{B \cdot \sqrt{w}} \cdot \left[ \frac{\sqrt{2 \cdot \tan\left(\frac{\pi \cdot a}{2 \cdot w}\right)}}{\cos\left(\frac{\pi \cdot a}{2 \cdot w}\right)} \cdot \left[ 0,752 + 2,02 \cdot \left(\frac{a}{w}\right) + 0,37 \cdot \left(1 - \sin\left(\frac{\pi \cdot a}{2 \cdot w}\right)\right)^3 \right] \right]$$

**FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO PARA O ESPÉCIME SENB**

$$K_{I\text{SENB}}(P, a, w, B, L) := \frac{P}{B \cdot \sqrt{w}} \cdot \left[ \frac{\frac{L}{3} \cdot \frac{\sqrt{a}}{w}}{2 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{a}{w}\right) \cdot \left(1 - \frac{a}{w}\right)^2} \cdot \left[ 1,99 - \frac{a}{w} \cdot \left(1 - \frac{a}{w}\right) \cdot \left[ 2,15 - 3,93 \cdot \left(\frac{a}{w}\right) + 2,7 \cdot \left(\frac{a}{w}\right)^2 \right] \right] \right]$$

**FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO PARA O ESPÉCIME CCT**

$$K_{I\text{CCT}}(P, a, w, B) := \frac{P}{B \cdot \sqrt{w}} \cdot \left[ \left( \sqrt{\frac{\pi \cdot a}{4 \cdot w}} \cdot \sec\left(\frac{\pi \cdot a}{2 \cdot w}\right) \right) \cdot \left[ 1 - 0,025 \cdot \left(\frac{a}{w}\right)^2 + 0,06 \cdot \left(\frac{a}{w}\right)^4 \right] \right]$$

**PARÂMETROS GERAIS**

**Valor fixo de  $K_I$  (MPa)**

$$K_I := 30 \cdot 10^6$$

**Valor fixo da tensão de escoamento (MPa)**

$$S_e := 250 \cdot 10^6$$

**Espessura unitária**

$$B_g := 1$$

**Relação entre a tensão nominal e a tensão de escoamento que se quer avaliar**

$$S_n S_e := 0,4$$

**DADOS DO ESPÉCIME SENB**

**Valor fixo do comprimento da placa (m)**

$$L_b := 4$$

**Valor inicial do comprimento da trinca (m)**

$$a_b := 0,151$$

**Valor inicial da largura da placa (m)**

$$w_b := 2,8$$

**Tensão devido à flexão**

$$\sigma = \frac{M_{\max} \cdot y}{I}$$

**Equação que fornece o valor fixo da carga aplicada (N)**

$$P_{\text{SENB}}(S_n S_e, S_e) := \frac{\frac{B_g \cdot (w_b)^3}{12}}{\frac{L_b}{4} \cdot \frac{(w_b)}{2}} \cdot (S_n S_e \cdot S_e)$$

$$P02_{SENB} := P_{SENB}(SnSe, Se) = 1.307 \times 10^8$$

**Equação que fornece o valor entre a tensão "nominal" e a tensão de escoamento**

$$SnSe_{SENB}(P_b, w, a) := \frac{1}{Se} \cdot \frac{\frac{P_b \cdot L_b}{4} \cdot \left(\frac{w}{2}\right)}{B_g \cdot (w_b)^3}$$

**Usando o comando "Given" do mathcad**

Given

$$\frac{P02_{SENB}}{B_g \cdot \sqrt{w_b}} \left[ \frac{\frac{L_b}{3} \cdot \frac{\sqrt{a_b}}{w_b}}{\left(1 + 2 \cdot \frac{a_b}{w_b}\right) \cdot \left(1 - \frac{a_b}{w_b}\right)^2} \right] \cdot \left[ 1.99 - \frac{a_b}{w_b} \cdot \left(1 - \frac{a_b}{w_b}\right) \cdot \left[ 2.15 - 3.93 \cdot \left(\frac{a_b}{w_b}\right) + 2.7 \cdot \left(\frac{a_b}{w_b}\right)^2 \right] \right] = KI$$

$$P02_{SENB} = \frac{\frac{B_g \cdot (w_b)^3}{12}}{\frac{L_b}{4} \cdot \left(\frac{w_b}{2}\right)} \cdot (SnSe \cdot Se)$$

**Chama a função "Find" que determina os valores "k" e "q" que satisfazem as equações acima**

$$\begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix} := \text{Find}(a_b, w_b)$$

**Resultado dos novos tamanhos da trinca e da largura da placa**

$$\begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.023 \\ 2.8 \end{pmatrix}$$

**Verifica se os valores determinados pelo comando "Find" realmente satisfazem as equações de restrição**

$$KI_{SENB}(P02_{SENB}, k, q, B_g, L_b) = 3 \times 10^7$$

$$SnSe_{SENB}(P02_{SENB}, q, k) = 0.4$$

**DADOS DO ESPÉCIME SENT**

**Valor inicial do comprimento da trinca (m)**

$$a_t := 0.096$$

**Valor inicial da largura da placa (m)**

$$w_t := 2.$$

**Equação que fornece o valor fixo da carga aplicada (N)**

$$P_{SENT}(SnSe, Se) := (w_t) \cdot B_g \cdot (SnSe \cdot Se)$$

$$P02_{SENT} := P_{SENT}(SnSe, Se) = 2 \times 10^8$$

**Equação que fornece o valor entre a tensão "nominal" e a tensão de escoamento**

$$SnSe_{SENT}(P_b, w, a) := \frac{\frac{P_b}{w \cdot B_g}}{Se}$$

**Usando o comando "Given" do mathcad**

Given

$$\frac{P02_{SENT}}{B_g \cdot \sqrt{w_t}} \left[ \frac{\sqrt{2 \cdot \tan\left(\frac{\pi \cdot a_t}{2 \cdot w_t}\right)}}{\cos\left(\frac{\pi \cdot a_t}{2 \cdot w_t}\right)} \right] \cdot \left[ 0.752 + 2.02 \cdot \left(\frac{a_t}{w_t}\right) + 0.37 \cdot \left(1 - \sin\left(\frac{\pi \cdot a_t}{2 \cdot w_t}\right)\right)^3 \right] = KI$$

$P02_{SENT} = (w_t) \cdot B_g \cdot (SnSe \cdot Se)$

**Chama a função "Find" que determina os valores "k" e "q" que satisfazem as equações acima**

$$\begin{pmatrix} k_t \\ q_t \end{pmatrix} := \text{Find}(a_t, w_t)$$

**Resultado dos novos tamanhos da trinca e da largura da placa**

$$\begin{pmatrix} k_t \\ q_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.023 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Verifica se os valores determinados pelo comando "Find" realmente satisfazem as equações de restrição**

$$KI_{SENT}(P02_{SENT}, k_t, q_t, B_g) = 3 \times 10^7$$

$$SnSe_{SENT}(P02_{SENT}, q_t, k_t) = 0.4$$

**DADOS DO ESPÉCIME CCT**

**Valor inicial do comprimento da trinca (m)**

$$a_{ct} := 0.129$$

**Valor inicial da largura da placa (m)**

$$w_{ct} := 3$$

**Equação que fornece o valor fixo da carga aplicada (N)**

$$P_{CCT}(SnSe, Se) := 2 \cdot w_{ct} \cdot B_g \cdot (SnSe \cdot Se)$$

$$P02_{CCT} := P_{CCT}(SnSe, Se) = 6 \times 10^8$$

**Equação que fornece o valor entre a tensão "nominal" e a tensão de escoamento**

$$SnSe_{CCT}(P_b, w, a) := \frac{\frac{P_b}{(2 \cdot w) \cdot B_g \cdot 1}}{Se}$$

**Usando o comando "Given" do mathcad**

Given

$$\frac{P02_{CCT}}{B_g \cdot \sqrt{w_{ct}}} \cdot \left[ \left( \sqrt{\frac{\pi \cdot a_{ct}}{4 \cdot w_{ct}}} \cdot \sec\left(\frac{\pi \cdot a_{ct}}{2 \cdot w_{ct}}\right) \right) \cdot \left[ 1 - 0.025 \cdot \left(\frac{a_{ct}}{w_{ct}}\right)^2 + 0.06 \cdot \left(\frac{a_{ct}}{w_{ct}}\right)^4 \right] \right] = KI$$

$$P02_{CCT} = (2 \cdot w_{ct}) \cdot B_g \cdot (SnSe \cdot Se)$$

**Chama a função "Find" que determina os valores "k" e "q" que satisfazem as equações acima**

$$\begin{pmatrix} k_{ct} \\ q_{ct} \end{pmatrix} := \text{Find}(a_{ct}, w_{ct})$$

**Resultado dos novos tamanhos da trinca e da largura da placa**

$$\begin{pmatrix} k_{ct} \\ q_{ct} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.029 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**Verifica se os valores determinados pelo comando "Find" realmente satisfazem as equações de restrição**

$$KI_{CCT}(P02_{CCT}, k_{ct}, q_{ct}, B_g) = 3 \times 10^7$$

$$SnSe_{CCT}(P02_{CCT}, q_{ct}, k_{ct}) = 0.4$$

Figura A.12 – Programa desenvolvido em Mathcad para calcular os valores da geometria e da carga dos espécimes CCT, SENT e SENB de tal maneira que se mantenha fixo os valores de  $K_I$  e de  $\sigma_r/S_y$ .