



João da Costa Pantoja

**Geração automática via otimização
topológica e avaliação de segurança
de modelos de bielas e tirantes**

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação
em Engenharia Civil da PUC-Rio como requisito
parcial para obtenção do título de Doutor em
Engenharia Civil.

~~////////~~ Orientador: Luiz Fernando C. R. Martha
~~////////////////////////////////////~~ Co-orientador: Luiz Eloy Vaz

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2012



João da Costa Pantoja

**Geração automática via otimização
topológica e avaliação de segurança
de modelos de bielas e tirantes**

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito parcial para
obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio.
Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo
assinada.

Prof. Luiz Fernando Campos Ramos Martha

Orientador Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Luiz Eloy Vaz

Co-Orientador Universidade Federal Fluminense

Prof^a. Marta de Souza Lima Velasco

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Raul Rosas e Silva

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. André Teófilo Beck

Universidade de São Paulo

Prof. Rafael Alves de Souza

Universidade Federal de Maringá

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do

Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 23 de fevereiro de 2012.

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

João da Costa Pantoja

Fez curso de mestrado no Programa de Pós-Graduação da UNB (Universidade de Brasília) pelo qual recebeu o título de mestre no ano de 2003. Interesses acadêmicos em áreas de pesquisa que envolvam otimização de estruturas, programação matemática, análise de confiabilidade, análise de risco, análise não linear, modelos de bielas e tirantes e estruturas especiais de concreto armado. Em 2008 ingressou no curso de doutorado em Estruturas da PUC-Rio (Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro).

Ficha Catalográfica

João da Costa Pantoja

Geração automática via otimização topológica e avaliação de segurança de modelos de bielas e tirantes/ João da Costa Pantoja; orientador: Luiz Fernando C. R. Martha ; co-orientador: Luiz Eloy Vaz – 2012.

240 f. : il. (color.) ; A4

Tese (doutorado)-Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, 2012.

Inclui bibliografia

1. Engenharia civil – Teses. 2. Otimização Topológica. 3. Análise de Confiabilidade. 4. Modelos de Bielas e Tirantes. 5. Envoltória de Topologias. 6. Programação Matemática. 7. Análise Limite. 8. Plasticidade. I. Martha, Luiz Fernando. II. Vaz, Luiz Eloy. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. IV. Título.

CDD: 624

Aos amores da minha vida:

Mafalda, Camille e João Pedro.

Agradecimentos

Aos meus orientadores Luiz Eloy Vaz e Luiz Fernando Martha pelo estímulo, apoio e interesse que sempre demonstraram durante todo o período da tese.

Ao Professor Daniel A. Kuchma da University of Illinois at Urbana Champaign/EUA por me receber como professor visitante por um período de três meses e pelas inúmeras sugestões e questionamentos que enriqueceram muito este trabalho.

Ao amigo Paul Alejandro Antezana pelo excelente trabalho de formatação do texto, execução das figuras e amizade a mim dispensados ao longo deste trabalho.

A todos os amigos e colegas da PUC-Rio, em especial aos que passaram pela sala 609 e conviveram na PUC-Rio durante o período deste trabalho: Anderson, Thiago, José Silvestre, João Krause, Diego, Cristiano, Fred, Renata, Xavier e Joabson.

Ao Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio na figura de todo seu corpo docente pelo conhecimento transmitido.

À minha esposa Mafalda Fabiene, pelo amor, carinho, compreensão, paciência e apoio incondicionais durante a realização deste trabalho.

Aos meus filhos Camille e João Pedro que mantiveram acessa a luz do gostar durante todo o período deste trabalho.

A minha irmã Tereza Pantoja pela consideração, o carinho e o cuidado que transmitiu a mim, a minha esposa e meus filhos neste período de trabalho.

Ao CNPq e a PWE- Rio pelo apoio financeiro.

Resumo

Pantoja, João da Costa; Martha, Luiz Fernando(Orientador); Vaz, Luiz Eloy (Co-orientador). **Geração automática via otimização topológica e avaliação de segurança de modelos de bielas e tirantes** Rio de Janeiro, 2012. 240 p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O projeto de estruturas de concreto armado com a presença de descontinuidades geométricas ou estáticas utilizando o conceito dos modelos de bielas e tirantes tem aumentado muito sua aplicabilidade nos últimos anos. As orientações normativas existentes para esse tipo de projeto parecem, entretanto, ser insuficientes e muitas vezes conservadoras. O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma metodologia que englobe os aspectos de geração automática da topologia via otimização topológica e avaliação da segurança via análise de confiabilidade dos modelos de bielas e tirantes aplicados a estruturas planas de concreto armado. O primeiro aspecto visa auxiliar o projetista estrutural na concepção do modelo topológico com a utilização de técnicas de otimização topológica que facilitem a visualização do fluxo de forças no interior da estrutura auxiliando na concepção de uma topologia ótima para o modelo. O segundo aspecto consiste na proposição de um critério de desempenho para modelos com base na avaliação de sua segurança via análise de confiabilidade. Os resultados obtidos e apresentados através dos exemplos desse trabalho permitem concluir que a técnica proposta conduz a uma melhora substancial na concepção e automatização dos modelos topológicos para os modelos de bielas e tirantes, bem como, o critério de avaliação de segurança proposto permite ao projetista estrutural considerar aspectos relacionados à obtenção da probabilidade de falha e mensuração dos modos de falha da estrutura.

Palavras-chave

Otimização Topológica; Análise de confiabilidade; Modelos de Bielas e Tirantes; Estruturas de Concreto Armado; Envoltória de Topologia.

Abstract

Pantoja, João da Costa; Martha, Luiz Fernando (Advisor); Vaz, Luiz Eloy (Co-advisor). **Automatic generation using topologic Optimization and safety assessment in strut and tie models.** Rio de Janeiro, 2012. 240 p. D. Sc. Thesis - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The design of reinforced concrete structures with the presence of geometric or static discontinuities using the concept of strut and tie models has greatly increased its applicability in recent years. The existing Standards and Guidelines for this kind of project seem, however, be insufficient and often conservative. This thesis aims to present a methodology that includes aspects of automatic generation of topology by topological optimization and assessment of safety by the reliability analysis of the strut and tie models applied to plane reinforced concrete structures. The first aspect is to assist the structural designer in the conception of the structural topological model with the use of topological optimization techniques that facilitate the visualization of the flow forces in the structure, assisting in the design of an optimal topology for the model. The second aspect is the proposal of a performance criterion for models based on the assessment of its security by reliability analysis. The results obtained and submitted through the examples of this work allow to conclude that the proposed technique leads to a substantial improvement in the design and conception and automatic generation of topological models for the strut and tie models, as well as the security evaluation criterion proposed allows the structural designer to consider issues related to obtaining the probability of failure and measurement of failure modes of the structure.

Keywords

Topology Optimization; Reliability analysis; Strut and Tie models; Concrete Structures; Topology envelope.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	Introdução e objetivos.....	18
1.2	Principais Contribuições	20
1.3	Organização do Trabalho	21
2	MODELOS DE BIELAS E TIRANTES.....	24
2.1	Concepção dos Modelos de Bielas e Tirantes	27
2.2	Definição da Topologia.....	30
2.2.1	Processos convencionais.....	32
2.2.2	Processos automáticos de geração.....	40
2.3	Detalhamento do Modelo	43
2.3.1	Plasticidade em concreto armado	46
2.3.2	Teorema do limite inferior.....	47
2.3.3	Análise limite.....	48
2.3.4	Metodologias semi-probabilísticas de projeto de STM	49
2.4	Modelos topológicos Hiperestáticos	64
2.4.1	Análise linear pelo método da rigidez	65
2.4.2	Inversa generalizada de mínima norma	66
2.4.3	Solução de mínima norma para o elemento de treliça plano desconexo	68
2.5	Principais dificuldades de aplicação	70
3	GERAÇÃO AUTOMÁTICA DA TOPOLOGIA DE STM.....	72
3.1	Otimização Topológica.....	74
3.1.1	Base conceitual	76
3.1.2	Formulação clássica	78
3.1.3	Relaxação do problema	82
3.1.4	Modelo SIMP.....	83
3.1.5	Abordagem com variáveis nodais	86

Sumario

3.1.6	Abordagem com base no elemento.....	87
3.2	Instabilidades Numéricas	88
3.2.1	Instabilidades devido a problemas de dependência de malha	88
3.2.2	Instabilidades devido a problemas de tabuleiro.....	90
3.2.3	Esquema de regularização via filtro de sensibilidade.....	92
3.3	Método de Solução para Busca de Topologias Ótimas	97
3.3.1	Método das assíntotas móveis.....	98
3.3.2	Critério de otimalidade.....	103
3.3.3	Obtenção das sensibilidades via método adjunto	105
3.4	Técnica dos Elementos Indutores	107
3.4.1	Exemplos de aplicação	109
3.5	Envoltória Topológica	117
3.5.1	Otimização multiobjetivo	117
3.6	Considerações Finais	125
4	VERIFICAÇÃO DE SEGURANÇA ESTRUTURAL VIA CONFIABILIDADE.....	127
4.1	Segurança Estrutural.....	130
4.2	Análise de Confiabilidade.....	131
4.2.1	Consideração das incertezas	134
4.2.2	Funções de falha	140
4.2.3	Probabilidade de falha e índice de Confiabilidade	143
4.2.4	Métodos de análise.....	147
4.2.5	Probabilidade de falha de sistemas.....	157
4.3	Calibração de Códigos Normativos	161
4.3.1	Calibração dos coeficientes parciais de segurança	163
4.3.2	Geração da superfície de resposta	165
4.4	Importância Relativa dos Modos de Falha	168
4.5	Análise de Confiabilidade baseada em Análise Limite.....	171
4.5.1	Algoritmo de implementação.....	173
5	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	175

Sumario

5.1	Descrição dos Exemplos	176
5.2	Primeiro Exemplo de Aplicação	178
5.2.1	Apresentação da estrutura	178
5.2.2	Análise elástica	179
5.2.3	Otimização topológica	180
5.2.4	Modelos de bielas e tirantes considerados	181
5.2.5	Parâmetros e métodos para execução da análise de confiabilidade	183
5.2.6	Avaliação de desempenho	184
5.3	Segundo Exemplo de Aplicação	192
5.3.1	Apresentação da estrutura	192
5.3.2	Análise elástica	193
5.3.3	Otimização topológica	194
5.3.4	Modelos de bielas e tirantes considerados	195
5.3.5	Parâmetros e métodos para execução da análise de confiabilidade	196
5.3.6	Avaliação de desempenho	197
5.4	Terceiro Exemplo de Aplicação	201
5.4.1	Apresentação da estrutura	201
5.4.2	Análise elástica	201
5.4.3	Otimização topológica	203
5.4.4	Modelos de bielas e tirantes considerados	205
5.4.5	Parâmetros e métodos para execução da análise de confiabilidade	206
5.4.6	Avaliação de desempenho	206
5.5	Quarto Exemplo de Aplicação	212
5.5.1	Apresentação da estrutura	212
5.5.2	Envoltória de topologia	213
5.5.3	Modelos de bielas e tirantes considerados	214
6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES	217
6.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	219
6.1.1	Análise estrutural e modelos de bielas e tirantes	219
6.1.2	Otimização topológica	220
6.1.3	Análise de confiabilidade	220
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	222

Lista de Figuras

Figura 2-1: Exemplos de regiões com descontinuidades estáticas b), d), f) ou geométricas a), c), e).....	28
Figura 2-2: Divisão da estrutura em regiões B e D no modelo de bielas e tirantes.....	29
Figura 2-3: Modelo de bielas e tirantes numa viga parede	32
Figura 2-4: Modelos Normativos para Viga parede com carregamento distribuído (CEB-FIP 2010).....	33
Figura 2-5: Modelos Normativos da ligação de viga intermediária-pilar extremo (Silva, 1991): a) $h_v \cong h_p$ e b) $h_v > h_p$	34
Figura 2-6: Modelos Normativos para Vigas parede com diversos carregamentos (CEB-FIP 2010).	35
Figura 2-7: Modelos Normativos para Zonas de ancoragem (CEB-FIP 2010).	35
Figura 2-8: Modelos Normativos para Nós de pórtico submetido à flexão (CEB-FIP 2010).....	35
Figura 2-9: Estrutura com geometria complexa.	36
Figura 2-10: Resultados de uma análise elástica linear pelo FEM: a)Deslocamentos e b) Fluxo de tensões principais.	37
Figura 2-11: Mapas coloridos dos campos de tensões.	38
Figura 2-12: Modelo de bielas e tirantes concebido via análise elástica.	38
Figura 2-13: Caminho de carga num modelo simples de viga parede.....	39
Figura 2-14: Modelo de bielas e tirantes via padrão de fissuração (Schlaich et al., 1987).....	40
Figura 2-15: Topologia de uma transversina de ponte via otimização topológica.....	42
Figura 2-16: Fluxograma ilustrativo dos STM (Brown e Bayrak, 2006).....	45
Figura 2-17: Distribuição de tensões radial.....	51
Figura 2-18: Distribuição de tensões em linha com afunilamento.	51
Figura 2-19: Distribuição de tensões paralelas.....	52

Lista de Figuras

Figura 2-20: Nó 1 definido conforme Schaefer e Schaich (1988,1991)	57
Figura 2-21: Nó 2 definido conforme Schaefer e Schaich (1988,1991)	57
Figura 2-22: Nó 3 definido conforme Schaefer e Schaich (1988,1991)	58
Figura 2-23: Nó 4 definido conforme Schaefer e Schaich (1988,1991)	58
Figura 2-24: Nó 5 definido conforme Schaefer e Schaich (1988,1991)	59
Figura 2-25: Nó 6 definido conforme Schaefer e Schaich (1988,1991)	59
Figura 2-26: Nó 7 definido conforme Schaefer e Schaich (1988,1991)	60
Figura 2-27: Nó 8 definido conforme Schaefer e Schaich (1988,1991)	60
Figura 2-28: Nó 9 definido conforme Schaefer e Schaich (1988,1991)	61
Figura 2-29: Taxa de armadura	64
Figura 2-30: mostra os sistemas referenciais adotados para o elemento de treliça desconexo.	69
Figura 3-1: Processo de Otimização Topológica numa Viga Parede de Concreto.	77
Figura 3-2: Domínio estendido sujeito a forças de corpo e de contorno.	78
Figura 3-3: Solução do problema de otimização em escala de cinza.	83
Figura 3-4: Diagrama de fluxo – Método SIMP.....	85
Figura 3-5: Dependência da malha. a) Estrutura com simetria; b) Malha com 1250 elementos; c) Malha com 5.000 elementos; d) Malha com 45.000 elementos.	89
Figura 3-6: Exemplo de não unicidade da solução	90
Figura 3-7: Instabilidade de tabuleiro	92
Figura 3-8: Filtro de sensibilidade	93
Figura 3-9: Filtro de sensibilidade	96
Figura 3-10: Modificação das topologias com variação do raio do filtro.	97
Figura 3-11: Formulação via MMA para variável de projeto \mathbf{x}	102
Figura 3-12: Multiplicador de Lagrange	105
Figura 3-13: Fluxograma de implementação da técnica dos elementos indutores.....	108
Figura 3-14: Viga parede VP1 com carregamento na parte superior	111
Figura 3-15: Resultado obtido via simetria para VP1 num processo sem indução	111
Figura 3-16: VP1 com simetria e elementos indutores.....	112
Figura 3-17: Influência do refinado da malha no na OT com indução	113

Lista de Figuras

Figura 3-18: Modificações nos resultados da OT com indução devido à variação na fração de volume adotada [a) 10%, b) 12%, c) 15% e d) 20%].	114
Figura 3-19: Viga parede VP2 com carregamento na parte inferior.	115
Figura 3-20: Viga parede VP2 com carregamento na parte inferior.	115
Figura 3-21: Viga parede VP2 com simetria e elementos indutores	116
Figura 3-22: Resultado obtido da OT com processo induzido	116
Figura 3-23: Problema de otimização com uma variável e duas funções objetivo.	119
Figura 3-24: Região viável e pontos de Pareto no espaço das variáveis de projeto e no espaço das funções objetivo	120
Figura 3-25: Região viável não-convexa no espaço das funções objetivo	121
Figura 3-26: Geometria, cargas e condições de contorno do modelo.	123
Figura 3-27: Topologias geradas pelos pontos de Pareto do modelo	124
Figura 3-28: Envoltória topológica de Pareto e modelo de bielas e tirantes do modelo.	124
Figura 4-1: Domínios definidos pela função de estado limite.	134
Figura 4-2: Índice de confiabilidade no espaço normalizado.	145
Figura 4-3: Representação gráfica do método FORM.	148
Figura 4-4: Sorteio de pontos na simulação de Monte Carlo	155
Figura 4-5: Interpolação com uso dos polinômios de Lagrange	167
Figura 4-6: Superfície de resposta do índice de confiabilidade de uma viga parede.	168
Figura 4-7: Influência do fck na razão de falha dos diferentes modos de falha.	169
Figura 4-8: Influência do fck na obtenção dos domínios de falha dúctil e frágil.	170
Figura 4-9: Avaliação da segurança de diferentes topologias de um modelo via confiabilidade.	172
Figura 4-10: Fluxograma esquemático da análise de confiabilidade baseada em análise limite	173
Figura 5-1: Viga parede simplesmente apoiada com carregamento centrado do ACI 318-05 (2005).	178

Lista de Figuras

Figura 5-2: Mapas de cores relativos as tensões elásticas da viga parede simplesmente apoiada com carregamento centrado.	180
Figura 5-3: Mapas de cores relativos às tensões elásticas da viga parede.	180
Figura 5-4: Resultado da otimização Viga parede simplesmente apoiada com carregamento centrado do ACI 318-02 (2002).	181
Figura 5-5: Modelos topológicos possíveis para representação da viga parede.	183
Figura 5-6: Variação da carga de colapso dos modelos com relação ao aumento do fck	185
Figura 5-7: Variação do nível de segurança dos modelos 3 e 4 com a variação do fck	187
Figura 5-8: Variação da razão de falha dos modos principais do modelo 3 com o aumento do fck	187
Figura 5-9: Variação da razão de falha dos modos principais do modelo 4 com o aumento do fck	189
Figura 5-10: Variação do nível de segurança do modelo 4 modificado com aumento do fck	190
Figura 5-11: Ductilidade do modelo 4 modificado com aumento do fck	190
Figura 5-12: Variação da razão de ductilidade do modelo 4 modificado com aumento do fck	191
Figura 5-13: Transversina de ponte simplesmente apoiada com carregamento assimétrico.	192
Figura 5-14: Mapa colorido das tensões elásticas da transversina com carregamento assimétrico.	193
Figura 5-15: Análise elástica da transversina com carregamento assimétrico: a) Deformações elásticas e b) Fluxo das tensões principais.	194
Figura 5-16: Desenvolvimento do processo de otimização topológica da transversina com carregamento assimétrico em 5 etapas diferentes.	194
Figura 5-17: Modelos topológicos da transversina utilizados na avaliação de desempenho.	196
Figura 5-18: Variação do nível de segurança dos modelos 1,2 e 3 com a variação do fck para o exemplo 2.	198

Lista de Figuras

Figura 5-19: Variação da razão de falha do modelo 1 com a variação do f_{ck} para o exemplo 2.....	198
Figura 5-20: Ductilidade do modelo 2 com a variação do f_{ck} para o exemplo 2.....	200
Figura 5-21: Ductilidade do modelo 3 com a variação do f_{ck} para o exemplo 2.....	200
Figura 5-22: Viga parede simplesmente apoiada com balanço no lado direito.....	201
Figura 5-23: Mapa colorido das tensões elásticas da viga parede com balanço.....	202
Figura 5-24: Análise elástica da viga parede com balanço: a) Fluxo das tensões principais e b) Deformações elásticas.....	203
Figura 5-25: Processo de otimização topológica via método SIMP da viga parede com balanço em 5 etapas.....	204
Figura 5-26: Modelos topológicos utilizados na avaliação de desempenho da viga parede com balanço.....	205
Figura 5-27: Desempenho de segurança dos modelos topológicos via método FORM com análise limite como subproblema do exemplo 3.....	207
Figura 5-28: Região de transferência entre os critérios frágil e dúctil.....	208
Figura 5-29: Sensibilidades das variáveis aleatórias do modelo 1 na região de falha frágil.....	209
Figura 5-30: Sensibilidades das variáveis aleatórias do modelo 1 na região de falha dúctil.....	210
Figura 5-31: Variação do nível de segurança do modelo 1 com aumento da taxa de armadura e do f_{ck} da estrutura.....	211
Figura 5-32: Variação do nível de segurança do modelo 1 com aumento da espessura e do f_{ck} da estrutura.....	212
Figura 5-33: Estrutura com geometria complexa.....	213
Figura 5-34: Processo de obtenção da envoltória de topologia na estrutura de geometria complexa.....	214
Figura 5-35: Concepção do modelo topológico para carregamentos independentes.....	215

Lista de Figuras

Figura 5-36: Modelos topológicos possíveis de serem utilizados na avaliação da segurança da estrutura de geometria complexa.....	216
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Lista de Tabelas

Tabela 2-1: Valores limites para o ângulo entre bielas e tirantes num nó.	56
Tabela 4-1: Modelos probabilísticos para estruturas de concreto armado via STM.....	137
Tabela 4-2: Incertezas epistêmicas ou de modelo	140
Tabela 4-3: Valores alvo para o índice de confiabilidade β e probabilidades de falha associadas, relacionados a estados limites últimos.	147
Tabela 5-1: Modelos probabilísticos das variáveis aleatórias do exemplo 1	184
Tabela 5-2: Modelos probabilísticos das variáveis aleatórias do exemplo 2	197
Tabela 5-3: Modelos probabilísticos das variáveis aleatórias do exemplo 3	206

1 INTRODUÇÃO

1.1 Introdução e objetivos

O projeto de estruturas de concreto armado bi e tridimensionais em regiões com descontinuidade geométrica ou estática é um assunto ainda bastante pesquisado. Elementos estruturais de concreto armado com problemas dessa natureza, para os quais não são válidas as hipóteses de Bernoulli, frequentemente são detalhados via regras práticas. Os projetos estruturais concebidos dessa forma são, frequentemente, alvo de crítica.

Um método bastante interessante a ser aplicado nesse caso é o método das bielas e tirantes. A metodologia utilizada por esse método aprimora a concepção do projeto de elementos estruturais de concreto armado com descontinuidades. A maior vantagem na sua aplicação é a forma coerente e rigorosa com que o tema é tratado. Isso permite que toda a estrutura seja dimensionada de uma forma teoricamente coerente.

Segundo o método de bielas e tirantes, uma estrutura pode ser dividida em dois tipos de regiões. Regiões B (Bernoulli) são aquelas partes da estrutura nas quais a hipótese de que as seções planas permanecem planas é válida. Assim, uma distribuição linear de deformações ao longo da altura da seção é admitida. Essas regiões podem ser projetadas através das teorias clássicas de cisalhamento, flexão, torção e forças axiais e das orientações normativas presentes nas correspondentes normas existentes. Regiões D (Discontinuity) ou regiões de St. Venant são aquelas partes da estrutura nas quais há um campo não linear de deformações e deslocamentos devido às descontinuidades geométricas ou estáticas, sendo estas as representadas pela concentração de tensões devido a carregamentos concentrados ou apoios.

Uma estrutura treliçada é então idealizada no interior da região D de modo a representar o fluxo de forças através dessa região. O conceito de projeto utilizado pelo modelo de bielas e tirantes baseia-se no teorema do limite inferior da plasticidade. Assim, a carga de projeto utilizando o modelo de bielas e tirantes, é apenas um limite inferior da carga de colapso da estrutura. Uma hipótese básica assumida é que, a região D projetada segundo as orientações do modelo de bielas e tirantes, seja suficientemente dúctil de modo a possibilitar a redistribuição de esforços e a formação do mecanismo da estrutura treliçada. Vários programas experimentais têm sido conduzidos no sentido de aprimorar a aplicabilidade desse tipo de enfoque em projetos. Os resultados desses testes também ilustram deficiências no desempenho das regiões D sobre cargas de serviço e em específicas situações para cargas últimas de projeto.

A aplicabilidade do método de bielas e tirantes também é bastante reduzida em escritório de projetos em função da dificuldade apresentada pela metodologia. A não unicidade de modelo topológico, a necessidade de compatibilização geométrica entre os fluxos de cargas internos nos pontos de carregamentos e apoios, as imprecisões inerentes aos materiais utilizados e a imprecisão relativa à modelagem são algumas dificuldades a serem ultrapassadas.

O objetivo principal deste trabalho é estabelecer uma metodologia para o projeto e/ou avaliação da segurança de estruturas planas de concreto armado com descontinuidades (Regiões D) com base no modelo de bielas e tirantes que utilize as formulações de otimização topológica e análise de confiabilidade. A utilização dessas técnicas avançadas permite uma melhora substancial no entendimento do funcionamento do modelo e também uma maior interação entre o projetista estrutural e o processo de concepção, resultando num modelo final mais compatível e confiável. A geração automática da topologia do modelo, a determinação do modo de falha dominante e valor da probabilidade de falha do modelo são exemplos bastante claros de como algumas etapas necessárias na aplicação dos modelos de bielas e tirantes podem ser melhoradas.

É importante destacar que o presente trabalho é parte integrante de algumas linhas de pesquisas do DEC/PUC-Rio. São elas ‘Técnicas de Otimização Aplicadas’, ‘Análise de Confiabilidade’ e ‘Estruturas de Concreto Armado’.

1.2 Principais Contribuições

O presente trabalho envolve três linhas de pesquisa totalmente independentes, assim, as contribuições feitas por essa pesquisa, serão apresentadas de forma separada. Isso significa que essas contribuições poderão ser aplicadas em problemas de naturezas diversas, tanto semelhantes como diferentes dos problemas aqui apresentados. Essa generalidade, presente nas contribuições propostas, está estritamente relacionada com a própria abrangência dos temas referentes a modelos de bielas e tirantes, otimização e análise de confiabilidade. São elas:

➤ Contribuições para o modelo de bielas e tirantes:

A possibilidade de obtenção de esforços estaticamente admissíveis em modelos hiperestáticos via Mínima Norma Euclidiana é uma opção bastante interessante. Apesar de já ter sido aplicada a problemas de modelos de bielas e tirantes, uma metodologia com sua aplicação acoplada a uma análise da ductilidade do modelo, conforme proposto por esse trabalho, permite validar o uso de modelos hiperestáticos no método das bielas e tirantes.

➤ Contribuições para geração de topologias via otimização topológica:

Uma técnica que introduz elementos indutores no processo de otimização topológica é utilizada para a geração de modelos de bielas e tirantes realistas. Isso permite que o modelo topológico final seja influenciado pelo projetista da estrutura. Assim, é possível verificar qual a influencia de um elemento previamente concebido na topologia final do modelo como também como obter modelos mais realistas do ponto de vista prático.

Também uma metodologia que utiliza uma envoltória topológica via otimização multiobjetivo é apresentada. Isso permite uma maior generalização da concepção dos modelos de bielas e tirantes para casos

específicos de carregamentos independentes onde haja grande variabilidade de valores.

- Contribuições para avaliação de segurança via análise de confiabilidade:

Uma técnica de calibração de incertezas epistêmicas via resultados experimentais é mostrada e seus resultados utilizados nos exemplos.

É proposta uma técnica para obtenção e avaliação dos valores de importância relativa dos modos de falha via análise de confiabilidade. Isso permite ao projetista estrutural avaliar e aplicar modificações que direcionem o modelo para um tipo de falha específico.

Também uma formulação que avalie o índice de confiabilidade global de modelos de bielas e tirante com base na análise de confiabilidade acoplada a um subproblema de análise limite é descrita. Esse critério possibilita avaliar o desempenho global de cada modelo segundo sua carga de colapso. Isso permite a adoção de um critério realista e compatível com modelo dessa natureza uma vez que apenas o campo de tensões e as resistências são avaliadas.

1.3 Organização do Trabalho

Uma vez que as referências bibliográficas correspondentes a modelos de bielas e tirantes, otimização topológica e análise de confiabilidade possuem uma independência relativamente grande entre si e na falta de uma literatura específica que englobe conjuntamente os três temas, uma revisão bibliográfica específica sobre cada assunto será apresentada no início de cada capítulo situando a mesma no contexto do trabalho.

O segundo capítulo iniciará com uma descrição do método das bielas e tirantes com enfoque principal na concepção topológica e detalhamento dos modelos adotados. Os principais processos de concepção dos modelos topológicos são apresentados e uma formulação automática via otimização topológica sucintamente descrita. Para o detalhamento do modelo, os conceitos fundamentais

de plasticidade aplicados a estruturas de concreto serão descritos e uma solução via análise limite formulada. Posteriormente, as principais orientações normativas de projeto selecionadas para aplicação no presente trabalho são descritas e uma solução possível, para aplicação em modelos topológicos hiperestáticos, apresentada. Uma descrição dos principais problemas enfrentados na aplicação do método é feita.

O terceiro capítulo discutirá a aplicação da técnica de otimização topológica na geração automática de topologias para os modelos de bielas e tirantes. Uma formulação conceitual clássica do problema é feita e um processo de relaxação do problema apresentado. A solução do problema via relaxação como um problema de otimização é feita via modelo SIMP. Os principais problemas numéricos envolvidos em problemas dessa natureza são apresentados e uma solução numérica via filtro de sensibilidade descrita. Duas possíveis soluções para busca de topologias ótimas utilizadas neste trabalho são descritas e o cálculo das sensibilidades do problema apresentado. Uma proposta para indução do processo de otimização do problema com objetivo de obter modelos topológicos mais realistas é feita, bem como uma envoltória de topologia baseada numa otimização do tipo multiobjetivo é descrita para consideração de casos específicos de carregamentos.

No quarto capítulo são estudados os principais aspectos relativos à avaliação da segurança dos modelos de bielas e tirantes com a consideração das incertezas. As principais etapas para avaliação de um problema estrutural com base na análise de confiabilidade são descritas e os tipos de incertezas existentes mostrados. Uma apresentação genérica das principais funções de falha envolvidas no problema é feita e os conceitos de probabilidade de falha e índice de confiabilidade apresentados. Os métodos de simulação de Monte Carlo e analítico FORM são descritos e o cálculo da probabilidade de falha de um sistema em série mostrado. Um processo de calibração dos coeficientes parciais de segurança com uso de uma superfície de resposta é apresentado. Um aspecto de projeto relacionado à obtenção das importâncias relativas dos modos de falha baseado no uso da análise de confiabilidade é proposto. Também é proposta uma formulação para obtenção de um índice de confiabilidade global de um modelo de bielas e tirantes baseada

na solução de um problema de confiabilidade que tem como subproblema uma análise limite.

No quinto capítulo são apresentados quatro exemplos relativos a projetos de engenharia envolvendo estruturas planas de concreto armado via modelos de bielas e tirantes. O primeiro exemplo apresentado é uma viga parede simplesmente apoiada e com uma carga no meio do vão, o segundo exemplo uma transversina de ponte, o terceiro exemplo uma viga parede com balanço e o quarto uma estrutura com geometria complexa. Para os três primeiros a obtenção de um modelo topológico obtido via otimização topológica é feita e seu desempenho medido com relação a outros modelos topológicos existentes na literatura. No quarto exemplo uma envoltória topológica é gerada e duas possíveis soluções para modelos de bielas e tirantes são mostradas.

Aspectos relativos aos tipos de avaliações de segurança e os resultados de desempenho obtidos em cada um dos exemplos são apresentados.

No sexto capítulo estão as conclusões e sugestões para trabalhos futuros dentro desta linha de pesquisa.

2 MODELOS DE BIELAS E TIRANTES

Este capítulo apresenta uma sucinta revisão bibliográfica sobre os modelos de bielas e tirantes e uma contextualização do assunto no trabalho de pesquisa. Posteriormente, é feita uma discussão sobre esses modelos e sua concepção e aplicabilidade na engenharia de estruturas. Os aspectos mais comuns de sua utilização são listados e sua formulação definida através do teorema do limite inferior da teoria da plasticidade. Estratégias usuais e avançadas para obtenção das topologias dos modelos são mostradas, e as técnicas para geração automática dos modelos comentadas.

A ideia do uso do modelo de treliça para projeto e detalhamento das estruturas de concreto não é recente. O conceito foi proposto por Ritter (1899) e Mörsch (1909) para o dimensionamento a cisalhamento de vigas fletidas. Contribuições foram feitas por Leonhardt (1965) e Lampert e Thurliman (1971) para estruturas de concreto submetidas a cisalhamento e torção. Na década de 80 um grande avanço foi feito com publicações sobre o assunto.

Existe um significativo número de artigos de pesquisa e outras publicações versando sobre a aplicabilidade dos modelos de bielas e tirantes (*Strut-and-tie models* – STM). A maioria dos artigos existentes pode ser categorizada como documentos que relatam sobre os princípios gerais da modelagem dos modelos de bielas e tirantes, os processos para determinação da resistência apropriada das bielas, tirantes e nós, aplicações práticas dos modelos de bielas e tirantes em específicos modelos estruturais, requerimentos de serviço ou a combinação desses itens.

Informações esclarecendo os princípios de funcionamento geral da modelagem utilizando os modelos de bielas e tirantes são os textos mais encontrados. Geralmente, estes artigos informam os procedimentos para determinação de regiões com e sem descontinuidade, determinação das condições de contorno, concepção dos modelos de treliça no interior do contínuo de

concreto, resolução dos esforços nas barras, escolha e detalhamento das armaduras e verificação das tensões nodais e das bielas de concreto. Os trabalhos feitos por Marti (1985), Collins e Mitchell (1986) e Schlaich et al (1987) são os mais completos nessa área. Além dos procedimentos usuais sobre a utilização dos modelos de bielas e tirantes, esses trabalhos sugerem valores para resistências das bielas e nós e também mostram alguns modelos básicos para elementos estruturais simples. Nestes documentos é chamada a atenção para necessidade de pesquisas mais profundas em itens como as resistências das bielas e nós, requerimentos de ancoragem e detalhamento das armaduras e concepção de modelos para elementos estruturais complexos. O trabalho feito por Bergmeister et al (1993) resume os resultados de uma série de pesquisas nesse sentido.

Uma grande produção científica também foi feita para validação dos valores de resistência das bielas e nós. A determinação de uma apropriada resistência efetiva à compressão para diferentes tipos de nós e bielas tem sido de interesse de vários pesquisadores. Pesquisas nessa área têm tentado determinar a resistência de diferentes tipos de nós e bielas através de testes de laboratório e correspondentes formulações analíticas. Bergmeister (1993) fez sugestões nesse sentido com base num banco de dados coletado em vários experimentos. Outros, como Alshegeir (1992) e Yun e Ramirez (1996), fizeram comparações com outros trabalhos e fizeram uma análise não linear em elementos finitos de maneira a determinar a resistência efetiva à compressão das bielas e nós. Apesar de uma vasta literatura sobre o assunto nessa área, ainda não há um consenso entre os pesquisadores sobre a resistência dos nós e bielas.

Também há muitas referências cujo interesse está na definição do tipo de modelo a ser aplicado em um elemento estrutural específico. Os elementos estruturais mais utilizados são as zonas de ancoragens, os consolos curtos, as vigas paredes e os blocos de fundações entre outros. Normalmente, artigos relacionados a esse assunto comparam o desempenho de um determinado elemento estrutural baseado em projetos feitos com diferentes tipos de modelos de bielas e tirantes para determinar quais deles são mais adequados para utilização prática. Maxwell e Breen (2000) fizeram estudos desse tipo em vigas paredes com furos. Além disso, alguns artigos nessa área também exploraram os efeitos da mudança dos detalhamentos das armaduras para um mesmo modelo de bielas e

tirantes. Os itens que usualmente eram variados incluem mudanças de tipos de ancoragem, espaçamento dos estribos, espaçamento do reforço longitudinal e armadura de controle de fissuração. Aguilar et al (2002) fez experimentos desse tipo em modelos de bielas e tirantes aplicados a vigas parede.

Atualmente, parece ainda não haver um nível satisfatório de pesquisas que esclareçam requerimentos de serviço no projeto de bielas e tirantes. Existem ainda diferenças grandes nas especificações para controle da fissuração feitas por diversos pesquisadores indicando que não há nenhum consenso sobre qual o nível mínimo de requerimento de serviço que deve ser utilizado em projetos dessa natureza. Pesquisas que tratam com controle de fissuração em modelos de bielas e tirantes são muito limitadas. Zhu et al (2003) tem feito pesquisas relativas a aberturas de fissuras em vigas Gerber e consolos, mas não há nenhuma recomendação com relação aos efeitos da armadura de controle de fissuração. Brown e Bayrak (2006) estudaram a quantidade de armadura mínima em bielas do tipo garrafa e propuseram uma taxa de armadura mínima de armadura para controle de fissuração.

Na parte de aplicações, os maiores avanços têm sido feitos no campus de Urbana-Champaign da Universidade de Illinois/USA sobre a orientação do professor Daniel A. Kuchma idealizador do programa CAST que tem uma interface gráfica auxiliar na concepção dos modelos topológicos. O programa faz análises lineares e não lineares de modelos de bielas e tirantes e permite, além disso, seu dimensionamento e detalhamento. Vale citar entre outros, os trabalhos de Tjhin e Kuchma (2002 a,b), Tjhin e Kuchma (2007), Park e Kuchma (2007), Park et al (2010 a,b) e Reineck e Novak (2010).

No Brasil os trabalhos de Silva (1991), Oliveira (1995), Silva (1998), Alves (1998), Silva e Giongo (2000), Vieira et al (2000), Souza (2004) e Santos (2006), mostram o esforço da comunidade científica no sentido de clarear a aplicação dos fundamentos básicos dos modelos de bielas e tirantes no contexto da engenharia estrutural nacional.

2.1

Concepção dos Modelos de Bielas e Tirantes

Ritter (1899) e Morsch (1909) conceberam a clássica analogia da treliça no início do século XX. Mantendo-se as hipóteses básicas inalteradas, numerosas pesquisas foram desenvolvidas nos último século no sentido de aperfeiçoá-la e adequá-la aos resultados experimentais.

Schlaich et al (1987) propuseram uma generalização dos modelos de treliça tornando sua aplicação bastante geral e sendo sua utilização estendida a uma gama bastante variada de elementos estruturais. Na análise proposta o comportamento dos elementos seria considerado nos seus estados limites, tanto no estado elástico como plástico, através da modelagem. Denominou-se a esse modelo generalizado de modelo das bielas e tirantes.

No modelo das bielas e tirantes, as bielas e tirantes são representações discretas dos campos de tensões resultantes dos carregamentos aplicados e condições de contorno existentes dentro dos elementos estruturais de concreto armado. Os campos de tensões de compressão serão então idealizados através das bielas e os campos tensionais de tração pelos tirantes. Em alguns casos específicos os campos de tensões de tração poderão ser absorvidos pelas bielas. Os encontros existentes entre as bielas, tirantes e/ou cargas atuantes (ações ou reações) são denominados nós.

O modelo de bielas e tirantes apresenta como uma de suas vantagens a generalidade, ou seja, é capaz de representar, de modo aproximado, porém realista e sistemático, grande parte dos elementos estruturais de concreto armado e protendido. Isso possibilita ao engenheiro estrutural ter uma visualização físico-intuitiva bastante clara e abrangente do comportamento do elemento estrutural em consideração.

A aplicabilidade desse modelo deu-se principalmente em elementos com algum tipo de descontinuidade tais como consolos, apoios em dentes, aberturas em vigas, vigas paredes e nós de pórtico. Elementos estruturais deste tipo inicialmente eram projetados levando-se em consideração recomendações práticas ou baseando-se em experiências anteriores. Caso haja uma situação de cálculo desconhecida, este procedimento pode, no entanto, não levar a bons resultados.

Sendo assim, o modelo das bielas e tirantes propõe uma sistematização no dimensionamento desses tipos de elementos possibilitando ao projetista estrutural um entendimento bastante completo do funcionamento da estrutura. O modelo estrutural a ser adotado poderá ser inicialmente concebido através do campo de tensões elásticas ou mesmo pelo fluxo interno de tensões existente no contínuo (concreto). Isso feito, as forças atuantes nos elementos serão automaticamente calculadas por meio do equilíbrio de forças externas e internas. Assim projeta-se a estrutura do modelo pelo teorema do limite inferior da teoria da plasticidade considerando-se um modelo estaticamente admissível.

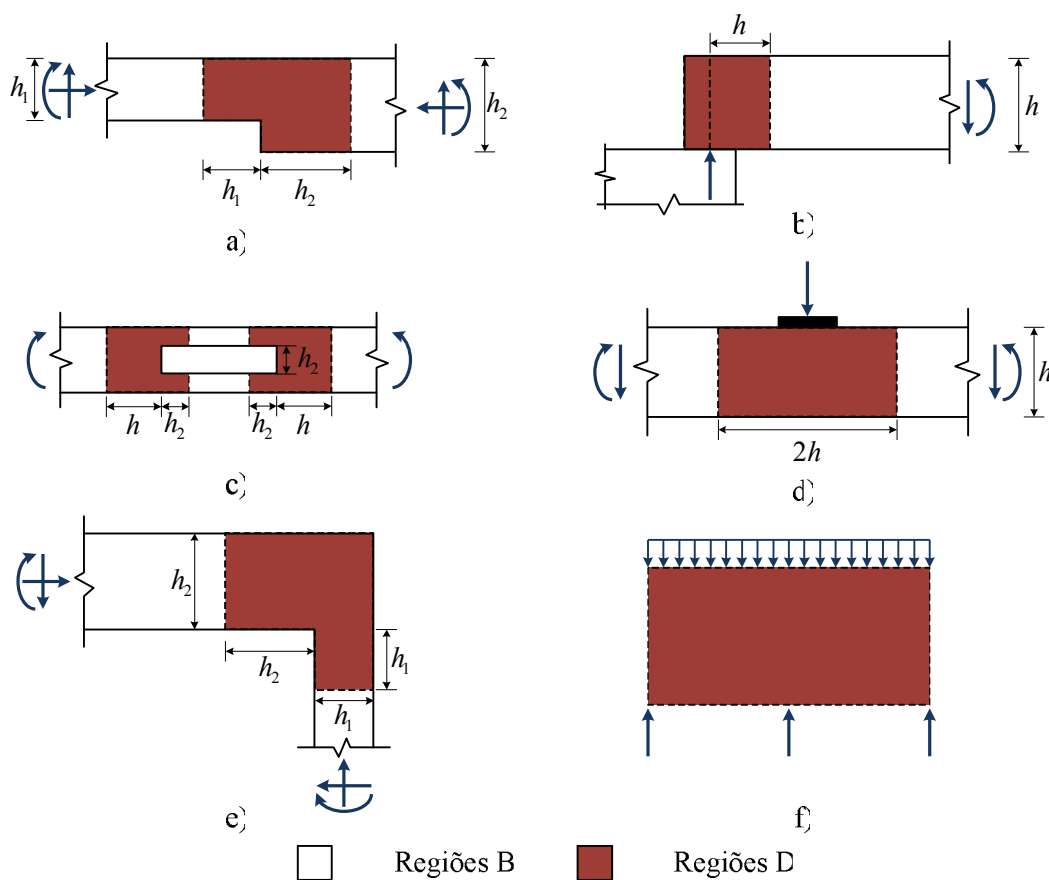


Figura 2-1: Exemplos de regiões com descontinuidades estáticas b), d), f) ou geométricas a), c), e).

Na concepção inicial do modelo devemos dividir a estrutura em análise em regiões B e D. Nas regiões B vale as hipóteses de Bernoulli, onde uma distribuição linear de deformações pode ser adotada ao longo da seção transversal. Por outro lado, nas regiões D, as hipóteses anteriormente definidas não permanecem válidas. Assim, pode-se definir uma nova região constituída através

do princípio de Saint Venant, sendo assim denominada região de Saint Venant ou regiões D, onde o dimensionamento deverá ser formulado de uma forma mais apropriada. A Figura 2.1 ilustra regiões desse tipo.

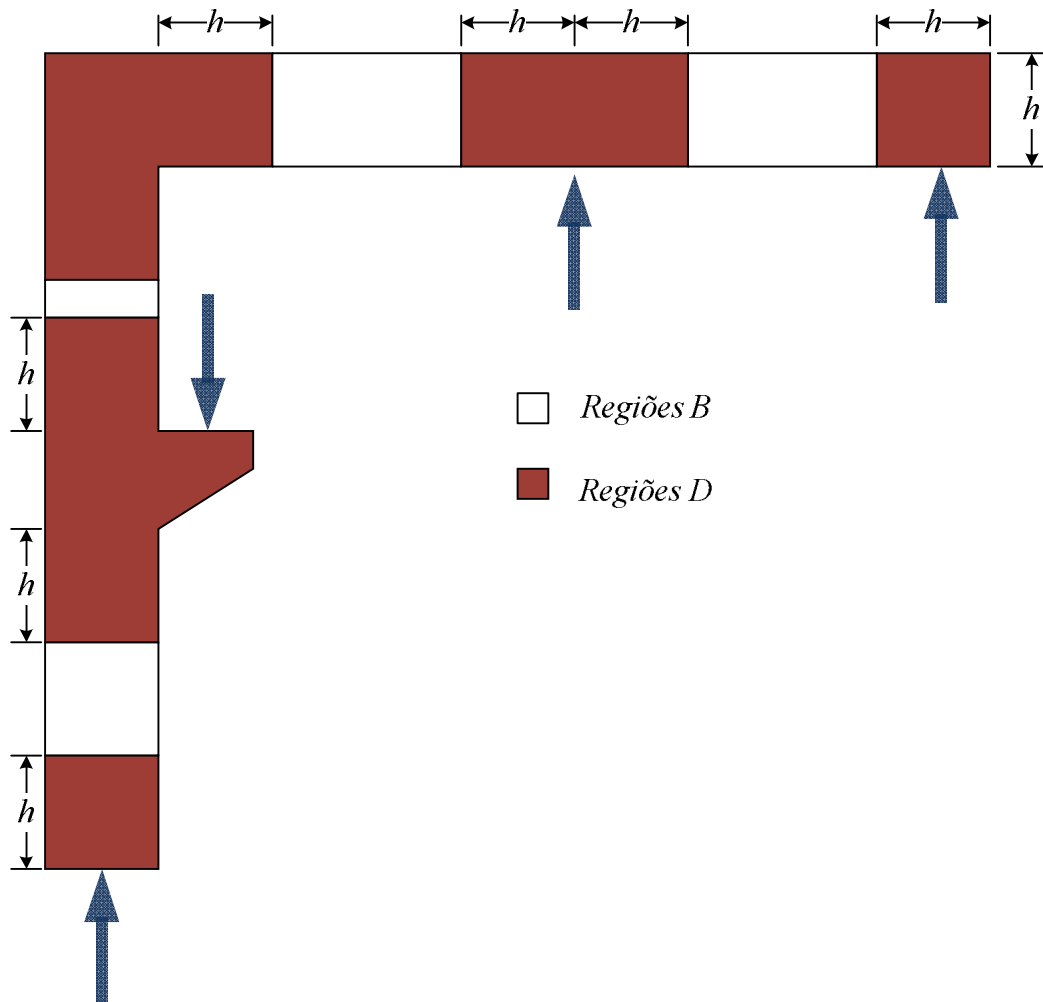


Figura 2-2: Divisão da estrutura em regiões B e D no modelo de bielas e tirantes

Exemplos de forças concentradas atuantes e reações de apoios são casos de descontinuidades estáticas, enquanto aberturas de furos em vigas, mudanças bruscas de geometria e nós de pórtico são exemplos de descontinuidades geométricas (Figura 2-1).

Sendo assim, após a divisão da estrutura em regiões B e D, o projeto das regiões B poderá ser feito de modo convencional. Para as regiões D, uma vez conhecidos os esforços nos contornos das mesmas via análise estrutural global,

procede-se ao dimensionamento através do modelo de bielas e tirantes (Figura 2.2).

Fica claro que o modelo adotado será então função da geometria e das forças atuantes no seu contorno. Estruturas com mesma geometria, porém com carregamentos diferentes terão soluções diferentes para modelagem. Isso mostra que parâmetros do tipo relação entre vão/altura empregados usualmente na classificação de alguns tipos de estruturas com descontinuidades não são suficientes para avaliação e modelagem dos mesmos.

A utilização desses modelos requer do projetista alguma experiência ou conhecimento prévio, uma vez que o modelo escolhido deve representar o mais realisticamente possível o funcionamento da estrutura. Dessa forma pode-se comparar esse tipo de determinação necessária à estruturação do modelo como uma espécie de lançamento estrutural muito comum na concepção dos edifícios.

Sendo assim, a utilização desses modelos na prática não tem sido feita de modo intensivo, talvez pela falta de difusão dos assuntos, devido à falta de consenso entre as normas especializadas ou mesmo pela dificuldade existente na sistematização completa de sua metodologia. Isso explica a utilização muito comum de soluções práticas bastante simplificadas e muitas vezes inseguras no dimensionamento desses tipos de elementos estruturais.

2.2 **Definição da Topologia**

Para aplicação do modelo de bielas e tirantes é necessária a determinação da topologia do modelo estrutural dentro da estrutura de concreto em análise. Essa geometria pode-se obtida com base nas cargas atuantes, ângulos entre as bielas e tirantes, as áreas de aplicação das forças atuantes (carregamentos e restrições de apoio), quantidade de armaduras dos tirantes e cobrimentos das armaduras.

A distribuição das tensões elásticas dentro da estrutura de concreto devido aos carregamentos atuantes normalmente é utilizada como uma referência inicial para determinação do posicionamento e dos ângulos entre as bielas e tirantes do modelo estrutural idealizado. As dimensões das bielas e das regiões nodais

dependerão da área de aplicação das forças (ações e reações), do número de camadas das armaduras existentes e do revestimento adotado para as mesmas.

As bielas e tirantes devem ser dispostos de tal forma que os centros de gravidade de cada elemento da treliça conjuntamente com a linha de ação das forças atuantes coincidam em cada nó. Essa é uma exigência que acaba por limitar a largura das bielas. Também o número de camadas de armadura existente e o revestimento adotado serão responsáveis pela determinação das regiões nodais. A Figura 2.3 mostra esquematicamente como o processo de concepção do modelo é feito.

Existe uma gama variada de formas para definição do modelo a ser utilizado no dimensionamento da estrutura. Segundo Schlaich et al (1987), uma modelagem poderá ser feita considerando a geometria do modelo por meio das tensões elásticas e dimensionando a mesma pelo teorema do limite inferior da plasticidade, ou seja, considerando o campo de tensões/esforços na estrutura como estaticamente admissível. Este tipo de análise, no entanto, poderá negligenciar a capacidade última da estrutura impedindo o cálculo de sua carga de colapso conforme salientado por Souza (2004).

Uma das justificativas da utilização de tensões elásticas na modelagem é o fato de que, segundo Souza (2004), estruturas dimensionadas desta forma apresentam um bom controle de fissuração sob cargas de serviço. Isso parece ser aceito pelo código CEB-FIP Model Code 1990 (1993), uma vez que de acordo com suas instruções, armaduras que forem dimensionadas e detalhadas de acordo com os campos de tensões elásticas ficam dispensadas das verificações de serviço.

A seguir várias possibilidades correntes na literatura dos modelos de bielas e tirantes serão apresentadas e sucintamente discutidas de modo a esclarecer os pontos principais necessários ao lançamento desse tipo de modelo.

Vale salientar que a concepção de modelos para esse tipo de abordagem ainda é um ponto que necessita ser explorado, uma vez que uma excessiva dependência da experiência do projetista estrutural nessa fase pode dificultar a divulgação e aplicabilidade da metodologia.

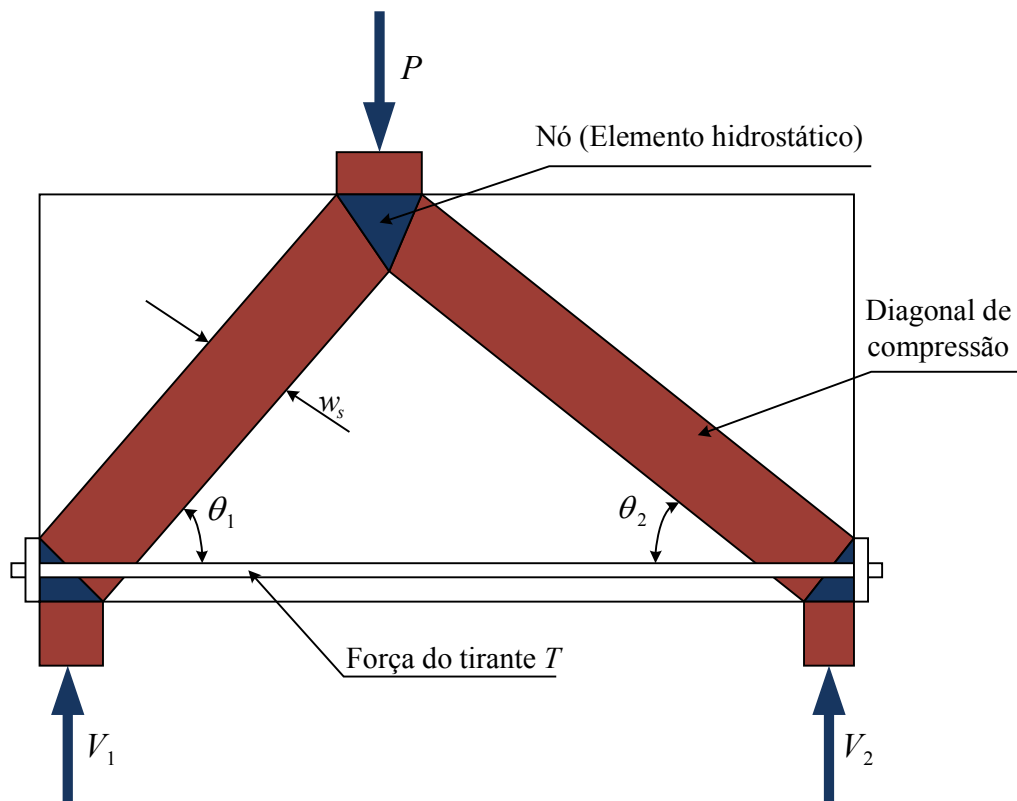


Figura 2-3: Modelo de bielas e tirantes numa viga parede

2.2.1 Processos convencionais

Em geral, o modelo de bielas e tirantes é concebido com base na sua geometria, fluxo de tensões no interior da estrutura e nas condições de apoio e distribuição dos carregamentos atuantes. Os tipos de ações atuantes, área de aplicação das ações e reações, ângulos existente entre as barras, espessura da camada para distribuição das armaduras, cobrimentos, entre outros, são os parâmetros definidores da geometria do modelo.

Conforme sugerido por Schlaich et al (1987), a idealização do modelo topológico pode ser feito com base no fluxo de tensões elásticas e de suas direções principais obtidas através de uma análise elástica. Atualmente, a escolha do modelo para dimensionamento pode seguir processos convencionais já estabelecidos ou processos de geração automática que têm sido motivo de um intenso trabalho de pesquisa nos últimos 10 anos.

A seguir os principais tipos de processos convencionais serão explicados e seus principais detalhes estabelecidos.

2.2.1.1 Modelos normativos

Várias normas propõem modelos de bielas e tirantes baseados em uma série de ensaios experimentais. (Figura 2.4).

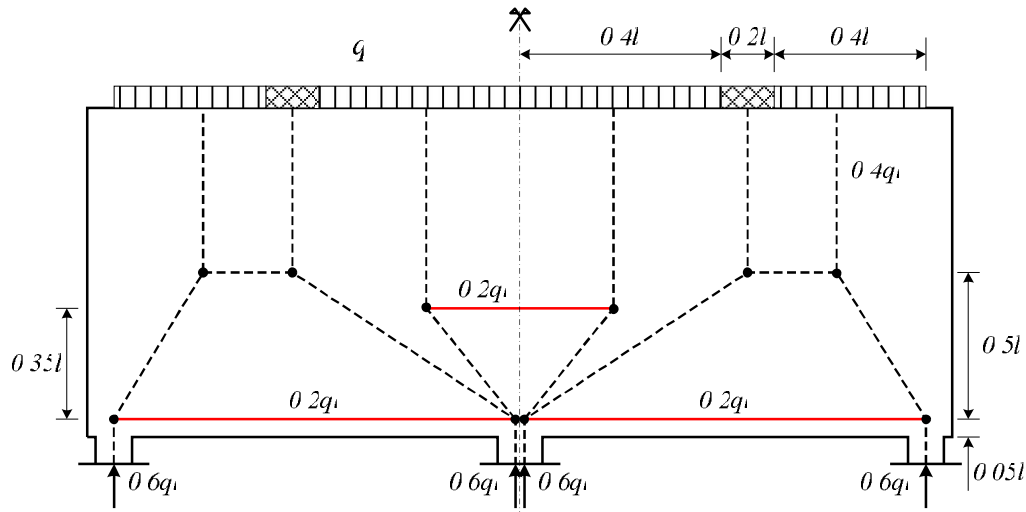


Figura 2-4: Modelos Normativos para Viga parede com carregamento distribuído (CEB-FIP 2010).

Modelos normativos são para elementos estruturais do tipo: blocos, consolos curtos, vigas parede, vigas com furos, etc. No entanto, uma vez que esses modelos são amarrados a parâmetros geométricos constantes da estrutura sua limitação para fins práticos é muito grande (Figura 2.4).

Alguns exemplos de modelos padronizados podem ser obtidos e verificados nos trabalhos de CEB-FIP Model Code (2010), Silva (1991), Silva e Giongo (2000), ACI 318-05 (2005), entre outros (Figuras 2.5, 2.6, 2.7 e 2.8).

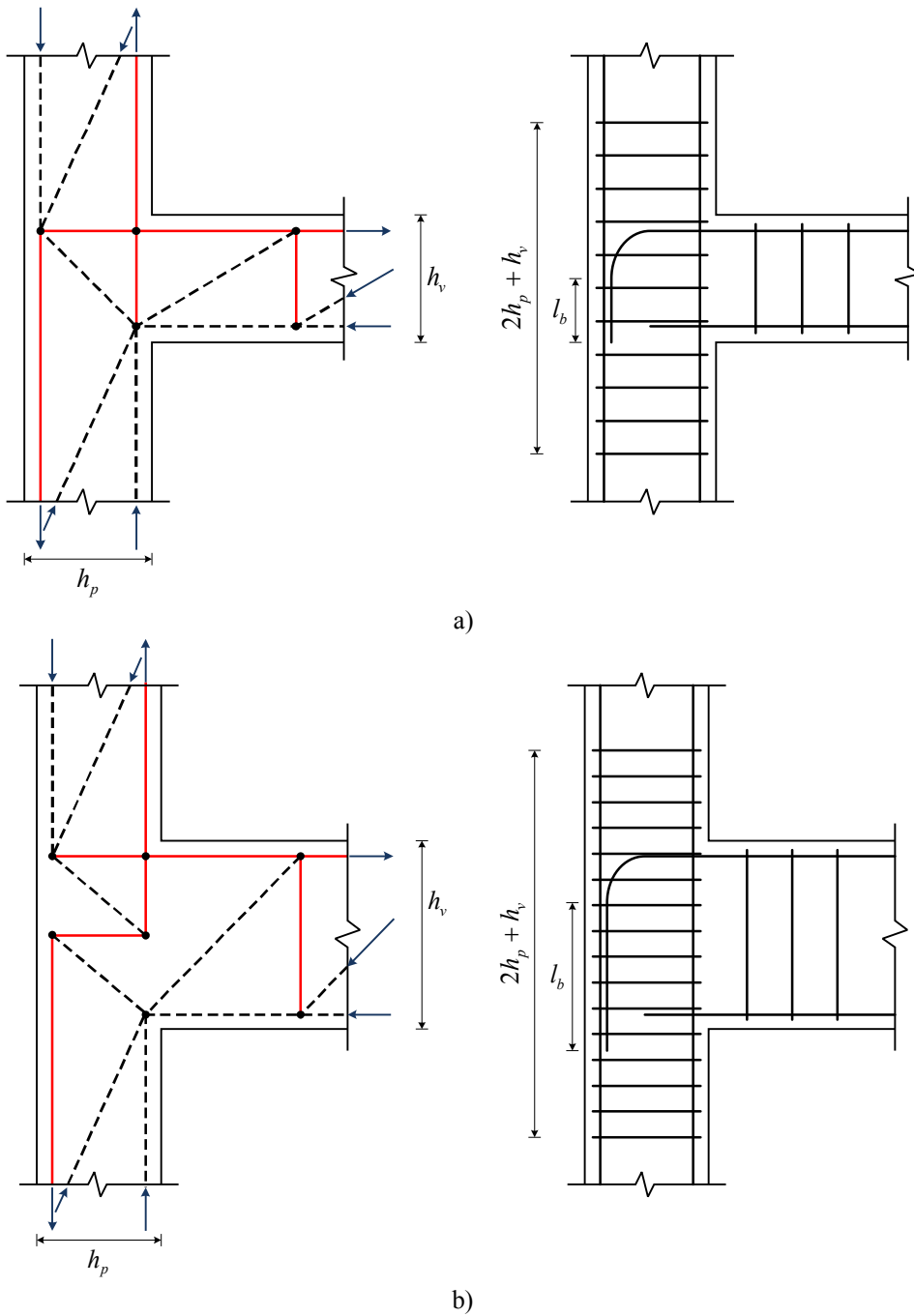


Figura 2-5: Modelos Normativos da ligação de viga intermediária-pilar extremo (Silva, 1991):
 a) $h_v \cong h_p$ e b) $h_v > h_p$

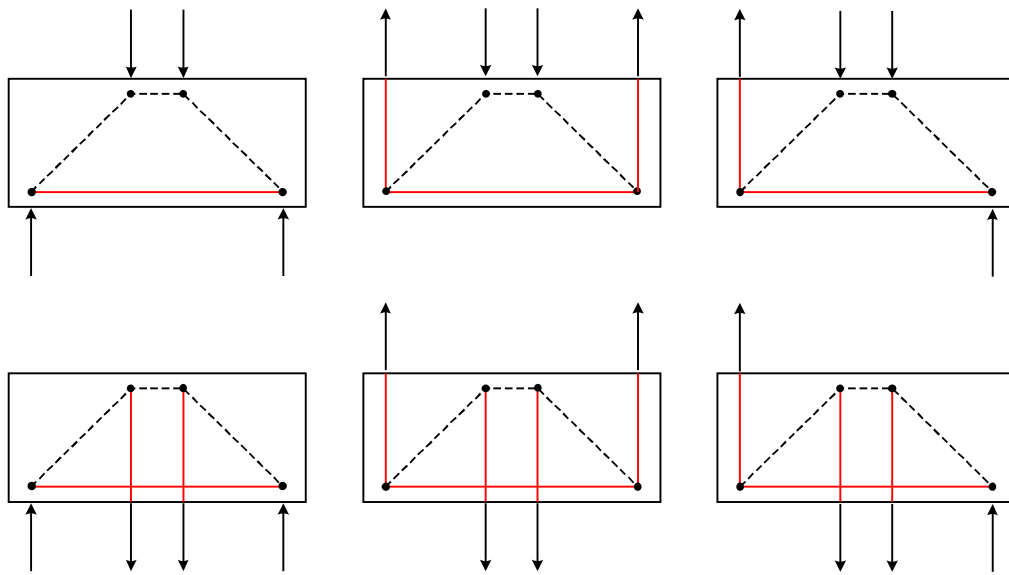


Figura 2-6: Modelos Normativos para Vigas parede com diversos carregamentos (CEB-FIP 2010).

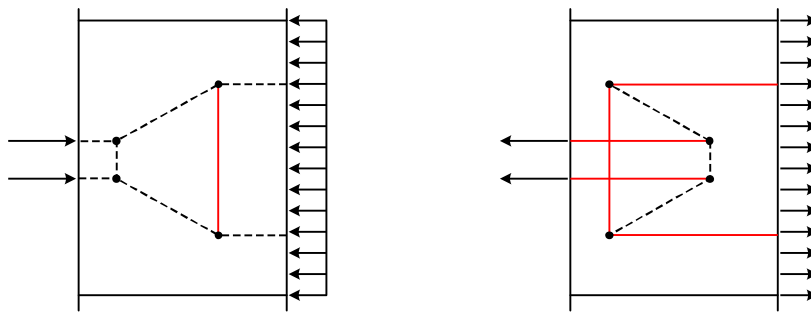


Figura 2-7: Modelos Normativos para Zonas de ancoragem (CEB-FIP 2010).

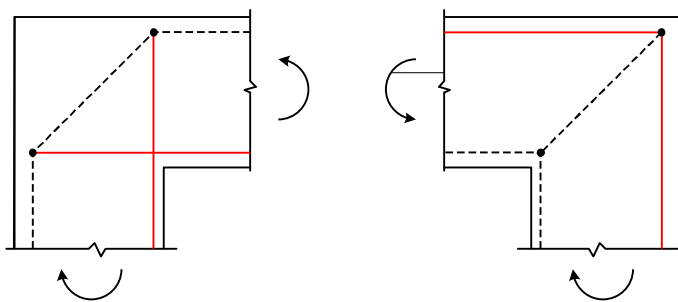


Figura 2-8: Modelos Normativos para Nós de pórtico submetido à flexão (CEB-FIP 2010).

2.2.1.2 Análise elástica

Outra abordagem utilizada na obtenção de modelos de bielas e tirantes é através do fluxo de tensões obtido por uma análise linear elástica utilizando algum programa que possua o método dos elementos finitos. Souza (2004) comenta que a grande vantagem desse tipo de abordagem é que o modelo obtido assim cumpre o Estado Limite de Serviço - ELS e os Estados Limites Últimos - ELU conjuntamente. Além disso, o mesmo autor comenta que vários pesquisadores recomendam a disponibilização dos elementos (bielas e tirantes) nas direções das direções principais encontradas na análise linear elástica. Com base nas direções principais, pode-se definir uma treliça idealizada dentro da estrutura e a partir daí verificar os esforços atuantes, posteriormente verificando se as tensões resistentes (bielas, tirantes e regiões nodais) e parâmetros de ancoragem são suficientes para assegurar o equilíbrio da estrutura.

Um exemplo de estrutura com geometria complexa é mostrado na Figura 2.9.

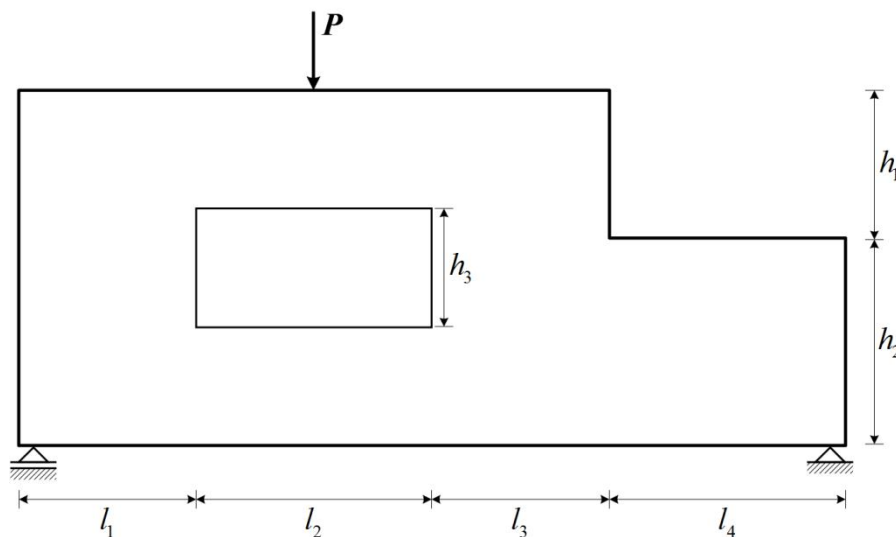


Figura 2-9: Estrutura com geometria complexa.

As Figuras 2.10 e 2.11 mostram os resultados de uma análise elástica linear pelo método dos elementos finitos (Finite Element Method - FEM) para deslocamentos e fluxo das tensões principais. O programa ELAST2D (Martha, 2008) desenvolvido pelo grupo de pesquisa da PUC Rio em linguagem matlab foi

utilizado. A escala utilizada para os deslocamentos foi exagerada para dar uma ideia clara ao projetista de como a estrutura plana irá se comportar. A estrutura plana foi concebida como um estado de tensão plana com valor de módulo de elasticidade do concreto de 2000 GPa e um coeficiente de Poisson de $0,18$. O padrão de cores adotado, para o fluxo de tensões principais é azul para tensões principais de compressão e vermelho para tensões de tração (Figura 2.11). As armaduras e bielas do modelo deverão ser colocadas de modo compatível com essa distribuição de tensões principais.

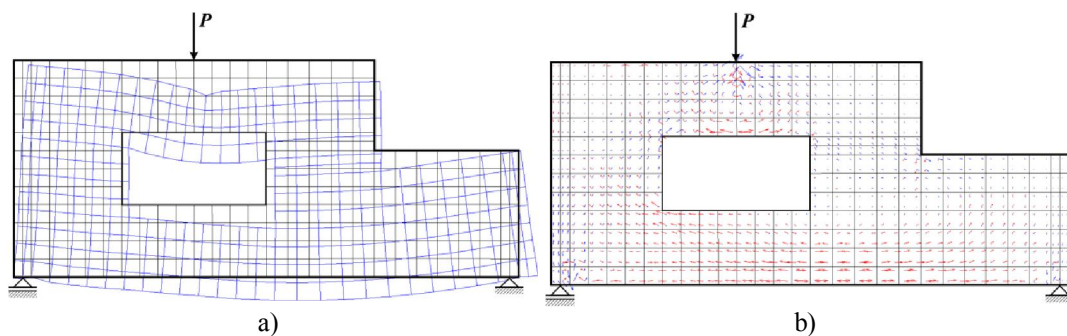
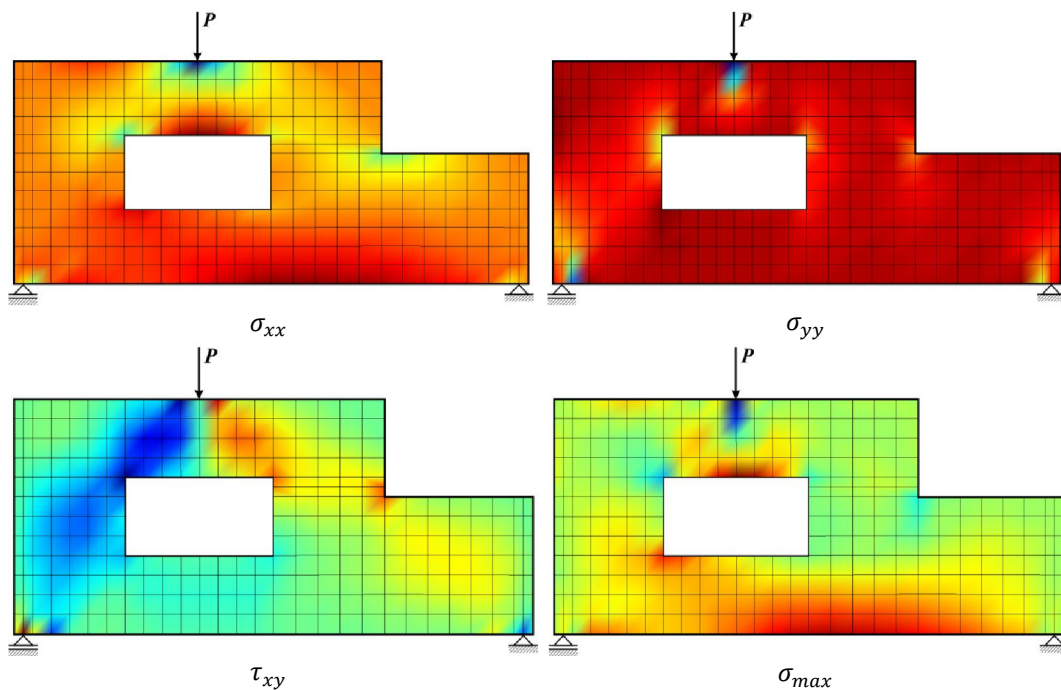
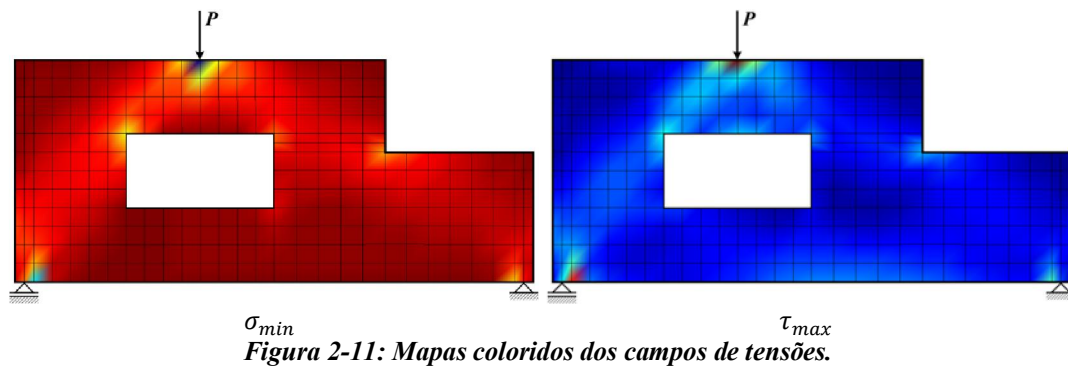


Figura 2-10: Resultados de uma análise elástica linear pelo FEM: a) Deslocamentos e b) Fluxo de tensões principais.

São apresentados na Figura 2.11 os mapas coloridos dos campos de tensões do exemplo: tensões normais em x , tensões normais em y , tensões tangenciais xy , tensões principais máximas, mínimas e de cisalhamento máximo.





Conforme proposto em Schlaich et al (1987) o modelo de bielas e tirantes deve ser concebido de forma compatível com o fluxo de desenvolvimento do campo de tensões atuantes via análise elástica. Um exemplo feito dessa maneira é mostrado na Figura 2.12. Conforme mencionado, uma das propostas desse tipo de abordagem é buscar uma garantia de que o modelo possua um bom desempenho com relação aos Estados Limites de Serviço.

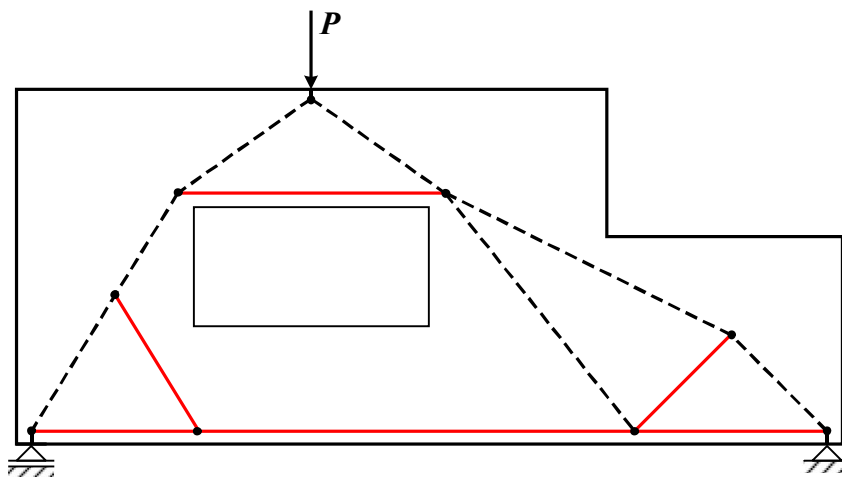


Figura 2-12: Modelo de bielas e tirantes concebido via análise elástica.

2.2.1.3 Caminho de cargas

Neste procedimento, assegura-se que o equilíbrio externo da região modelada seja obtido através da satisfação das equações de equilíbrio via carregamento atuante e restrições de apoio existentes. Após essa fase o encaminhamento das cargas no interior da estrutura será obtido via campos de tração e compressão que serão lançados como bielas e tirantes no modelo.

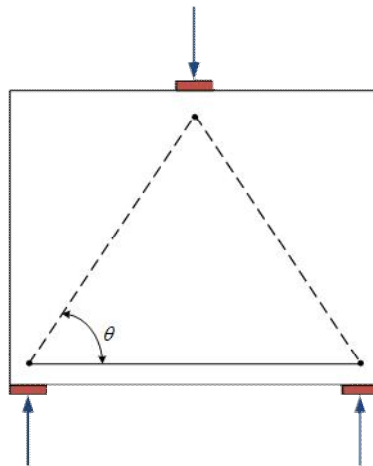


Figura 2-13: Caminho de carga num modelo simples de viga parede.

Carregamentos distribuídos deverão ser substituídos por carregamentos concentrados equivalentes, de modo que no interior da estrutura seja definido um determinado caminho de carga que possa conduzir as mesmas a encontrar as forças de reação equilibrantes. Os caminhos de carga devem ser alinhados e não devem se interceptar. Também duas cargas opostas devem ser interligadas por caminhos de carga os mais curtos possíveis. Caso apareçam curvaturas nos caminhos de carga podem significar concentração de tensões.

Uma vez definidos todos os caminhos de carga entre as forças (atuantes e reações), um polígono formado por linhas deverá ser definido dentro da estrutura. Considerando-se os carregamentos essas linhas serão formadas por bielas (linhas interrompidas) e tirantes (linhas contínuas), acrescentando-se então outras linhas necessárias ao equilíbrio de cada nó existente. A Figura 2.13 mostra um exemplo simples onde o processo de encaminhamento de cargas é aplicado.

2.2.1.4

Padrão de fissuração dos modelos

A visualização dos padrões de fissuração obtidos via ensaios para posterior lançamento do modelo de bielas e tirantes é outra opção para concepção dos modelos. Através da identificação desses padrões é possível idealizar os possíveis caminhos para colocação dos tirantes e bielas uma vez que as fissuras normalmente têm direções perpendiculares às tensões de tração e são paralelas às tensões principais de compressão (Souza, 2004).

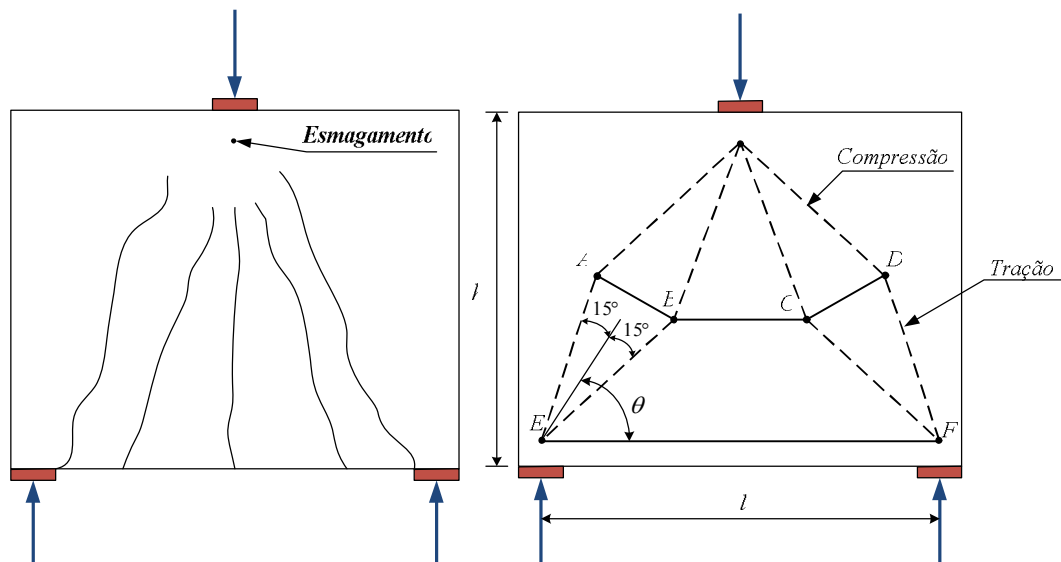


Figura 2-14: Modelo de bielas e tirantes via padrão de fissuração (Schlaich et al., 1987).

Um exemplo de uma viga parede com um correspondente padrão de fissuração e um modelo de bielas e tirantes associado pode ser visto na Figura 2.14.

Na prática, no entanto, é difícil ou mesmo impossível a obtenção de uma topologia compatível tanto para modelos simples quanto complexos com esse tipo de metodologia (Yindeesuk, 2009).

2.2.2 Processos automáticos de geração

Até agora, uma série de trabalhos tem sido feitos no sentido de automatizar a concepção do modelo de bielas e tirantes dentro da estrutura de concreto. Isso se deve à problemática de dispor de forma mais adequada possível os elementos dentro da estrutura, levando a um modelo eficiente. Essa tarefa nem sempre é simples e em alguns casos onde a geometria é complexa, pode ser bastante difícil uma solução coerente. Isso poderia conduzir a modelos com pouca segurança uma vez que não representem o funcionamento correto da estrutura.

Assim a perspectiva de uma metodologia que auxilie o projetista de estruturas nessa tarefa pode ser bastante interessante do ponto de vista da utilização do modelo. Uma explicação bastante completa e que abrange uma série de trabalhos nesta área de pesquisa e suas principais características pode ser encontrada em Souza (2004). Neste trabalho apenas serão mostrados aspectos

relativos à utilização da otimização topológica nesse tipo de modelagem por ser, na opinião do autor, uma ferramenta mais completa e eficiente que as demais propostas.

Otimização topológica pode ser entendida como um método computacional capaz de lançar estruturas através da distribuição ótima de material em uma determinada região do espaço. Para isso é utilizada uma combinação do método dos elementos finitos (*Finite Element Method* - FEM), um modelo para o comportamento do material e métodos de otimização. Assim, uma região do espaço é discretizada em elementos finitos de modo que se possa analisar seu comportamento e, então, é distribuído material de forma racionalizada através de algoritmos de otimização.

Uma vantagem da otimização topológica é sua capacidade de fornecer o arranjo topológico ótimo de um componente estrutural ou mesmo da própria estrutura, para uma determinada aplicação. Assim, este método pode ser aplicado durante a fase do projeto conceitual, diferentemente dos métodos tradicionais de otimização, como a otimização paramétrica ou de forma, que só podem ser aplicados após a definição de um arranjo topológico da estrutura. Desse modo, a otimização topológica pode ser definida como um processo de síntese estrutural.

Um problema típico de otimização topológica é a seleção da melhor configuração possível para o projeto de uma estrutura. Na última década, muita atenção tem sido dada para o desenvolvimento dos métodos de otimização topológica do contínuo. Bendsoe e Kirkuchi (1988) propuseram um método de otimização baseado em homogeneização que trata a otimização topológica do contínuo como um problema de redistribuição dos materiais. Atualmente existem uma série de técnicas utilizadas na resolução dos problemas de otimização topológica. A adotada neste trabalho é a formulação SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) que será descrita em detalhes no capítulo 3.

A formulação via método SIMP surgiu como uma opção simples de introduzir o material com propriedades intermediárias similares às que se obtêm com o uso de microestruturas e técnicas de homogeneização. No entanto, no caso da metodologia SIMP, esse material intermediário, normalmente definido na forma de densidade artificial, é usado apenas como artifício matemático, ao passo

que na técnica de homogeneização o material intermediário pode corresponder a um material composto ou microestruturado. A função densidade artificial definida pelo SIMP é então utilizada como variável de projeto, definida no domínio de projeto, no intuito de determinar quais regiões devem possuir material e quais devem ser vazias.

Considerando a necessidade de definição de regiões vazias ou não, representa-se o material sólido como uma densidade artificial $\rho = 1$ e o vazio $\rho = 0$, variando ρ entre esses dois limites. No presente contexto, as densidades artificiais intermediárias não têm nenhum interesse prático, logo técnicas que penalizem estes valores devem ser utilizadas no intuito de se evitar a incidência desse tipo de região no domínio analisado.

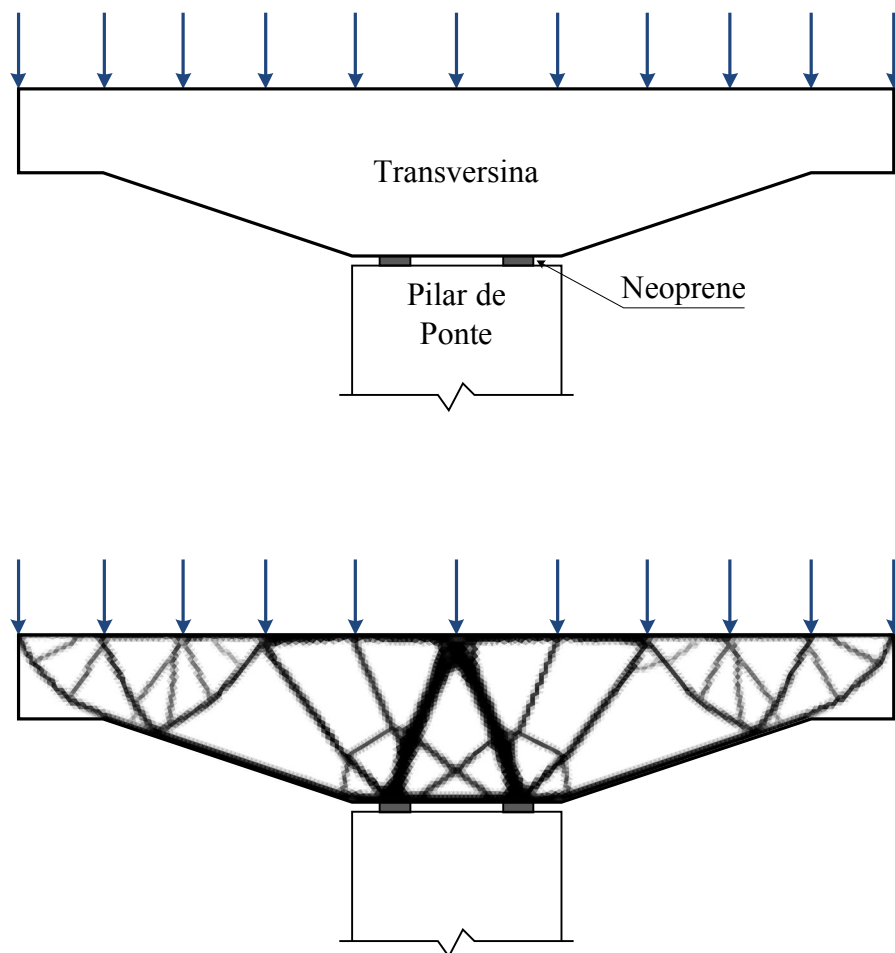


Figura 2-15: Topologia de uma transversina de ponte via otimização topológica.

Apesar da utilização da otimização topológica já estar bem difundida nas áreas da engenharia aeronáutica e mecânica, na engenharia civil sua aplicação

ainda é muito recente e há uma necessidade muito grande de pesquisas nessa área. Um dos maiores inconvenientes na sua aplicação como observado por Souza (2004), é a disposição aleatória das armaduras, que para fins práticos poderia levar a um detalhamento não usual (Figura 2.15).

Conforme será apresentado posteriormente no capítulo 3, o presente trabalho propõe a técnica dos elementos indutores como uma opção para esse tipo de problema. Os elementos indutores podem ser utilizados, como barras de armaduras pré-fixadas, que entrarão no processo de otimização influenciando o encaminhamento de cargas. Também possibilita ao projetista estrutural a obtenção de novos modelos e de uma interatividade com o processo de otimização bastante interessante.

Vale citar os trabalhos de Liang et al (2000 a,b,c) que utilizam uma técnica semelhante, sem o uso dos elementos indutores, porém com uso de um processo de otimização diferente na obtenção de vários modelos de otimização topológica.

No capítulo 3 uma explicação bastante detalhada sobre a aplicação da otimização topológica, com a presença de elementos indutores ou não na obtenção dos modelos, será feita. No capítulo 3 alguns exemplos serão apresentados e os resultados avaliados para validação da metodologia proposta.

2.3 Detalhamento do Modelo

Um projeto executado com os modelos e bielas e tirantes envolve tipicamente os seguintes passos:

- I) Definição das descontinuidades e isolamento das regiões D. Isso pode ser feito através da utilização do princípio de St. Venant.
- II) Computar as resultantes de forças em cada contorno da região D. As tensões resultantes calculadas entre as regiões B e D poderão ser consideradas como forças pontuais equivalentes.
- III) Idealizar um modelo de treliça que transfira as resultantes de forças através da região D. Os eixos das bielas e tirantes devem ser orientados para coincidirem aproximadamente com os eixos dos campos de tensões principais de compressão e tração,

respectivamente. Uma análise elástica ou o método do caminho de cargas poderá ser utilizado para concepção do modelo topológico da treliça no interior do contínuo de concreto.

- IV) Calcular as forças nas barras da treliça. Para modelos estaticamente determinados os esforços solicitantes podem ser facilmente obtidos. Para modelos hiperestáticos uma solução de mínima norma Euclidiana a ser detalhada no item 2.4 desse capítulo poderá ser utilizada.
- V) Determinar as larguras efetivas das bielas e zonas nodais, considerando as forças atuantes do passo anterior e a resistência efetiva do concreto. Em alguns casos poderá haver necessidade de ajuste da geometria e novamente determinação dos esforços do item anterior.
- VI) Calcular as seções de armaduras necessárias para os tirantes considerando a tensão de resistência do aço utilizado. As armaduras devem ser detalhadas de modo apropriado a garantir a ancoragem necessária.
- VII) Uma verificação final deverá ser feita no nível tensional das bielas e nós como também uma apropriada definição da armadura de pele mínima a ser utilizada para controle da fissuração do elemento estrutural.

A verificação dos elementos estruturais deve ser feita através do dimensionamento correto que defina as seções necessárias aos esforços atuantes e também para garantir que a transferência de forças aconteça nas regiões nodais.

Uma série de fatores como perturbações devido a fissuras e armaduras, estados de confinamento e multiaxiais podem influenciar nos limites tensionais do material concreto. Assim, limitam-se os valores resistentes para bielas e regiões nodais.

De forma a obter um comportamento dúctil frente ao estado limite último para o modelo de bielas e tirantes, é aconselhável garantir que os elementos de armadura ou tirantes escoem antes que os elementos de concreto representados pelas bielas e regiões nodais entrem em ruína.

Todo o procedimento para o desenvolvimento dos modelos de bielas e tirantes é ilustrado na Figura 2.16:

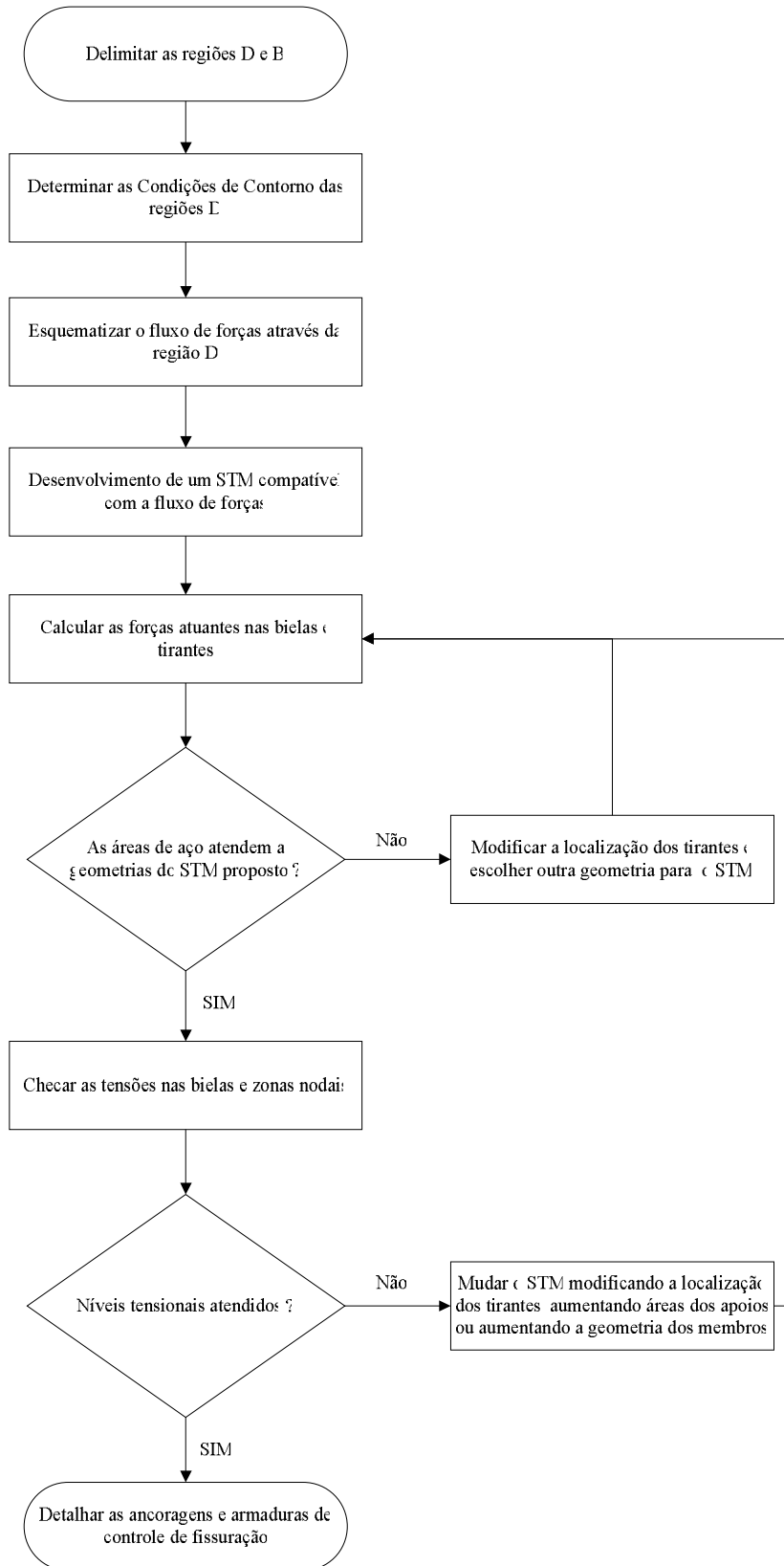


Figura 2-16: Fluxograma ilustrativo dos STM (Brown e Bayrak, 2006)

2.3.1 Plasticidade em concreto armado

Em geral, pretende-se que as estruturas tenham um comportamento linear nas situações usuais de serviço. No entanto, quando uma estrutura atinge o colapso, já deixou de apresentar comportamento elástico-linear. Assim sendo, para uma determinada estrutura e um carregamento associado a ela, a carga de colapso depende apenas da capacidade plástica do material e não do seu comportamento antes do colapso. Logo, a verificação da segurança aos Estados Limites Últimos é feita recorrendo a um modelo rígido-plástico.

Num procedimento rígido-plástico ou plástico perfeito do material as deformações elásticas são desprezadas, considerando-se apenas as deformações plásticas admitindo então a existência de um patamar de escoamento. O método de cálculo estrutural que envolve esse tipo de metodologia é denominado de análise plástica limite ou análise limite. Nesse tipo de método de cálculo um procedimento através de tentativas é adotado.

A análise limite de estruturas baseia-se num conjunto de teoremas fundamentais: o teorema estático ou do limite inferior, o teorema cinemático ou do limite superior e o teorema da unicidade. No procedimento adotado nessa pesquisa será apenas utilizado o teorema estático ou teorema do limite inferior uma vez que é formulado pela imposição da verificação das condições de equilíbrio e de escoamento. Isso significa estudar distribuições de esforços estáveis e estaticamente admissíveis para os quais as tensões atuantes são inferiores a tensão de escoamento.

Toda a concepção dos modelos de bielas e tirantes é fundamentada no teorema do limite inferior. Assim sendo, a carga obtida através do modelo estará a favor da segurança conforme será descrito a seguir.

Na verdade, o modelo de bielas e tirantes só faz sentido no estado de colapso plástico, isto é, somente neste estágio é possível conceber um modelo de barras que represente o comportamento da estrutura.

2.3.2 Teorema do limite inferior

Os teoremas da análise limite foram formulados primeiramente por Gvozdev (1938) e Drucker et al (1952) de forma independente, para corpos com comportamento rígido-plástico perfeito. Esses teoremas fornecem limites inferiores e superiores para a verdadeira carga de colapso da estrutura. No caso dos modelos de bielas e tirantes envolvidos nesse trabalho de pesquisa apenas o teorema do limite inferior será utilizado uma vez que conduz a modelos cuja aproximação da carga real de colapso seja a favor da segurança.

Podemos enunciar o teorema do limite inferior na forma: “Se a carga atuante tem uma magnitude que permita encontrar um campo de tensões, satisfazendo às condições de equilíbrio no interior e no contorno, e em qualquer ponto do corpo essas tensões estejam satisfazendo um critério de resistência do material, então a carga atuante é menor ou no máximo igual à carga de colapso real da estrutura.” (Santos, 2003).

Assim sendo, se um campo de tensões se enquadra na definição do Teorema do Limite Inferior anteriormente enunciado, esse campo é dito seguro ou estaticamente admissível. Uma vez que a carga de colapso real da estrutura é sempre maior ou igual a uma carga atuante referida a um campo de tensões estaticamente admissível, os limites inferiores são sempre a favor da segurança.

Sendo o carregamento externo aplicado representado por um parâmetro estritamente positivo λ_S que guarde uma relação proporcional com as componentes individuais das cargas, tem-se o chamado carregamento proporcional que provoca colapso (colapso estático). O teorema pode então ser utilizado para encontrar valores de carga menores ou iguais à carga de colapso correspondente ao fator de proporcionalidade λ_R , denominado fator de colapso.

Dado um fator de carga λ_S , para o qual existe um campo de tensões estaticamente admissível, então:

$$\lambda_S \leq \lambda_R \quad (2.1)$$

Conclui-se então que dadas duas soluções de distribuição de tensões estaticamente admissíveis, a que conduz a maior carga de colapso é a mais próxima da verdadeira carga de colapso.

2.3.3 Análise limite

Inicialmente, para resolução do problema com base na metodologia proposta, um problema de análise limite relativo ao teorema do limite inferior deverá ser montado para o modelo rígido-plástico relativo ao modelo topológico considerado. Sua principal vantagem está na facilidade de cálculo da carga de ruptura ou colapso pelo fato de utilizar a análise rígido-plástica, o que simplifica sobremaneira as leis constitutivas (Jirásek e Bazant, 2000).

Numa análise limite, as variáveis que caracterizam os campos de tensões, ditas variáveis estáticas, relacionam-se entre si com as cargas aplicadas através de expressões que traduzem o equilíbrio. A condição de resistência representada pela superfície de escoamento constitui, juntamente com as equações de equilíbrio, as principais restrições do problema de programação matemática, correspondente ao problema de análise limite pelo limite inferior. A linearização da superfície de escoamento, quando possível, transforma o problema num caso particular da programação matemática, em que todas as relações são lineares, denominado *programação linear (PL)*.

Nesse trabalho o teorema do limite inferior é utilizado para formulação de um problema de análise limite. Como o modelo de bielas e tirantes é usado, as incógnitas, que representam os campos de tensões, serão as forças internas nas barras da treliça e o fator de carga estático λ_S .

A função objetivo do problema de programação linear é maximizar o fator de carga λ_S para um campo de forças estaticamente admissível, onde N é vetor das incógnitas do problema de PL e o vetor das cargas aplicadas F em equilíbrio com N . As forças N devem satisfazer ainda ao critério de resistência. O problema pode então ser formulado na forma:

$$\text{Maximizar: } \lambda_S \quad (2.2)$$

$$\text{Sujeito a: } LN = \lambda_s F \quad (2.3)$$

$$N_i^l < N_i < N_i^u \quad (2.4)$$

Onde :

L – matriz de equilíbrio estático

N– vetor dos esforços internos das barras

F – vetor das cargas aplicadas

N_i^u e N_i^l - são respectivamente os limites superior e inferior das forças nas barras

Na formulação proposta um problema de programação linear para aplicação do teorema do limite inferior é montado, com o objetivo de maximizar a carga de colapso, utilizando o modelo de bielas e tirantes proposto por Schlaich et al (1987). Posteriormente, no capítulo 4, esse programa de análise limite será utilizado como um subproblema da análise de confiabilidade a ser executada via o método de FORM. Para cada iteração os valores randômicos das variáveis serão gerados e uma função de falha global será verificada para determinação da probabilidade de falha da estrutura.

2.3.4 Metodologias semi-probabilísticas de projeto de STM

Atualmente, um número bastante expressivo de códigos normativos permitem a utilização do modelo de bielas e tirantes no dimensionamento de estruturas especiais de concreto armado e protendido. Alguns exemplos são ACI 318-05 (2005), EUROCODE 2 (1999), CEB-FIP Model Code 1990 (1993), entre outros.

As orientações normativas presentes nos códigos são baseadas atualmente, na sua maioria, em metodologias semi-probabilísticas de projeto. Em métodos dessa natureza, a verificação da segurança estrutural é baseada em dois preceitos principais: modelos teóricos para avaliação da capacidade de elementos estruturais baseados em pesquisas recentes e aplicação de fatores de ponderação que considerem as incertezas das variáveis de ação e resistência que devem ser

determinados por consenso ou calibração com as normas correspondentes em tensões admissíveis (Nogueira, 2005). Nesse tipo de metodologia conhecida como Estados Limites, a segurança é verificada pela comparação das solicitações atuantes no elemento estrutural com as correspondentes capacidades resistentes minoradas. Essas majorações e minorações são feitas considerando coeficientes parciais de segurança que têm como objetivo cobrir as incertezas presentes nas variáveis de projeto.

Em vista da numerosa literatura sobre a aplicação de modelos de bielas e tirantes em códigos normativos cinco das principais publicações sobre o tema foram selecionadas de acordo com a abrangência e importância. Nesse sentido, as orientações apresentadas por Schlaich et al (1987), a norma americana ACI 318-05 (2005), o EUROCODE 2 (1999), CEB-FIP Model Code 1990 (1993) e a proposta de norma feita por Souza e Bittencourt (2003) foram escolhidas. Na NBR 6118 não há atualmente nenhuma orientação normativa sobre o assunto.

A seguir, os principais elementos estruturais componentes dos modelos de bielas e tirantes e seus respectivos valores de resistência apresentados segundo as orientações normativas vigentes.

2.3.4.1 Bielas

As bielas no modelo de bielas e tirantes são modeladas através de discretizações dos campos de tensão de compressão dentro da estrutura de concreto. Dependendo da forma como as tensões de compressão se distribuem por meio da estrutura podem-se ter campos de tensões de compressão diferentes. Três configurações típicas são normalmente consideradas:

- Distribuição de tensões radial: neste tipo de idealização considera-se um campo de tensões com uma curvatura desprezível. Normalmente são encontradas onde as forças são introduzidas e propagadas de maneira suave. As tensões transversais não se desenvolvem neste tipo de campo (Figura 2-17).

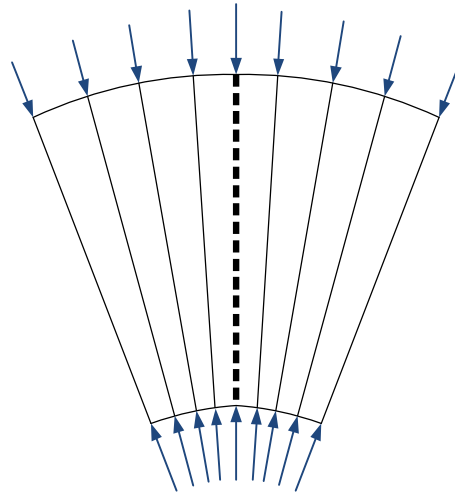


Figura 2-17: Distribuição de tensões radial.

- Distribuição de tensões em linhas curvilíneas com afunilamento: A curvatura do campo de tensões é considerada acentuada. A difusão de tensões neste campo provoca compressão biaxial ou triaxial abaixo das forças atuantes. As tensões de tração nesse caso são consideráveis (Figura 2-18).

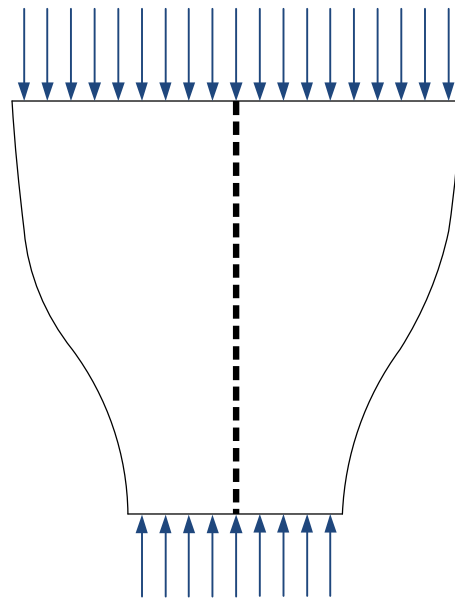


Figura 2-18: Distribuição de tensões em linha com afunilamento.

- Distribuição de tensões paralela: Não existe curvatura neste campo de tensões. Sendo assim, as tensões se distribuem uniformemente, sem

perturbação. Não há o desenvolvimento de tensões de tração transversais (Figura 2-19).

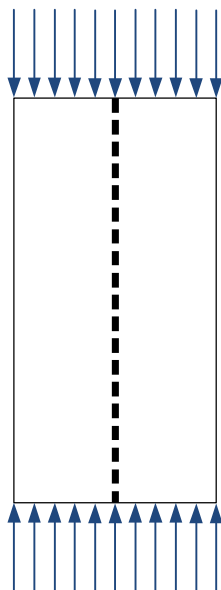


Figura 2-19: Distribuição de tensões paralelas.

2.3.4.1.1

Parâmetros de resistência das bielas

A resistência à compressão das bielas é menor que a resistência à compressão de corpos de prova cilíndricos em ensaios de compressão. Isso é explicado devido ao fato dos efeitos de tração da armadura que as atravessa. Existe uma série de valores propostos na literatura que recomendam parâmetros para o cálculo da resistência efetiva nas bielas.

Os trabalhos de Silva e Giongo (2000) e Souza (2004) apresentam valores propostos por diversos autores e normas que ainda não têm um consenso na sua utilização.

Está fora do escopo deste trabalho uma discussão definitiva sobre esse tema. No entanto, serão utilizados alguns valores propostos por algumas normas e autores, de forma a comparar os valores de índice de confiabilidade como parâmetro para avaliação do desempenho do modelo adotado. No capítulo de exercícios um exemplo será feito com essa finalidade.

Os valores a serem observados nesse trabalho serão:

- Schaefer e Schlaich (1988,1991)

Para um estado uniaxial de tensões sem perturbação:

$$f_e = 1.0 f_{cd} \quad (2.5)$$

Para campos de compressão com fissuras paralelas às tensões de compressão:

$$f_e = 0.8 f_{cd} \quad (2.6)$$

Para um campo de compressão com fissuras inclinadas:

$$f_e = 0.6 f_{cd} \quad (2.7)$$

Sendo f_{cd} a resistência de cálculo à compressão do concreto.

- CEB-FIP Model Code (1993)

Para zonas não fissuradas (MPa):

$$f_e = 0.85 \left[1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] f_{cd} \quad (2.8)$$

Para zonas fissuradas (MPa):

$$f_e = 0.60 \left[1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] f_{cd} \quad (2.9)$$

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{1.5} \quad (2.10)$$

Sendo estes valores validos para uma deformação de compressão máxima no concreto igual a:

$$\varepsilon_{cu} = 0.004 - 0.002 \frac{f_{ck}}{100} \quad (2.11)$$

- ACI – 318 (2005)

$$\phi \cdot F_{ns} \geq F_u \quad (2.12)$$

$$F_{ns} = f_{cu} \cdot A_c \quad (2.13)$$

$$f_{cu} = 0.85 \cdot \beta_s \cdot f_c \quad (2.14)$$

$\phi = 0.85$: para regiões D, conforme MacGregor (1997)

$\beta_s = 1.0$: para bielas uniformes de seção constante;

$\beta_s = 0.75$: para bielas tipo garrafa que satisfaçam (I);

$\beta_s = 0.6\lambda$: para bielas tipo garrafa que não satisfaçam (I);

(I) – Taxa de armadura que atravessa a biela(ver ACI item 3.3)

➤ EUROCODE 2 (1999)

Para campos de compressão paralelos ou bielas prismáticas (MPa):

$$f_e = 0.70 \left[1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] f_{cd} \geq 0.50 \cdot f_{cd} \quad (2.15)$$

Para bielas com fissuras paralelas à sua direção e ancorando armadura transversal (MPa):

$$f_e = 0.80 \cdot \alpha \cdot f_{cd} \geq 0.50 \cdot f_{cd} \quad (2.16)$$

Para bielas com transferência de compressão entre fissuras de abertura normal (almas de vigas) (MPa):

$$f_e = 0.70 \cdot \alpha \cdot f_{cd} \quad (2.17)$$

Para bielas com transferência de compressão entre fissuras de grande abertura (elementos tracionados) (MPa):

$$f_e = 0.50 \cdot \alpha \cdot f_{cd} \quad (2.18)$$

Sendo o valor de α igual 0.85 e $f_{cd} = \frac{f_{ck}}{1.5}$ (Souza , 2004).

➤ Souza e Bittencourt (2003)

Para bielas prismáticas:

$$f_e = 0.63 f_{ck} \quad (2.19)$$

Para bielas do tipo garrafa atravessadas por tirantes:

$$f_e = 0.48 f_{ck} \quad (2.20)$$

2.3.4.2 Regiões nodais

Podemos definir um nó como um volume de concreto que envolve as intersecções das bielas comprimidas, em combinação com forças de ancoragem conjuntamente ou não com forças atuantes ou forças devido às restrições de apoio.

Nessas regiões normalmente aparecem mudanças bruscas de direção de forças o que exige para manutenção do equilíbrio na região, o aparecimento de no mínimo três forças no nó.

Segundo Schaefer e Schaich (1988), os nós contínuos são aqueles em que o desvio de forças é feito em comprimentos compatíveis. Os mesmos não serão críticos desde que uma ancoragem adequada para armadura seja providenciada. Os nós singulares serão aqueles em que há forças concentradas aplicadas e cujo desvio de forças é feito localizadamente. Também descontinuidades geométricas podem causar concentrações de tensões responsáveis pelo aparecimento de nós singulares.

Assim, fica clara a necessidade de uma criteriosa análise dos nós singulares com relação a resistência e detalhamento de armadura. Para tanto se deve considerar para o dimensionamento desse tipo de nó sua geometria, o estado de tensões instalado, a resistência do concreto a ser considerada e ancoragem das armaduras existentes.

Outro fator importante a ser considerado na avaliação de um nó é o ângulo formado pelas bielas e tirantes concorrentes nele. Quanto menor este ângulo, menor a resistência à compressão da biela (Santos, 2006).

A tabela 2-1 apresenta os limites permitidos para os ângulos segundo os códigos normativos considerados neste trabalho.

Tabela 2-1: Valores limites para o ângulo entre bielas e tirantes num nó.

Valores permitidos para o ângulo θ_b	
Referência	Limites
ACI 318-05 (2003)	$25^\circ \leq \theta_b \leq 65^\circ$
EUROCODE 2 (1999)	$21^\circ \leq \theta_b \leq 45^\circ$
CEB-FIP Model Code (1990)	$18.4^\circ \leq \theta_b \leq 45^\circ$
Schaefer e Schaich (1988,1991)	$25^\circ \leq \theta_b \leq 65^\circ$

2.3.4.2.1**Parâmetros de resistência dos nós**

Do mesmo modo que no caso das bielas, várias são as normas e autores que propõe valores para os parâmetros de resistência efetiva das regiões nodais. Novamente adotaremos alguns valores específicos para posteriores comparações do desempenho do modelo adotado.

Vale acrescentar que devem ser observados valores mínimos de ângulos de inclinação existente entre bielas chegando a um mesmo nó. Simplificadamente, consideraremos os valores limites dos ângulos variando entre 25 a 65 graus conforme recomendado em Fu (2001).

Os valores a serem observados nesse trabalho serão:

- Schaefer e Schlaich (1988,1991)

Para nós com estado de tensão biaxial:

$$f_e = 1.0 f_{cd} \quad (2.21)$$

Para nós onde barras tracionadas são ancoradas e uma parcela da resistência é reservada para a aderência:

$$f_e = 0.8 f_{cd} \quad (2.22)$$

Sendo f_{cd} a resistência de cálculo à compressão uniaxial.

Abaixo serão descritas uma série de geometrias propostas por Schaefer e Schlaich (1988,1991), que podem ocorrer em nós singulares e cuja verificação poderá ser feita de modo simplificado. Assim:

Nó 1: Equilíbrio em $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \leq 1,1 \cdot f_{cd}$

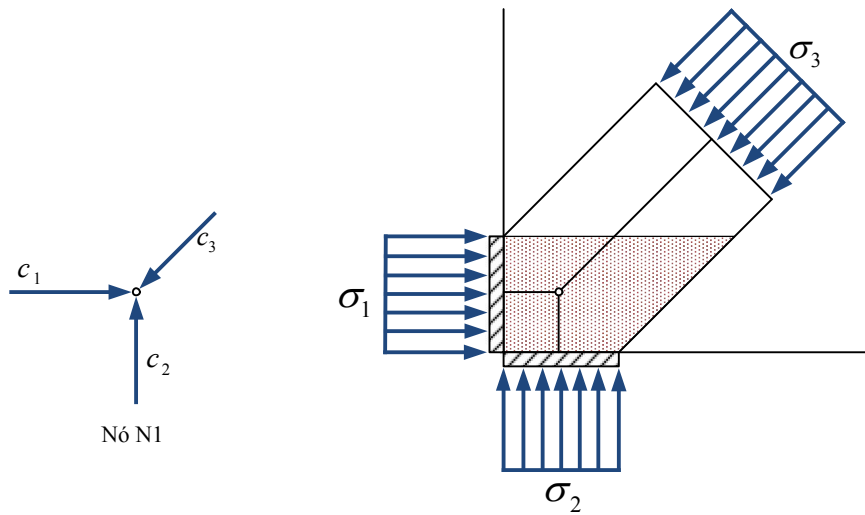


Figura 2-20: Nó 1 definido conforme Schaefer e Schaich (1988,1991)

Nó 2: Equilíbrio em $\sigma_1 = 1,1 \cdot f_{cd}$

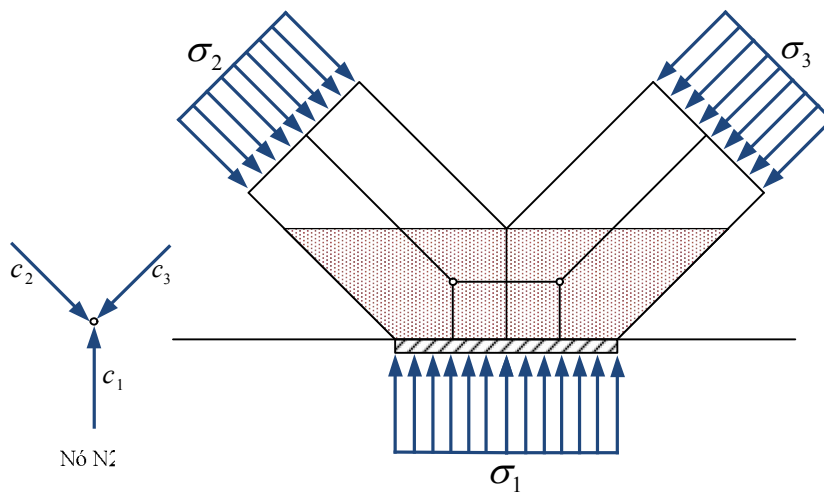


Figura 2-21: Nó 2 definido conforme Schaefer e Schaich (1988,1991)

Nó 3: Equilíbrio em $\sigma_1, \sigma_2 \leq 1,1 \cdot f_{cd}$

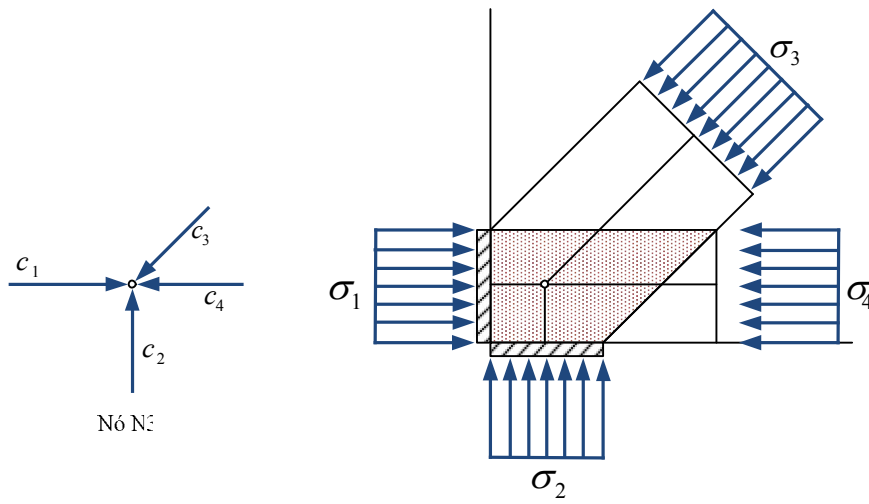


Figura 2-22: Nó 3 definido conforme Schaefer e Schaich (1988,1991)

Nó 4: Equilíbrio em $\sigma_1, \sigma_2 \leq 1,1 \cdot f_{cd}$

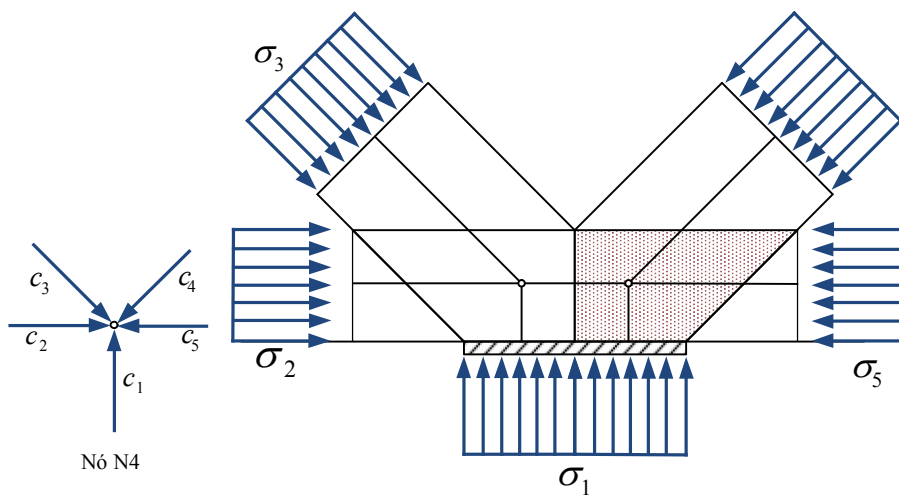


Figura 2-23: Nó 4 definido conforme Schaefer e Schaich (1988,1991)

Nó 5: Verificar comprimento de ancoragem

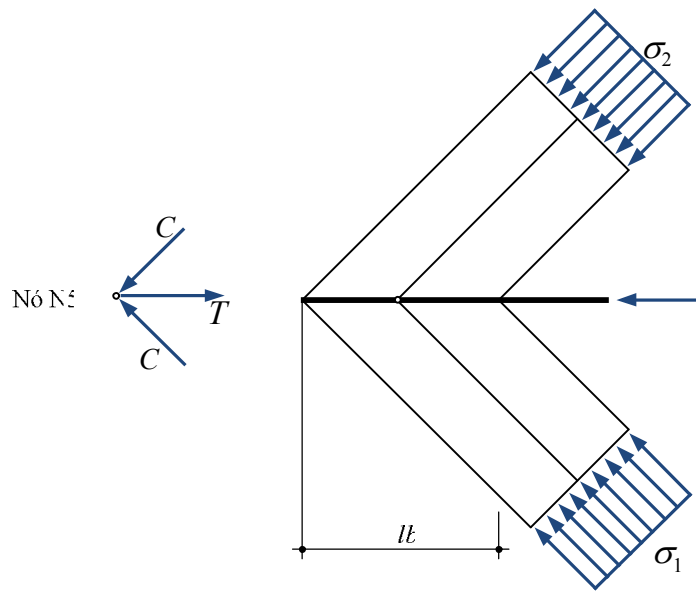


Figura 2-24: Nó 5 definido conforme Schaefer e Schaich (1988,1991)

Nó 6: Equilíbrio em $\sigma_1, \sigma_2 \leq 0,8 \cdot f_{cd}$

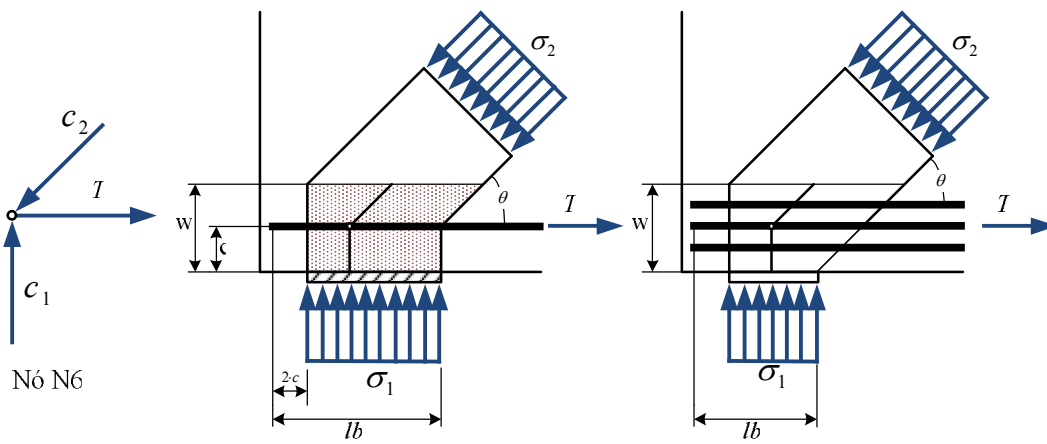


Figura 2-25: Nó 6 definido conforme Schaefer e Schaich (1988,1991)

Nó 7: Equilíbrio em $\sigma_1 \leq 0,8 \cdot f_{cd}$

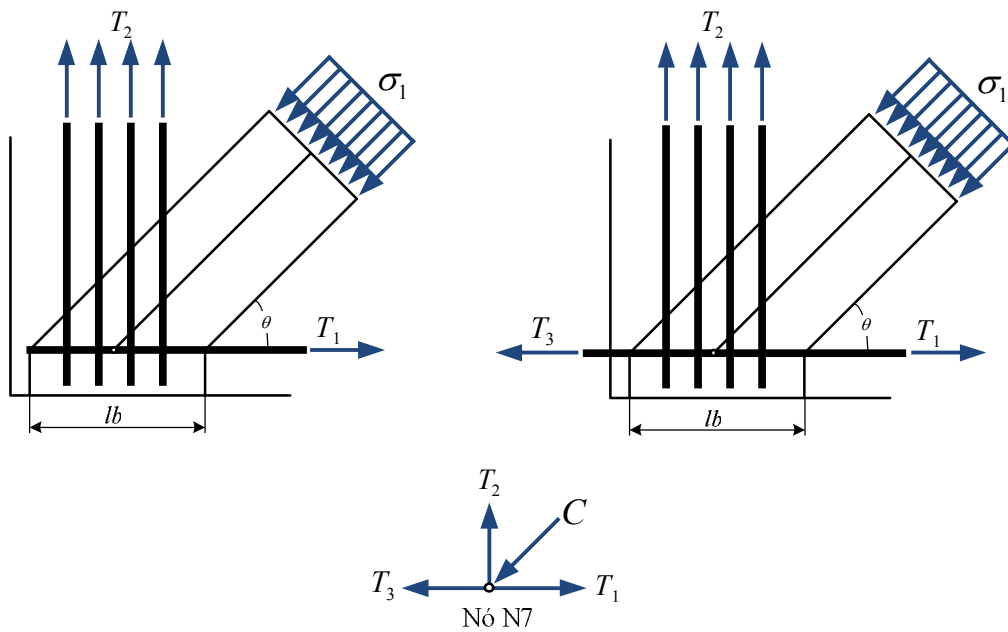


Figura 2-26: Nó 7 definido conforme Schaefer e Schaich (1988,1991)

Nó 8: Equilíbrio em $\sigma_1, \sigma_2 \leq f_{cd}$ e aplicar condições do Nó 6.

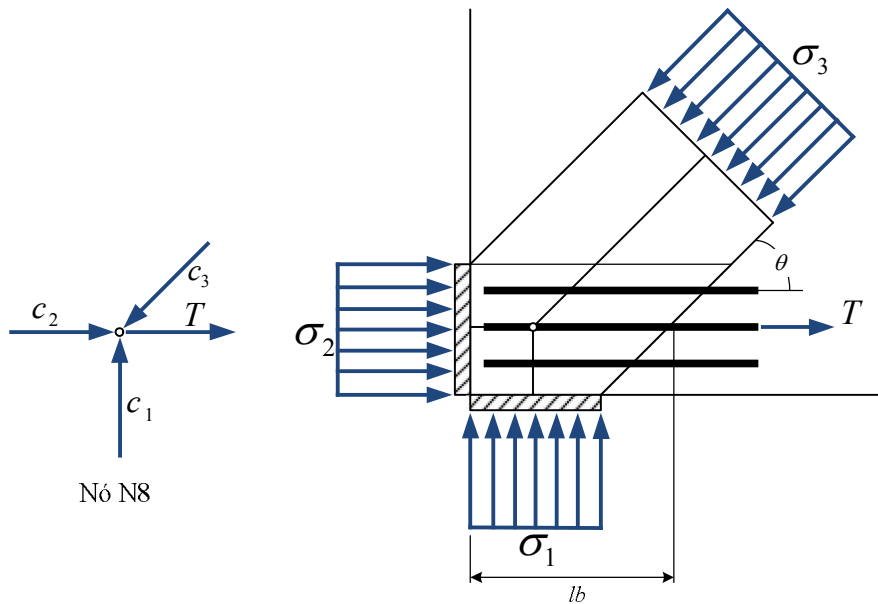


Figura 2-27: Nó 8 definido conforme Schaefer e Schaich (1988,1991)

Nó 9: Equilíbrio em $\sigma_1, \sigma_2 \leq f_{cd}$ e aplicar condições do Nó 6.

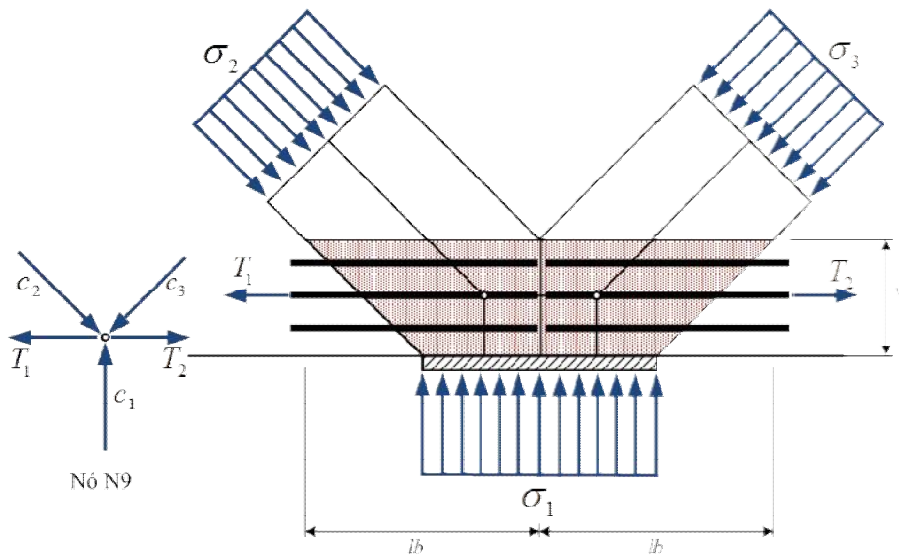


Figura 2-28: Nó 9 definido conforme Schaefer e Schaich (1988,1991)

- CEB-FIP Model Code 1990 (1993)

Quando só chegam bielas ao nós (MPa):

$$f_e = 0.85 \left[1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] f_{cd} \quad (2.23)$$

Para nós onde os tirantes principais são ancorados (MPa):

$$f_e = 0.60 \left[1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] f_{cd} \quad (2.24)$$

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{1.5}$$

- ACI – 318-05 (2005)

$$\phi \cdot F_{ns} \geq F_u \quad (2.25)$$

$$F_{ns} = f_{cu} \cdot A_n \quad (2.26)$$

$$f_{cu} = 0.85 \cdot \beta_n \cdot f_c \quad (2.27)$$

$\phi = 0.85$: para regiões D, conforme MacGregor (1997)

$\beta_s = 1.0$: para zonas nodais circundadas por bielas ou placas de apoio, ou ambas;

$\beta_s = 0.80$: para zonas nodais ancorando um único tirante;

$\beta_s = 0.60$: para zonas nodais ancorando dois ou mais tirantes;

Sendo A_n um dos valores definidos em Souza (2004):

(a). Área da face nodal tomada perpendicular à linha de ação da força no nó;

(b). Área da seção tomada perpendicular à linha de ação da força resultante na região nodal.

➤ EUROCODE 2 (1999)

Para nós comprimidos sem ancorar tirantes (MPa):

$$f_e = 1.1 \cdot \alpha \cdot f_{cd} \quad (2.28)$$

Para nós comprimidos ancorando tirantes, onde todos os ângulos entre bielas e tirantes são de pelo menos 45° (MPa):

$$f_e = 0.80 \cdot \alpha \cdot f_{cd} \quad (2.29)$$

Para bielas com transferência de compressão entre fissuras de grande abertura (elementos tracionados) (MPa):

$$f_e = 0.50 \cdot \alpha \cdot f_{cd} \quad (2.30)$$

Sendo o valor de α igual 0.85 e $f_{cd} = \frac{f_{ck}}{1.5}$ (Souza, 2004).

➤ Souza & Bittencourt (2003)

Para regiões nodais circundadas por bielas ou placas de apoio(CCC):

$$f_e = 0.58 f_{ck} \quad (2.31)$$

Para regiões nodais ancorando um único tirante(CCT):

$$f_e = 0.46 f_{ck} \quad (2.32)$$

Para regiões nodais ancorando vários tirantes(CTT):

$$f_e = 0.40 f_{ck} \quad (2.33)$$

2.3.4.3 Tirantes

As forças nos tirantes devem ser absorvidas pelas armaduras existentes dentro da estrutura de concreto. Assim sendo, uma condição a ser observada é que o centro de gravidade das armaduras deve coincidir com o do tirante no modelo. A área necessária da armadura então será obtida diretamente via força no tirante e a resistência de escoamento do aço na forma:

$$A_s = \frac{\gamma_f \cdot R_{st}}{f_{yd}} \quad (2.34)$$

Apenas em casos eventuais pode haver necessidade de tirantes de concreto. Isso se dará para garantia do equilíbrio, quando não há possibilidade de colocação da armadura de tração. Nesses casos, a resistência à tração deverá ser utilizada, enfatizando a possibilidade de ocorrência do mesmo no modelo. Exemplos desse tipo podem ocorrer em ancoragens, trechos de barra dobrada, lajes sem estribo e bielas não armadas.

2.3.4.3.1 Ancoragem das armaduras

Uma atenção especial deve ser dada à ancoragem das armaduras nas extremidades das regiões nodais. Segundo Silva e Giongo (2000) a utilização de bitolas menores e em maior número e uma ancoragem compatível contribuem na definição da geometria e resistência das bielas e regiões nodais. Uma ancoragem segura pode ser obtida através da determinação de um volume correto de concreto envolvendo as armaduras dos tirantes ou mesmo via ancoragem mecânica através de placas ou outros elementos.

Em Silva e Giongo (2000) e Souza (2007) são mostrados vários exemplos de como é determinada a largura efetiva das bielas, sendo que para estruturas bidimensionais como vigas parede, a espessura a ser adotada poderá ser igual à largura do elemento. Maiores detalhes podem ser obtidos em Schaefer e Schlaich (1988,1991).

2.3.4.4 Armaduras de controle de fissuração

Esse tipo de armadura tem a função de assegurar valores limites para abertura de fissuras e um nível de ductilidade mínima para o elemento estrutural (Figura 2-29). Assim, caso seja necessário, uma pequena redistribuição de tensões internas é possível.

Nesse trabalho uma relação mínima de 0,2% entre a área de armadura e a área de concreto será adotada com espaçamento entre barras não maior que 30 cm.

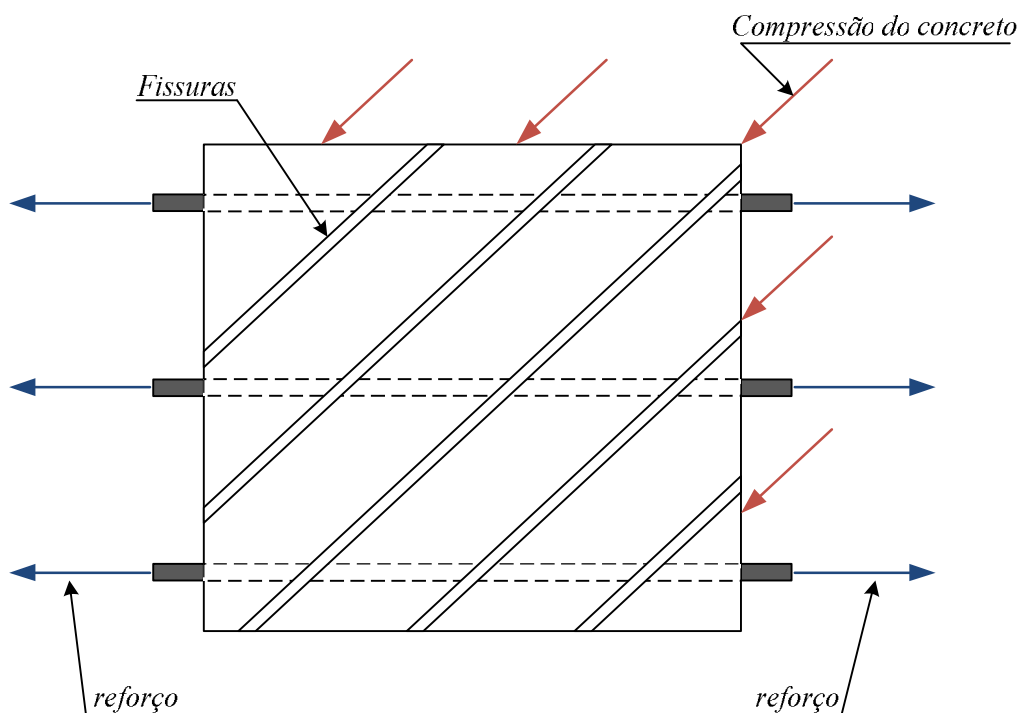


Figura 2-29: Taxa de armadura

2.4 Modelos topológicos Hiperestáticos

Uma solução bastante interessante e elegante para aplicação em modelo de bielas e tirantes hiperestáticos é a solução em mínima norma Euclidiana proposta por Mello (1979). Essa formulação utiliza a teoria da inversa generalizada de matrizes para substituir a solução elástica de um elemento desconexo de treliça por uma solução de mínima norma Euclidiana - MNE. Dessa forma é possível obter uma solução única, compatível e equilibrada para o problema proposto.

2.4.1 Análise linear pelo método da rigidez

A análise linear elástica de estruturas reticuladas pelo método da rigidez parte das seguintes relações matriciais (Harrison, 1973):

Equilíbrio:

$$LN = F \quad (2.35)$$

Compatibilidade:

$$\theta = L^T \delta \quad (2.36)$$

Relações Constitutivas:

$$N = k_e \theta \quad (2.37)$$

Onde:

N - Vetor dos esforços internos ($n \times 1$);

θ - Vetor dos alongamentos/encurtamentos ($n \times 1$);

F - Vetor dos carregamentos nodais ($q \times 1$);

δ - Vetor dos deslocamentos nodais ($n \times 1$);

L - Matriz de equilíbrio estático ($q \times n$);

k_e - Matriz de rigidez elástica do elemento desconexo ($n \times n$);

q - Grau de indeterminação cinemática da estrutura;

As relações (2.35) e (2.37) constituem transformações duais num espaço vetorial enquanto que (2.36) expressa a linearidade elástica do material estrutural. Substituindo-se (2.37) em (2.35) obtêm-se:

$$Lk_e \theta = F \quad (2.38)$$

E, levando-se (2.36) em (2.38) chega-se a:

$$(Lk_e L^T) \delta = F \quad (2.39)$$

Que substituindo em (2.36) fornece:

$$\theta = L^T(Lk_eL^T)^{-1}F \quad (2.40)$$

Finalmente, substituindo-se (2.40) em (2.37), teremos:

$$N = k_eL^T(Lk_eL^T)^{-1}F \quad (2.41)$$

Onde a expressão (2.41) representa a solução elástica para o elemento desconexo de treliça.

2.4.2 Inversa generalizada de mínima norma

Pode-se reescrever a expressão (2.41) de formas mais compacta:

$$N = HF \quad (2.42)$$

Sendo:

$$H = k_eL^T(Lk_eL^T)^{-1} \quad (2.43)$$

A matriz H é uma inversa generalizada da matriz de equilíbrio estático L .

Comparando-se (2.42) e (2.35) vemos que:

- Para estruturas hiperestáticas a matriz L é retangular de ordem $\varrho \times n$, com $\varrho < n$. De acordo com a teoria da inversa generalizada de matrizes, a inversa de uma matriz retangular de ordem $\varrho \times n$ é outra matriz de ordem $n \times \varrho$. A ordem da matriz H é $n \times \varrho$, conforme se vê em (2.43). Para estruturas isostáticas a matriz L é quadrada pois $\varrho = n$, e admite inversa única L^{-1} , independente de k_e , pois:

$$H = k_eL^T(L^T)^{-1}(k_e)^{-1}L^{-1} \text{ (Inversa verdadeira)} \quad (2.44)$$

Pré-multiplicando (2.43) por L , teremos:

$$LH = Lk_eL^T(Lk_eL^T)^{-1} = I(\varrho \times \varrho) \quad (2.45)$$

A matriz LH é uma matriz identidade de ordem ϱ . Dessa propriedade, é fácil verificar que a solução (2.42) dada por H está em equilíbrio com F , pois multiplicando-se (2.42) por L :

$$LN = LHF = IF = F \quad (2.46)$$

Entretanto, substituindo-se (2.35) em (2.42) resulta em:

$$N = H(LN) = (HL)N \quad (2.47)$$

Se a matriz H fosse uma inversa verdadeira de L , como ocorre nas estruturas isostáticas, teríamos $HL = I$. No entanto, no caso de estruturas hiperestáticas, a matriz L é uma matriz idempotente, satisfazendo a propriedade $(HL)^2 = HL$, como se pode verificar facilmente. As matrizes idempotentes permitem definir matrizes de projeção num espaço vetorial. Essas propriedades, porém, só podem ser claramente compreendidas com as relações estática e cinemática do método da flexibilidade Martha (2010).

Para identificarmos a norma envolvida na obtenção da solução dada por (2.41), devemos recorrer à Programação Matemática. A solução dada por (2.35), (2.36) e (2.37), via Programação Quadrática (PQ) é:

$$\text{Minimizar: } \frac{1}{2} N^T B_e N \quad (2.48)$$

$$\text{Sujeito a: } LN = F \text{ (Equilíbrio)} \quad (2.49)$$

Onde B_e é a matriz de flexibilidade dos elementos desconexos, sendo a inversa de k_e .

A função objetivo (2.48) corresponde à energia de deformação da estrutura, enquanto que as restrições (2.49) são as relações de equilíbrio. As condições de otimalidade de Karush Kuhn-Tucker incluem automaticamente, as condições de compatibilidade (2.36). Os multiplicadores de Lagrange do PQ correspondem aos deslocamentos nodais δ . A solução do PQ fornece exatamente a expressão (2.41).

A teoria das inversas generalizadas de matrizes mostra que a solução do PQ é equivalente a:

$$\text{Resolver: } LN = F \text{ (Equilíbrio)} \quad (2.50)$$

$$\text{Sob a norma: } (N^T B_e N)^{1/2} \quad (2.51)$$

Se substituirmos a matriz B_e pela matriz I , a norma acima é reduzida para:

$$(N^T N)^{1/2} \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^n N_i^2} \quad (2.52)$$

Sendo a expressão anterior à norma Euclidiana do vetor N . Denominaremos a expressão (2.51) de norma elástica onde o vetor N é ponderado pela matriz B_e . Sendo então a norma onde o vetor N é ponderado pela matriz identidade I denominada como Euclidiana (Mello, 1979). Como as matrizes B_e e I são positivas definidas, as soluções N obtidas são únicas, quer se use a norma elástica ou a norma euclidiana. Entretanto, a solução N obtida com a norma elástica, denominada N_e , é em geral diferente da solução N obtida com norma euclidiana, que denominaremos N_f . Pode-se demonstrar que (Mello, 1979):

$$\|N_e\| \geq \|N_f\| \quad (2.53)$$

Assim, é possível dizer que de todas as soluções possíveis N da relação de equilíbrio (2.35), a que conduz a um vetor de menor comprimento (norma) possível é a solução N_f de mínima norma Euclidiana.

A solução de (2.51) com I em lugar de B_e é dada por (2.41), que com $k_e = I$ torna-se:

$$N_f = L^T (LL^T)^{-1} F = H_f F \quad (2.54)$$

Sendo:

$$H_f = L^T (LL^T)^{-1} \quad (2.55)$$

2.4.3

Solução de mínima norma para o elemento de treliça plano desconexo

Utilizando o método da rigidez analítico podemos definir as matrizes de rigidez de membro, a matriz de equilíbrio estático L e a matriz de rotação para cada elemento desconexo R (Livesley, 1975). A matriz de rigidez elástica do elemento pode então será montada na forma:

$$K_{elast} = RLk_e L^T R^T \quad (2.56)$$

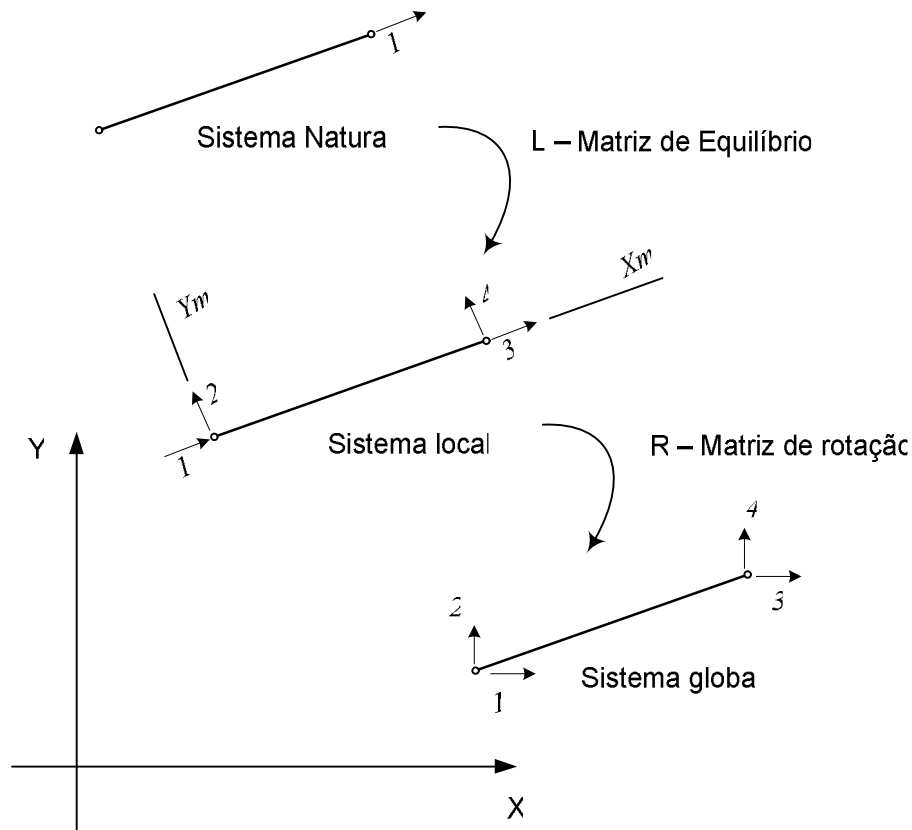


Figura 2-30: mostra os sistemas referenciais adotados para o elemento de treliça desconexo.

Onde para o sistema referencial adotado (Figura 2.30) teremos os seguintes valores:

$$L = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.57)$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\text{sen } \gamma & 0 & 0 \\ \text{sen } \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \gamma & -\text{sen } \gamma \\ 0 & 0 & \text{sen } \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$k_e = \frac{EA}{L} \quad (2.59)$$

Sendo as matrizes, L de equilíbrio e R de rotação, relacionadas com mudanças de base muito comuns em álgebra linear. Logo, a matriz de rigidez elástica de um elemento de treliça desconexo fica na forma (Gere e Weaver, 1965):

$$K_{elast} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \gamma & \cos \gamma \cdot \sin \gamma & -\cos^2 \gamma & -\cos \gamma \cdot \sin \gamma \\ \cos \gamma \cdot \sin \gamma & \sin^2 \gamma & -\cos \gamma \cdot \sin \gamma & -\sin^2 \gamma \\ -\cos^2 \gamma & -\cos \gamma \cdot \sin \gamma & \cos^2 \gamma & \cos \gamma \cdot \sin \gamma \\ -\cos \gamma \cdot \sin \gamma & -\sin^2 \gamma & \cos \gamma \cdot \sin \gamma & \sin^2 \gamma \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Na solução de mínima norma a matriz de rigidez elástica será então alterada na forma $k_e = 1$, ficando então a matriz de rigidez de mínima norma na forma :

$$K_{MN} = RLL^T R^T \quad (2.61)$$

Explicitando a matriz teremos:

$$K_{MN} = \begin{bmatrix} \cos^2 \gamma & \cos \gamma \cdot \sin \gamma & -\cos^2 \gamma & -\cos \gamma \cdot \sin \gamma \\ \cos \gamma \cdot \sin \gamma & \sin^2 \gamma & -\cos \gamma \cdot \sin \gamma & -\sin^2 \gamma \\ -\cos^2 \gamma & -\cos \gamma \cdot \sin \gamma & \cos^2 \gamma & \cos \gamma \cdot \sin \gamma \\ -\cos \gamma \cdot \sin \gamma & -\sin^2 \gamma & \cos \gamma \cdot \sin \gamma & \sin^2 \gamma \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

A grande vantagem da solução de mínima norma Euclidiana - MNE é que a obtenção dos esforços fica independente das propriedades de rigidez da barra. Assim sendo, é possível se ter uma solução equilibrada e compatível que represente o modelo hiperestático considerado. Para mais detalhes ver Távora (1995), Oliveira (1995), Silva (1998) e Vieira et al (2000).

2.5 Principais dificuldades de aplicação

Dentre as principais dificuldades para aplicação do método das bielas e tirantes podemos citar:

- Exigência de que o engenheiro estrutural responsável pelo projeto tenha experiência na concepção do modelo a ser lançado dentro da estrutura de concreto;
- Em geometrias mais complexas a definição de um modelo satisfatório pode não ser uma tarefa muito trivial;
- O lançamento do modelo estrutural pode levar à uma série bastante grande de modelos. A necessidade de escolha entre um deles pode levar a adoção de procedimentos de avaliação dos mesmos;

- Ainda não há um consenso entre as normas e diversos autores sobre valores de resistência a serem utilizados em bielas e regiões nodais;
- Impossibilidade de geração de modelos automáticos via otimização que levem em conta a experiência do projetista.

3

GERAÇÃO AUTOMÁTICA DA TOPOLOGIA DE STM

Este capítulo apresenta uma sucinta revisão bibliográfica sobre geração automática de topologia aplicada a modelo de bielas e tirantes em estruturas planas de concreto armado existente na literatura técnica. Em seguida apresenta-se uma descrição completa das principais etapas necessárias à aplicação das técnicas de otimização na geração automática de topologias, indicando suas principais vantagens e limitações. Um enfoque contendo as principais contribuições do presente trabalho é apresentado no final.

Os meios tradicionais de obtenção dos modelos de bielas e tirantes envolvem um processo de tentativa e erro baseado na experiência do projetista de estruturas. O aumento da capacidade computacional ocorrido nos últimos anos tem permitido a utilização de técnicas com objetivo de minimizar esse processo de tentativa e erro. Nesse contexto, programas computacionais interativos que contemplam a técnica de otimização topológica têm sido aplicados no sentido de obter topologias viáveis para modelos de bielas e tirantes.

Inicialmente, Kumar (1978) aplicou a teoria das estruturas treliçadas para projetar estruturas não homogêneas, com material fraco à tração e rígido plástico ideal à compressão. Posteriormente, um programa gráfico interativo para aplicação dos modelos de treliça no projeto de peças estruturais de concreto armado submetidas à flexão e cisalhamento foi proposto por Benabdallah et al (1989). Outro programa gráfico e interativo foi apresentado por Alshegeir e Ramirez (1992) com uso do modelo de bielas e tirantes para análise e dimensionamento de estruturas de concreto armado e protendido. Também Yun (2000) apresentou um programa gráfico interativo que utilizava uma formulação não linear na consideração dos modelos de bielas e tirantes para análise e dimensionamento de regiões com distribuição complexa de deformações em estruturas de concreto armado. Uma das mais completas propostas nesse sentido foi feita por Tjhin e Kuchma (2002,2007) através do programa CAST que

apresenta um conjunto de ferramentas gráficas para auxílio em vários aspectos no projeto de estruturas de concreto armado. A definição geométrica das regiões com perturbação, a seleção da topologia do modelo de bielas e tirantes a ser utilizada, a definição dos esforços da estrutura de treliça, a definição das dimensões das bielas e tirantes são algumas de suas opções. Park et al (2010 a,b) apresentaram um programa computacional integrado que possibilita o projeto via modelo de bielas e tirantes e faz uma eficaz validação do modelo via análise não linear. Sendo assim é possível observar que a computação gráfica é utilizada há muito tempo como uma ferramenta de projeto na aplicação dos modelos de bielas e tirantes.

Atualmente, a técnica de otimização topológica tem sido aceita como uma opção viável na seleção da topologia dos modelos de bielas e tirantes para análise de estruturas planas de concreto armado e protendido. Trabalhos pioneiros nessa área são os de Ali (1997) e Ali e White (2000, 2001) que utilizaram uma formulação via otimização para definir a topologia de uma estrutura treliçada equivalente sujeita a uma determinada capacidade de carga e que minimizavam o volume de armadura. Também Biondini et al (1999) propuseram uma formulação através da busca automática de modelos ótimos em estruturas de concreto armado. Liang et al (2000a) utilizaram a formulação ESO (*Evolutionary Structural Optimization*) para gerar automaticamente topologias para a formulação do modelo de bielas e tirantes em estruturas de concreto armado sob estados planos de tensão com restrições de deslocamento. Liang et al (2001) apresentaram uma geração automática de modelo de bielas e tirantes aplicada a estruturas de concreto protendido utilizando um método de otimização topológica denominado PBO (*Performance-Based Optimization*). O trabalho de Biondini et al (2001) também apresenta um método geral para geração automática de modelos de bielas e tirantes, representativo dos possíveis modos resistentes existentes em estruturas de concreto armado.

Liang et al (2002) estendeu o método PBO para obtenção de topologias de estruturas contínuas com restrições de flexibilidade na modelagem de modelos de bielas e tirantes aplicados a estruturas de concreto armado. Kim e Baker (2001, 2002) apresentaram uma metodologia de otimização que foi derivada da conhecida formulação FSD (*Full Stress Design*) aplicada a estruturas contínuas de concreto armado onde as tensões principais são utilizadas para guiar o processo de

otimização. Kwak e Noah (2006) introduziram um método para determinar automaticamente os modelos de bielas e tirantes em estruturas de concreto armado via metodologia ESO com dois diferentes tipos de elementos: um elemento plano de quatro nós e um elemento treliçado de 6 barras (elemento *brick*) cuja única diferença é a concepção da matriz de rigidez do elemento desconexo de cada um deles. Liang (2006) aplicou a técnica PBO para o projeto e detalhamento de modelos de bielas e tirantes ótimos em conexões entre colunas e vigas em estruturas de concreto armado. Leu et al (2006) apresentaram uma metodologia para o projeto de modelo de bielas e tirantes em estruturas tridimensionais em concreto armado através do método denominado RESO (*Refined Evolutionary Structural Optimization Method*). Nagarjan e Madhavan Pillai (2008) discutiram a concepção de diversos modelos de bielas e tirantes para vigas parede de concreto armado simplesmente apoiadas submetidas a diversos tipos de carregamentos com a utilização de técnicas de otimização topológica. Bruggi (2010) estendeu a aplicação das técnicas de otimização na geração automática de modelos de bielas e tirantes ao projeto de estruturas de concreto armado submetidas a sismos e múltiplos carregamentos. Victoria et al (2011) apresentaram um formulação onde materiais submetidos à compressão e tração são considerados diferentemente durante o processo de otimização durante a geração automática do modelo.

Uma técnica que possibilite a interferência do projetista estrutural no processo de otimização via elementos indutores, similar à proposta de Bendsøe e Sigmund (2003), e outra que analisa estruturas planas de concreto armado submetidas a múltiplos carregamentos via técnicas de otimização multiobjetivo serão apresentadas nos itens 3.4 e 3.5 deste capítulo.

3.1 Otimização Topológica

O campo de aplicações dos métodos de otimização ampliou-se à medida que a tecnologia computacional se desenvolveu, permitindo atualmente que o mesmo seja empregado em sistemas estruturais complexos tais como projeto de pontes, viadutos, componentes automotivos e aeroespaciais, entre outros. O processo de otimização estrutural consiste em obter o projeto de melhor desempenho, sendo este avaliado através de uma função de custo definida a partir de um conjunto de

variáveis que descrevem o sistema estrutural, denominadas variáveis de projeto. As técnicas de otimização buscam determinar os extremos desta função (máximo ou mínimo dependendo do problema) dentro de uma região de projeto denominada região viável ou factível. Esta região reúne os pontos de projeto que atendem às restrições do problema, frequentemente classificadas em regiões de igualdade e desigualdade.

Dentre os problemas de otimização estruturais clássicos, podem ser citados a minimização de massa, da energia de deformação, a maximização da frequência natural crítica, a minimização de flexibilidade, a maximização da carga crítica de flambagem, etc. Os algoritmos de primeira e segunda ordem da área de programação matemática empregados para determinação da estrutura ótima utilizam informações referentes à sensibilidade das funções envolvidas na formulação do problema, que fornecem informações sobre as derivadas da função objetivo e restrições impostas ao problema, em relação às variáveis de projeto. No processo de otimização a análise de sensibilidade é um item de suma importância, pois, a partir da análise de sensibilidade, os algoritmos de otimização impõem modificações nas variáveis de projeto segundo suas próprias metodologias. A otimização estrutural, segundo as variáveis de projeto, classificam-se em paramétrica, de forma e topológica.

Na otimização de topologia busca-se a solução ótima através da distribuição ótima de material num domínio previamente definido. Isso corresponde, em estruturas discretas, a determinar, por exemplo, o número total de barras, suas respectivas conectividades e suas propriedades geométricas. Em se tratando de estruturas contínuas, busca-se determinar a existência ou não de material em regiões do domínio, seus respectivos formatos e a conectividade entre os domínios.

Os métodos de otimização topológica, no que diz respeito a estruturas contínuas, são normalmente classificados em dois grupos:

- Aproximação por microestrutura (Material): O processo de otimização topológica é baseado no estabelecimento de uma relação entre rigidez e a densidade associada ao domínio, que pode assumir qualquer valor entre 0 (vazio) e 1 (material sólido), sendo os valores intermediários

correspondentes a um material poroso. A partir daí os algoritmos baseados em microestruturas propõem encontrar a melhor disposição do material de maneira a minimizar ou maximizar a função custo. Como exemplos podem-se citados: Material Intermediário Artificial (SIMP), Material Poroso Homogeneizado, entre outros.

- Aproximação por macroestrutura (Geométrica): nesse caso a topologia da estrutura é modificada através da inserção de furos no domínio. Entre os métodos existentes pode-se citar: métodos baseados na inserção de furos em sistemas contínuos tais como Análise de Sensibilidade Topológica (Topology Sensitive Analysis - TSA) e Bubble Method, e baseados na inserção de furos em sistemas discretizados, tais como Algoritmos Evolucionários (ESO).

3.1.1 Base conceitual

Um dos critérios mais utilizados em problemas de otimização topológica estrutural é a minimização da energia interna de deformação com restrição sobre o volume que, em problemas lineares, é equivalente ao problema de minimização do trabalho externo. Sendo constantes os carregamentos aos quais a estrutura está submetida, minimizar o trabalho das forças externas corresponde a minimizar deslocamentos, ou seja, tornar a estrutura mais rígida.

A técnica de otimização topológica (OT) foi proposta por Bendsøe e Kikuchi (1988) na obtenção da forma ótima de estruturas sem utilizar a clássica otimização de forma via variação do contorno do domínio. Isso possibilita ao projetista encontrar o layout ótimo para distribuição de um dado material no espaço, sendo definidos previamente o domínio do problema, as restrições de apoio, os carregamentos aplicados e as propriedades dos materiais aplicados. Também, regiões sólidas ou vazias, similares aos elementos indutores propostos neste trabalho, podem ser definidas no domínio considerado, devendo estas serem definidas no início do processo conforme mostrado em Bendsøe e Sigmund (2003). Encontrar o layout ótimo para distribuição de material significa obter a melhor forma para os contornos externos e internos, o posicionamento e a forma

dos vazios, e a conectividade entre os pontos materiais que formam a topologia resistente da estrutura e que esteja contido dentro do domínio considerado.

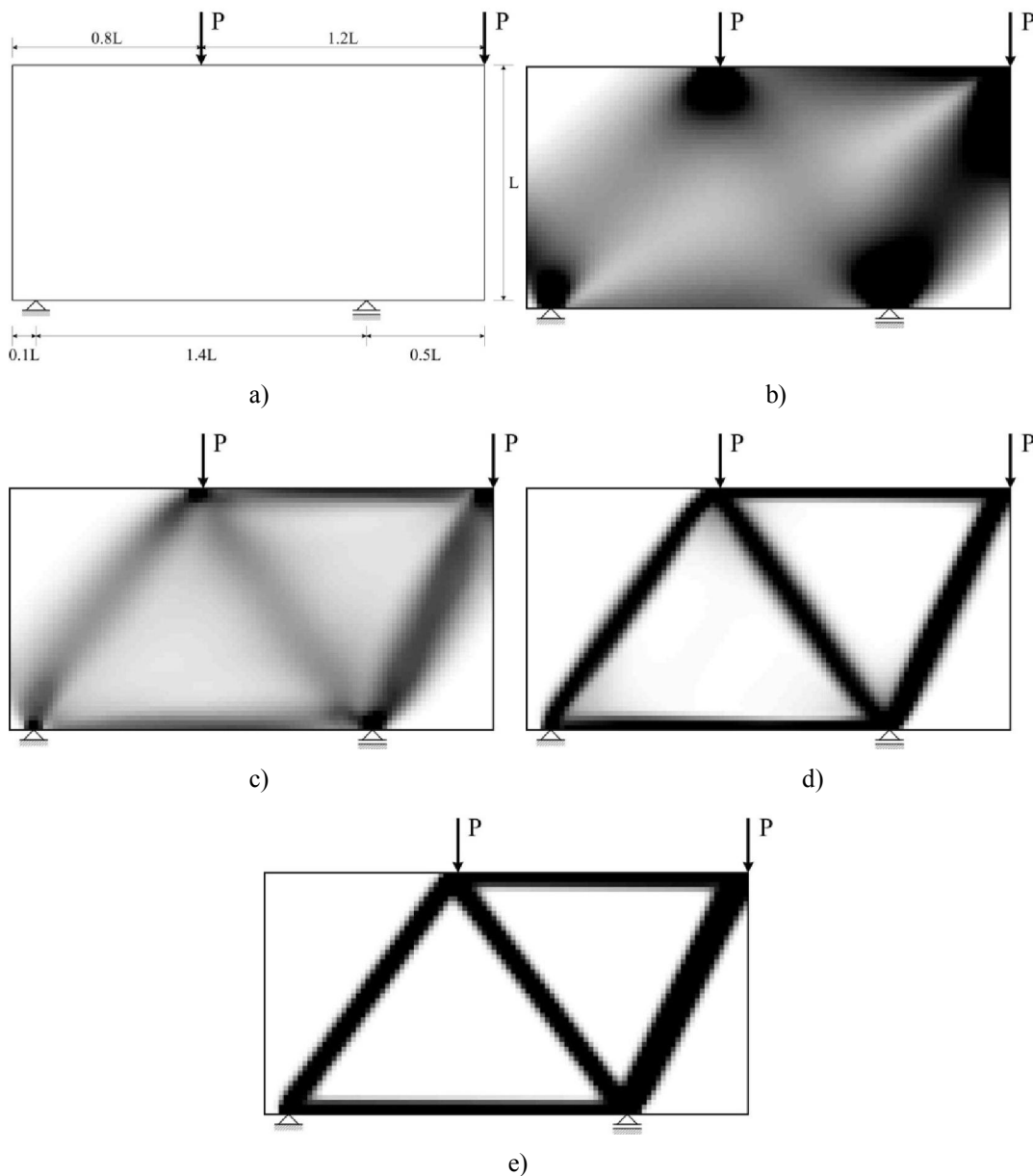


Figura 3-1: Processo de Otimização Topológica numa Viga Parede de Concreto.

Define-se como domínio do problema o espaço geométrico onde o material é distribuído. Usualmente, domínios regulares em formas retangulares são utilizados nos problemas bidimensionais de OT. Bendsøe e Kikuchi (1988) sugerem a utilização de um domínio fixo mantendo inalteradas as características do método de análise durante as iterações do processo de otimização o que facilita muito a implementação numérica dessa técnica. Com isso a análise de

sensibilidade executada dentro do processo de otimização fica simplificada eliminando-se o inconveniente de remodelagem da malha.

Esse tipo de técnica é bastante útil na fase da concepção estrutural onde a topologia dos elementos estruturais não é conhecida *a priori*. A Figura 3.1 ilustra um processo de otimização topológica aplicada a uma viga parede com balanço sujeita a duas cargas aplicadas com uma relação altura/vão de 2.0.

3.1.2 Formulação clássica

Um problema associado à otimização topológica é dito como um problema de distribuição de material, sendo que cada ponto considerado no domínio de projeto representa um candidato a uma região de vazio ou com presença de material. A formulação matemática adotada nesse trabalho foi inicialmente apresentada por Bendsøe e Kikuchi (1988) como um problema de otimização matemática de forma a minimizar a flexibilidade média da estrutura. Para isso uma função densidade artificial foi criada de modo a modelar os pontos do domínio de projeto. Denominando $\rho(x)$ a função densidade artificial e x as coordenadas de projeto, o meio contínuo pode ser formulado conforme descrito a seguir.

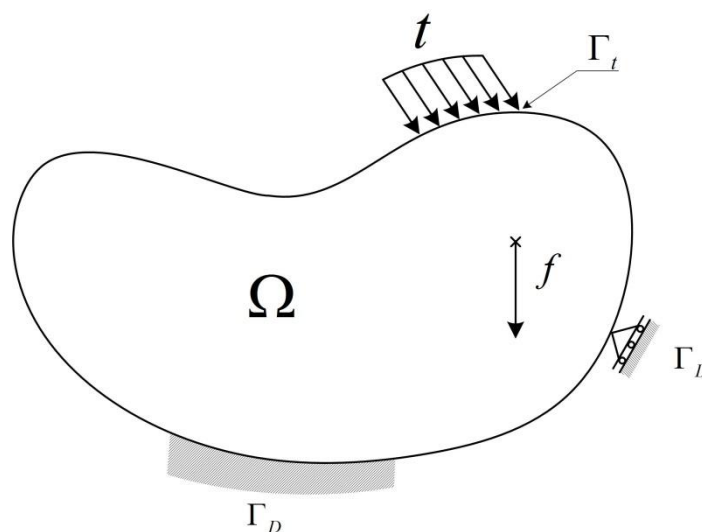


Figura 3-2: Domínio estendido sujeito a forças de corpo e de contorno.

Seja um domínio de projeto Ω submetido a forças de corpo e de contorno conforme mostrado na Figura 3.2. Um tensor elástico $E_{ijkl}(x)$ deve ser escolhido adequadamente, em cada posição x dentro do domínio de projeto, de forma a

minimizar a flexibilidade da estrutura. Isso será feito dentro de um conjunto de tensores elásticos admissíveis U_{adm} . Dentro do domínio de projeto é admitido que os tensores variem segundo sua posição. Pode-se então definir a energia de deformação interna da estrutura a na forma (Traldi, 2010):

$$a(u, \bar{u}) = \int_{\Omega} E_{ijkl}(x) \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(\bar{u}) d\Omega \quad (3.1)$$

Onde:

u – Campo de deslocamentos na condição de equilíbrio;

\bar{u} – Campo de deslocamentos virtuais;

Ω – Região geométrica do domínio estendido de projeto;

ε – Deformação associada ao campo u ou \bar{u} .

As forças externas realizarão um trabalho que poderá ser computado na forma:

$$W_{ext}(u) = \int_{\Omega} f(x)u(x)dx + \int_{\Gamma_t} t(x)u(x)ds \quad (3.2)$$

Onde:

s – Contorno do domínio estendido;

Γ_t – Parte do contorno submetido a forças.

Com isso, o problema de minimização da flexibilidade ou maximização da rigidez pode ser descrito na forma:

$$\text{Minimizar } W_{ext}(u) \quad (3.3)$$

$$\text{Sujeito a } E_{ijkl} \in U_{adm} \quad (3.4)$$

$$a(u, \bar{u}) = W_{ext}(\bar{u}) \quad (3.5)$$

Considera-se também que exista uma relação de proporcionalidade entre a propriedade física do material e a função densidade relativa $\rho(x)$ em x , logo:

$$E_{ijkl}(x) = \rho(x)E_{ijkl}^{mat} \quad (3.6)$$

Onde:

E_{ijkl}^{mat} – Tensor elástico inicial do material do elemento;

$\rho(x)$ – Função densidade relativa associada ao ponto de coordenadas x do domínio estendido de projeto Ω .

A expressão abaixo descreve como a função densidade é associada à forma definida como sólido-vazio:

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega_m \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega_m \end{cases} \quad (3.7)$$

Sendo Ω_m o subconjunto de Ω formado pelos pontos preenchidos com material, ou seja, sólidos.

Também há a necessidade de se estabelecer uma restrição que leve em conta uma diminuição no volume inicial da estrutura. Essa restrição de volume será mantida constante durante todo o processo de otimização e será determinada na forma:

$$\int_{\Omega} \rho(x) dx = Vol \quad (3.8)$$

Onde Vol é o volume máximo, referente a uma fração do volume inicial, admitido para a estrutura final.

A determinação do campo das densidades ρ implica na definição do conjunto de deslocamentos admissíveis correspondentes aos tensores elásticos. O problema de Otimização Topológica (Topology Optimization – TO) em que os tensores são dados na forma discreta é conhecido como formulação 0-1 e pressupõe o uso de variáveis discretas.

Uma vez que a formulação apresentada anteriormente foi concebida com base no meio contínuo algumas modificações foram necessárias para adequá-la a problemas práticos. Uma opção numérica bastante interessante e difundida é o método dos elementos finitos (FEM). O domínio estendido de projeto então passa

a ser representado por uma malha de pequenos elementos discretos utilizados pelo FEM.

Sendo assim, é necessária a definição de uma nova variável denominada, variável densidade relativa $\rho(x)$ que será associada a cada elemento da malha mantida constante no interior desse. O problema então poderá ser reescrito para a estrutura discretizada segundo a expressão:

$$\text{Minimizar } c = F^T U \text{ em } E_e \quad (3.9)$$

$$\text{Sujeito a } E_e \in U_{adm} \quad (3.10)$$

$$K(E_e)U = F \quad (3.11)$$

Onde:

c – Flexibilidade das forças externas aplicadas à estrutura;

F – Vetor das forças externas aplicadas à estrutura;

U – Vetor dos deslocamentos nodais da estrutura;

E_e – Módulo de elasticidade associado ao elemento finito e ;

K – Matriz de rigidez global da estrutura.

Também o módulo de elasticidade de cada elemento será obtido em função do módulo de elasticidade do material sólido E_s e do valor de sua densidade relativa ρ_e . Assim tem-se que:

$$E_e = \rho_e E_s \quad (3.12)$$

No entanto, Sigmund e Petersson (1998) mostraram que a formulação original de otimização de topologia, na forma discreta 0-1, carece de solução, uma vez que gera uma acentuada ocorrência de mínimos locais durante o processo de otimização da função objetivo, sendo dessa forma denominado problema mal-posto (*ill-posedness*).

Felizmente num trabalho apresentado por Bendsoe e Kikuchi (1988), uma técnica de relaxação do problema original foi proposta, de modo a permitir a utilização de materiais anisotrópicos via inserção de microestruturas porosas no domínio estendido. Essa aplicação de material intermediário entre as fases sólidas

e vazias é conhecida como relaxação do problema discreto. Com isso foi possível superar o problema mal-posto existente.

3.1.3 Relaxação do problema

Pode-se expandir o conjunto de possíveis valores numéricos do problema para as variáveis utilizadas na modelagem. Denomina-se esse processo de relaxação do problema de otimização. Considerando-se os materiais isotrópicos, uma modificação no campo das densidades artificiais relativas $\rho(x)$ que é representado na forma discreta 0-1, passa a ser representado por um campo contínuo na forma [0-1], e que pode ser expresso pela expressão:

$$0 < \rho(x) < 1 \quad (3.13)$$

Tornar contínuo o campo das densidades fisicamente significa empregar materiais em camadas de forma a preencher o domínio Ω . Isso pode ser observado graficamente pelo aparecimento de regiões cinzentas representativas dos tensores intermediários. Soluções com regiões intermediárias para o problema são indesejáveis uma vez que sua manufatura não é viável. A Figura 3.3 mostra o domínio de projeto e o resultado do processo de otimização aplicado a uma viga parede não simétrica com uma carga concentrada aplicada no seu balanço. Observa-se as regiões com predominância de densidades intermediárias. Como função objetivo foi tomada a flexibilidade média da estrutura e um campo contínuo para densidades relativas foi adotado. Soluções desse tipo são denominadas de escala de cinza (*gray scale*).

A solução encontrada para esse tipo de problema, apesar de não aplicável na prática, é um mínimo global. Bendsoe e Kikuchi (1988) mostraram que tais problemas são convexos bem postos, e para os quais o ponto de mínimo global é facilmente encontrável. Na verdade, a relaxação do problema conduz a formulação bastante semelhante a um problema de otimização paramétrica.

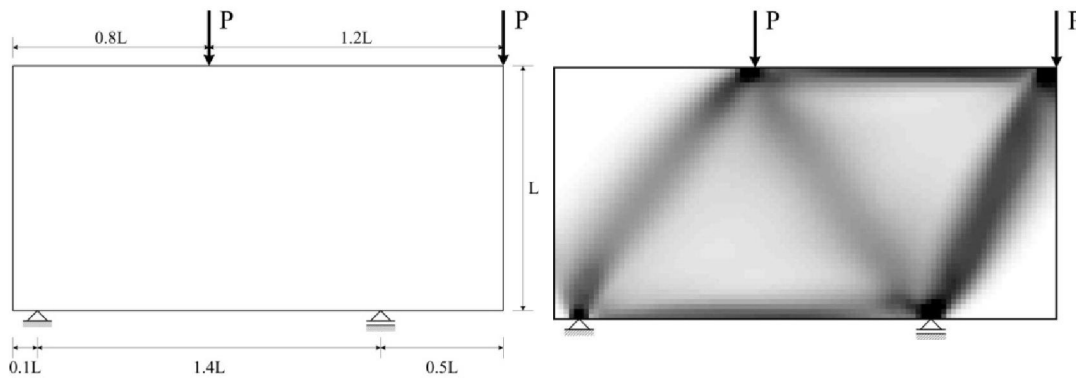


Figura 3-3: Solução do problema de otimização em escala de cinza.

3.1.4 Modelo SIMP

O modelo denominado SIMP (*Solid Isotropic and Material Penalization*) que aplica uma restrição às densidades artificiais intermediárias via um coeficiente de penalização, p , foi proposto de modo praticamente simultâneo por Bendsoe (1989) e Zhou e Rozvany (1991), como forma de forçar a obtenção de soluções ótimas, para um material isotrópico, na forma 0-1. Para valores de p superiores a 1, as densidades intermediárias tornam-se desfavoráveis durante a otimização do problema. Isso significa que as mesmas conduzem a um alto gasto de volume de material com correspondentes pequenos ganhos de rigidez. Dessa forma as densidades intermediárias tendem a ser eliminadas do problema, durante a otimização, através da redução da ocorrência da escala de cinza. Como principal vantagem na aplicação do modelo SIMP pode-se considerar a obtenção de uma topologia para o material passível de ser aplicada em problemas práticos. A equação abaixo representa genericamente o modelo SIMP na forma:

$$E(x) = \rho(x)^p E_s \quad (3.14)$$

Onde:

$E(x)$ – Módulo de elasticidade em um ponto estendido com coordenadas x ;

$\rho(x)$ - Densidade artificial relativa no ponto estendido;

p - Coeficiente de penalização das densidades artificiais relativas;

E_s – Módulo de elasticidade do material sólido.

A cada elemento finito da malha associa-se um valor de densidade artificial relativa. Sendo assim, a equação 3.15 pode ser aplicada como expressão do modelo SIMP. É necessário também estabelecer uma restrição de volume para o problema, o que implica que o coeficiente de penalização seja suficientemente grande, ou seja, $p \geq 3$ (Bendsoe e Sigmund, 2003). Assim, a expressão anterior torna-se:

$$E_e = \rho^p E_s \quad (3.15)$$

Onde:

E_e – Módulo de elasticidade associado ao elemento finito e ;

E_s – Módulo de elasticidade do material sólido.

O problema discretizado da minimização da flexibilidade através do método SIMP, pode então ser expresso na forma:

Obter ρ

$$\text{Que minimize: } c = F^T U \quad (3.16)$$

$$\text{Sujeito a: } K(\rho)U = F \quad (3.17)$$

$$\rho_{\min} < \rho(x) < 1 \quad (3.18)$$

$$\sum_{e=1}^N \rho_e v_e = \text{Vol} \quad (3.19)$$

Onde:

$K(\rho)$ - Matriz de rigidez global da estrutura em função das variáveis de projeto;

ρ - Vetor composto pelas variáveis de projeto (densidades);

ρ_{\min} - Densidade mínima admitida;

v_e - Volume do elemento e .

As equações de equilíbrio da estrutura são impostas indiretamente via análise pelo FEM na qual se obtém o vetor de deslocamentos nodais U através da função objetivo c . São denominadas restrições laterais os limites impostos às

variáveis de projeto. A adoção de um limite mínimo para o módulo de elasticidade de um elemento é feita de modo a evitar o problema de singularidade da matriz de rigidez da estrutura durante o processo de resolução das equações de equilíbrio. Um valor de ρ_{min} na ordem de 0,001 é suficiente para garantir esse propósito (Traldi, 2010).

A matriz de rigidez de um elemento finito (k_e) pode ser definida em função da matriz de rigidez do material sólido (k_s) na forma:

$$k_e = \rho_e^p k_s \quad (3.20)$$

Vale observar que, através da formulação proposta, as variáveis de projeto envolvidas no problema são as densidades relativas relacionadas com os elementos finitos ou nós da malha utilizada na discretização. Sendo assim, o problema de minimização da flexibilidade ou maximização da rigidez, pode ser então entendido como um processo iterativo que busca uma melhor distribuição de material das variáveis de projeto pela malha. Como todo processo iterativo, o processo finaliza quando um determinado critério de convergência é atingido. A Figura 3.4 a seguir apresenta um fluxograma com as principais etapas do processo.

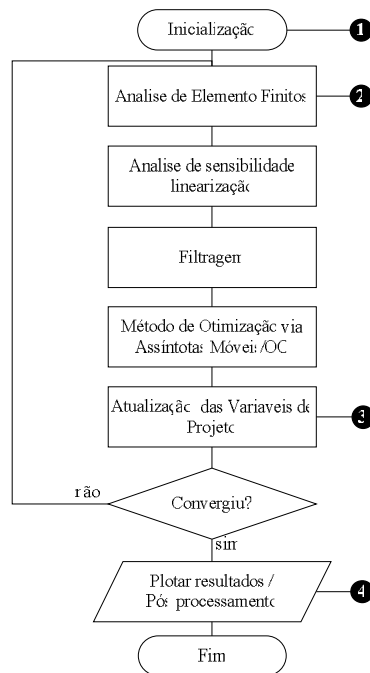


Figura 3-4: Diagrama de fluxo – Método SIMP

3.1.5 Abordagem com variáveis nodais

Uma possível técnica considerada é a abordagem com variáveis nodais. Nesse caso, as variáveis de projeto serão distribuídas ao longo dos nós da malha de elementos finitos. A densidade será admitida constante no elemento e poderá ser obtida via média aritmética simples das densidades associadas a seus nós (Traldi, 2010). A propriedade do material a ser utilizada na análise por elementos finitos é tomada no centro geométrico de cada elemento via expressão:

$$\rho_e = \frac{1}{nnel} \sum_{i=1}^{nnel} \rho_i \quad (3.21)$$

Onde:

$nnel$ – Número de nós do elemento finito utilizado;

ρ_i – Variável de projeto associada ao nó i do elemento.

É então possível obter a matriz de rigidez de um elemento qualquer com base na expressão:

$$k_e = \left(\frac{1}{nnel} \sum_{i=1}^{nnel} \rho_i \right)^p k_s \quad (3.22)$$

O que leva a obtenção da matriz de rigidez global da estrutura na forma:

$$K = \sum_{e=1}^N k_e \quad (3.23)$$

Sendo a flexibilidade média da estrutura utilizando a abordagem com variáveis nodais descrita pela equação:

$$c = \sum_{e=1}^N \left(\frac{1}{nnel} \sum_{i=1}^{nnel} \rho_i \right)^p U_e^T k_s U_e \quad (3.24)$$

A maior vantagem no uso dessa técnica é uma suavização das discontinuidades no campo de densidades entre elementos. Essa técnica possibilita a implementação de algumas ferramentas propostas contra instabilidade numérica como o CAMD (Matsui e Terada, 2004) e as técnicas de

projeção (Guest et al, 2004). No entanto, apesar do processo de suavização na distribuição de densidades, a abordagem com várias variáveis nodais não impede a descontinuidade existente.

3.1.6 Abordagem com base no elemento

Outra possível técnica na resolução do problema de otimização envolvido no método SIMP é a abordagem com base no elemento. Nesse caso, durante cada processo iterativo de otimização, um valor de densidade é considerado constante para cada elemento finito da malha presente na discretização. Uma vez adotada essa hipótese, considera-se uniforme o campo de densidades no interior do elemento (Traldi, 2010). Com isso, apenas os deslocamentos serão representados nos nós e poderão ser obtidos via funções de interpolação enquanto que as variáveis de projeto são mantidas constantes em todo domínio do elemento, independentes do tipo de elemento considerado.

Assim, a matriz de rigidez global da estrutura será formada pela contribuição das matrizes de rigidez de cada elemento na forma:

$$K = \sum_{e=1}^N \rho_e^p k_e \quad (3.25)$$

Podendo então a flexibilidade média da estrutura ser obtida com base na expressão:

$$c = \sum_{e=1}^N \rho_e^p U_e^T k_e U_e \quad (3.26)$$

Onde:

U_e – é o vetor de deslocamentos nodais do elemento;

N - é o número total de elementos finitos da malha.

No caso do presente trabalho apenas a abordagem com base nos elementos é adotada.

3.2 Instabilidades Numéricas

A solução do problema de otimização de topologia apresentado anteriormente descreveu uma formulação baseada na forma discreta 0-1 e sua evolução para o problema na forma relaxada, via utilização de uma variação contínua da densidade do material. Para que isso seja possível é necessária a introdução de um coeficiente de penalização que caracteriza o modelo SIMP. No entanto, à medida que o processo de otimização inicia, é comum o aparecimento de soluções que possuam instabilidades numéricas inerentes ao processo. Os tipos mais comuns presentes na literatura são: dependência de malha e instabilidade de tabuleiro. Uma das formas adotadas frequentemente para eliminação desses tipos de instabilidades é um método, baseado em um filtro de sensibilidade. Esse item descreve as principais características das instabilidades existentes e o principal método adotado para eliminá-las.

3.2.1 Instabilidades devido a problemas de dependência de malha

O problema da dependência da malha, que ocasiona diferentes soluções finais para diferentes discretizações é inerente ao processo de discretização do domínio. Quando o domínio contínuo é discretizado, o espaço das soluções passa a ter dimensão finita. Assim, a cada nova discretização, uma nova solução mais refinada pode ser encontrada.

Intuitivamente, espera-se que quanto mais refinada for a malha de elementos finitos, a topologia ótima deveria resultar em uma estrutura que descreva com maior fidelidade as condições de contorno do problema. Entretanto, não é isso que ocorre. Em muitos problemas, malhas com maior refino resultam em topologias mais detalhadas e qualitativamente diferentes de um modelo resultado de uma malha mais grosseira (Figura 3.5).

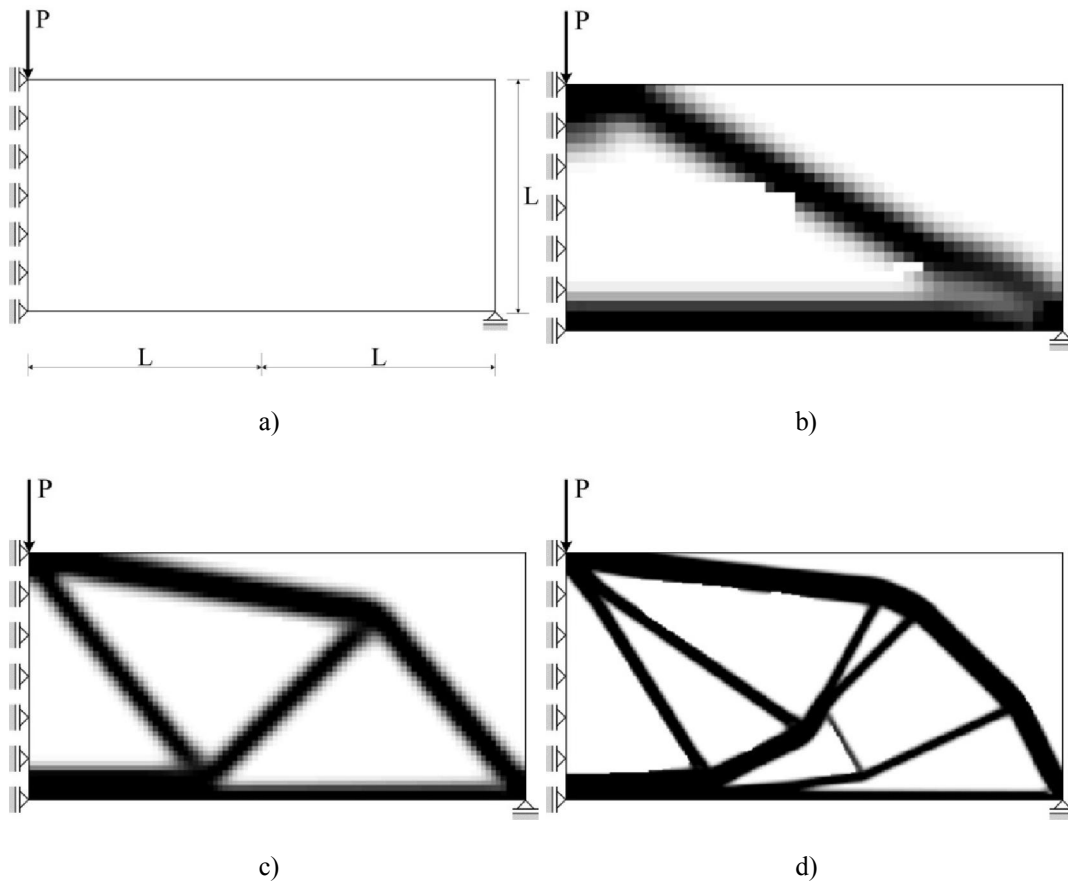


Figura 3-5: Dependência da malha. a) Estrutura com simetria; b) Malha com 1250 elementos; c) Malha com 5.000 elementos; d) Malha com 45.000 elementos.

De acordo com Petersson e Sigmund (1998), o problema da dependência da malha pode ser dividido em duas categorias:

- Obtenção de topologias finais cada vez mais complexas à medida que a malha de elementos finitos vai sendo refinada. As malhas mais refinadas, nesse caso, produzem estruturas “melhores” (ou seja, com valores cada vez menores na função objetivo, se o problema for à minimização do volume) quando comparadas com estruturas geradas a partir de malhas menos refinadas.
- Obtenção de diversas soluções ótimas com mesmo valor da função objetivo. Este problema aparece devido a não unicidade da solução do problema discretizado e ocorre, por exemplo, no projeto de uma estrutura uniaxial sob tensão em uma dada área A. A Figura 3-6 ilustra esse problema. Tanto a estrutura (b) quanto a estrutura (c) funcionariam perfeitamente sob o dado caso de carregamento com variação apenas da fração do volume final.

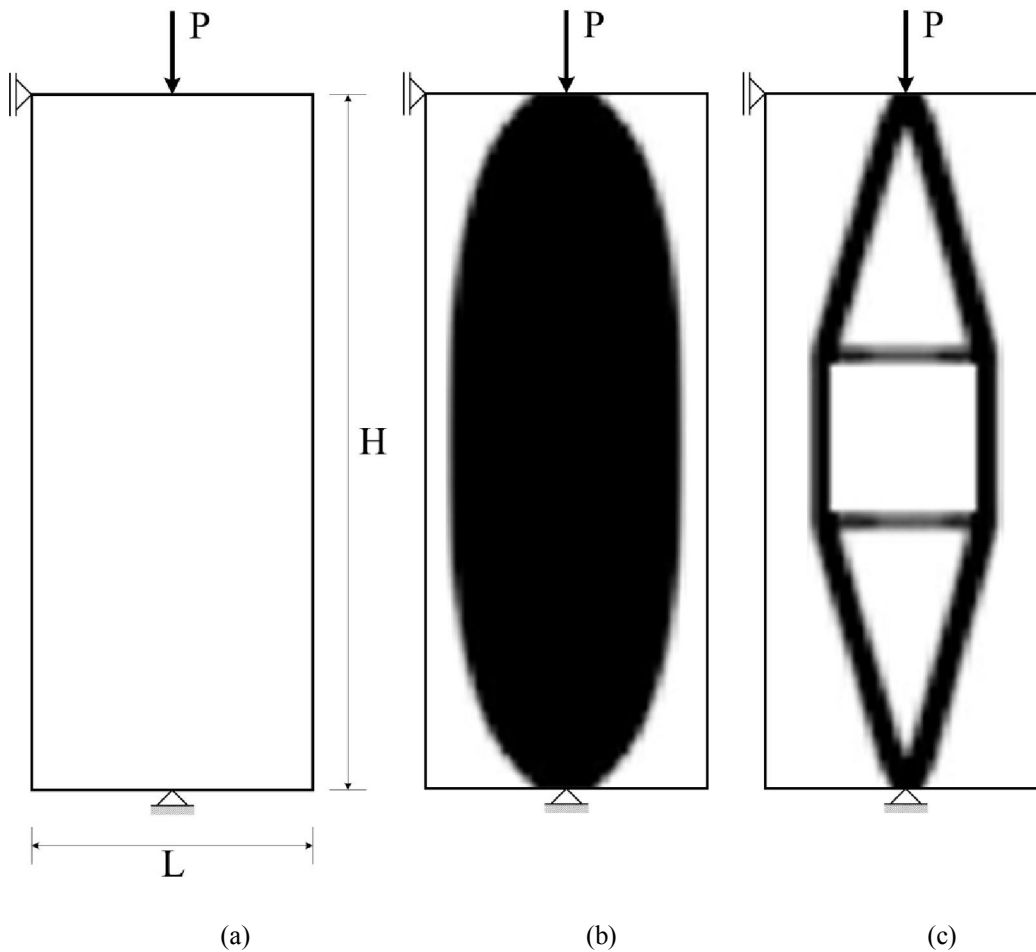


Figura 3-6: Exemplo de não unicidade da solução

Apesar de não existirem maneiras de resolver diretamente o problema da não-existência da solução única, uma restrição na complexidade da topologia final pode minimizar a aparição desse fenômeno. Em relação à dependência do refino da malha, soluções comumente utilizadas podem ser vistas em Bendsøe (1995), Sigmund et al (1998) e Guest et al (2004), entre outros. Nesse trabalho apenas as técnicas de filtragem propostas por Sigmund (2001) serão utilizadas.

3.2.2 Instabilidades devido a problemas de tabuleiro

A instabilidade de tabuleiro é um problema bastante comum na otimização topológica de estruturas contínuas. Até pouco tempo atrás, suas causas não eram muito conhecidas (Sant'anna, 2002). O mesmo não podia ser dito das suas consequências, pois se sabia que a topologia final na forma de um tabuleiro aumentava a rigidez da estrutura. Os primeiros trabalhos pesquisando esse

fenômeno acreditavam que o resultado obtido correspondia a algum tipo de microestrutura ótima. Entretanto, logo se descobriu que essa rigidez extra é artificial e que de forma nenhuma correspondia a algum tipo de microestrutura ótima.

Provou-se que esse fenômeno é decorrente da discretização do modelo contínuo, e decorre principalmente devido a problemas numéricos na convergência do método dos elementos finitos. Tanto o método da homogeneização quanto o uso de microestruturas artificiais, tais como o método SIMP, estão sujeitos ao aparecimento da instabilidade de tabuleiro (ou instabilidade xadrez), fenômeno esse causado pelo mau-condicionamento das soluções das equações de equilíbrio ocasionadas pelo uso do método dos elementos finitos (Figura 3-7). Sabe-se também que o uso de elementos finitos de alta ordem (como os quadriláteros de 8 e 9 nós) pode prevenir esse fenômeno, devido ao enriquecimento do campo de deslocamentos se o expoente utilizado na parametrização do tensor constitutivo não for muito elevado (Sant'anna, 2002).

De acordo com Kikuchi et al (1984), uma alternativa para contornar o “problema” de usar elementos de alta ordem é criar uma malha formada por “super-elementos” constituídos de, por exemplo, 4 elementos bilineares isoparamétricos agrupados, todos com os mesmos valores de densidade. Essa estratégia é de certa forma, um controle de gradiente nas densidades, pois grupos de elementos vizinhos não podem sofrer variações bruscas em suas densidades. Apesar de esse “super elemento” ser formado apenas por quadriláteros de baixa ordem, o super elemento se comporta como se tivesse graus de liberdade extras, aumentando o custo computacional da solução do problema.



Figura 3-7: Instabilidade de tabuleiro

Elementos finitos como o Elemento de Taylor (Sant'anna, 2002), que possui um campo de deslocamentos enriquecido, não reduzem o problema. Entretanto, pelo fato de possuir uma interpolação polinomial de baixa ordem, esse elemento não oferece um grande aumento no tempo computacional. O uso desse elemento, aliado a uma estratégia de filtragem, pode minimizar o problema da instabilidade de tabuleiro.

3.2.3

Esquema de regularização via filtro de sensibilidade

Uma das ferramentas mais utilizadas no combate às instabilidades numéricas é a adoção de um procedimento heurístico denominado filtro de sensibilidade (Sigmund, 2001). Sua principal diferença na aplicação entre as técnicas com a abordagem com base no elemento e com a abordagem em variáveis nodais é que na primeira ele atua alterando as sensibilidades da função objetivo, fazendo com que ela dependa das sensibilidades e das densidades dos elementos de uma dada vizinhança e não apenas de um elemento. Sua outra alteração se dará em relação às variáveis de projeto localizadas nos nós da malha.

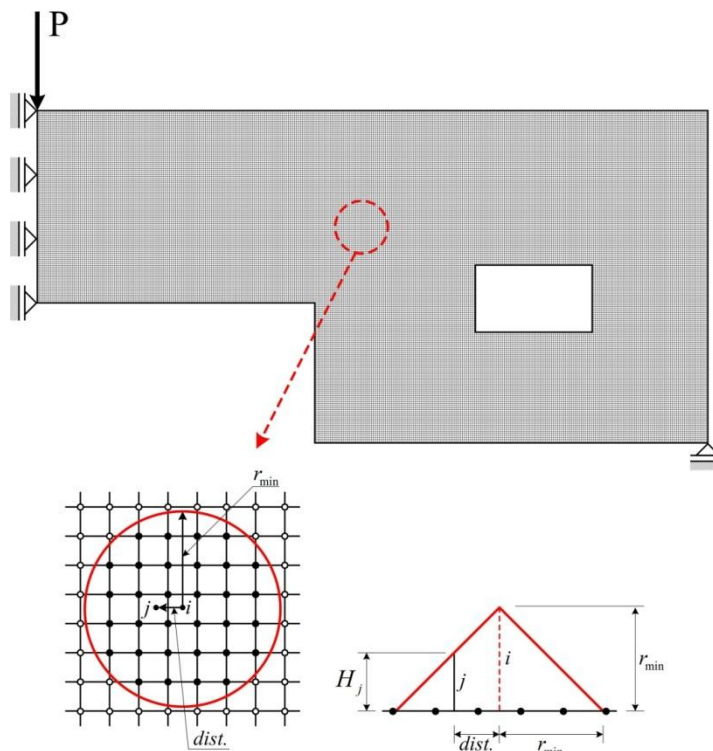


Figura 3-8: Filtro de sensibilidade

A Figura 3.8 mostra como um raio mínimo deverá ser adotado como parâmetro para incluir elementos da sua vizinhança que influenciarão na contribuição da sensibilidade da função objetivo. Também um peso, denominado operador de convolução é imposto, de modo que a influência de cada elemento pertencente à área delimitada decresça linearmente com a distância entre o centro do elemento e o centro do círculo. Na abordagem através de variáveis nodais, o círculo ficará centrado no nó.

A aplicação da técnica de filtragem evita grandes discontinuidades nos valores de sensibilidades da função objetivo em relação às variáveis de projeto o que acaba por eliminar ou diminuir substancialmente a instabilidade de tabuleiro. Também a dependência de malha poderá ser evitada com essa técnica uma vez que adoção de raios maiores evitará a formação de regiões com pequena espessura devido ao refinamento da malha. Com essa técnica a sensibilidade da função objetivo é obtida na forma:

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial \rho_i} = \frac{1}{\rho_i \sum_{j=1}^N H_j} \sum_{j=1}^N H_j \rho_j \frac{\partial c}{\partial \rho_j} \quad (3.27)$$

Onde:

i - Índice do elemento que se deseja corrigir a sensibilidade;

j - Índice da cada elemento dentro do círculo do filtro;

ρ_i - Densidade do elemento com índice i ;

ρ_j - Densidade do elemento com índice j ;

N - Número total de elementos finitos da malha;

H_j - Operador de Convolução de cada elemento com índice j ;

$\frac{\partial \hat{c}}{\partial \rho_i}$ - Sensibilidade da função objetivo em relação à densidade do elemento i ;

$\frac{\partial c}{\partial \rho_j}$ - Sensibilidade da função objetivo em relação à densidade associada a cada elemento e índice j .

O operador de convolução pode ser obtido com base em:

$$H_j = \begin{cases} r_{min} - dist(j, i) & j \in N | dist(j, i) \leq r_{min} \\ 0 & j \in N | dist(j, i) > r_{min} \end{cases} \quad (3.28)$$

Onde $dist(j, i)$ é a distância entre o elemento central i do círculo aos elementos com índice j . A eficiência do filtro está diretamente relacionada com a escolha adequada do parâmetro raio mínimo (r_{min}). Um estudo básico com um número de simulações mínimo deverá ser executado na busca de um resultado satisfatório do ponto de vista prático.

As principais vantagens das técnicas de filtragem são:

- Reduz o aparecimento da instabilidade de tabuleiro, mesmo usando elementos de baixa ordem, como o elemento bilinear isoparamétrico;
- Simplifica a topologia final, facilitando sua interpretação;

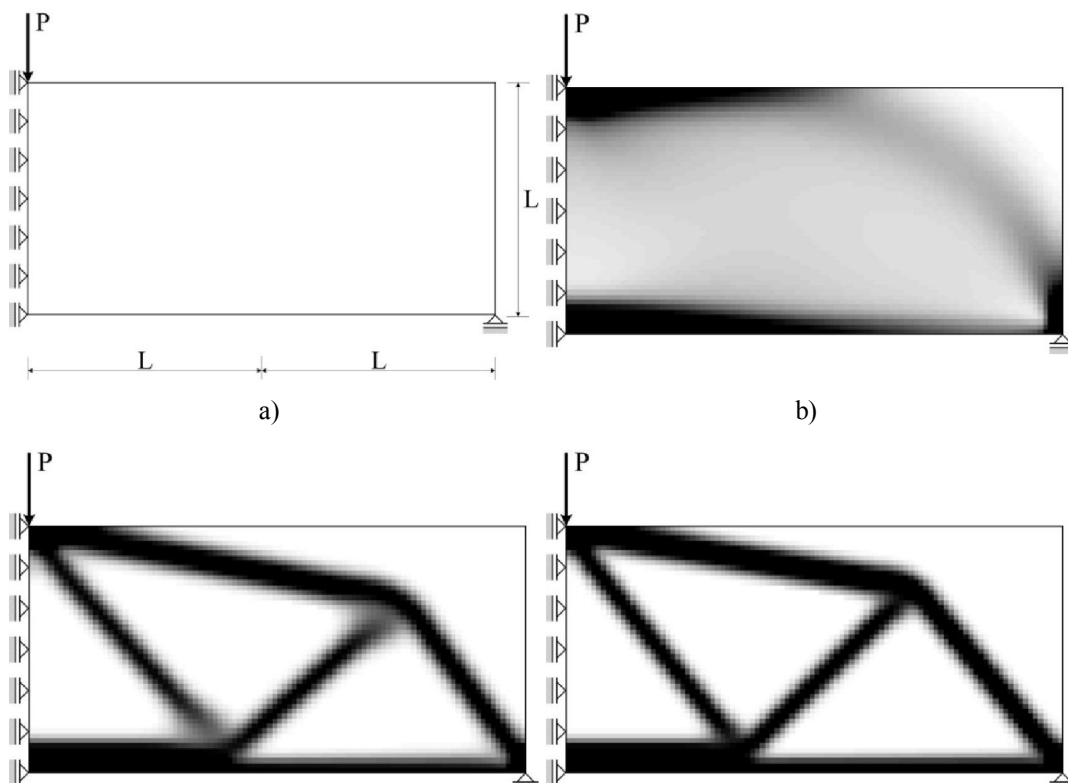
- Reduz o problema da não unicidade da solução, pois restringe a variação das densidades.

Algumas desvantagens que podem ser citadas são:

- Necessidade de malhas refinadas para garantir a convergência;
- A filtragem faz com que o processo de otimização leve mais iterações para convergir, às vezes até duas vezes mais iterações do que sem o filtro.

3.2.3.1 Coeficiente de penalização

O coeficiente de penalização a ser utilizado na obtenção dos modelos topológicos ótimos tem uma influência bastante grande no resultado final. A Figura 3.9 mostra para uma variação de 1 a 4 como a solução da topologia de uma viga com dois balanços é alterada. Os outros parâmetros relativos a fração do volume inicial, quantidade de elementos da malha e raio mínimo do filtro de sensibilidade são mantidos constantes. A estrutura em estudo apresenta uma malha na escala 1:0.5, sendo composta por 200 elementos finitos em x e 100 em y . O raio mínimo adotado foi de 3 e sua fração de volume inicial fixada em 0,25 (25%).



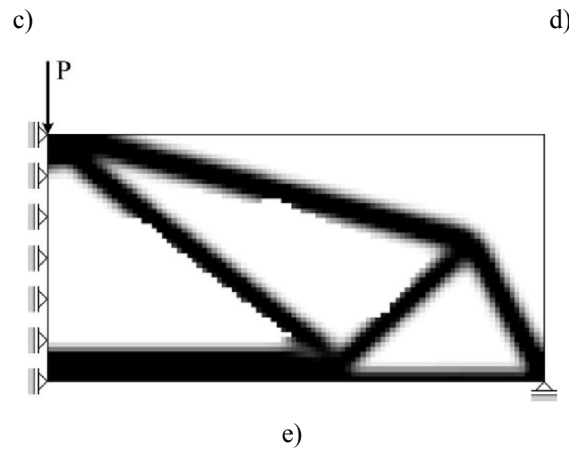
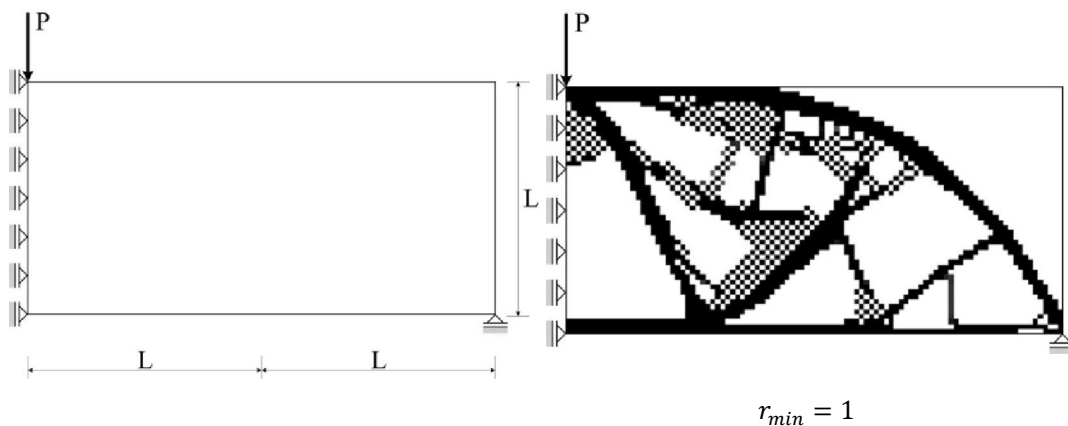


Figura 3-9: Filtro de sensibilidade

3.2.3.2 Influência do raio do filtro de sensibilidade

De modo a exemplificar a influência do parâmetro raio mínimo do filtro de sensibilidade na obtenção de topologias ótimas um exemplo é utilizado. Os outros parâmetros do problema serão mantidos fixos (número de elementos da malha e coeficiente de penalização) e o raio do filtro será variado de 1 até 6.

A Figura 3.10 mostra como uma modificação no valor do raio mínimo pode levar a diferentes topologias. Observa-se que quando o raio mínimo é unitário, as sensibilidades não serão corrigidas o que levará aos problemas de tabuleiro e dependência de malha. À medida que seu valor é aumentado, valores de densidade intermediária aparecerão devido à influência dos valores de baixa densidade no cálculo geral dos elementos.



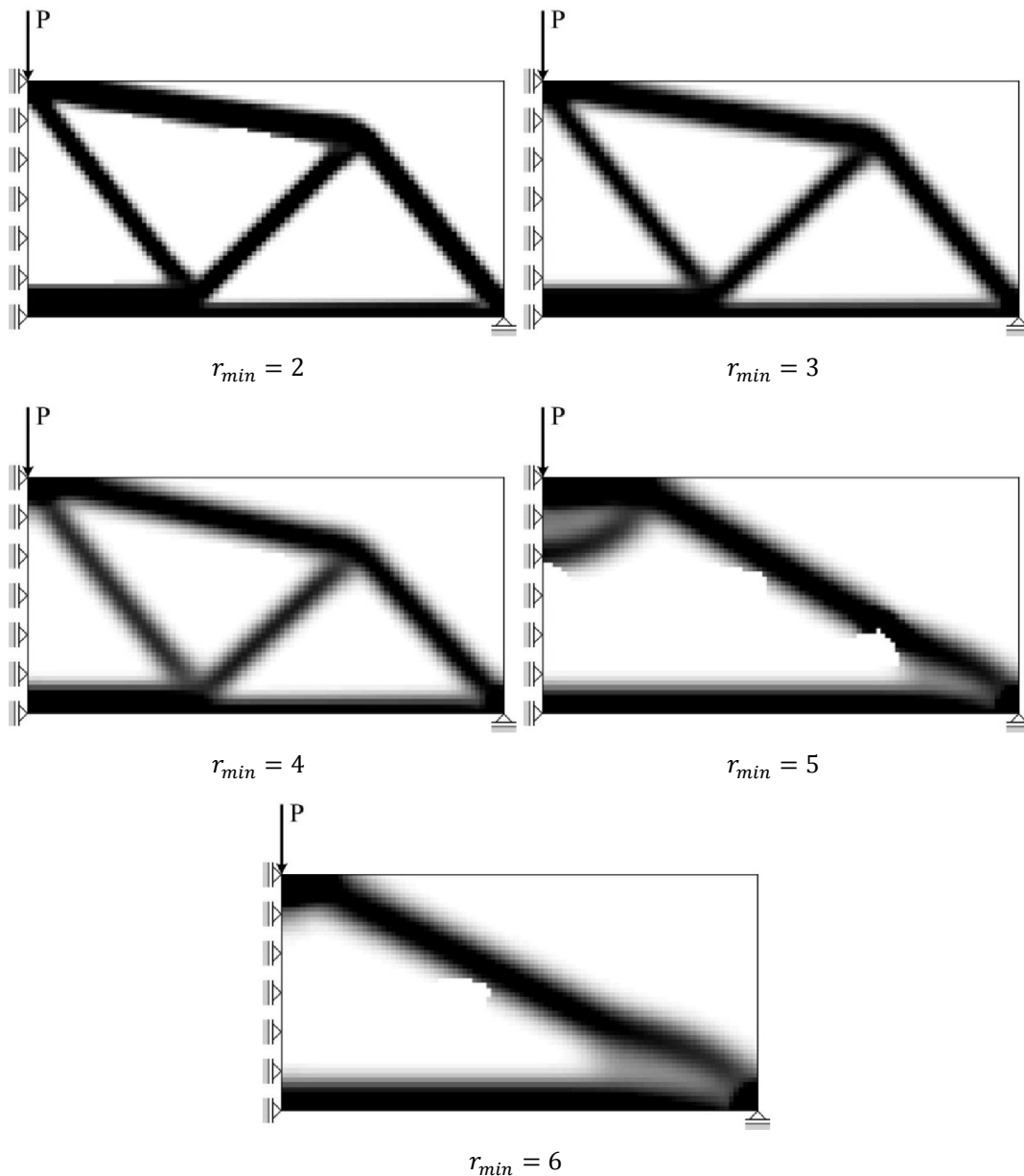


Figura 3-10: Modificação das topologias com variação do raio do filtro.

Isso mostra a necessidade de um estudo básico de um raio mínimo que atenda os resultados práticos compatíveis. Deve-se também ter cuidado com valores demasiadamente altos a fim de evitar soluções topológicas com aparecimento de escala de cinza.

3.3 Método de Solução para Busca de Topologias Ótimas

Algoritmos de programação matemática são formulados a partir da busca pelo mínimo ou máximo de funções, que utilizam a análise de sensibilidade como

orientação para essa busca do ponto ótimo (mínimo ou máximo). A seguir serão descritos os principais passos para obtenção das sensibilidades e posterior processo de otimização segundo dois grandes critérios existentes na literatura. Um método baseado na condição de estacionaridade da função Lagrangeana, denominado Critério de Otimalidade (*Optimality Criteria* - OC), e outro baseado numa classe de métodos de otimização com convergência global baseado em funções aproximadoras separadas conservativas convexas, conhecido como Método das Assíntotas Móveis (*Method of Moving Asymptotes* - MMA).

Durante este trabalho de pesquisa, as duas técnicas foram testadas e utilizadas na obtenção de topologias ótimas com bastante sucesso. No entanto, a partir do trabalho apresentado por Groenwold e Etman (2007) que demonstrou o melhor desempenho do Critério de Otimalidade (OC) em problema dessa natureza e também por ter uma implementação computacional bastante mais simples que o Método das Assíntotas Móveis, os exemplos finais foram todos feitos via OC.

3.3.1 Método das assíntotas móveis

Uma forma bastante eficaz de resolver o problema de otimização topológica leva a uma classe de métodos de otimização com convergência global baseado em funções aproximadoras separadas conservativas convexas (*Conservative Convex Separable Approximations* - CCSA).

Os métodos CCSA são aplicados a problemas de programação não linear com restrições de desigualdade, que podem ser encarados na forma de problemas de minimização com restrições do tipo menores ou iguais (Svanberg, 2002). Existem iterações externas e internas nesses métodos. Uma iteração externa inicia a partir da iteração atual $x^{(k)}$ e termina com uma nova iteração $x^{(k+1)}$. Entre uma iteração externa e outra, um subproblema convexo é gerado e resolvido. Nesse subproblema, a função objetivo original e suas restrições são representadas por certas funções separadas convexas que aproximam a função original nos arredores de $x^{(k)}$. A solução ótima do subproblema pode ser aceita ou rejeitada. Se for aceita, torna-se $x^{(k+1)}$ e outra iteração externa é completada. Se for rejeitada, uma nova iteração interna é feita, com um subproblema modificado baseado em alguma alteração feita nas funções de aproximação. As iterações internas serão

repetidas até que as funções aproximadoras da função objetivo e das restrições se tornem maiores ou iguais às funções originais na solução ótima do subproblema.

Quando isso acontece, é dito que as funções de aproximação são conservativas. Isso não implica que o conjunto de soluções viáveis do subproblema está completamente contido no conjunto de soluções viáveis originais, mas implica que a solução ótima do subproblema é uma solução viável do problema original, com valor da função objetivo menor do que a iteração anterior. Cada nova iteração externa requer valores para a função e as derivadas de primeira ordem da função objetivo original e de suas restrições, calculados na iteração atual $x^{(k)}$. Cada nova iteração interna requer apenas os valores da função e não de suas derivadas, calculados a partir da solução ótima do subproblema mais recente.

Utilizar esquemas baseados em uma resolução de uma sequência de subproblemas não é uma ideia nova. Podemos citar problemas do tipo SQP (*Sequential Quadratic Programming*) onde, em cada iteração, um problema de programação quadrática convexa (*Quadratic Programming* - QP) é resolvido e uma busca em linha é feita via função de mérito. No entanto, as restrições lineares no subproblema QP não garantem que os pontos de iteração sejam viáveis com respeito às restrições originais, o que os torna não conservativos conforme definido anteriormente. Em contraposição aos métodos SQP, os métodos CCSA introduzem uma curvatura tanto na função objetivo quanto nas funções de restrição do subproblema. Esta curvatura é atualizada durante as iterações internas uma vez que as funções aproximadoras são conservativas, não sendo assim necessária a execução de nenhuma busca linear. Outra classe de métodos que gera pontos de iteração viáveis são os métodos de pontos interiores. Mas nesses métodos a viabilidade é garantida adicionando à função objetivo uma função de barreira logarítmica e não usando funções aproximadoras conservativas para as funções de restrição conforme proposto pelos métodos CCSA.

Um ponto que deve ser enfatizado é que o maior benefício dos métodos CCSA são que os mesmos podem ser aplicados com sucesso a problemas com número muito grande de variáveis, sem que as matrizes Hessianas da função

objetivo e das restrições fiquem densas. Esta propriedade também pode ser estendida pelo uso das funções aproximadoras separadas.

Um dos métodos CCSA adotados neste trabalho é denominado Método das Assíntotas Móveis ou MMA, que têm aplicação no campo da otimização estrutural, onde o cálculo das funções objetivo e seus gradientes conduzem a um grande consumo de tempo (envolvendo um enorme número de cálculos de elementos finitos). Uma consideração normalmente importante aos usuários, nesses casos, é que os pontos de cada iteração gerada, sejam viáveis. Isto é garantido pelo método MMA.

A formulação em MMA é baseada numa expansão em série de Taylor de primeira ordem da função objetivo e funções das restrições (Svanberg, 1987). Com esse método, um subproblema convexo explícito é gerado para aproximar um problema não linear implícito. Uma vez que o problema é separado e tornado convexo, uma formulação dual ou um método de pontos interiores primal-dual pode ser utilizado para resolvê-lo. A solução de uma sequência de subproblemas pode convergir em direção ao problema original.

Dessa maneira o problema de otimização estrutural pode ser montado da seguinte maneira:

$$\text{Minimizar: } f_0(x) \quad (3.29)$$

$$\text{Sujeito a: } f_i(x) \leq \bar{f}_i, \quad i = 1, \dots, M \quad (3.30)$$

$$0 < x_{min} \leq x^e \leq x_{max}, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.31)$$

Onde M é o número de restrições e N é o número de elementos. A função f_0 é a função objetivo. As funções f_i representam as restrições e os contornos das variáveis de projeto serão x_{min} e x_{max} . As funções implícitas f_i são aproximadas pelas funções explícitas \bar{f}_i que são caracterizadas por serem separáveis e convexas. A escolha dessas funções aproximadoras é baseada em cálculos prévios dos valores das funções calculadas e dos seus gradientes. É assumido que tanto a função objetivo quando as funções das restrições podem ser aproximadas através

das funções aproximativas. Podemos então modificar o problema de otimização anterior para:

$$\text{Minimizar: } \tilde{f}_0^{(k)}(x) \tag{3.32}$$

$$\text{Sujeito a: } \tilde{f}_i^{(k)}(x) \leq \bar{f}_i, \quad i = 1, \dots, M \tag{3.33}$$

$$0 < x_{min} \leq x^e \leq x_{max}, \quad i = 1, \dots, N \tag{3.34}$$

Sendo k o número da iteração atual e o vetor $x^{(0)}$ é o ponto de inicial para as densidades relativas. Na MMA, cada função aproximadora $\tilde{f}_i^{(k)}(x) \leq \bar{f}_i$ é obtida pela linearização de $f_i(x)$ por variáveis do tipo $\frac{1}{U_e - x^e}$ e $\frac{1}{x^e - L_e}$, dependendo do sinal das derivadas em $x^{(k)}$, onde U_e e L_e são parâmetros denominados assíntotas que devem satisfazer $L_e < x^{e(k)} < U_e$. Assim tem-se:

$$\tilde{f}_i^{(k)}(x) = \sum_{e=1}^N \left(\frac{1}{U_e - x^e} + \frac{1}{x^e - L_e} \right) + r_i \tag{3.35}$$

onde:

$\frac{\partial f_i}{\partial x^e} > 0$ em $x^{(k)}$ então:

$$p_{ie} = (U_e - x^{e(k)})^2 \frac{\partial f_i}{\partial x^e} \wedge q_{ie} = 0 \tag{3.36}$$

$\frac{\partial f_i}{\partial x^e} < 0$ em $x^{(k)}$ então:

$$q_{ie} = (x^{e(k)} - L_e)^2 \frac{\partial f_i}{\partial x^e} \wedge p_{ie} = 0 \tag{3.37}$$

Observe que r_i é escolhido de forma que $\tilde{f}_i^{(k)}(x^{(k)}) = f_i^{(k)}(x^{(k)})$. Os valores dos pontos assintóticos U_e e L_e são normalmente modificados entre as iterações e, por conseguinte, esses pontos são também uma função de k .

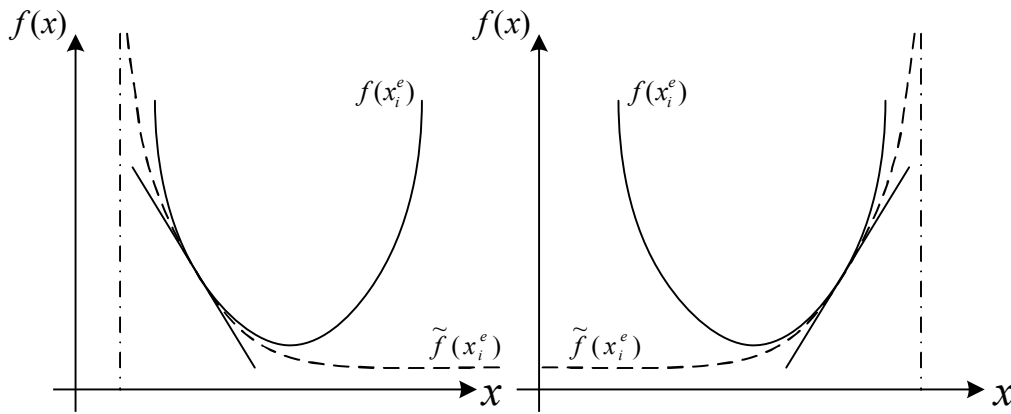


Figura 3-11: Formulação via MMA para variável de projeto x^e

A Figura 3.11 mostra o procedimento para utilização da MMA para uma variável de projeto x^e num espaço unidimensional. A função $f(x)$ é a função objetivo e a função $\tilde{f}(x)$ é a função aproximadora. Os pontos assintóticos U_e e L_e são normalmente representados por valores finitos. Um procedimento heurístico pode então ser utilizado para atualizar os pontos assintóticos U_e e L_e . As assíntotas serão movidas para cada vez mais perto uma da outra de modo a obter iterativamente o ponto de projeto ótimo.

Observe que se $U_e \rightarrow +\infty$ e $L_e \rightarrow -\infty$ a aproximação MMA torna-se, no limite, igual a uma aproximação linear via Programação Linear Seqüencial (Sequential Linear Programming - SLP). Nos casos considerados a flexibilidade ou energia de deformação é igual a $f_0(x)$ e a estrutura é restringida a certa porção do domínio de projeto V_0 , assim $f_1(x) = fV_0$.

A derivada da função objetivo é encontrada utilizando o equilíbrio fazendo:

$$ku = F \rightarrow \frac{\partial k}{\partial x^e} u + k \frac{\partial u}{\partial x^e} = 0 \tag{3.38}$$

Derivando a função objetivo com respeito à variável de projeto e usando a expressão anterior:

$$\frac{\partial C}{\partial x^e} = \frac{\partial u^T}{\partial x^e} ku + u^T k \frac{\partial u}{\partial x^e} = -p(x^e)^{p-1} u^e k^0 u^e = -p(x^e)^{p-1} q_c \tag{3.39}$$

A expressão anterior assume que os carregamentos são independentes das variáveis de projeto, ou seja, $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$. A derivada das funções de restrição será então:

$$\frac{\partial V}{\partial x^e} = v^e \quad (3.40)$$

A maior vantagem na utilização da MMA é que nela a função $\tilde{f}_i(x)$ é convexa, logo aproxima de maneira fechada o comportamento da função objetivo e as funções das restrições, conforme mostrado na Figura 3-11.

3.3.2

Critério de otimalidade

Outro critério bastante eficaz e simples é o critério de otimalidade (OC). Nesse tipo de formulação a função Lagrangeana para o problema de otimização que minimiza a flexibilidade será:

$$L = C + \lambda(V - fV_0) + \lambda_1^T(ku - F) + \sum_{e=1}^N \lambda_2^e(x_{min} - x^e) + \sum_{e=1}^N \lambda_3^e(x^e - x_{max}) \quad (3.41)$$

Os multiplicadores de Lagrange λ e λ_1 serão globais enquanto λ_2^e e λ_3^e serão os multiplicadores devido às restrições laterais inferiores e superiores. O multiplicador λ é um escalar, o multiplicador λ_1 é um vetor e os multiplicadores λ_2^e e λ_3^e são escalares. A otimalidade é encontrada quando as derivadas da função Lagrangeana com respeito às variáveis de projeto são igualadas a zero, assim:

$$\frac{\partial L}{\partial x^e} = 0, \text{ para } e = 1, \dots, N \quad (3.42)$$

Ou

$$\frac{\partial L}{\partial x^e} = \frac{\partial C}{\partial x^e} + \lambda \frac{\partial V}{\partial x^e} + \lambda_1^T \frac{\partial(ku)}{\partial x^e} - \lambda_2^e + \lambda_3^e \quad (3.43)$$

Assumindo que as restrições laterais não são ativas, ou seja, $\lambda_2^e = \lambda_3^e = 0$, e que as cargas são independentes das variáveis de projeto, $\frac{\partial F}{\partial x^e} = 0$, chega-se a:

$$\frac{\partial L}{\partial x^e} = \frac{\partial u^T}{\partial x^e} ku + u^T \frac{\partial u}{\partial x^e} u + u^T k \frac{\partial u}{\partial x^e} + \lambda v^e + \lambda_1^T \left(\frac{\partial k}{\partial x^e} u + k \frac{\partial u}{\partial x^e} \right) \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^e} = u^T \frac{\partial u}{\partial x^e} u + \frac{\partial u}{\partial x^e} (2u^T k + \lambda_1^T k) + \lambda v^e \quad (3.45)$$

Uma vez que λ_1^T é arbitrário, pode-se selecioná-lo de modo a eliminar a segunda parcela do lado direito da equação (3.45). Assim, fazendo λ_1^T igual a $-2u^T$ obtém-se a parcela $2u^T k + \lambda_1^T k$ que é nula. Logo:

$$\frac{\partial L}{\partial x^e} = -u^T \frac{\partial u}{\partial x^e} u + \lambda v^e = -p(x^e)^{p-1} u^e k^0 u^e + \lambda v^e = -p(x^e)^{p-1} q_c + \lambda v^e \quad (3.46)$$

Onde $q_c = u^e k^0 u^e$ e sendo a energia de um elemento sólido $x^e = 1$.

Pode-se então atualizar as variáveis de projeto com base na equação anterior na forma:

$$\frac{p(x^e)^{p-1} q_c}{\lambda v^e} = 1 \quad (3.47)$$

O significado físico da equação anterior é que a densidade da energia de deformação poderá ser constante através do domínio de projeto. O multiplicador de Lagrange é então escalado de forma que a densidade da energia de deformação se torne constante.

Utilizando o esquema heurístico para atualização das variáveis de projeto, tem-se:

$$x_{(k+1)}^e = x_{(k)}^e \left(\frac{p(x^e)^{p-1} q_c}{\lambda v^e} \right)^\zeta = x_{(k)}^e (B_{(k)}^e)^\zeta \quad (3.48)$$

Sendo ζ o amortecimento, normalmente tomado no valor de 0.5 e k é o contador para o número de iterações. A proposta é que o amortecimento estabilize a iteração. Não serão permitidas grandes modificações na densidade relativa em uma iteração mesmo sabendo que o elemento irá de vazio a sólido. Assim serão introduzidos limites móveis para controle da variável de projeto. O propósito desses limites móveis é estabilizar a iteração. Num esquema de atualização que leva em conta os limites móveis das variáveis de projeto x , tem-se:

$$x_{(k+1)}^e = \left\{ \begin{array}{l} \max[(1-m)x_k^e, x_{min}] \text{ se } \{x_k^e (B_k^e)^\zeta \leq \max[(1-m)x_k^e, x_{min}]\} \\ x_k^e (B_k^e)^\zeta \text{ se } \max[(1-m)x_k^e, x_{min}] \leq x_k^e (B_k^e)^\zeta \leq \min[(1-m)x_k^e, x_{max}] \\ \min[(1-m)x_k^e, x_{max}] \text{ se } \{x_k^e (B_k^e)^\zeta \geq \min[(1-m)x_k^e, x_{max}]\} \end{array} \right\} \quad (3.49)$$

Denomina-se m o limite móvel, que na maioria dos casos terá o valor de 0.5. A variação do limite móvel poderá ocorrer para valores entre 0 e 1.

O multiplicador de Lagrange deve também satisfazer a restrição de volume assim pode-se atualizar o mesmo de forma iterativa, conforme mostra a Figura 3.12.

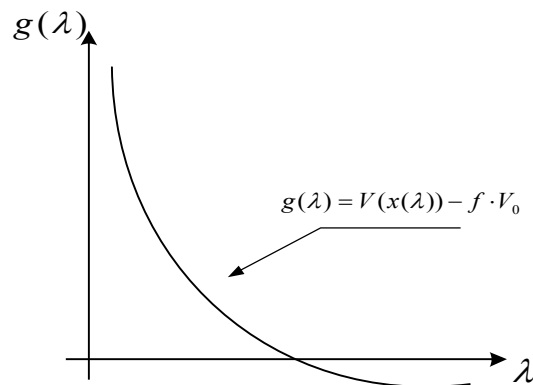


Figura 3-12: Multiplicador de Lagrange

Percebe-se que a função $g(\lambda)$ tem uma dependência decrescente monótona e contínua com multiplicador de Lagrange. Pode-se então utilizar o método da bissecção para determinar quando a função se torna nula.

3.3.3 Obtenção das sensibilidades via método adjunto

Pode-se reescrever o problema em função somente das variáveis de projeto, ficando:

$$\text{Minimizar: } c(\rho_e) \tag{3.50}$$

Sujeito a:

$$\sum_{e=1}^N v_e \rho_e \leq V \tag{3.51}$$

$$0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1 \quad e = 1, \dots, N \tag{3.52}$$

A equação de equilíbrio é considerada na forma:

$$c(\rho_e) = f^T u \quad (3.53)$$

Onde u resolve:

$$\sum_{e=1}^N \rho_e^p k_e u = f \quad (3.54)$$

O cálculo dos gradientes é necessário para que o algoritmo de otimização proceda à resolução da equação anterior. Isso é facilmente obtido derivando as funções objetivo e as restrições, que envolvem apenas ρ . Para funções que também dependam dos deslocamentos, as derivadas podem ser obtidas pela regra da cadeia. Estas expressões irão conter derivadas dos deslocamentos, que podem ser obtidas através das derivadas da equação de equilíbrio $Ku = f$. O projeto topológico normalmente trabalha com um número moderado de restrições, assim o método mais efetivo para cálculo das derivadas é o método adjunto, onde as derivadas dos deslocamentos não são calculadas explicitamente. Considerando-se o problema de minimizar flexibilidade, colocado anteriormente, e reescrevendo a função $c(\rho)$ adicionando a ela um termo nulo (equilíbrio) na forma:

$$c(\rho) = f^T u - \tilde{u}^T (Ku - f) \quad (3.55)$$

Onde \tilde{u} pode assumir é um valor arbitrário qualquer, contanto que seja fixo e real. Assim, depois de rearranjar os termos, teremos:

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_e} = (f^T u - \tilde{u}^T K) \frac{\partial u}{\partial \rho_e} - \tilde{u}^T \frac{\partial K}{\partial \rho_e} u \quad (3.56)$$

Esta expressão pode ser reescrita na forma:

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_e} = -\tilde{u}^T \frac{\partial K}{\partial \rho_e} u \quad (3.57)$$

Onde o vetor \tilde{u} satisfaz a equação adjunta:

$$f^T u - \tilde{u}^T K = 0 \quad (3.58)$$

Esta última equação é a equação de equilíbrio para flexibilidade que se pode obter diretamente de $\tilde{u} = u$ (normalmente a equações adjuntas requerem mais esforço computacional). Assim sendo, pode-se observar que apenas a variável ρ será diferenciada na equação do problema original, o que leva a uma equação extremamente simples na forma:

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_e} = -p(\rho_e)^{p-1} u^T k_e u \quad (3.59)$$

Pode-se observar que as derivadas para um problema de minimização de trabalho de deformação são extremamente fáceis de obter. Vale notar que as derivadas são “locais”, ou seja, envolvem apenas informações no nível do elemento, entretanto sua repercussão se dará através do efeito da variável de projeto na forma de deslocamentos. Finalmente, pode-se notar que a expressão para sensibilidade é negativa em relação a todos os elementos considerados, o que confirma a intuição física de que a adição de mais material em qualquer problema com decréscimo de flexibilidade faz a estrutura mais rígida Bendesøe e Sgumund (2003).

3.4 Técnica dos Elementos Indutores

Os elementos indutores são formados através de um procedimento numérico, incluso dentro do algoritmo de resolução do método SIMP, que garantam que durante o processo de otimização sejam assegurados valores máximos e mínimos de densidade para alguns elementos da malha. Assim um determinado trecho pré-definido para um encaminhamento de carga possa ser obedecido de modo a possibilitar uma interação do projetista com o processo de otimização a ser executado. Vale salientar que, mesmo que um conjunto de elementos indutores seja pré-definido para malha, o processo de filtragem das densidades feito para atualização das variáveis de projeto pode simplesmente levar a uma solução que desconsidere esse conjunto. Essa técnica foi proposta inicialmente por Bendesøe e Sigmund (2003) para introduzir furos e elementos fixos na malha de elementos.

Bielas e tirantes poderão então ser pré-definidos de uma forma livre através deste procedimento, modificando o resultado da otimização via novos encaminhamentos de carga, conforme será mostrado adiante nos exemplos apresentados. Essa técnica possibilita ao projetista determinar uma série de modelos de bielas e tirantes que cumpram o teorema do limite inferior da teoria da plasticidade resultando em estruturas estaticamente admissíveis.

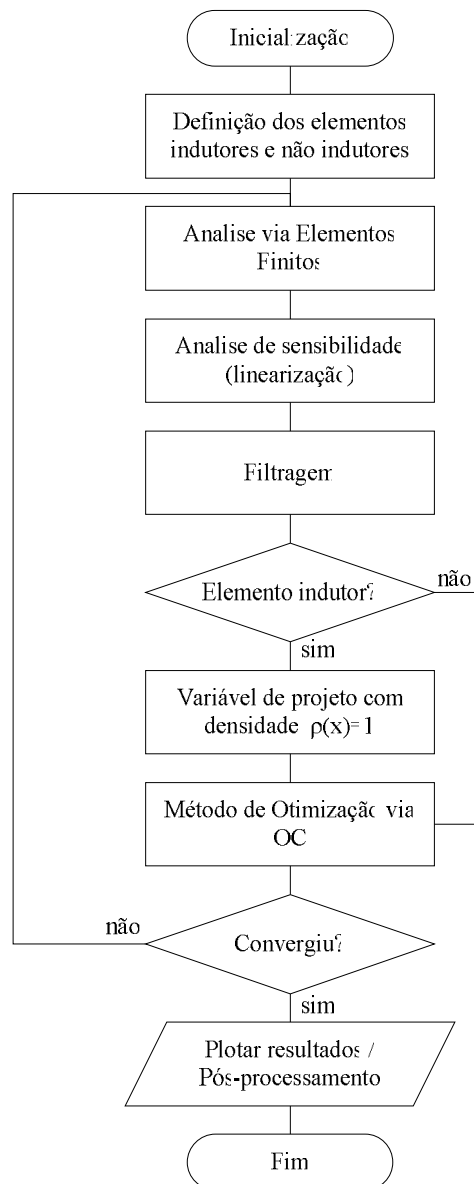


Figura 3-13: Fluxograma de implementação da técnica dos elementos indutores.

A Figura 3.13 mostra um fluxograma de implementação da técnica dos elementos indutores num programa de otimização topológica. Para maiores detalhes ver Bendsoe e Sigmund (2003). Os elementos indutores podem ser considerados de duas formas diferentes. A primeira delas é a introdução de buracos em locais específicos de modo a encaminhar o carregamento para um fluxo de cargas previamente requerido. Nesse caso todos os elementos que foram previamente associados com valores nulos de densidade relativa nula (vazio) têm seus valores mantidos constantes do início ao fim do processo. Esse tipo de técnica pode ser

muito útil quando se deseja obter um encaminhamento de fluxo conhecido mais que seja difícil de obter um processamento de OT convencional.

A segunda forma consiste na introdução de valores de densidade relativa igual à unidade a elementos específicos da malha durante o processo de otimização. Isso simularia a existência de uma barra de armadura previamente definida na estrutura de acordo com a conveniência do projetista estrutural envolvido. Em nenhuma das formas há garantia de que a topologia final obtida seja influenciada por esses elementos. Isso se deve ao fato de que durante o processo de filtragem as sensibilidades consideradas correspondem a uma média dentro do raio mínimo previamente definido logo regiões onde já exista uma prévia tendência ao acúmulo de rigidez isso será realçado enquanto que em regiões com baixa rigidez a introdução de elementos rígidos pode fazer pouca diferença. Assim, mesmo quando uma barra for adicionada aos elementos da malha, caso sua média seja baixa, o próprio processo de otimização fará a eliminação da mesma da topologia final. O mesmo processo é válido para furos. Uma preocupação adicional deverá ser tomada com os valores de raio mínimo que poderá influenciar bastante a eficiência dos elementos indutores.

3.4.1 Exemplos de aplicação

A técnica dos elementos indutores via método SIMP para resolução de problemas de otimização topológica é aplicada a dois exemplos. Estruturas de concreto armado do tipo vigas paredes são otimizadas utilizando o método proposto. A utilização de elementos indutores no interior das estruturas de concreto armado é feita e sua influência no processo de otimização mostrada.

A modelagem dos elementos indutores é feita através da fixação das densidades dos elementos. Sendo assim são apresentados nos exemplos dois tipos de processos. Processos sem indução, ou seja, onde o processo de otimização não conta com nenhuma imposição proposta pelo projetista e processos induzidos, onde a presença de elementos indutores necessários ao modelo pode ser pré-definida de acordo com o modelo de bielas e tirantes imaginado pelo projetista. Devido a esse fato, uma gama variada de modelos de bielas e tirantes pode ser testada e de acordo com a experiência do projetista. A eficiência das topologias

estruturais obtidas pelo processo de otimização proposto são apresentadas e seus resultados comparados com modelos clássicos presentes na literatura existente.

3.4.1.1

Viga parede com carregamento vertical na parte superior – VP1

O domínio de projeto para uma viga parede com duas cargas concentradas atuantes na face superior e distantes dos apoios $\frac{1}{4}$ do vão é apresentado na Figura 3.14. O domínio de projeto é discretizado por uma malha de elementos finitos quadriláteros com quatro nós em um estado plano de tensões, cujo número de elementos foi variado, de modo a demonstrar a influência do refino da malha sobre o processo de otimização. Apoios simples são considerados nas extremidades inferiores e cargas concentradas P de 1 KN são aplicadas de cada lado entre o centro e os apoios da viga parede. O módulo de Young e o coeficiente de Poisson são definidos como 3000 MPa e 0.3 respectivamente.

Primeiramente o modelo obtido através da otimização topológica é feito sem o processo de indução, sendo o resultado mostrado na Figura 3.15. Nota-se que o modelo obtido é compatível com os modelos em Souza (2004) e normalmente utilizados na prática. O tamanho e largura de um elemento é função de L e das subdivisões adotadas para malha (parâmetros fixos). Os parâmetros fixos considerados no processo de otimização sem indução foram $nelx = 80$ e $nely = 80$ que são os números de elementos finitos nas direções horizontal e vertical, a fração do volume inicial a ser obtida adotada foi de 10%, fator de penalidade de igual a 3 e o raio de influência para o filtro igual a 2 (filtragem). Para cada iteração dentro do processo de otimização, o programa gera um resultado da distribuição corrente de densidade sobre os elementos da malha.

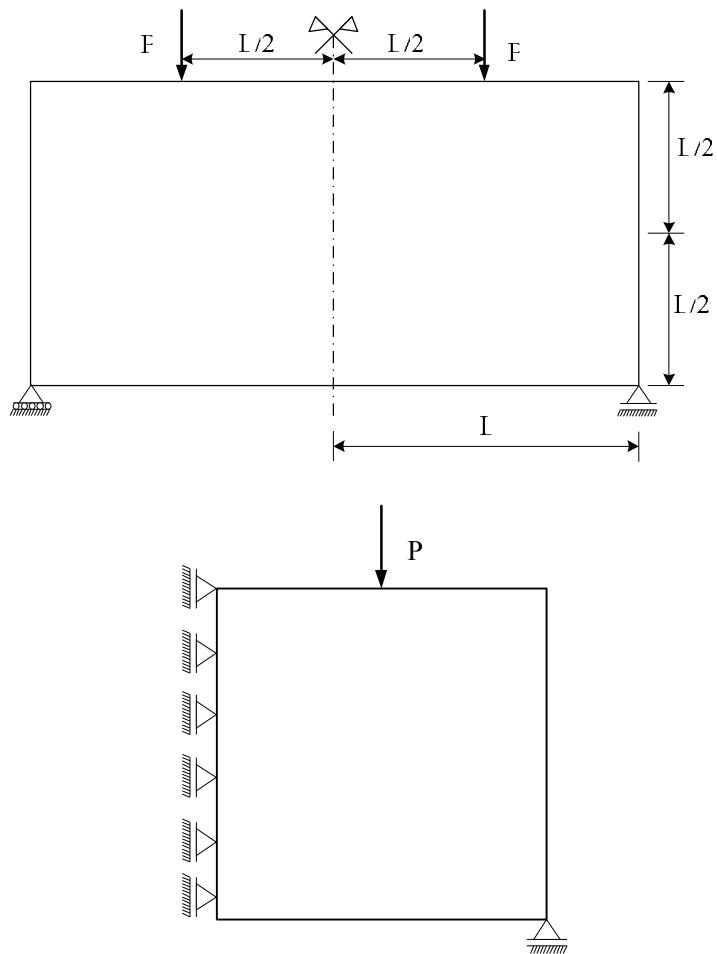


Figura 3-14: Viga parede VPI com carregamento na parte superior

Figura 3-15: Resultado obtido via simetria para VPI num processo sem indução

Em seguida, um novo processo de otimização topológica foi feito com acréscimo do processo de indução. Um elemento indutor vertical saindo lateralmente de baixo da carga P e indo a metade da altura da viga foi acrescentado e um elemento indutor horizontal em toda parte inferior também foi colocado

(Figura 3.16). Isto conduziu a uma modificação no modelo obtido pela otimização topológica.

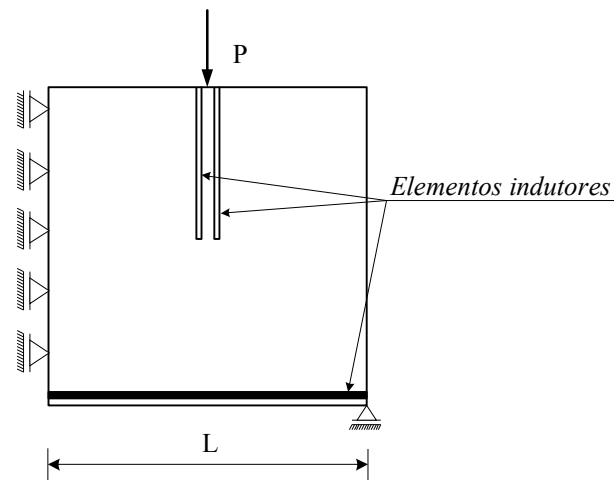
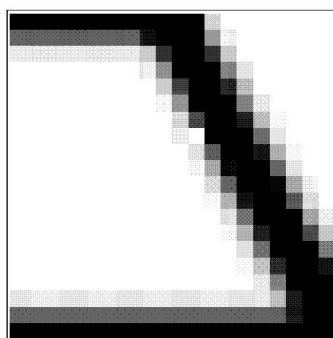
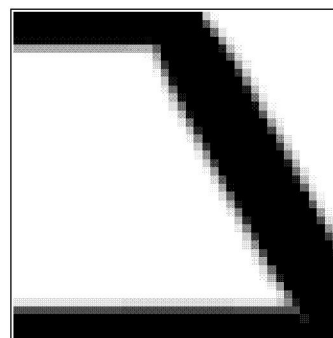


Figura 3-16: VPI com simetria e elementos indutores

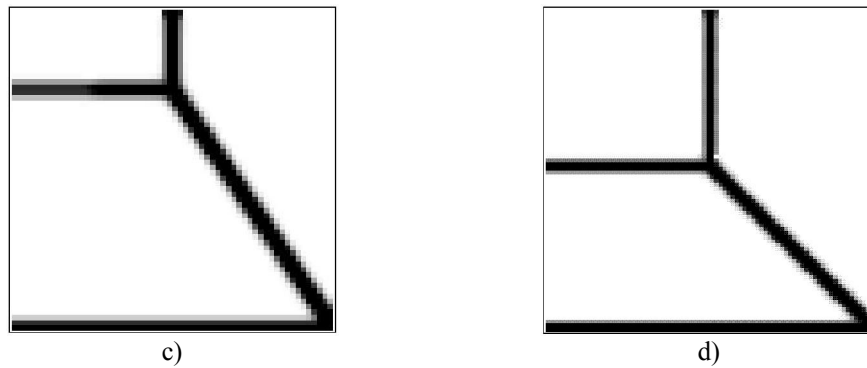
Através da Figura 3.17 observam-se as modificações ocorridas à medida que o refino da malha de elementos é aumentado. O resultado dos modelos pelo processo de otimização acarretou numa modificação nos modelos obtidos. De acordo com os exemplos, malhas pouco refinadas pode levar a ineficiência num processo de otimização com indução. Durante a modificação do número de elementos na malha foi preciso variar a fração do volume inicial considerada de modo a garantir a convergência da solução.



a)



b)

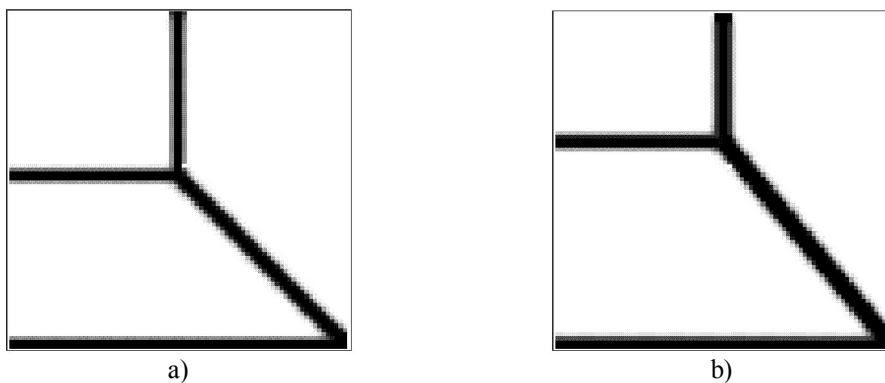


c) d)
Figura 3-17: Influência do refinado da malha no na OT com indução
 [(a) 400, b) 1600, c) 3600 e d) 6400 elementos].

Variou-se então a fração de volume no problema proposto de modo a verificar sua influência na otimização (Figura 3.18). Essa variação também levou a uma modificação substancial nos modelos obtidos. Nota-se que com o aumento da fração de volume final considerada o resultado final tende ao modelo obtido via processo sem indução. O número de elementos da malha foi mantido igual ao modelo sem indução.

Durante o estudo numérico feito para definição da fração de volume mais adequada ao problema proposto, os valores abaixo de 10% não obtiveram convergência enquanto valores superiores a este levam a um aumento muito grande no número de iterações necessárias e tempo de processamento para convergência. Logo o valor de 10% adotado.

Assim, ao aplicar otimização topológica com processos de indução, os parâmetros referentes ao número de elementos da malha e frações de volume a serem considerados, devem ser tomados com bastante critério.



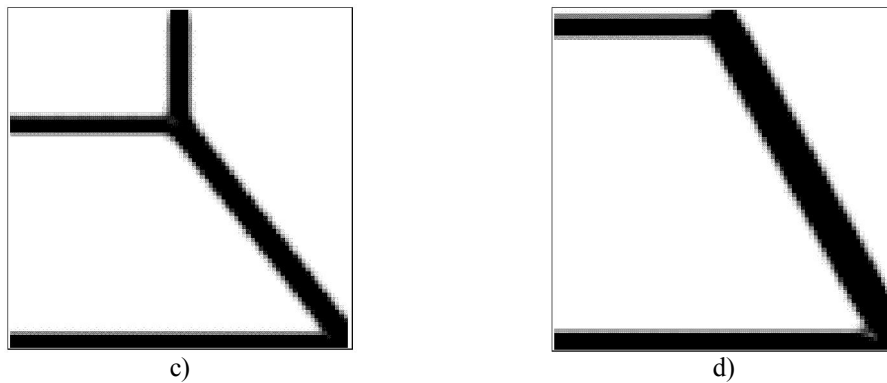


Figura 3-18: Modificações nos resultados da OT com indução devido à variação na fração de volume adotada [a) 10%, b) 12%, c) 15% e d) 20%].

3.4.1.2

Viga parede com carregamento vertical na parte inferior – VP2

Neste exemplo o domínio de projeto considerado para a viga parede VP2 foi modificado de forma que as duas cargas concentradas atuantes no meio do vão foram deslocadas para a parte inferior da viga parede, conforme mostrado na Figura 3-19. O domínio de projeto é discretizado por uma malha de elementos finitos quadriláteros com quatro nós em um estado plano de tensões, cujo número de elementos foi de 6400 (80x80). Os apoios simples foram mantidos nas extremidades e cargas concentradas P de 1 KN são aplicadas. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson são definidos como $300 \frac{kN}{cm^2}$ e 0.3 respectivamente.

Novamente foi primeiramente obtido o modelo através da otimização topológica sem o processo de indução, sendo o resultado mostrado na Figura 3.20. O modelo obtido é compatível com os modelos considerados em Liang (2000). Os parâmetros fixos considerados no processo de otimização sem indução foram $nelx = 80$ e $nely = 80$, que são os números de elementos nas direções horizontal e vertical, fração do volume inicial a ser obtida adotada foi de 8%, o fator de penalidade igual a 3 e o raio de influência para o filtro igual a 2.

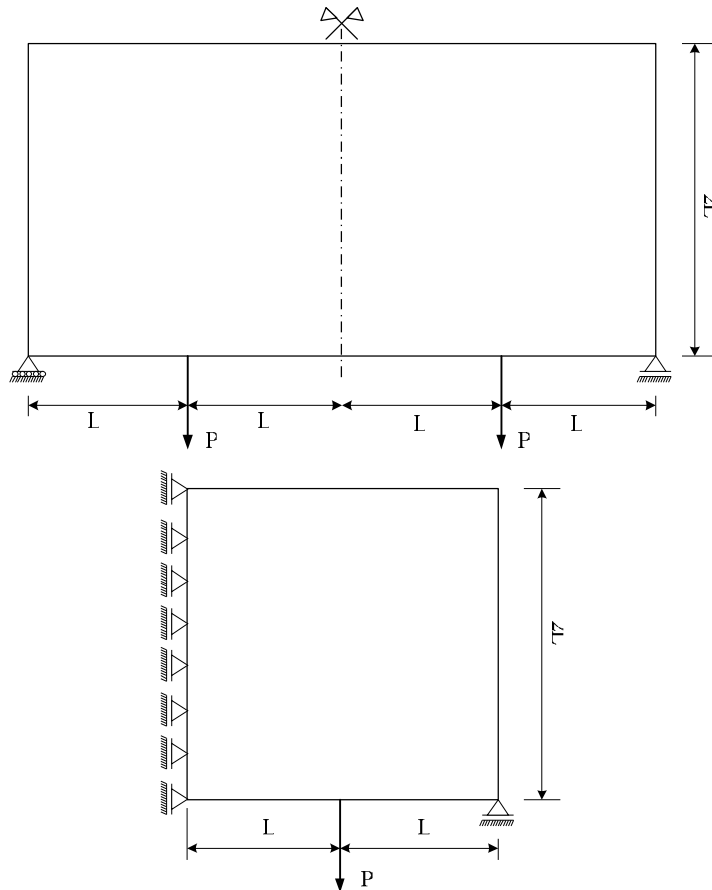


Figura 3-19: Viga parede VP2 com carregamento na parte inferior

Figura 3-20: Viga parede VP2 com carregamento na parte inferior

Em seguida um novo processo de otimização topológica foi feito com acréscimo do processo de indução. Um elemento indutor horizontal foi colocado entre as duas cargas P que atuam na estrutura real. Depois o elemento indutor foi inclinado a 45° graus encaminhando a carga até o apoio. A função deste elemento indutor é simular uma biela de compressão. A Figura 3.22 mostra a viga VP2 com

simetria e elementos indutores. O resultado do modelo induzido pode ser visto na Fig. 3.22.

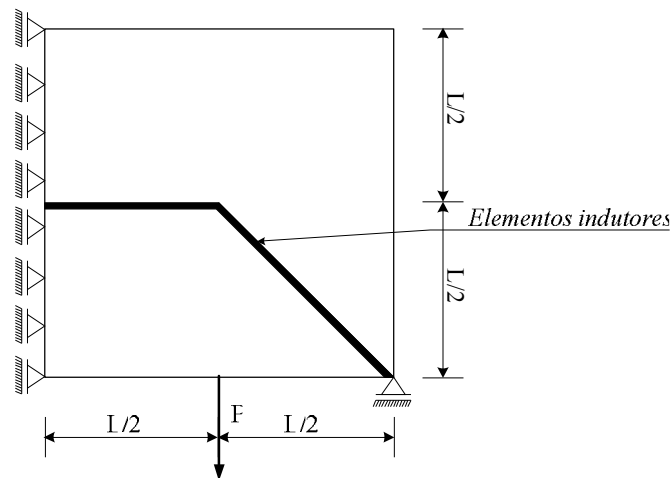


Figura 3-21: Viga parede VP2 com simetria e elementos indutores

Fica demonstrado assim que os resultados obtidos através da otimização topológica com processos induzidos leva a modelos diferentes daqueles obtidos via processos sem indução. Isso leva a uma vantagem muito grande do ponto de vista do engenheiro estrutural que pode utilizar o processo de indução para gerar um encaminhamento de cargas mais adequado ao seu critério pessoal quando da concepção do modelo de bielas e tirantes a ser utilizado.

Figura 3-22: Resultado obtido da OT com processo induzido

3.5 Envoltória Topológica

Um problema existente na aplicação de topologias para modelos de bielas e tirantes é a existência de vários casos de carregamentos e combinações entre eles. Um exemplo é o que envolve cargas acidentais independentes, do tipo vento e carga móvel de uma ponte, que podem ter intensidades relativas diferentes. Sendo assim, cada par de valores relativos, levaria a uma nova topologia. Este trabalho apresenta uma metodologia para geração de um único modelo topológico que satisfaça as restrições de todos os possíveis casos de carga. Esse problema pode ser formulado como um problema de otimização multiobjetivo cuja obtenção da topologia ótima deve passar pela geração e consideração de uma série de modelos topológicos ótimos diferenciados. Denominou-se a esse modelo final de envoltória topológica.

3.5.1 Otimização multiobjetivo

O projeto ótimo aplicado a problemas reais muitas vezes envolve várias metas, na forma de funções objetivo, a serem aprimoradas e várias restrições a serem satisfeitas. No entanto, os algoritmos usualmente utilizados na literatura sobre otimização são capazes de resolver apenas problemas que possuam somente uma função objetivo. Problemas de otimização que resolvem simultaneamente várias funções objetivo são denominados como problemas de otimização multiobjetivo (Arora, 2006).

A estratégia mais usual nos problemas de otimização multiobjetivo é o conceito de Pareto, que é descrito a seguir. No presente trabalho apenas a formulação através do conceito de Pareto será utilizada na obtenção das topologias ótimas.

3.5.1.1 Definição do problema

Um problema multiobjetivo (*Multi-Objective Problems* - MOP) pode ser expresso na forma:

$$\min_x F(x) = [f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_{nobj}(x)], nobj \geq 2 \quad (3.60)$$

Sujeito as seguintes restrições:

$$h_k(x) = 0 \quad k = 1, \dots, ne \quad (3.61)$$

$$g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, ni \quad (3.62)$$

$$x_{lj} \leq x_j \leq x_{uj} \quad j = 1, \dots, npv \quad (3.63)$$

onde:

x → Vetor das variáveis de projeto;

$F(x)$ → Vetor das nobj funções objetivos a serem minimizadas;

$h_k(x)$ → Função restrição de igualdade;

$g_i(x)$ → Função restrição de desigualdade;

ne → Número de funções de igualdade;

ni → Número de funções de desigualdade;

npv → Número de variáveis de projeto;

\mathbb{R}^{npv} → Espaço das variáveis de projeto;

3.5.1.2 Conceito de Ótimo de Pareto

Nos problemas de otimização multiobjetivo encontrar um x^* que minimize várias funções objetivo simultaneamente é uma tarefa extremamente difícil. Uma forma de determinar uma solução que satisfaça em parte as equações presentes na otimização multiobjetivo está contida na definição de Otimalidade de Pareto segundo Arora (2006).

Pontos de Pareto são pontos x^P tais que não exista nenhum ponto x o qual:

$$f_k(x) \leq f_k(x^P) \quad \text{para } k = 1, \dots, n \quad (3.64)$$

$$f_k(x) < f_k(x^P) \quad \text{para a menos uma função objetivo.} \quad (3.65)$$

Os pontos de Pareto apresentam a propriedade de que quando se movem na direção decrescente de uma das funções, pelo menos uma das outras funções restantes tem seu valor aumentado. Na Figura 3.23 podemos perceber isso, onde o ponto ótimo de Pareto é qualquer ponto no intervalo $x_1 \leq x \leq x_2$. Também, devido às restrições, pode estar localizado ao longo do contorno da região viável.

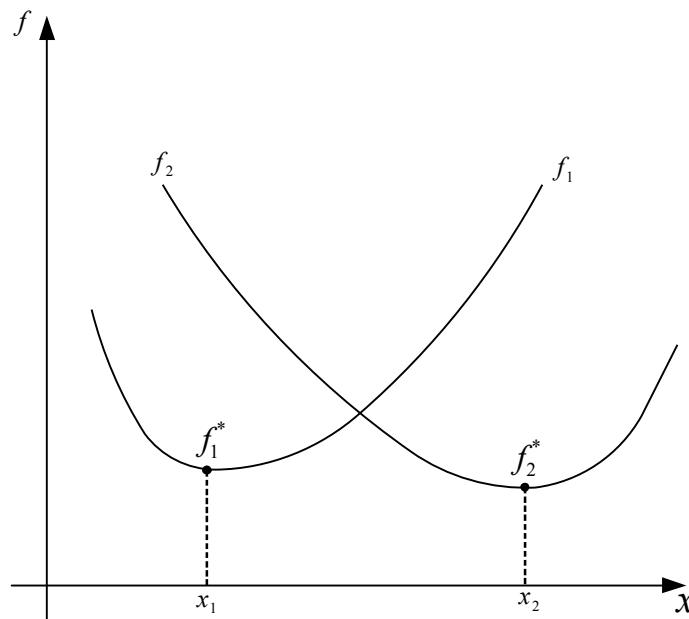


Figura 3-23: Problema de otimização com uma variável e duas funções objetivo

Em problemas de otimização multiobjetivo é muito importante formular o problema no espaço das funções objetivo. Isso pode ser feito usando-se um sistema de equações geradas pelas funções objetivo e pelo conjunto das restrições ativas. Para cada projeto viável, haverá correspondentes valores das funções objetivo que definirão o espaço viável das funções objetivo. Sobre o seu contorno se localizam os pontos ótimos de Pareto. Na Figura 3.24, um problema com duas variáveis de projeto e duas funções objetivo é mostrado. Em ambas as figuras, a linha tracejada representa os pontos ótimos de Pareto.

O interesse do projetista em problemas multiobjetivo é encontrar um vetor de variáveis de projeto x^* tal que as equações (3.64) e (3.65) sejam satisfeitas. Normalmente, pode não existir tal x^* devido ao aspecto de conflito comum entre as funções objetivo. Usando o conceito de Pareto, o projetista tem de encontrar

tantos pontos quanto possíveis. A partir desses pontos, será escolhido o projeto o qual irá satisfazer, mais adequadamente, cada função objetivo.

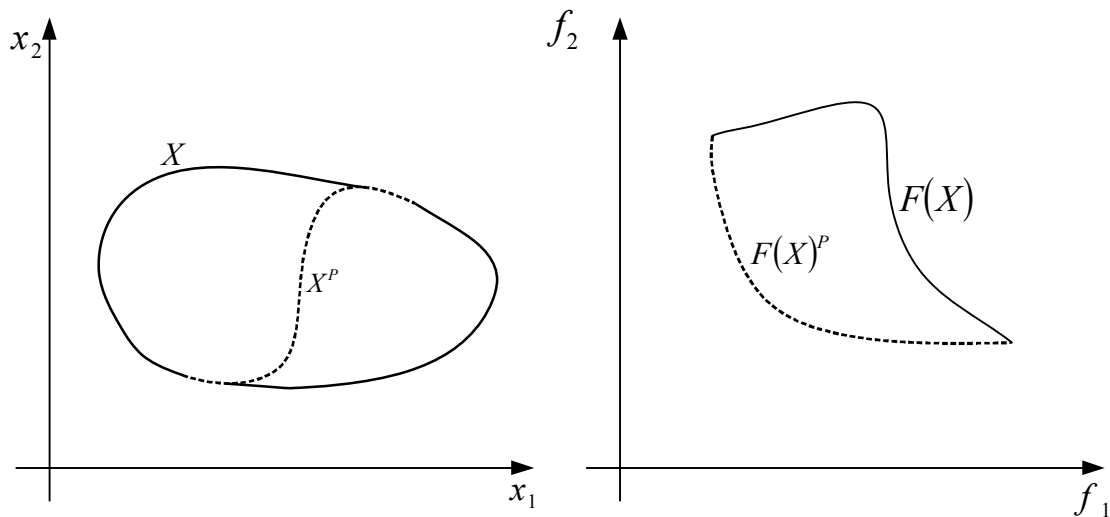


Figura 3-24: Região viável e pontos de Pareto no espaço das variáveis de projeto e no espaço das funções objetivo

3.5.1.3 Métodos de Geração de Pontos de Pareto

Neste trabalho apenas uma técnica para geração dos pontos de Pareto será aplicada. Essa técnica foi desenvolvida diretamente no algoritmo de otimização SIMP via geração contínua de pontos de projeto ótimos (par de valores relativos) relativos a uma combinação linear dos carregamentos. Esse método é conhecido como método dos coeficientes de ponderação (Ibañez, 1990), que é descrito a seguir.

No método dos coeficientes de ponderação um vetor λ , relativo aos coeficientes de ponderação, é definido de forma a modificar a função objetivo mediante o produto:

$$F = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k \quad (3.66)$$

onde os coeficientes α_k do vetor λ são convenientemente normalizados de forma que cumpram:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1, 0 \leq \alpha_k \leq 1 \quad (3.67)$$

e f_k é a função objetiva k no projeto inicial x_0 .

A função F da equação (3.66) é otimizada nesse método. Variando os coeficientes α_k , uma série de topologias aparecerá correspondente aos mínimos de Pareto. Esse método apresenta inconveniente quando o conjunto é não convexo, sendo esse o caso quando não é possível a obtenção de todos os valores de mínimo mediante a combinação linear da equação (3.66) conforme mostrado na Figura 3.24. A escolha dos valores dos coeficientes é muito importante uma vez que é necessário identificar completamente a geometria do conjunto de soluções. Problemas na obtenção dos pontos de Pareto através da utilização do método poderão surgir quando o contorno da região viável no espaço das funções objetivo for não convexo, como mostra a Figura 3.25. Neste caso, não existirá nenhum α_k capaz de fornecer uma solução que esteja na parte não convexa. Outros métodos de geração de pontos de Pareto podem superar esse problema (Ibañez, 1990).

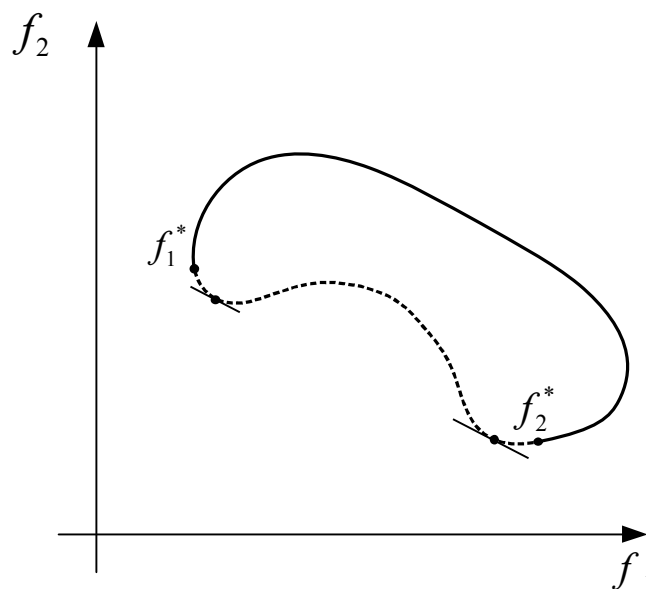


Figura 3-25: Região viável não-convexa no espaço das funções objetivo

3.5.1.4 Exemplo de aplicação

De modo a exemplificar a metodologia proposta um exemplo foi escolhido. São exemplos de estruturas planas com carregamentos aplicados nos nós e condições de apoio pré-definidas. Os carregamentos existentes nos exemplos sofreram uma variação linear nos valores sendo que para cada um dos pares de valores uma solução ótima para topologia foi obtida. Os parâmetros de cada exemplo relativos a refinamento da malha, fração do volume de material, raio de sensibilidade são descritos a seguir para cada caso específico. Para cada um dos exemplos uma envoltória de topologias é obtida com base nos resultados parciais. O modelo de bielas e tirantes então pode ser concebido levando em consideração todos os casos existentes de carregamentos. Uma vez que uma superfície de pontos do tipo Pareto foi construída, denominou-se a região geometricamente viável, obtida por todos os modelos de topologias considerados de envoltória topológica de Pareto.

No caso apresentado a seguir apenas dois carregamentos diferentes foram considerados. Isso simplifica consideravelmente o problema, pois a necessidade de outros carregamentos levaria a uma geração de pontos de Pareto mais sofisticada. No entanto, a metodologia proposta é bastante geral e pode ser utilizada de modo bastante eficaz na geração de modelo de bielas e tirantes.

3.5.1.4.1 Consolo curto com furo no centro

O exemplo considerado é uma estrutura de consolo curto com um buraco na sua região central e dois carregamentos atuantes P1 e P2. A carga P1 na parte superior do consolo no sentido vertical e a carga P2 na parte inferior no sentido horizontal conforme mostra a Figura 3.26. Um furo com diâmetro igual a $L/4$ foi considerado de forma centralizada na estrutura. Um engastamento foi considerado no lado esquerdo do consolo de modo a estabilizar a estrutura ao carregamento aplicado.

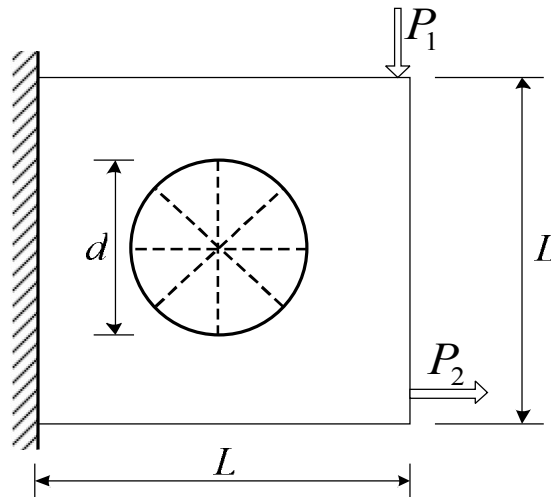


Figura 3-26: Geometria, cargas e condições de contorno do modelo.

Uma fração igual a 25% do volume inicial foi adotada conjuntamente com um raio de sensibilidade igual a 2. O parâmetro de penalização p foi tomado igual a 3. A geometria do consolo foi definida por uma malha com 50×50 elementos. Foram tomados também um módulo de elasticidade do material igual a 200 GPa e um coeficiente de Poisson igual a 0.15. Para o processo de otimização dos modelos foram considerados elementos de treliça conforme proposto por Kwak e Noh (2006) e como caso de carregamento a consideração de múltiplos carregamentos atuantes conforme mostrada por Bendsøe e Sigmund (2004). As cargas P_1 e P_2 valem 200 KN.

A Figura 3.27 mostra as topologias obtidas para cada par de carregamentos entre P_1 e P_2 (superfície de Pareto). Cada um dos modelos topológicos obtidos representa um fluxo de forças que transfere o carregamento até o apoio. A influência da intensidade de cada uma das forças pode ser observada na mudança da topologia do modelo. O fator α representa o coeficiente da combinação linear entre cargas. Assim, as cargas, em cada caso são $(1 - \alpha)P_1$ e αP_2 . Ao centro a envoltória topológica de Pareto para a estrutura do consolo é mostrada. Fica claro ser impossível cumprir com um único modelo topológico todas as possíveis combinações de carga.

Uma vez obtida a envoltória topológica de Pareto é possível então propor um modelo generalizado que seja capaz de cumprir um encaminhamento ótimo

independentemente da combinação de carga entre P_1 e P_2 . Na Figura 3.28 é possível ver como a concepção do modelo topológico final é feita. A envoltória topológica de Pareto corresponde, na verdade, a uma região viável otimizada.

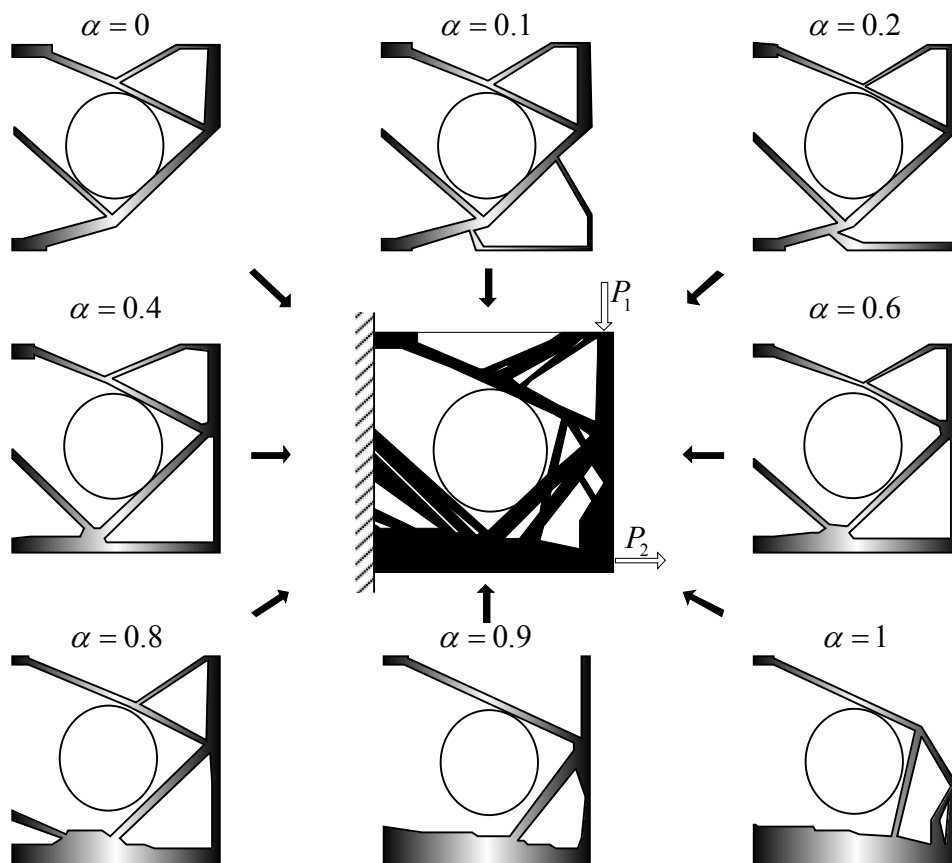


Figura 3-27: Topologias geradas pelos pontos de Pareto do modelo

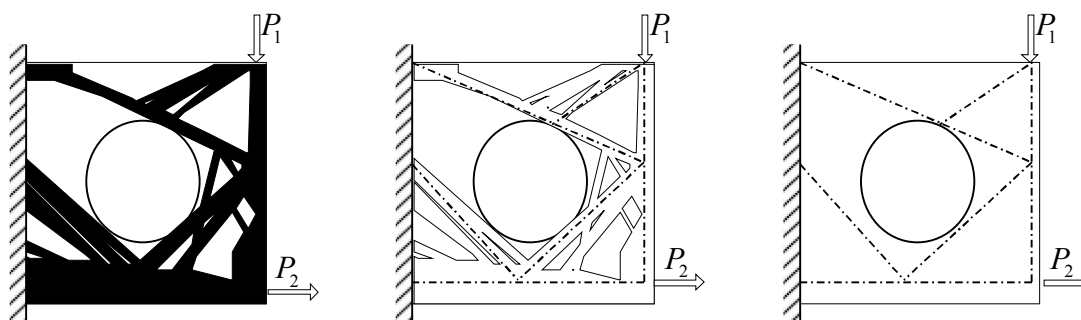


Figura 3-28: Envoltória topológica de Pareto e modelo de bielas e tirantes do modelo.

3.6 Considerações Finais

A geração automática de topologias tem sido nos últimos anos uma das áreas de intensa atividade de pesquisa em várias partes do mundo. Apesar disso, existem ainda vários pontos em aberto tanto na geração numérica das topologias, algoritmos a serem utilizados, modelos com materiais diferentes, como também na adequação dos modelos obtidos, principalmente aos que se referem ao modelo de bielas e tirantes, a prática existente do projeto estrutural.

Uma questão que deve ser considerada é que, na realidade, sendo o modelo de bielas e tirantes uma aproximação do modelo real, não há apenas um único modelo que se adeque satisfatoriamente aos carregamentos de projeto. Do ponto de vista do projeto estrutural isso é uma vantagem, pois, a existência de vários modelos que atendam satisfatoriamente aos quesitos de equilíbrio solicitados pelo teorema do limite inferior da plasticidade possibilita um leque maior de oportunidades à disposição do projetista estrutural que precisa não só satisfazer quesitos de resistência, estabilidade, deformações e vibrações, mas também de custos e de tecnologia construtiva. Em alguns casos, não muito raros na prática, os itens referentes aos custos e tecnologia construtiva da estrutura podem ser os principais responsáveis pela escolha final do projetista. Nesse contexto, então, a geração automática de não apenas um, mas sim vários modelos e um critério que possibilite uma comparação do desempenho de cada um dos modelos obtidos se mostra bastante interessante e adequada. Assim, as duas técnicas propostas anteriormente nesse trabalho de pesquisa, relativa à aplicação dos elementos indutores e da envoltória de topologias, visam não apenas atender aos quesitos de desempenho relativos aos materiais aplicados, mas também, permitir ao projetista estrutural um maior leque de possibilidades a serem utilizadas.

Outra questão refere-se à aplicabilidade prática dos modelos topológicos apresentados na literatura corrente sobre geração automática de modelos de bielas e tirantes. Em muitos casos, há uma excessiva preocupação na obtenção de uma topologia ótima a ser utilizada pelo modelo de bielas e tirantes. Além dos motivos expostos anteriormente, uma das considerações construtivas principais para a aplicabilidade dos modelos de bielas e tirantes às estruturas de concreto armado é

a presença de ângulos compatíveis que sejam razoáveis do ponto de vista da tecnologia construtiva como a presença de armaduras retas em substituição das armaduras inclinadas. Sem preocupações dessa natureza, os modelos topológicos obtidos apesar de apresentarem numericamente características de modelos ótimos, serão apenas interessantes do ponto de vista teórico, sem nenhuma aplicabilidade prática.

Sendo então a multiplicidade de soluções uma característica inerente ao método das bielas e tirantes, a obtenção de um critério de desempenho que avalie as potencialidades de cada modelo parece ser uma opção coerente. Na literatura já existem critérios que procuram avaliar o desempenho dos modelos com base em critérios elásticos de energia de deformação e energia complementar de deformação conforme mostrado nos trabalhos de Schlaich et al (1987), Ali e White (2001) e Biondini et al (1999). Entretanto, uma vez que o campo de deformações da estrutura de concreto armado difere totalmente do modelo de bielas e tirantes considerado, critérios dessa natureza parecem não ter uma base muito científica. No capítulo 4 um critério com base em análise de confiabilidade e análise limite será apresentado. Uma vez que a concepção do método das bielas e tirantes baseia-se em conceitos de plasticidade, critérios baseados no método de equilíbrio parecem ser bem mais correntes do que os elásticos para avaliação de desempenho dos considerados.

4

VERIFICAÇÃO DE SEGURANÇA ESTRUTURAL VIA CONFIABILIDADE

Neste capítulo, inicialmente, é feita uma classificação dos critérios de segurança adotados no projeto de estruturas. Uma descrição da formulação referente à análise de confiabilidade no contexto geral do trabalho é mostrada e uma breve revisão bibliográfica da aplicação de análise de confiabilidade em estruturas de concreto armado é descrita.

Obter a probabilidade de falha de sistemas estruturais levando-se em consideração as incertezas é o objetivo principal dos métodos de análise de confiabilidade. Pode-se entender como falha o não atendimento da estrutura aos objetivos para os quais ela foi concebida. Uma vez que um cenário de falha ocorre, prejuízos tanto da ordem material como de segurança podem acontecer. Uma vez que sempre existe o risco de falha, um controle para mantê-lo dentro de um nível aceitável, de acordo com critérios de segurança e economia, é imprescindível.

É possível classificar os métodos de projeto de estruturas em níveis de segurança e economia, de acordo com metodologia adotada, segundo VAZ (2011c):

Nível 0 – Método das Tensões Admissíveis: este método consiste em usar apenas os valores médios das resistências como dado estatístico. Não envolve a determinação da probabilidade de falha.

Nível 1 – Método Semi-Probabilístico: neste método são utilizados os valores médios e os desvios padrão para definição dos valores característicos das variáveis aleatórias e coeficientes parciais de segurança para obter valores de cálculo a partir dos valores característicos. O nível de segurança é maior do que no método de Nível 0, mas também não permite a determinação da probabilidade de falha.

Nível 2 – Método Baseado em Confiabilidade: neste método são utilizados dados estatísticos completos das variáveis aleatórias e controla a probabilidade de falha.

Nível 3 – Projeto Ótimo Semi-Probabilístico: O nível de segurança é o mesmo do método de Nível 1, mas a economia no projeto é maior.

Nível 4 – Projeto Ótimo Baseado em Confiabilidade: Combina o controle da probabilidade de falha do Nível 2 com a economia do método de Nível 3.

Nível 5 – Projeto Ótimo Baseado em Risco: Fornece o projeto de risco total mínimo. O risco total é definido como o custo da construção + o custo de operação + o custo associado a cada modo de falha.

Uma metodologia de projeto baseada em confiabilidade é utilizada nesse trabalho. Sendo assim, toda variável aleatória envolvida no problema deverá ser representada por uma distribuição de probabilidade correspondente, seu valor médio e coeficiente de variação. No intuito de descrever corretamente os parâmetros envolvidos, serão utilizadas as orientações e recomendações disponibilizadas pelo JCSS (*Joint Committee on Structural Safety*) para execução de códigos cuja natureza seja probabilística (JCSS, 2001).

No decorrer do capítulo uma avaliação da probabilidade de falha de um componente e posteriormente do sistema global representante do comportamento estrutural é apresentada, com base na consideração das variáveis aleatórias e determinísticas do projeto e na definição das relevantes funções de falha do problema. A associação de um índice de confiabilidade β com uma probabilidade de falha é feita.

Os principais métodos disponíveis para a análise de confiabilidade são o método FORM (*First Order Reliability Method*) e o método de simulação de Monte Carlo. Esses métodos são descritos detalhadamente no presente capítulo. Os principais ganhos com a aplicação dessas formulações serão explicitados.

Uma metodologia de calibração dos coeficientes parciais de segurança de um sistema estrutural específico será descrita como base numa técnica de superfície de resposta via polinômios Lagrangeanos. Também é proposta uma

metodologia para obtenção dos relevantes modos de falha, dúctil e frágil, para uma estrutura de concreto utilizando o modelo de bielas e tirantes.

Uma metodologia para obtenção de um índice de confiabilidade global de uma estrutura de concreto armado utilizando a análise de confiabilidade conjuntamente com uma análise limite é proposta e os principais pontos para sua implementação mostrados.

Numa breve revisão bibliográfica sobre confiabilidade, entre vários trabalhos pioneiros vale citar os apresentados por Freudenthal (1947), Ang e Tang(1975) e Shinozuka (1983). No entanto, o desenvolvimento conceitual que possibilitou a implementação das formulações dos métodos FOSM, FORM, SORM e Monte Carlo, veio depois em trabalhos apresentados por Hasofer e Lind (1974), Melchers (1981,2002), Elligwood et al (1995), Der Kiureghian e Liu(1986), Rackwitk e Fiessler (1978) e Liu e Der Kiureghian (1988).

Considerando os trabalhos vinculados à aplicação da análise de confiabilidade a problemas de engenharia com o acoplamento ao método dos elementos finitos, vale citar: Rajashekhar e Ellingwood (1993), Frangopol et al (1996), Wang et al (1997), Zhang e Elligwood (1998), Yang e Lee (1999) e Mahadevan e Raghathamachar (2000).

No Brasil, esse tema ganhou bastante importância no cenário da engenharia estrutural sendo difundido através dos diversos institutos de pesquisa situados nos diversos estados brasileiros.

Em São Paulo, principalmente na Universidade de São Paulo, EESC, inúmeros trabalhos em confiabilidade aplicada a estruturas foram publicados. O grupo iniciado pelo professor Wilson Venturinni e continuado pelo Professor André Beck tem desenvolvido um trabalho bastante intenso na área. Entre outros, não menos importantes, vale citar os trabalhos apresentados por Castro (1997), Neves (2004), Nogueira (2005), Lindquist (2006), Verzenhassi (2008), Souza Junior (2008), Leonel (2009) e Gomes (2010).

Em Minas Gerais, na Universidade Federal de Minas Gerais-UFMG, o grupo encabeçado pela Professora Sofia Diniz tem apresentado trabalhos em diversas áreas, principalmente de estruturas de concreto armado e de cargas de

vento. É importante citar os trabalhos de Machado (2001), Prado (2001), Nogueira (2006), Azevedo (2007), Pimenta (2008) e Azevedo (2011). Também em Minas Gerais na Universidade Federal de Ouro Preto-UFOP, os trabalhos orientados pelo Professor Marcílio Freitas devem ser citados. Entre eles temos os apresentados por Barbosa (2004), Castanheira (2004), Brandão (2007) e Amaral (2011).

Na Universidade Federal do Rio Grande do Sul- UFRGS, os trabalhos inicialmente apresentados por Rocha (1989), Araujo e Awruch (1994), Gomes (1999),(1998), (1997) e Real (2000) sobre vigas de concreto armado valem ser citados.

No Rio de Janeiro, na Coordenação dos Programas de Pós-Graduação em Engenharia-COPPE/UFRJ, alguns de trabalhos tem sido desenvolvidos por Fairbairn et al (1999),(2000) na área de concreto. Um grupo bastante forte na área de confiabilidade aplicada a estruturas *offshore* e encabeçado pelos Professores Edson Pratis e Luis Sagrilo tem apresentado uma produção intensa. Vale citar os seguintes trabalhos: Sagrilo (1989), Sagrilo (1994), Oliveira (1997), Cícilia (2004), Bazán (2005), Ávila (2005), Loureiro Filho (2008), Bazán (2009), Paiva Júnior (2010) e Fernandes (2011).

Na Pontifícia Católica Universidade do Rio de Janeiro – PUC-Rio no departamento de Engenharia Civil na área de Estruturas, o tema tem sido explorado tanto para aplicação em estruturas de treliça não lineares e pórtico de concreto como para aplicação em reforços estruturais via compósitos de fibra de carbono como mostram os trabalhos de Müller (2003), Lopes (2007), Pereira (2007) e Almeida (2008).

4.1 Segurança Estrutural

O projeto de uma estrutura envolve um conjunto de etapas essenciais e anteriores ao processo construtivo. Isso inicia com a concepção estrutural e vai até o detalhamento e arranjo final dos elementos, passando pelas considerações de durabilidade, as quais foram introduzidas recentemente na NBR 6118 (2007). O objetivo final de todo esse processo é que a estrutura desempenhe

satisfatoriamente todas as funções para quais foi concebida, com o máximo de economia, eficiência e durabilidade possível.

O conceito de segurança estrutural está vinculado à capacidade de uma determinada estrutura suportar as diversas ações a ela imposta, durante sua vida útil, satisfazendo também às condições funcionais destinadas à sua construção. É possível observar uma estreita relação entre a confiabilidade e a segurança de uma estrutura.

Pode-se então definir a segurança de uma estrutura com base na probabilidade de ocorrência de um dos estados de falha durante sua vida útil. Sendo assim, uma probabilidade de falha é associada aos possíveis estados comprometedores do desempenho da estrutura como medida de segurança. Salienta-se que, ao se tratar a probabilidade de falha como indicador de segurança, o problema torna-se probabilístico.

Diversos métodos foram propostos no sentido de quantificar a segurança estrutural antes de se chegar à abordagem estatística. Uma evolução dos critérios de segurança em estruturas é apresentada por FUSCO (1976), partindo dos métodos intuitivos, até o início da abordagem do problema sob a ótica probabilística.

Regras que limitem os valores das ações, deslocamentos e deformações presentes numa estrutura representam o nível de segurança associados a ela. Limites dessa natureza existem em decorrência da evolução do conhecimento na engenharia e são modificados constantemente. O grau de incerteza presente nas variáveis pode causar imprevistos que as hipóteses determinísticas mesmo convenientemente utilizadas não são capazes de detectar.

4.2 Análise de Confiabilidade

É nesse contexto que o estudo da confiabilidade é inserido, na tentativa de prever incertezas e flutuações nas variáveis da estrutura. Seu objetivo maior é a determinação de uma probabilidade de falha num cenário generalizado. Assim, a confiabilidade pode então ser definida como a probabilidade da estrutura em desempenhar a função para a qual foi projetada durante toda sua vida útil,

medindo a suas chances de violar um estado limite por falha ou por não satisfazer a um desempenho esperado (Neves, 2004). Estatisticamente podemos definir a confiabilidade como um evento complementar da probabilidade de falha, na forma:

$$C = 1 - P_f \quad (4.1)$$

Onde P_f é a probabilidade de falha da estrutura durante sua vida útil, ou seja, a probabilidade de ocorrência de uma situação de falha nesse período e C a confiabilidade. No caso de obras civis, valores de probabilidade de falha na ordem de 10^{-7} a 10^{-3} são utilizados.

As resistências dos materiais aplicados, as ações existentes, o posicionamento das armaduras e as propriedades geométricas são fatores que contribuem decisivamente para o desempenho da estrutura. Essas são variáveis de natureza randômica e, usualmente, consideradas como variáveis de projeto. Saber qual a probabilidade de falha da estrutura considerando as realizações das variáveis aleatórias envolvidas faz parte do estudo da confiabilidade estrutural.

Considere, então, um espaço generalizado das variáveis aleatórias de um problema onde exista uma região que concentra pontos para os quais todas as exigências de projeto são atendidas. Complementarmente, existirá outra região cujas exigências de projeto não serão atendidas total ou parcialmente. Isso ocorrerá em face das incertezas inerentes às variáveis de projeto. Podemos definir intuitivamente a probabilidade de falha como a região complementar do espaço generalizado cujas exigências não são atendidas. Matematicamente, atribuem-se distribuições estatísticas convenientes para cada uma das variáveis de projeto. Essa atribuição é uma associação estatística feita de várias maneiras. Ensaio de laboratório, estudos estatísticos e observações físicas são algumas delas. Essa informação disponível tem uma influência direta na qualidade da análise a ser executada.

Seja uma realização qualquer pertencente ao espaço generalizado X . Existe então uma função $G(X)$ que medirá a resposta estrutural do sistema e determinará se a realização correspondente pertence ou não ao conjunto de pontos que

satisfazem a todos os requisitos de segurança do projeto. Essa função de comportamento, falha ou desempenho, como é conhecida, divide o espaço generalizado em três regiões: Uma região denominada de domínio de falha onde $G(X) < 0$. Todos os pontos X dentro dessa região não atendem parcial ou integralmente os requisitos de segurança, levando a estrutura a um estado limite. Outra região onde $G(X) > 0$, denominada domínio seguro. Nessa região todos os pontos satisfazem os requisitos de segurança. A fronteira entre as duas regiões contém os pontos que satisfazem à relação $G(X) = 0$. Essa região é denominada como função de estado limite. A Figura 4.1 mostra graficamente, para um caso bidimensional, os domínios explicados anteriormente.

Conforme mencionado anteriormente, distribuições estatísticas convenientes serão consideradas na representação comportamental das variáveis aleatórias de um problema estatístico. A modelagem ideal é o uso de uma função conjunta de densidade de probabilidade que possa representar todas as variáveis de projeto ao mesmo tempo e espaço. Porém, em problemas mais complexos, dificilmente a obtenção dessa função é possível.

Um processo de integração aplicado sobre o domínio de falha pode ser representado na forma:

$$P_f = \int_{\Omega_F} f_x(x) dx \quad (4.2)$$

Onde $f_x(x)$ é a função conjunta de densidade de probabilidades e Ω_F o domínio de falha caracterizado por $G(X) < 0$.

O cálculo da integral apontado pela equação (4.2) é uma das maiores dificuldades da abordagem estatística de segurança. Geralmente, não há nenhuma ou existe muito pouca informação acerca da função conjunta. O valor resultante de P_f geralmente é pequeno, fazendo com que os métodos de simulação sejam pouco eficientes. Uma alternativa são os métodos aproximados onde se obtêm um índice de confiabilidade que é um estimador adequado para P_f . Este índice está relacionado diretamente com a probabilidade de falha avaliando o nível de segurança da estrutura. Além disso, devido ao seu caráter adimensional, permite comparar níveis de segurança de sistemas totalmente diferentes.

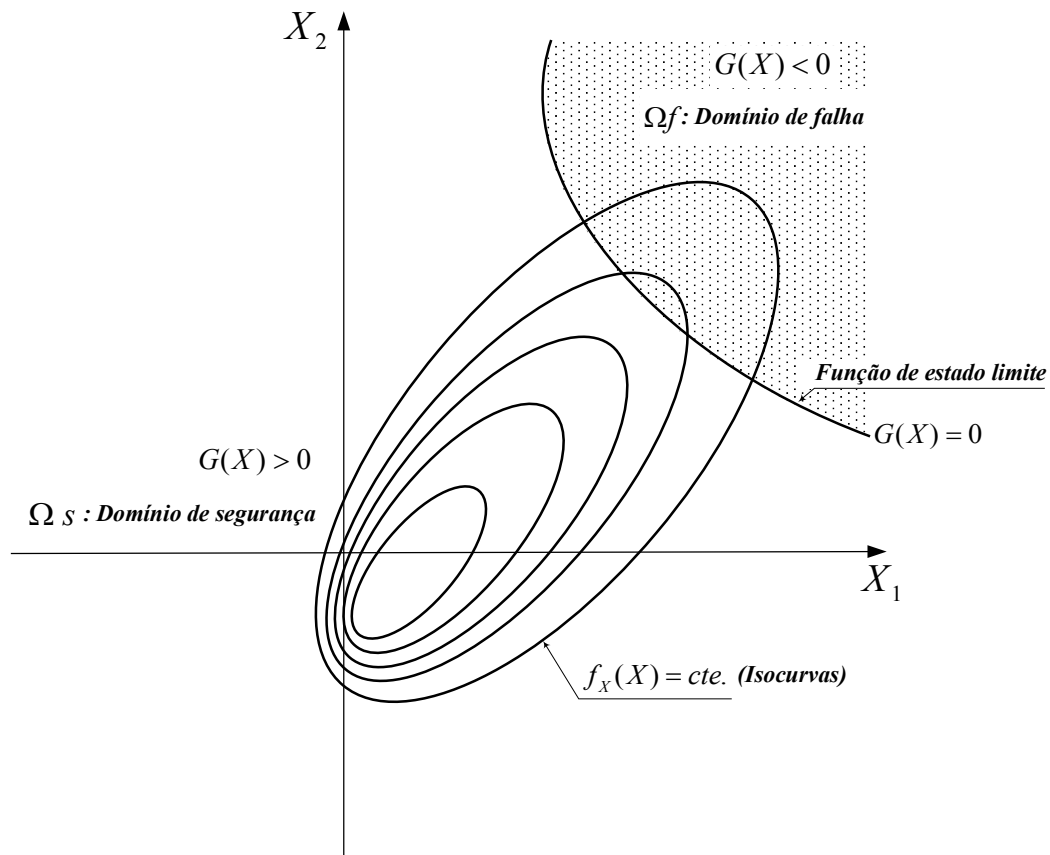


Figura 4-1: Domínios definidos pela função de estado limite

4.2.1 Consideração das incertezas

A presença da incerteza em engenharia é inevitável. Normalmente os dados existentes são incompletos ou mesmo insuficientes e invariavelmente contêm variabilidade. Mais do que isso, engenheiros e projetistas estruturais devem lidar cotidianamente com estimativas baseadas em modelos idealizados com algum grau de imperfeição relativo à realidade e que envolvem incertezas adicionais. Na prática, normalmente são identificados dois principais tipos de incertezas: (I) incertezas aleatórias que são associadas com o aspecto randômico intrínseco ao problema e que podem ser verificadas na observação dos dados obtidos e (II) incertezas epistêmicas que são associadas às imperfeições do modelo adotado com relação ao mundo real devido ao insuficiente ou imperfeito conhecimento da

realidade. Esse dois tipos de incertezas podem ser combinadas e analisadas de forma conjunta ou separadas.

No presente trabalho de pesquisa os dois tipos de incertezas serão avaliados de forma separada sendo computados conjuntamente nas respectivas funções de falha do modelo.

4.2.1.1 Incertezas Aleatórias

Muitos fenômenos e processos relativos ao interesse da engenharia contêm incertezas. Isso significa que resultados esperados são imprevisíveis (em algum grau). Problemas desse tipo são caracterizados por dados experimentais ou de campo que contêm uma significativa variabilidade representativa da incerteza natural intrínseca a esses fenômenos, isto é, as medidas observadas são diferentes em cada experimento mesmo se o experimento for conduzido ou medido em condições aparentemente idênticas. Mesmo dentro de um conjunto de valores observados ou medidos, certos valores poderão ocorrer mais frequentemente que outros. A variabilidade inerente nesse tipo de dado ou informação é aleatória por natureza. Em geral, esse tipo de formulação é considerado através de variáveis básicas que são mais relevantes ao problema. Então, equações de estado limites específicas são desenvolvidas para representar cada modo de falha da estrutura.

O cálculo do modelo para cada estado limite considerado deve conter um específico conjunto de variáveis básicas, ou seja, quantidades físicas que caracterizem ações e influências do meio ambiente, além de quantidades de materiais e geométricas. Considera-se que as variáveis básicas carreguem toda a informação necessária ao cálculo do modelo. Cada variável básica é definida pelo número de parâmetros do tipo, média, desvio padrão, tipo distribuição de probabilidade, parâmetros de correlação entre as variáveis, etc.

4.2.1.1.1 Variabilidade dos parâmetros-variáveis do problema

A qualidade dos resultados da análise de confiabilidade depende em grande parte da escolha do tipo de distribuição de probabilidade adotado para representar cada variável aleatória contida no problema estrutural a ser estudado.

Existem várias funções capazes de modelar a distribuição probabilística de uma variável aleatória. Dentre as principais estão: distribuição normal, distribuição lognormal, distribuição binomial, distribuição exponencial, distribuição Gamma, distribuição uniforme, distribuição de Weibull, distribuição Beta e distribuição de valores extremos.

Para as variáveis aleatórias mais usuais nos projetos estruturais, existem já estudos e pesquisas que indicam qual o tipo de distribuição e seus respectivos parâmetros são mais adequados. Entre as diversas bibliografias sobre o assunto, pode-se citar o JCSS (2001).

O JCSS (*Joint Committee on Structural Safety*) é um órgão criado em 1971, por um número grande de associações profissionais internacionais, responsável pela coordenação, desenvolvimento dos fundamentos básicos e da pesquisa na área de confiabilidade estrutural e análise de risco. A ideia básica é que a aplicação da análise de confiabilidade e os princípios de segurança devem ser utilizados da mesma maneira para todos os tipos de materiais e elementos estruturais encontrados na engenharia civil e projeto de estruturas.

As informações a seguir foram retiradas do JCSS (2001) para auxiliar na escolha do modelo probabilístico a ser utilizado.

Propriedades dos materiais

- Normalmente não possuem valores negativos;
- Geralmente a distribuição lognormal poderá ser utilizada;
- O tipo de distribuição e seus parâmetros devem, geralmente, ser obtidos a partir de uma amostra grande e homogênea e a partir de possíveis informações existentes de variáveis similares (ex: para um novo aço de alta resistência, as informações sobre as propriedades de outros tipos de aço existentes devem ser consultadas).

Parâmetros geométricos

- Variáveis associadas à fabricação e construção podem ter grandes coeficientes de variação (ex: imperfeições geométricas, desaprumos, etc.);

- Estas variações geométricas podem ser adequadamente representadas por uma distribuição normal ou lognormal.

Carregamentos atuantes

- As cargas devem ser divididas de acordo com sua variação temporal (ex: cargas permanentes, acidentais, excepcionais, entre outras);
- Em muitos casos, as cargas permanentes podem ser representadas por uma distribuição normal;
- Para cargas variáveis, geralmente a variável aleatória mais importante é o valor extremo que ocorre durante determinado período de tempo. A distribuição de probabilidade do valor de extremo de uma variável pode ser aproximada por uma distribuição assintótica de valores extremos (Gumbel, Weibull, entre outros).

A Tabela 4.1 apresenta as distribuições de probabilidade a serem utilizadas nos exemplos desta tese, conforme será visto no capítulo de exemplos. Outras informações sobre diversos tipos de distribuições podem ser encontradas em JCSS (2001) e HART (1982).

Tabela 4-1: Modelos probabilísticos para estruturas de concreto armado via STM

Variável básica	Símbolo	Distribuição	Dimensão
Resistência característica à compressão do concreto	f_c	Lognormal	MPa
Resistência à tração do aço	f_y	Lognormal	MPa
Vão	L	Determinística	m
Área de armadura	A_s	Determinística	m^2
Cobrimento	c	Normal	m
Carregamento permanente	p_g	Normal	kN
Carregamento acidental	p_q	Gumbel	kN
Fator de modelagem das resistências	ϕ_R	lognormal	Adimensional
Fator de modelagem das ações	ϕ_S	lognormal	Adimensional
Largura das bielas	w_b	Normal	m
Largura dos apoios	w_a	Normal	m
Largura de ancoragem	w_t	Normal	m

No caso dos modelos de bielas e tirantes considerados neste trabalho de pesquisa os parâmetros geométricos relativos à largura das bielas e largura dos

apoios foram considerados variáveis randômicas do problema. Isso é justificável uma vez que não existe literatura sobre o assunto, um consenso sobre esses valores. Uma formulação que permita uma flutuação randômica desses valores parece bem apropriada, sendo seus limites baseados nas recomendações normativas existentes na literatura.

4.2.1.2 Incertezas Epistêmicas

Na engenharia, são muito utilizados, modelos idealizados do mundo real em nossas análises e estimativas, com propósito de tomar decisões ou planejamentos e desenvolvimento de critérios para projeto em sistemas estruturais. Esses modelos idealizados, que podem ser modelos matemáticos, de simulações ou mesmo de laboratório, são representações imperfeitas do mundo real. Conseqüentemente, os resultados da análise, estimativa ou predição obtidos com base nesses modelos são imprecisos, com algum grau de erro, logo contém incertezas. Esses tipos de incertezas são baseados no conhecimento e são denominadas de incertezas do tipo epistêmicas. Frequentemente, a incerteza epistêmica pode ser mais significativa do que a incerteza aleatória ou randômica. Uma vez feita a predição ou estimativa com um modelo idealizado, o objetivo é invariavelmente obter uma quantidade específica de interesse, que pode ser um valor médio ou valor mediano de uma variável. Sendo assim, na consideração da incerteza epistêmica é razoável na prática limitar nossas considerações de acurácia aos valores centrais estimados ou calculados, como valores médios ou medianos.

$$T = G(X_1, X_2, \dots, X_i) \quad (4.3)$$

Onde T é o resultado do modelo, G é a função representativa do modelo e X_i as variáveis básicas do problema. De fato, a função representativa do modelo G normalmente será inexata. Então, a diferença entre a estimativa do modelo e a realidade do experimento pode ser escrita como se segue:

$$T = G'(X_1, \dots, X_i, \theta_1, \dots, \theta_j) \quad (4.4)$$

Os parâmetros denominados θ_j são referidos aos parâmetros que contêm as incertezas de modelo e das variáveis randômicas. Suas propriedades estatísticas são derivadas de experimentos ou observações. A média desses parâmetros deverá

ser determinada com cálculo do modelo calibrado pelas estimativas obtidas via resultados experimentais (Ang e Tang, 1975).

4.2.1.2.1 Erros do modelo

De modo a considerar os erros de modelo existentes na aplicação dos modelos de bielas e tirantes a seguinte metodologia é proposta. Dois passos são necessários:

No primeiro, as condições de laboratório são simuladas de forma a comparar os resultados com os resultados obtidos pelos pesquisadores anteriormente. Os resultados referentes aos modos de falha são então verificados e o modelo numérico estocástico calibrado. Isso significa que apenas as cargas permanentes foram consideradas sem nenhuma correção relativa ao seu valor médio, uma vez que o próprio valor representa sua média. Isso é possível uma vez que as condições de carregamento são controladas dentro do laboratório. Da mesma forma, as propriedades do concreto e do aço são utilizadas como valores médios uma vez que representam valores médios obtidos em testes de laboratório.

Num segundo passo, as condições reais de projeto são aplicadas. Isso é feito via consideração de que a metade do carregamento é representada pelo carregamento permanente (distribuição normal) e a outra metade pelo carregamento acidental (distribuição Gumbel). Nesse caso, os valores característicos adotados pelas resistências e pelos carregamentos têm que ser corrigidos e seus correspondentes valores médios obtidos para cada tipo de distribuição. Nesse passo as orientações presentes no código probabilístico JCSS (2001) foram adotadas. Para isso, foram consideradas as incertezas de modelo apresentadas na Tabela 4.2.

O método FORM foi utilizado inicialmente como uma primeira aproximação na determinação da probabilidade de falha. Em problema dessa natureza, quando um sistema em série ocorre e um número reduzido de graus de liberdade está envolvido, o método de simulação de Monte Carlo é a melhor escolha (precisão).

4.2.1.2.2

Calibração do modelo via resultados experimentais

A Tabela 4.2 mostra os parâmetros referentes às incertezas epistêmicas consideradas em viga paredes de concreto armado neste trabalho. A metodologia proposta usa os valores de média e coeficiente de variação, obtidos por diversos pesquisadores, e mostrada por Park e Kuchma (2007) no cálculo da capacidade portante de viga paredes de 214 vigas paredes de concreto armado utilizando as orientações do código normativo americano ACI 318-05 (2005).

Tabela 4-2: Incertezas epistêmicas ou de modelo

Variável Randômica	Distribuição	Média (KN)	δ
Incerteza da resistência	Lognormal	1.32*	0.18*
Incerteza do Carregamento	Lognormal	1	0.05

*Obtido do modelo versus resultados experimentais sem coeficientes

Para os exemplos apresentados no capítulo 5 os fatores de modelagem considerados foram adotados com base na Tabela 4.2. O procedimento correto seria utilizar alguma base de dados experimentais já existentes na literatura ou montar um esquema de ensaios que provesse esses dados. Não havendo nenhuma base disponível, optou-se então pela extrapolação dos dados existentes das vigas paredes para as demais estruturas reconhecendo, no entanto, isso como uma limitação. A opção de montar um esquema de ensaios seria inviável devido a demanda de tempo necessária.

4.2.2

Funções de falha

Para os modelos topológicos a serem considerados na análise de confiabilidade deste trabalho, as funções de falha ou funções de estado deverão ser definidas em função dos tipos de falhas associadas a cada grupo de elementos do modelo. Assim, teremos uma expressão de falha para cada um dos nós, bielas e tirantes existentes no modelo. É possível, para cada elemento existir mais de um tipo de falha. É o caso comum das armaduras que deverão ser verificadas tanto com relação ao escoamento como por perda de ancoragem.

Os limites de resistência de um modelo de bielas e tirantes quando submetido aos esforços provenientes de um determinado campo de forças serão considerados satisfatórios quando atendidas as seguintes expressões simultaneamente:

A tensão limite na zona nodal em qualquer um dos nós deve atender a:

$$\sigma_{N_i} \leq \sigma_{N_i R_{lim}} \quad (4.5)$$

A tensão limite de resistência à compressão de qualquer uma das bielas de concreto deve atender a:

$$\sigma_{B_j} \leq \sigma_{B_j R_{lim}} \quad (4.6)$$

A tensão limite de resistência à tração de qualquer uma das bielas, caso exista, deve atender a:

$$\sigma_{BT_k} \leq \sigma_{BT_k R_{lim}} \quad (4.7)$$

A tensão limite de resistência à tração de qualquer uma das armaduras dos tirantes deve atender a:

$$\sigma_{T_l} \leq \sigma_{T_l R_{lim}} \quad (4.8)$$

A tensão limite para atendimento do comprimento mínimo de ancoragem das armaduras dos tirantes deve atender a:

$$\tau_{A_l} \leq \tau_{A_l R_{lim}} \quad (4.9)$$

Onde:

i - Número do nó considerado;

j - Número da biela comprimida considerada;

k - Número da biela tracionada considerada;

l - Número do tirante tracionado considerado;

σ_{N_i} - Tensão normal de maior valor atuante no nó i ;

$\sigma_{N_i R_{lim}}$ - Tensão nodal resistente efetiva no nó i – depende do f_{ck} e do tipo de nó;

σ_{B_j} - Tensão normal de compressão atuante na biela j ;

$\sigma_{B_j R_{lim}}$ - Tensão resistente efetiva na biela j – depende do f_{ck} e do tipo de biela;

σ_{BT_k} - Tensão normal de tração atuante na biela k ;

$\sigma_{BT_k R_{lim}}$ - Tensão resistente efetiva na biela k – depende do f_{ck} e do tipo de biela;

σ_{T_l} - Tensão normal de tração atuante no tirante l ;

$\sigma_{T_l R_{lim}}$ - Tensão normal resistente no tirante l – depende da área de aço e f_{yk} ;

τ_{A_l} - Tensão de cisalhamento atuante no tirante l ;

$\tau_{A_l R_{lim}}$ - Tensão de ancoragem resistente no tirante l – depende da área de aço e do comprimento;

Com base nas equações de 4.5 a 4.9, é possível então definir as expressões de falha associadas à violação de cada um dos estados limites considerando-se uma parcela referente às resistências (R) e uma parcela referente às solicitações (S) atuantes. Assim podemos definir as equações de falha na forma:

Equação de falha referente ao colapso do nó i :

$$G1_i = \phi_r \sigma_{NR_{lim}} - \sigma_{N_i} \quad (4.10)$$

Equação de falha referente ao esmagamento por compressão da biela j :

$$G2_j = (\phi_r \sigma_{B_j R_{lim}} - \sigma_{B_j}) A_{b_j} \quad (4.11)$$

Equação de falha referente ao rompimento por tração da biela k :

$$G3_k = (\phi_r \sigma_{BT_k R_{lim}} - \sigma_{BT_k}) A_{b_k} \quad (4.12)$$

Equação de falha referente ao escoamento da armadura de aço do tirante l :

$$G4_l = (\phi_r \sigma_{T_l R_{lim}} - \sigma_{T_l}) A_{s_l} \quad (4.13)$$

Equação de falha referente à perda de ancoragem por tração do tirante l :

$$G5_1 = \phi_r \tau_{A_1 R_{lim}} - \tau_{A_1} \quad (4.14)$$

Onde:

Ab_j - Área da seção transversal da biela comprimida j ;

Ab_k - Área da seção transversal da biela tracionada k ;

As_l - Área de aço do tirante l ;

ϕ_r - Fator de modelagem das resistências.

Vale salientar que os valores referentes aos esforços atuantes são oriundos do campo de forças atuantes e da topologia escolhida para representar o modelo de bielas e tirantes. As tensões resistentes efetivas, diferentemente, são determinadas com base em estudos experimentais e levam em consideração os parâmetros normativos presentes em cada código. Exemplos de parâmetros normativos são coeficientes parciais de segurança de majoração de cargas e minoração de resistências, as condições de contorno e distribuição de tensões existentes em cada região local do modelo.

4.2.3 Probabilidade de falha e índice de Confiabilidade

O caso fundamental ou denominado problema básico da confiabilidade consiste em comparar um efeito de um carregamento S com uma resistência R de um elemento estrutural genérico (Melchers, 2002). É possível utilizar essa definição para a estrutura como um todo sem perda de generalidade. R e S são variáveis aleatórias descritas pelas suas respectivas distribuições de probabilidade e outros parâmetros estatísticos como média e desvio padrão. Dessa forma, é possível descrever a probabilidade de falha dada pelo conjunto de realizações em que o efeito S supere a resistência R , na forma:

$$P_f = P(R \leq S) = P(R - S \leq 0) = P[G(R, S) \leq 0] \quad (4.15)$$

O conjunto de realizações sobre o qual a equação (4.15) é verificada constitui o denominado domínio de falha. Assim, podemos definir a probabilidade de falha como o somatório da probabilidade de todos os pontos pertencentes ao domínio de falha, que no espaço físico, resulta da integral da função de

probabilidade conjunta sobre o domínio de falha. Logo, pode-se definir a probabilidade de falha na forma:

$$P_f = P(R - S) \leq 0 = \int_{\Omega_F} f_{RS}(R, S) dR dS \quad (4.16)$$

Sendo R e S os valores correspondentes à resistência e à solicitação de uma determinada realização.

A integral apresentada pela equação (4.16) similarmente a equação (4.2), não possui uma solução analítica para a maioria dos casos práticos. Além disso, em problemas usuais de engenharia, a maioria das variáveis aleatórias é correlacionada, assim como as distribuições são complexas, fazendo com que a integração exata da probabilidade de falha se torne praticamente impossível. A solução para o problema pode então ser a adoção de métodos de simulação ou de métodos aproximados onde a probabilidade de falha é obtida através de índices de confiabilidade.

Caso as variáveis aleatórias sejam não correlacionadas é possível introduzir uma simplificação ao processo de integração. Assim, no caso fundamental, a probabilidade de falha pode ser reescrita como:

$$P_f = P(R - S) \leq 0 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^S f_R(R) f_S(S) dR dS \quad (4.17)$$

Uma influência direta da forma das distribuições de probabilidade e do grau de dispersão das variáveis aleatórias pode ser observada sobre os valores da probabilidade de falha. Quanto maior for o coeficiente de variação das variáveis, maior será a probabilidade de falha, uma vez que coeficientes elevados indicam maiores incertezas sobre as variáveis consideradas no problema. Sendo assim, pode-se afirmar que uma redução na probabilidade de falha de uma estrutura de concreto armado está diretamente relacionada com: melhor controle e fabricação de materiais, melhoria nos processos construtivos com diminuição das incertezas com relação às dimensões estruturais e possíveis desaprumos e desnivelamentos da estrutura, bem como, a mais realística possível representação dos modelos teóricos matemáticos e físicos relacionados com os fenômenos envolvidos. Dessa forma seria possível diminuir as incertezas sobre a variável de resistência R , o que

levaria a uma menor região sobreposta à curva de sollicitação, o que diminuiria a probabilidade de falha da estrutura.

O problema básico ou fundamental de confiabilidade apresentado anteriormente também pode ser resolvido através da variável margem de segurança (M) na forma (Beck, 2010):

$$M = R - S \quad (4.18)$$

Nessa equação valores negativos representam a falha da estrutura, enquanto que valores positivos indicam segurança e o valor nulo à condição de estado limite.

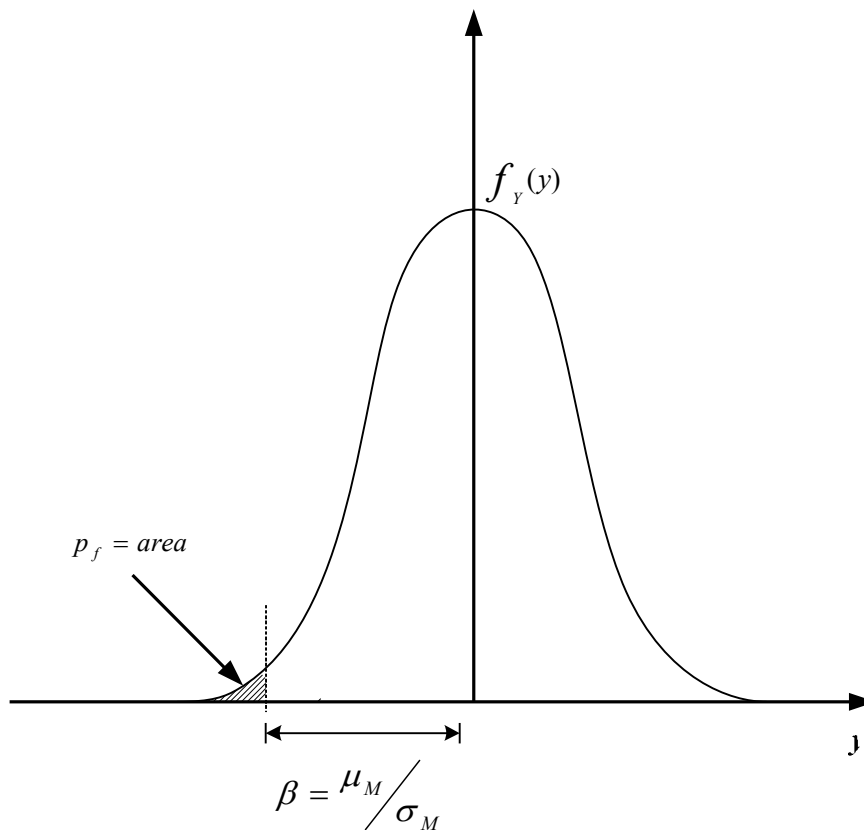


Figura 4-2: Índice de confiabilidade no espaço normalizado

Se R e S são variáveis aleatórias normais, o problema pode ser resolvido analiticamente. Caso haja independência entre as variáveis, pode-se dizer que:

$$\mu_M = \mu_R - \mu_S \quad (4.19)$$

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (4.20)$$

Passando M para espaço normal padrão, tem-se:

$$Y = \frac{M - \mu_M}{\sigma_M} \quad (4.21)$$

Assim, é possível avaliar a variável M através da função de distribuição acumulativa normal padrão. A probabilidade de falha nesse caso fica:

$$P_f = P([M < 0]) = P\left(\left[Y \leq -\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right]\right) = \Phi\left[-\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right] \quad (4.22)$$

No espaço normalizado, essa medida da probabilidade de falha corresponde à distância entre a origem da distribuição Y normalizada e a região de falha, denominada índice de confiabilidade, β . A Figura 4.2 mostra graficamente como o índice de confiabilidade é determinado.

Dessa forma, a expressão para cálculo da probabilidade de falha fica:

$$P_f = \Phi\left[-\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right] = \Phi[-\beta] \quad (4.23)$$

No espaço das variáveis aleatórias normais reduzidas não correlacionadas o índice de confiabilidade β é definido geometricamente como a distância do ponto sobre a superfície de falha mais perto da origem até a origem (Sagrilo, 2003). Apesar da equação (4.23) ser válida apenas para variáveis aleatórias normais, sua relação com a probabilidade de falha é utilizada de modo generalizado na confiabilidade estrutural para solução de problemas envolvendo um número qualquer de variáveis aleatórias (Beck, 2010).

4.2.3.1 Índice de Confiabilidade de Referência

Em uma formulação considerando-se confiabilidade, um critério de aceitação de risco estrutural corresponde exigência de nível mínimo de confiabilidade definido como índice de confiabilidade alvo. Assim o nível de segurança de uma estrutura é expresso em termos de um índice de confiabilidade mínimo ou de uma probabilidade de falha aceitável. Valores alvo do índice de

confiabilidade para estados limites últimos foram propostos pelo JCSS (2001) e são reproduzidos na Tabela 4.3.

Tabela 4-3: Valores alvo para o índice de confiabilidade β e probabilidades de falha associadas, relacionados a estados limites últimos.

Custo relativo das considerações de segurança	Conseqüências leves de Falha	Conseqüências moderadas de Falha	Conseqüências graves de Falha
Grande (A)	$\beta = 3.1 (P_f \approx 10^{-3})$	$\beta = 3.3 (P_f \approx 10^{-4})$	$\beta = 3.7 (P_f \approx 10^{-4})$
Normal (B)	$\beta = 3.7 (P_f \approx 10^{-4})$	$\beta = 4.2 (P_f \approx 10^{-5})$	$\beta = 4.4 (P_f \approx 10^{-6})$
Pequeno (C)	$\beta = 4.2 (P_f \approx 10^{-5})$	$\beta = 4.4 (P_f \approx 10^{-6})$	$\beta = 4.7 (P_f \approx 10^{-6})$

4.2.4

Métodos de análise

Em problemas reais de engenharia estrutural, a avaliação numérica da equação (4.2) pode não ser uma tarefa muito simples em vista da interdependência entre as variáveis, de suas distribuições correspondentes não serem normais e da função de estado que define o domínio de falha ser complexa. Assim, métodos alternativos deverão ser empregados na sua avaliação. A seguir serão apresentados os principais métodos empregados nessa avaliação presentes neste trabalho.

4.2.4.1

Método Analítico - FORM

No método FORM (*First Order Reliability Method*), as variáveis aleatórias do problema, no espaço original X , com tipo de distribuição qualquer e que podem ser independentes entre si ou não, sofrem um processo de transformação. Nesse processo, são transformadas em variáveis normais padrão, estatisticamente independentes, num espaço normalizado padrão U . A função de desempenho associada, $G(X)$, é descrita em função das variáveis U como $G(U)$. Procura-se então o ponto U^* , denominado ponto de projeto, cuja distância até a origem é mínima (Most probable Point - MPP). A distância entre U^* e a origem representa o índice de confiabilidade do sistema, β , e a probabilidade de falha poderá ser obtida por:

$$p_f = \Phi(-\beta) \quad (4.24)$$

Onde Φ representa a função densidade de probabilidade normal padrão acumulada. A expressão acima só é inteiramente válida quando a função de estado for linear. Caso a função de estado seja não linear seu resultado é uma aproximação. A obtenção do índice de confiabilidade, β , é feita pela equação:

$$\beta = |U^*| \quad (4.25)$$

Sendo:

$$U^* = -\alpha^* \beta \quad (4.26)$$

$$G(U^*) = \beta + \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i^* = 0 \quad (4.27)$$

A Figura 4.3 mostra graficamente a obtenção da confiabilidade pelo método FORM. Nesse método, é de fundamental importância o processo de transformação das variáveis aleatórias para o espaço normal padrão, bem como a busca do ponto de projeto. Normalmente, essa transformação é feita via distribuições normais equivalentes e o ponto de projeto obtido na forma de um problema de otimização. A transformação de Nataf (Der Kiureghian e Liu, 1986), amplamente empregada nos problemas de confiabilidade estrutural, é então utilizada para transformar as variáveis aleatórias, X , em variáveis independentes, U .

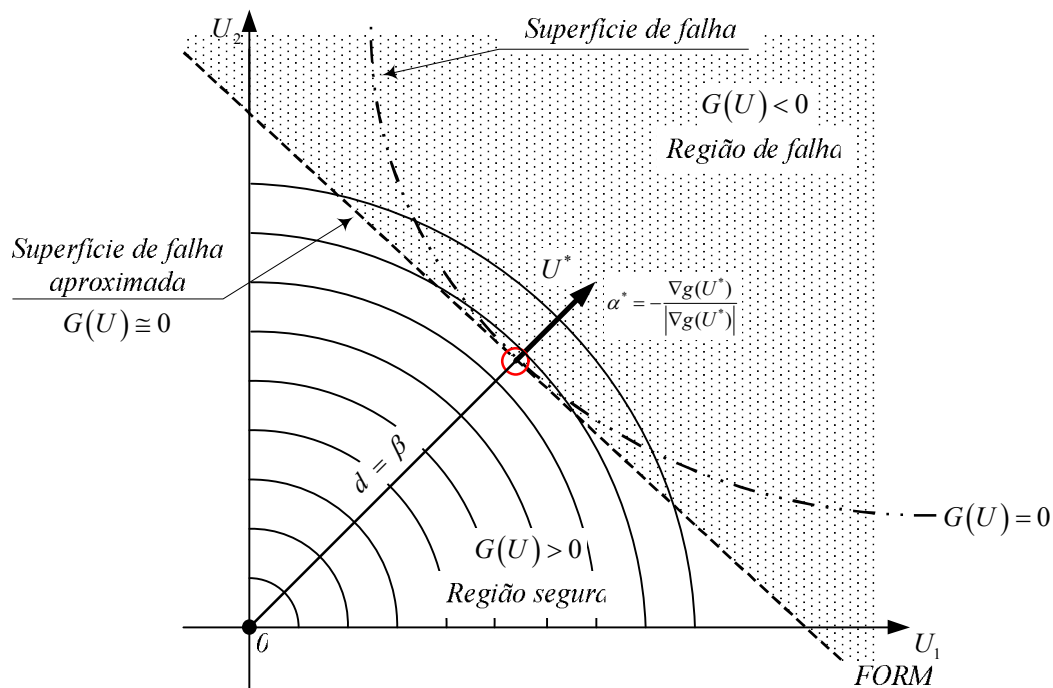


Figura 4-3: Representação gráfica do método FORM

Essa transformação pode então ser processada, contendo X apenas variáveis normais correlacionadas ou não pela expressão:

$$U = J(X - \mu) \quad (4.28)$$

Sendo J o Jacobiano da transformação, que é dado por:

$$J = \Gamma \sigma^{-1} \quad (4.29)$$

Onde μ é o vetor das médias e σ é a matriz que contém os desvios padrão das variáveis X . A matriz Γ é dada por:

$$\Gamma = L^{-1} \quad (4.30)$$

A matriz L é uma matriz triangular inferior obtida pela decomposição de Cholesky da matriz dos coeficientes de correlação de X , possuindo a seguinte forma:

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ L_{i1} & L_{i2} & \dots & L_{in} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

onde n é o número de variáveis aleatórias consideradas no problema. Os termos L_{ij} da matriz serão então expressos por:

$$L_{11} = 1.0 \quad (4.32)$$

$$L_{i1} = \rho_{ij} \quad (4.33)$$

$$L_{ik} = \frac{1}{L_{kk}} \left(\rho_{ij} - \sum_{j=1}^{k-1} L_{ij} L_{kj} \right) \quad 1 < k < i \quad (4.34)$$

$$L_{ii} = \sqrt{1 - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}^2} \quad i > 1 \quad (4.35)$$

Onde ρ_{ij} é o coeficiente de correlação entre as variáveis X_i e X_j . O uso de variáveis não normais presentes na maioria dos problemas de confiabilidade estrutural obriga a transformação das variáveis em normais equivalentes. Isso é feito através das expressões:

$$\sigma_{X_i}^N = \frac{\phi(\Phi^{-1}[F_{X_i}(X_i^*)])}{f_{X_i}(X_i^*)} \quad (4.36)$$

$$\mu_{X_i}^N = X_i^* - \sigma_{X_i}^N \Phi^{-1}[F_{X_i}(X_i^*)] \quad (4.37)$$

No caso em que as variáveis possuem correlação, utiliza-se a transformação apresentada, desde que os coeficientes de correlação entre as variáveis originais sejam corrigidos para os coeficientes de correlação entre normais equivalentes. Esse procedimento é feito na forma:

$$\rho_{ij}^E = F \rho_{ij} \quad (4.38)$$

O valor de F independe do ponto onde a transformação está sendo realizada. Expressões analíticas para obtenção de F foram obtidas por Der Kiureghian e Liu (1986). Uma vez que todas as variáveis do problema e suas correlações são transformadas em equivalentes (caso não sejam), as equações (5.19) e (5.20) poderão ser utilizadas na obtenção das variáveis padrão independentes.

4.2.4.1.1

Obtenção do ponto de projeto

No método FORM, a obtenção do ponto de projeto, \mathbf{U}^* , pode ser formulada como um problema de otimização com restrição na forma:

$$\text{Minimizar: } \|\mathbf{U}\| \quad (4.39)$$

$$\text{Sujeito a: } G(\mathbf{U}) = 0 \quad (4.40)$$

Existe uma série de algoritmos capazes de resolver problemas dessa natureza. Em problemas envolvendo análise de confiabilidade o algoritmo HLRF desenvolvido por Hasofer e Lind (1974) e posteriormente aprimorado por Rackwitz e Fiessler (1978) é o mais utilizado. Seu emprego é mostrado pela seguinte equação recursiva:

$$\mathbf{U}^{k+1} = \frac{1}{\|\nabla G(\mathbf{U}^k)\|^2} [\nabla G(\mathbf{U}^k)^T \mathbf{U}^k - G(\mathbf{U}^k)] \nabla G(\mathbf{U}^k) \quad (4.41)$$

Sendo $\nabla G(\mathbf{U}^k)$ o gradiente da função de falha no espaço reduzido e $G(\mathbf{U}^k)$ o valor da função de falha no ponto \mathbf{U}^k .

4.2.4.1.2**Algoritmo iterativo do método FORM**

1. Primeiramente escolher um ponto de partida X^k e $k = 0$ no espaço original (geralmente o vetor das médias) e calcular a matriz dos coeficientes de correlação normais equivalentes:

$$\rho_{X_i X_j}^E = F \rho_{X_i X_j} \quad (4.42)$$

Onde $\rho_{U_i U_j}^E$ é o coeficiente de correlação equivalente das variáveis aleatórias X_i e X_j e F depende do tipo de distribuição de ambas as variáveis conforme apresentado por Melchers (2002).

2. Calcular as médias e desvios padrões normais equivalentes no ponto de partida através das expressões:

$$\sigma_{X_i}^N = \frac{\phi \left\{ \Phi^{-1} \left(F_{X_i}(X_i^k) \right) \right\}}{f_{X_i}(X_i^k)} \quad (4.43)$$

$$\mu_{X_i}^N = X_i^k - \sigma_{X_i}^N \Phi^{-1} \left(F_{X_i}(X_i^k) \right) \quad (4.44)$$

E monta a matriz σ e o vetor μ , com os respectivos desvios padrões e médias normais equivalentes.

3. Avaliar a função de falha $G(X)$, o Jacobiano e o gradiente de $G(U)$ no espaço reduzido através das expressões a seguir:

$$G(U) = G(X) \quad (4.45)$$

$$J = \Gamma \sigma^{-1} \quad (4.46)$$

$$\nabla G(U) = (J^{-1})^T \nabla G(X) \quad (4.47)$$

Onde $\Gamma = L^{-1}$ contém a inversa da matriz triangular inferior, L , obtida da decomposição de Choleski da matriz dos coeficientes de correlação normais equivalentes.

4. Transformar o ponto de partida para espaço reduzido usando a transformação de Nataf, na forma:

$$U^k = J(X^k - \mu) \quad (4.48)$$

5. Avaliar o novo ponto de U^{k+1} através do algoritmo HRLF conforme definido anteriormente.

6. Avaliar o índice de confiabilidade na forma:

$$\beta = \|U^{k+1}\| \quad (4.49)$$

7. Avaliar o novo ponto U^{k+1} no espaço original através da expressão a seguir:

$$X^{k+1} = (J^{-1})^T(U^{k+1}) + \mu \quad (4.50)$$

8. Tomar X^{k+1} como novo ponto de partida e repetir os passos de 2 até 8 até que a convergência seja obtida:

$$\frac{\|U^{k+1}\| - \|U^k\|}{\|U^{k+1}\|} \leq TOL \quad (4.51)$$

9. Avaliar a probabilidade de falha final através de:

$$P_f^{FORM} = \Phi(-\beta) \quad (4.52)$$

A avaliação da probabilidade de falha pelo método FORM envolve a avaliação das derivadas da função de falha para compor o vetor gradiente. Quando a função de falha não for explícita, o método das diferenças finitas pode ser uma opção bem interessante no cálculo aproximado dessas derivadas.

4.2.4.1.3 Fator de Importância das Variáveis

Além da probabilidade de falha, um dos subprodutos do método analítico FORM é o fator de importância das variáveis que indica a contribuição de cada uma delas na probabilidade de falha do sistema considerado (Souza, 2011).

O fator de importância de cada variável aleatória i envolvida na análise de confiabilidade é definido por:

$$\zeta_i = \alpha_i^2 \quad (4.53)$$

Onde α_i é o cosseno diretor com relação a variável X_i do vetor normal à superfície de falha no ponto de projeto e no espaço das variáveis reduzidas:

$$\alpha_i = \frac{\nabla G(U^*)}{|\nabla G(U^*)|} \quad (4.54)$$

onde $\nabla G(U^*)$ é a componente do gradiente da função de falha no espaço reduzido definido no ponto de projeto U^* e $|\nabla G(U^*)|$ corresponde ao seu módulo.

A seguinte propriedade é válida para o fator de importância das variáveis:

$$\sum_{i=1}^n \zeta_i^2 = 1 \quad (4.55)$$

Somente as variáveis com fatores de importância altos contribuem efetivamente para a probabilidade de falha. As variáveis com fator de importância baixo ($\ll 1$) poderão ser consideradas como determinísticas.

4.2.4.2 Método de Simulação de Monte Carlo

Problemas que envolvem variáveis aleatórias com distribuição de frequência já bem definidas levam a uma boa funcionalidade na utilização do método de simulação de Monte Carlo. Para isso um número muito grande de repetições do processo de simulação deverá ser executado para cada realização particular das variáveis aleatórias do problema. Também, uma conveniente distribuição de probabilidades deverá ser utilizada para geração de números aleatórios que representarão cada uma das realizações. As repetições fornecem então, um conjunto de soluções, correspondente a cada realização, que representará o resultado da simulação do sistema. Essa amostra de soluções é similar, por exemplo, a um ensaio de laboratório e, assim sendo, um tratamento estatístico deverá ser aplicado aos seus resultados. Sendo uma técnica de amostragem estatística, erros de amostragem devem ser avaliados para uma definição correta do problema. Usualmente, um número grande de amostras é requerido, de modo que, o conjunto de simulações apresente bons resultados.

A principal característica do método de simulação de Monte Carlo consiste na obtenção de realizações aleatórias com base numa lei definida. Uma geração de números aleatórios é executada para construção desse conjunto de realizações. Para geração de uma amostra, obedecendo a uma distribuição qualquer, deve-se inicialmente gerar uma sequência de uma distribuição uniforme no intervalo de zero a um e em seguida realizar uma transformação isoprobabilística para a distribuição desejada. Uma vez que os algoritmos computacionais de geração são baseados em funções determinísticas, um mesmo conjunto de números poderá ser gerado, caso os argumentos de entrada sejam iguais. Por isso, esses conjuntos são denominados, pseudos-aleatórios.

Atualmente, todo o processo de geração aleatória das variáveis é feito em computadores, onde milhões de números podem ser gerados rapidamente e as amostras podem ser geradas em poucos minutos. Isso é feito de forma a representar o acaso via operações complexas que reproduzem resultados variados.

Esse procedimento simples para geração de valores de qualquer distribuição de probabilidade pode ser obtido da seguinte maneira: primeiramente gera-se uma amostra de valores q_i de probabilidades que obedecem a uma distribuição uniforme com valores entre zero e um. Isso é feito via um conjunto de operações determinísticas realizadas pelo computador cujo truncamento das casas decimais pode ser fornecido pelo usuário. A seguir, obtêm-se a respectiva variável física mediante uma transformação para o espaço físico dado por, $x_i = F_X^{-1}(q_i)$. Assim, através dessa realização no espaço físico são obtidos os resultados de todas as variáveis aleatórias existente no processo, podendo então determinar a resposta do problema considerado. O método de Monte Carlo procura substituir a equação 4.23 por um estimador da probabilidade de falha com o cálculo da expectância matemática da variável aleatória $I(x)$ na forma:

$$P_f = \int_{\Omega_F} f_X(x) dx = \int_{R^n} I(x) f_X(x) dx = E[I(x)] \quad (4.56)$$

Onde $E[I(x)]$ é a esperança matemática da variável aleatória $I(x)$. Define-se a função indicadora $I(x)$ por:

$$I(X) = \begin{cases} 1 & \rightarrow x \in \Omega_f \\ 0 & \rightarrow x \notin \Omega_f \end{cases} \quad (4.57)$$

Repetindo as análises para um número grande de simulações N , a média empírica dos valores de $I(x)$ é um estimador da probabilidade de falha. Significa que:

$$\bar{P}_f = \frac{\sum_{j=1}^N \{I(G(U) \leq 0)\}}{N} \quad (4.58)$$

Um exemplo de visualização gráfica do método de Monte Carlo é mostrado na Figura 4.4. Em cada simulação uma resposta é obtida, no caso de um valor de carga último, que se encontra no domínio de segurança ou no domínio de falha. A

probabilidade de falha pode então ser obtida pela soma dos eventos de falha e relacionando-os com todos os eventos existentes.

Uma das grandes vantagens das simulações de Monte Carlo consiste na substituição do cálculo de integrais complexas que não possuem soluções analíticas fechadas. A simulação entra exatamente nesse ponto, produzindo como resultado um valor para a integral que tende a se estabilizar em torno da média à medida que o número de simulações se aproxima do infinito.

Apesar de fornecer resultados bastante precisos, o método de Monte Carlo, sem a aplicação de técnicas para aumentar sua eficiência, é bastante lento no cálculo da probabilidade de falha.

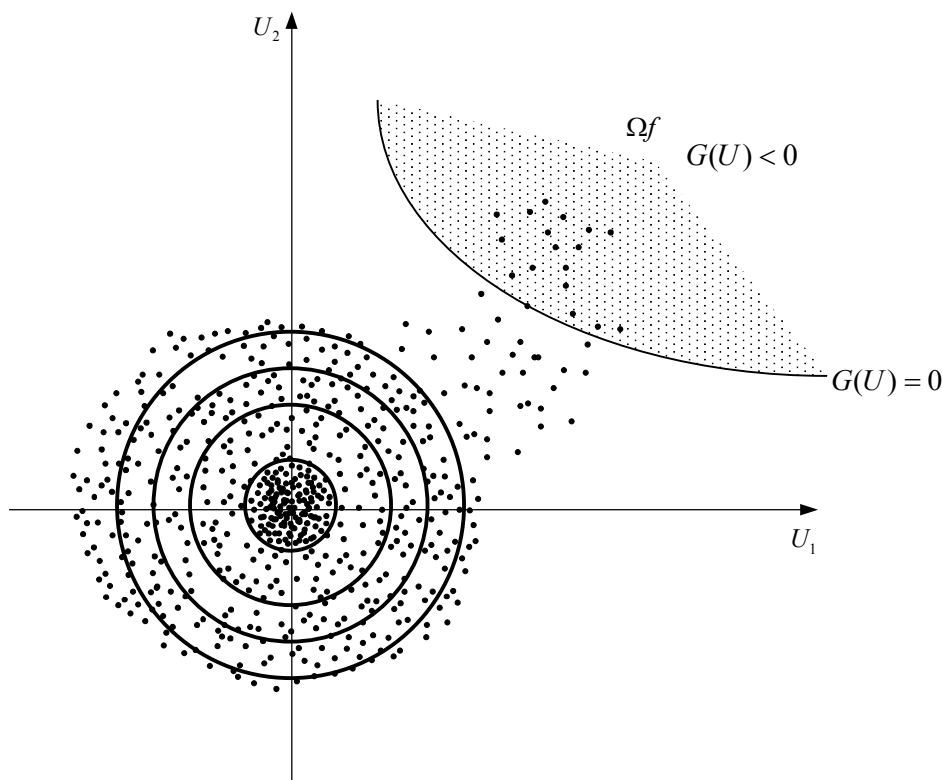


Figura 4-4: Sorteio de pontos na simulação de Monte Carlo

A interpretação da teoria das probabilidades sobre o comportamento das amostras e sobre a tendência das suas correspondentes médias em se estabilizarem com aumento do tamanho da amostra é a base da técnica de resolver problemas de integração via o método de Monte Carlo. Essa integração pode ser interpretada, num experimento estocástico adequado, como o valor médio. Assim, para um

elevado valor de resultados independentes do experimento é possível obter uma estimativa central (média) do valor da integral. Métodos estatísticos podem ser utilizados para medição da previsão dessa estimativa. Um número muito grande é necessário para fornecer uma precisão suficiente ao método empírico segundo a teoria das probabilidades. Assim, graças ao desenvolvimento crescente da velocidade de processamento de dados dos computadores digitais modernos, métodos desse tipo podem ser aplicáveis a problemas reais.

O elevado tempo de processamento devido ao grande número de repetições necessário à convergência é a maior inconveniência na aplicação do método de Monte Carlo a sistemas estruturais. Para problemas reais em engenharia a probabilidade de falha deve ser da ordem de 10^{-3} ou menor. Isso implica que o número de simulações necessárias seria da ordem de 10^{n+2} a 10^{n+3} para uma probabilidade de falha na ordem de 10^{-n} (Neves, 2004). Sendo assim, a eficiência dos métodos de simulação para problemas com número muito grande de variáveis ou que envolva problemas onde o custo da função de estado é alto, é bastante questionada. Outro fato desfavorável é que os métodos de simulação não fornecem informações suplementares sobre as sensibilidades do índice de confiabilidade em relação às variáveis aleatórias ou mesmo sobre o ponto de projeto do problema. Mesmo assim, métodos dessa natureza são bastante aplicáveis na aferição de modelos e são bastante aplicados em trabalhos científicos, principalmente em problemas cujo número de variáveis seja razoavelmente pequeno.

Para o presente trabalho de pesquisa, a utilização do método de Monte Carlo é justificável devido a três importantes pontos. O primeiro é mais importante refere-se a possibilidade de representar explicitamente as equações de falha do problema. O segundo ao número de variáveis envolvido nos problemas que é relativamente pequeno, o que conduz a um tempo de processamento relativamente pequeno. O terceiro refere-se a eficiência na precisão envolvida no cálculo da probabilidade de falha do sistema estrutural considerado. Para os problemas abordados nessa pesquisa o método de Monte Carlo foi aplicado de modo bastante satisfatório. Isso acontece, uma vez que, não é necessária a execução de nenhum processo de aproximativo ou de linearização, do tipo existente nos métodos analíticos. Procedimentos desse tipo podem levar a valores com pouca precisão

devido às aproximações necessárias na definição da região de falha do sistema estrutural correspondente.

4.2.5 Probabilidade de falha de sistemas

A confiabilidade de sistemas estruturais é definida quando a falha de um elemento estrutural pode ocorrer devido a mais de uma função de estado limite ou de falha. Todos os exemplos de aplicação apresentados nesta tese envolvem sistemas desse tipo como com a presença de várias funções de falha (bielas, tirantes, nós e regiões de concentração de tensões), portanto serão tratados pela análise de confiabilidade estrutural como um sistema (Almeida, 2008).

Um sistema para análise de confiabilidade pode ser representado por apenas um elemento estrutural que possa falhar por mais de um modo de comportamento, enquanto que na análise estrutural propriamente dita o elemento é apenas parte integrante da estrutura, que neste caso é o sistema.

Um sistema pode ser classificado em: sistema em série, quando a falha de um dos modos acarreta na falha do sistema, ou em paralelo, quando a falha do sistema somente ocorre quando todos os seus modos falham. No caso dos exemplos de modelo de bielas e tirantes analisados nessa pesquisa apenas os sistemas em série serão considerados.

A Figura 4.11 a seguir ilustra a região de falha de um sistema em série definida quando se usa o método FORM.

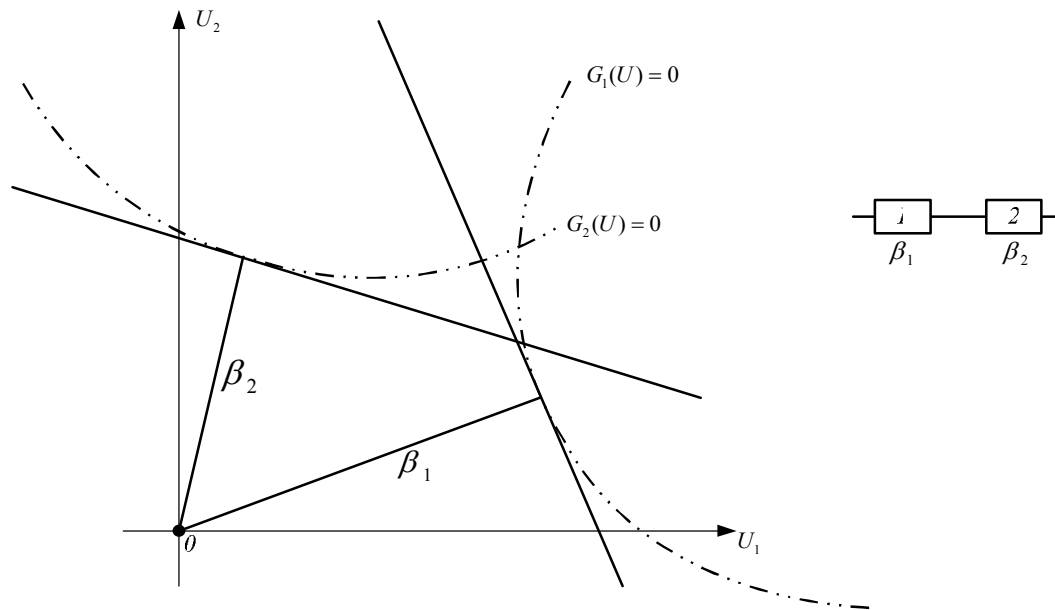


Figura 4-11: Representação gráfica da probabilidade de falha de sistemas em série pelo FORM

A probabilidade de falha P_f pode ser calculada para cada modo de falha, sendo depois avaliada a probabilidade de o sistema falhar como um todo, considerando-se todos os modos.

A probabilidade de falha dos sistemas em série é dada pela probabilidade de qualquer um dos seus modos falharem, ou seja, é a união dos eventos que representam a falha dos modos de ruptura individuais. Dessa forma, tem-se que:

$$P_f^s = P \left[\bigcup_{i=1}^j (g_i(U) \leq 0) \right] \quad (4.59)$$

Onde j é o número de modos de falha identificados na análise e U é o vetor das variáveis normais padrão estaticamente independente.

Utilizando alguns dos conceitos básicos da teoria das probabilidades, a equação da probabilidade de sistemas em série pode ser reescrita na forma:

$$P_f^s = \sum_{i=1}^j P_i - \sum_{i=1}^j \sum_{k>1}^j P_{ik} + \sum_{i=1}^j \sum_{k>1}^j \sum_{l>k}^j P_{ikl} - \dots \quad (4.60)$$

Sendo:

$$P_i = P[(g_i(U) \leq 0)] \quad (4.61)$$

$$P_{ik} = P[P(g_i(U) \leq 0) \cap P(g_k(U) \leq 0)] \quad (4.62)$$

$$P_{ikl} = P[P(g_i(U) \leq 0) \cap P(g_k(U) \leq 0) \cap P(g_l(U) \leq 0)] \quad (4.63)$$

Onde g_i é o i -ésimo componente do sistema e os símbolos Σ e \cap correspondem ao somatório e a intersecção, respectivamente.

Como as probabilidades de falha dos componentes individuais geralmente são baixas, os termos de terceira ordem podem ser desprezados. Em um sistema em série as probabilidades de primeira e segunda ordem pelo FORM, onde a superfície de falha é definida pelos hiperplanos tangentes as superfícies de falha nos pontos de projeto, podem ser calculadas na forma:

$$P_i = \Phi(-\beta_i) \quad (4.64)$$

$$P_{ik} = \Phi(-\beta_i, -\beta_k, \rho_{ik}) \quad (4.65)$$

Onde:

β_i, β_k – Índices de confiabilidade de cada um dos componentes;

ρ_{ik} – Correlação entre os dois componentes;

$\Phi()$ – Função cumulativa de probabilidades normal padrão;

$\Phi(, , \rho)$ – Função cumulativa bidimensional normal padrão.

A função cumulativa bidimensional normal padrão, pode ser expressa matematicamente por:

$$\Phi(-\beta_i, -\beta_j, \rho_{ij}) = \Phi(-\beta_i)\Phi(-\beta_j) + \int_0^{\rho_{ij}} \varphi(-\beta_i, -\beta_j, z) dz \quad (4.66)$$

Onde $\varphi(-\beta_i, -\beta_j, z)$ é a função densidade de probabilidade bidimensional normal padrão:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-z^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 + y^2 - 2zxy}{1-z^2}\right)\right] \quad (4.67)$$

A integral da equação (4.66) deve ser avaliada numericamente ou alternativamente ter seus limites de primeira e segunda ordem verificados. Assim sendo tem-se os seguintes limites a serem definidos:

Limites para probabilidade P_{ik} :

$$\max[P(A), P(B)] \leq P[g_i, g_k] \leq P(A) + P(B) \quad (4.68)$$

$$P(A) = \Phi(-\beta_i) \Phi\left(-\frac{\beta_k - \rho\beta_i}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \quad (4.69)$$

$$P(B) = \Phi(-\beta_k) \Phi\left(-\frac{\beta_i - \rho\beta_k}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \quad (4.70)$$

Limites de primeira ordem

$$\max_{n=1}^n [P(F_i)] \leq P_f \leq \left[1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(F_i))\right] \quad (4.71)$$

Limite de segunda ordem

$$P(F_i) + \sum_{i=2}^n \max\left\{P(F_i) - \sum_{j=1}^{i-1} P(F_i F_j), 0\right\} \leq P_f \leq \sum_{i=1}^n P(F_i) - \sum_{i=2}^n \max[P(F_i F_j)] \quad (4.72)$$

Para modos de falha independentes a probabilidade de falha de uma estrutura pode ser representada na forma:

$$P_f = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(F_i)) \Rightarrow n = 2 \quad (4.73)$$

Onde, F_i é a probabilidade de falha do modo i .

A equação (4.73) pode ser expandida na forma:

$$P_f = P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2) \quad (4.74)$$

No entanto, tendo o termo $P(F_i)$ valores muito pequenos o termo $P(F_1 \cap F_2)$ poderá ser desprezado. Logo teremos:

$$P_f^{sup} \cong P(F_1) + P(F_2) \quad (4.75)$$

Onde P_f^{sup} representa o limite de probabilidade de falha superior.

Para a determinação do limite inferior, considera-se o caso onde todos os modos de falha são totalmente independentes, sendo que o modo que tiver a maior probabilidade será sempre o de provável colapso.

$$P_f^{inf} = \max_{i=1}^n [P(F_i)] \quad (4.76)$$

Assim, tem-se para um sistema em série os limites inferiores e superiores, onde eles limitam uma região entre completamente independente e totalmente dependente. Tem-se então a seguinte desigualdade:

$$\max[P(F_1), P(F_2)] \leq P_f \leq P(F_1) + P(F_2) \quad (4.77)$$

Limites de segunda ordem

Os limites de segunda ordem são obtidos levando em consideração os termos $P(F_1 \cap F_2)$ na equação (4.74). Assim, determina-se o limite inferior na forma:

$$P_f \geq P(F_1) + \max\{P(F_2) - P(F_1 \cap F_2), 0\} \quad (4.78)$$

O limite superior de segunda ordem é obtido então por:

$$P_f \leq P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2) \quad (4.79)$$

Pode-se esperar uma maior precisão nos limites de segunda ordem uma vez que os termos $P(F_1 \cap F_2)$ são considerados. Assim:

$$P(F_1) + \max\{P(F_2) - P(F_1 \cap F_2), 0\} \leq P_f \leq P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2) \quad (4.80)$$

No caso de duas funções de falha, resolve-se a equação (4.79) obtém-se a probabilidade de falha exata de um sistema em série. Como se pode observar pela equação (4.80) é necessário determinar o termo $P(F_1 \cap F_2)$, podendo ser determinado de forma exata através da equação (4.65) ou equação (4.66) com um custo computacional alto, ou pelos limites P_{ik} da equação (4.68).

4.3 Calibração de Códigos Normativos

Calibração é o processo de designar valores para determinados parâmetros nos códigos normativos. Esses parâmetros normativos são todas as quantidades numéricas especificadas pelos códigos, excluindo-se as constantes físicas. Os

parâmetros normativos são normalmente adotados de modo a garantir um desejado nível de segurança às estruturas. Um processo de calibração a ser efetuado pelos códigos normativos na determinação dos parâmetros normativos pode seguir três diferentes tipos de metodologia: julgamento, experiência, otimização ou uma combinação dos anteriores.

Processos de calibração feitos através de julgamento foi uma prática muito comum até recentemente. Se um código normativo que esteve em vigor certo tempo provou estar funcionando satisfatoriamente, seus correspondentes valores de parâmetros normativos podem ser aceitos como corretos. No entanto, se há uma pressão econômica suficientemente grande, alguns dos parâmetros podem ser ligeiramente modificados em busca de margens de segurança menores. De modo inverso, baixos desempenhos podem gerar uma pressão no sentido de aumentar as margens de segurança. Normalmente esse tipo de situação é mais dramático. Se não houver nenhuma mudança de formato, o código poderá então, gradualmente se encaminhar para os valores coerentes de parâmetros normativos. Esse é um processo de calibração com base empírica e é caracterizado pela falta de racionalismo na modificação dos coeficientes envolvidos.

Outro tipo de processo de calibração é feito quando uma modificação no formato é proposta depois que um código normativo é utilizado por um número razoável de anos. Assim, o problema consiste em transferir a experiência prática acumulada do código anterior para o novo. Uma simples e conservativa maneira de fazer esse tipo de calibração no código novo é ajustar parâmetros normativos do código anterior de modo que produza resultados finais do também código anterior. É óbvio que isso não é sempre possível, mas quando isso acontece pode ser vantajoso no mínimo adotá-lo como uma primeira aproximação. Na verdade, um novo código apenas imita o código anterior, o que pode parecer bastante estranho. Por que então reescrever um código se nenhum ganho em confiabilidade ou mesmo em economia acontecerá? Uma vez que qualquer modificação nos códigos normativos é um aborrecimento para todas as partes envolvidas, reescrevê-lo poderá ser vantajoso por diversas razões. As principais são que um novo formato pode estar mais correto em termos filosóficos, que seu alinhamento pode ser melhorado com relação aos padrões adotados por outros países ou também por ser mais simples de ser utilizado.

Finalmente, um código normativo pode ser calibrado por um processo formal e explícito de otimização (Ravindra e Lind, 1983 e Beck, 2010). Nesse caso, o passo inicial é definir o escopo, ou seja, a classe de estruturas para as quais o código será aplicado. Esse escopo deverá ser parametrizado por um conjunto de estruturas. Para todas as estruturas inseridas nesse escopo, os modos de falha relevantes deverão ser identificados. O código deverá então ser caracterizado por uma estrutura matemática, assim como um elemento dentro de um conjunto. Os parâmetros normativos serão considerados como variáveis. Uma vez que essas variáveis tomam diferentes valores, um conjunto com diferentes formatos é gerado. Esse conjunto é denominado formato do código; o código original é umas das inúmeras realizações do formato. Cada realização é caracterizada por um particular conjunto de parâmetros, correspondente a um ponto específico no espaço dos parâmetros do formato.

A obtenção dos coeficientes parciais de segurança não é simples, ainda mais para toda uma classe de estruturas, sendo difícil alcançar um mesmo nível de confiabilidade para todas elas num mesmo código. A seguir será apresentada uma metodologia para calibração de fatores parciais de segurança para um conjunto de estruturas específicas de concreto armado representadas via modelo de bielas e tirantes. Essa metodologia tem uma base científica e usa a confiabilidade com ferramenta principal.

4.3.1

Calibração dos coeficientes parciais de segurança

Um estado limite de uma estrutura específica pode sofrer um processo de calibração dos coeficientes parciais de segurança para que um nível específico de segurança seja alcançado. Inicialmente é necessária uma caracterização estatística das variáveis aleatórias envolvidas no problema. Também um nível alvo de segurança deverá ser definido com base na classe da estrutura e materiais envolvidos. Finalmente, uma tentativa inicial deverá ser proposta e sua correspondente avaliação de segurança feita por qualquer um dos métodos anteriormente vistos (Sagrilo, 2003). Nos exemplos apresentados neste trabalho apenas o método FORM e Monte Carlo foram utilizados.

Inicialmente, uma variação nos coeficientes parciais de segurança relativos às ações do modelo (permanente e acidental) é feita e seu dimensionamento executado. Para cada par de valores o nível de segurança, representado pelo índice de confiabilidade do sistema, é calculado. Com isso, um processo de interpolação através dos polinômios de Lagrange é feito com relação a cada variável considerada e seu resultado computado na formação da superfície de resposta dos índices de confiabilidade do sistema. Esse é o procedimento de montagem de uma superfície de resposta em termos da confiabilidade do sistema. É possível considerar esse procedimento para várias razões de carga ou para uma específica.

Adota-se um valor alvo ou de referência de confiabilidade baseado nas recomendações do JCSS (2001). Esse valor foi tomado como β_{alvo} igual a 3.8, correspondente a uma probabilidade de falha na ordem de $7,2 \times 10^{-5}$.

A calibração dos coeficientes parciais de segurança poderá ser definida a partir de um problema de otimização. O objetivo principal então será minimizar o erro entre os pontos da superfície de resposta em termos de confiabilidade e o índice de confiabilidade alvo. Monta-se então um problema de minimização sem restrição na forma (Faber e Sørensen, 2002):

Minimizar:

$$W(\gamma_g, \gamma_q) = \sum_{k=1}^n w_n ((\beta_n(\gamma_{gi}, \gamma_{qi}) - \beta_{alvo})^2 \quad (4.81)$$

Onde:

$W(\gamma_g, \gamma_q)$ – superfície de erro em função dos fatores parciais de segurança.

w_n – fator de frequência do carregamento.

O fator de frequência dos carregamentos pode ser representado também por uma distribuição e suas variáveis características. Como a experiência em projeto de estruturas de concreto armado mostra que as razões de carga mais frequentes são as de valor 0,4; 0,5 e 0,6. Assim as frequências de carregamentos serão representadas a partir de uma função Normal com média 0,5 e desvio padrão 0,12 conforme recomendado por Souza (2011). Assim, é possível ratificar o valor mínimo da função dentro dos limites da superfície de resposta em termos dos

erros relativos, seus respectivos pesos e seus correspondentes coeficientes de segurança.

4.3.2 Geração da superfície de resposta

A existência de uma função de falha é o que caracteriza o uso da análise de confiabilidade em problemas de estruturas. No entanto, a obtenção dessa função em problemas reais de engenharia pode ser muito cara ou mesmo proibitiva do ponto de vista computacional. Isso acontece em decorrência dos refinados modelos mecânicos utilizados atualmente. Essa dificuldade pode ocorrer com todos os métodos de obtenção da probabilidade de falha em confiabilidade como métodos de simulação ou FORM. Em casos desse tipo, uma técnica bastante interessante é a denominada superfície de resposta. A ideia principal consiste na adoção de uma função de falha aproximadora, cuja avaliação seja mais simples e que possa representar a função de falha original. Esse procedimento torna a busca do ponto de projeto bastante simples, rápida e eficiente, já que a superfície real é substituída por um polinômio.

A técnica de superfície de resposta é muito conhecida na estatística onde uma aproximação de modelo complexo pode ser feita por uma relação funcional mais simples que relacione os resultados de um experimento às variáveis de entrada. O polinômio aproximador poderá produzir superfícies lineares, quadráticas ou mesmo cúbicas. Nesse caso, o emprego de funções do tipo *spline* pode ser bastante interessante.

Para a construção das superfícies de resposta é necessária a obtenção de um conjunto de soluções da estrutura. Cada ponto obtido para superfície aproximadora corresponderá a uma resposta da estrutura com emprego do modelo utilizado. Uma vez obtido esse conjunto de pontos, é possível então traçar a superfície aproximadora com a utilização dos polinômios via técnica de regressão linear ou não. Diferentes expressões polinomiais poderão ser utilizadas para descrever a superfície de resposta de uma mesma estrutura. No entanto, dois aspectos principais devem ser observados: o número de pontos para formação da superfície de resposta deverá ser maior ou igual ao número de constantes relativas ao polinômio aproximador e é necessário que os pontos de ajuste sejam escolhidos

de forma a gerar um conjunto de equações linearmente independentes (Beck, 2010).

Uma vez obtida a função de falha aproximada qualquer um dos métodos de obtenção da probabilidade de falha poderá ser utilizado. No caso dos métodos analíticos uma das principais vantagens é que a função gradiente é facilmente obtida. A maior dificuldade na utilização da técnica deve-se às aproximações implícitas do método, o que pode conduzir a respostas não precisas e dificuldades de convergência.

Um processo aproximado para obtenção da superfície com base na resposta mecânica da estrutura é efetuado neste trabalho. Uma superfície de resposta baseada em polinômios de Lagrange é construída e um processo de interpolação cúbica do tipo *spline* é aplicado.

4.3.2.1 Polinômios interpoladores de Lagrange

A utilização de funções aproximadoras para funções contínuas é uma técnica bastante difundida e utilizada atualmente. Existem vários tipos de polinômios utilizados como essa finalidade. Uma opção bastante interessante e muito empregada no método dos elementos finitos são os polinômios interpoladores de Lagrange (Vaz, 2011b).

Nessa técnica, uma função $f(x)$ contínua será representada por uma função aproximadora $\phi(x)$ em um dado intervalo $a \leq x \leq b$. Considerando inicialmente $(n + 1)$ pontos no intervalo, é possível criar $(n + 1)$ polinômios de Lagrange $Y_i(x)$ de grau n , de modo que:

$$Y_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \quad (4.82)$$

Sendo que:

$$Y(x_j) = \delta_{ij} \quad (4.83)$$

Para a função considerada vale a seguinte regra: valor unitário em $i = j$ e valor nulo em $i \neq j$. Pode-se então, utilizar os polinômios de Lagrange na geração de funções aproximadoras na forma:

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n \Upsilon_i(x) f_i \quad (4.84)$$

Essa expressão é válida em qualquer dos $(n + 1)$ pontos x_j resultando em:

$$\phi(x_j) = \sum_{i=1}^n \Upsilon_i(x_j) f_i = f_j \quad (4.85)$$

Uma visão do processo de interpolação entre a função original $f(x)$ e a função aproximadora $\phi(x)$ pode ser vista na Figura 4.5.

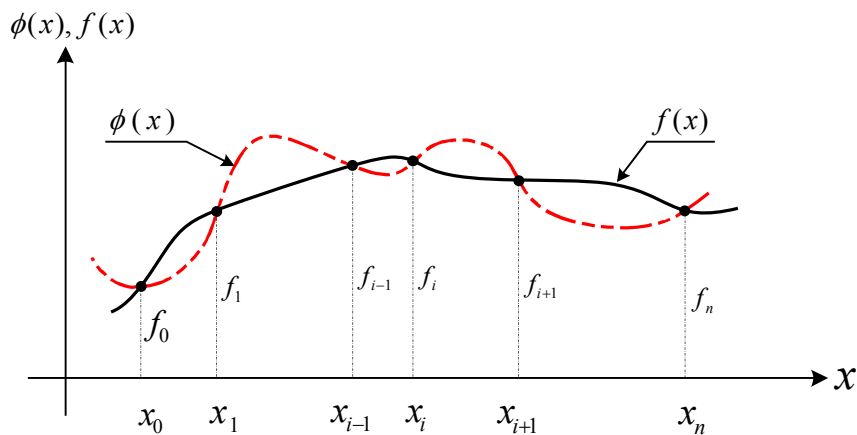


Figura 4-5: Interpolação com uso dos polinômios de Lagrange

Para o caso da geração representativa da superfície de resposta procurada, procede-se de forma análoga aos polinômios de Lagrange de primeiro grau. Assim, funções de interpolações bidimensionais poderão ser geradas. Isso é feito por meio de produtos de polinômios Lagrangeanos. Logo teremos:

$$N_{ij}(x, y) = \Upsilon x_i(x) \Upsilon y_j(y) \quad (4.86)$$

Pode-se, então, facilmente montar a superfície de resposta aproximadora, considerando $f_{ij} = \bar{\beta}_{ij}$, ficando então com:

$$Superf_{\beta}(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n N_{ij}(x, y) \bar{\beta}_{ij}(x, y) \quad (4.87)$$

Onde $\bar{\beta}_{ij}(x, y)$ serão os valores da resposta da estrutura para cada par de variáveis em consideração.

A Figura 4.6 mostra uma superfície de resposta gerada para o caso de uma viga parede via modelo de bielas e tirantes. As duas variáveis em consideração são os coeficientes de segurança da carga permanente (γ_g) e acidental (γ_q). Um procedimento de interpolação do tipo *spline* foi aplicado à superfície original e também mostrado.

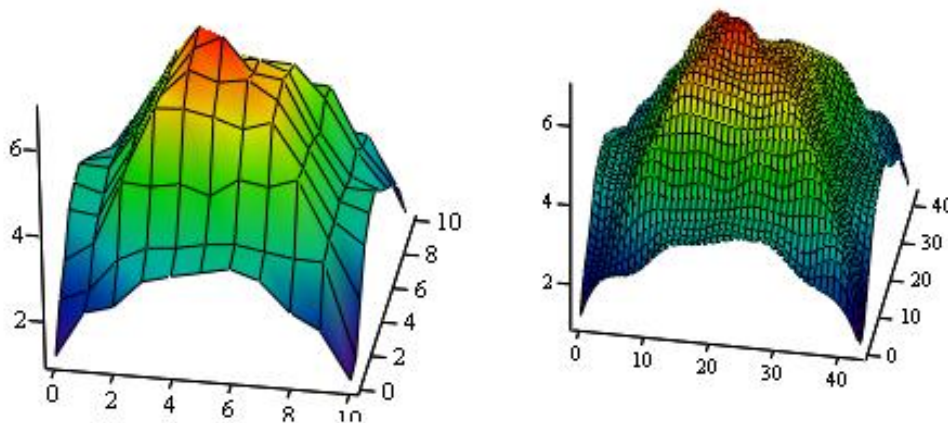


Figura 4-6: Superfície de resposta do índice de confiabilidade de uma viga parede

Neste trabalho foram avaliadas apenas as variáveis aleatórias referentes aos coeficientes parciais de segurança aplicadas às estruturas de concreto armado via modelo de bielas e tirantes. De uma forma simplificada, apenas os carregamentos permanentes e acidentais foram considerados, o que implica na desconsideração de possíveis carregamentos excepcionais.

4.4 Importância Relativa dos Modos de Falha

Uma vantagem bastante interessante no uso da formulação de confiabilidade aos problemas estruturais de concreto armado é com relação à identificação e quantificação da importância dos modos de falha de uma estrutura.

Podemos definir como razão de falha relacionada ao modo i a expressão:

$$\chi_i = \frac{p_{fmi}}{p_f} \quad (4.88)$$

Onde p_{fmi} é a probabilidade de falha da estrutura pelo modo i e p_f a probabilidade de falha do sistema estrutural considerando todos os modos de falha. Com base na equação (4.88) é possível então traçar um diagrama de comportamento para todos os modos de falha envolvidos no problema de forma a identificar quando seu comportamento passa a ter uma probabilidade maior. Para que isso seja feito é necessária a identificação do denominado ponto de transição mostrado na Figura 4.7 a seguir, que se refere a um modelo hipotético de bielas e tirantes. Nesse modelo, podem ocorrer modos de falha frágeis, correspondentes à ruptura das bielas, e modos de falha dúcteis, correspondentes ao escoamento da armadura.

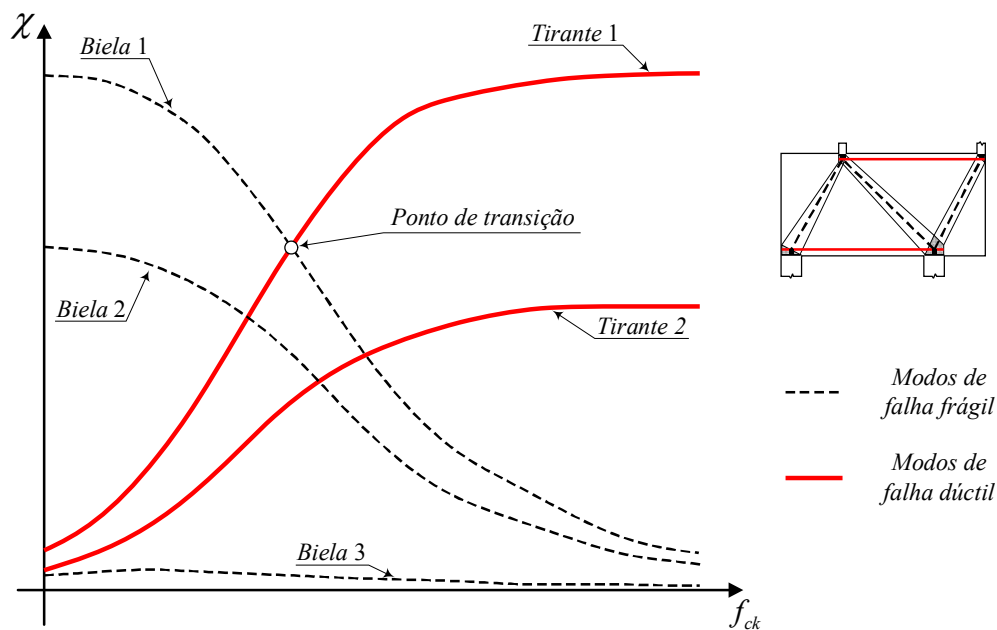


Figura 4-7: Influência do f_{ck} na razão de falha dos diferentes modos de falha.

É importante ressaltar que o ponto de transição deve ser definido para o mais importante modo de falha dúctil e para o mais importante modo de falha frágil. O ponto de transição então será definido pelo ponto de encontro desses dois modos de falha. A partir daí a região posterior ao ponto de transição representará

uma região onde a probabilidade de falha por modo dúctil é superior ao frágil e vice-versa.

Nos projetos realizados pelo método dos Estados Limites essa zona de transição não é possível ser bem definida. Isso acontece porque a aplicação dos coeficientes parciais de segurança, no sentido de precaver contra a aleatoriedade existente e aumentar a segurança impossibilita esse tipo de análise.

Também é possível a definição de uma razão de probabilidade entre os modos mais importantes dúcteis e frágeis na forma:

$$T = \frac{p_{fD}}{p_{fF}} \quad (4.89)$$

Essa relação mede a proporção da probabilidade do modo de falha dúctil em relação ao modo de falha frágil. Valores menores que 1 mostram que o modo de falha frágil prevalece sobre o modo de falha dúctil. Valores acima de 1 levam a uma maior probabilidade de falha pelo modo dúctil (Figura 4.8).

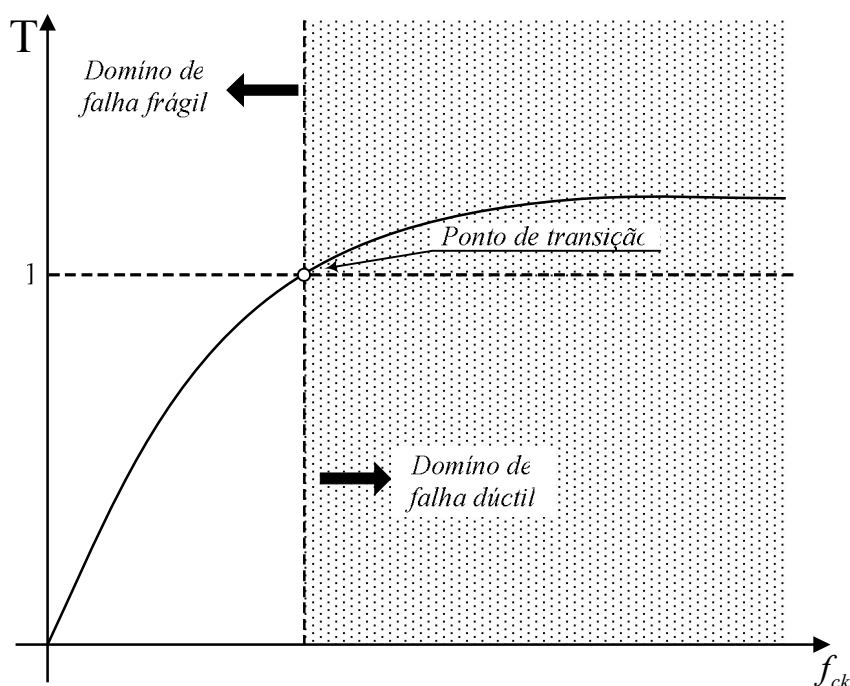


Figura 4-8: Influência do f_{ck} na obtenção dos domínios de falha dúctil e frágil

4.5

Análise de Confiabilidade baseada em Análise Limite

O cálculo da confiabilidade de sistemas em estruturas de concreto armado tem sido uma área de pesquisa bastante ativa. Durante esse período, procedimentos eficientes têm sido desenvolvidos para determinação de estados limites individuais (Zhao e Ono, 1999). O cálculo da confiabilidade de sistemas, no entanto, que é afetado pelas interações entre seus estados limites, ainda apresenta consideráveis dificuldades. A procura por uma formulação computacional eficiente para determinar a confiabilidade de sistemas tem mostrado que dentre as formulações existentes, considerando-se problemas de pequeno e pequeno-médio porte, o Método de Monte Carlo é uma opção bastante razoável. Isso acontece devido à uma determinação mais precisa da probabilidade de falha de sistemas.

No caso específico de modelo de bielas e tirantes, um esforço razoável tem sido feito no sentido de criar uma formulação que permita avaliar se uma dada topologia adotada para um modelo e definida segundo algum critério específico é eficiente ou não. Schlaich et al (1987) e Ali et al (2001) apresentaram propostas que adotaram a energia de deformação elástica como indicadora da eficiência da topologia considerada. Entretanto, uma vez que o campo de deslocamentos considerado no modelo topológico adotado, qualquer que seja ele, é totalmente diferente do campo real das deformações existente no contínuo da estrutura de concreto, adotar critérios dessa natureza parece ser inconsistente.

Uma opção bastante interessante e totalmente compatível com a formulação proposta para o modelo de bielas e tirantes é basear o critério de eficiência do modelo topológico na probabilidade de falha definida na equação (4.90). Para tal, uma análise limite do modelo rígido plástico é então exigida.

A formulação proposta neste trabalho acopla a análise de confiabilidade que considera os principais tipos de incertezas envolvidas em problemas dessa natureza com a análise limite do modelo rígido-plástico representado pela topologia adotada, para essa verificação de eficiência. Uma vantagem interessante no uso dessa formulação é a obtenção de um índice de confiabilidade global da

estrutura uma vez que todos os modos de falha serão considerados, inclusive possíveis inter-relações entre eles.

Considerando a topologia do modelo de bielas e tirantes como um modelo rígido-plástico, pode-se definir a seguinte função de falha global do sistema:

$$G(\lambda_R, \lambda_S) = \lambda_R - \lambda_S \quad (4.90)$$

Sendo λ_R o fator de colapso relativo às resistências do modelo (concreto e aço) nas bielas, tirantes e nós, e λ_S o fator multiplicador proporcional relativo ao carregamento máximo a ser aplicado à viga.

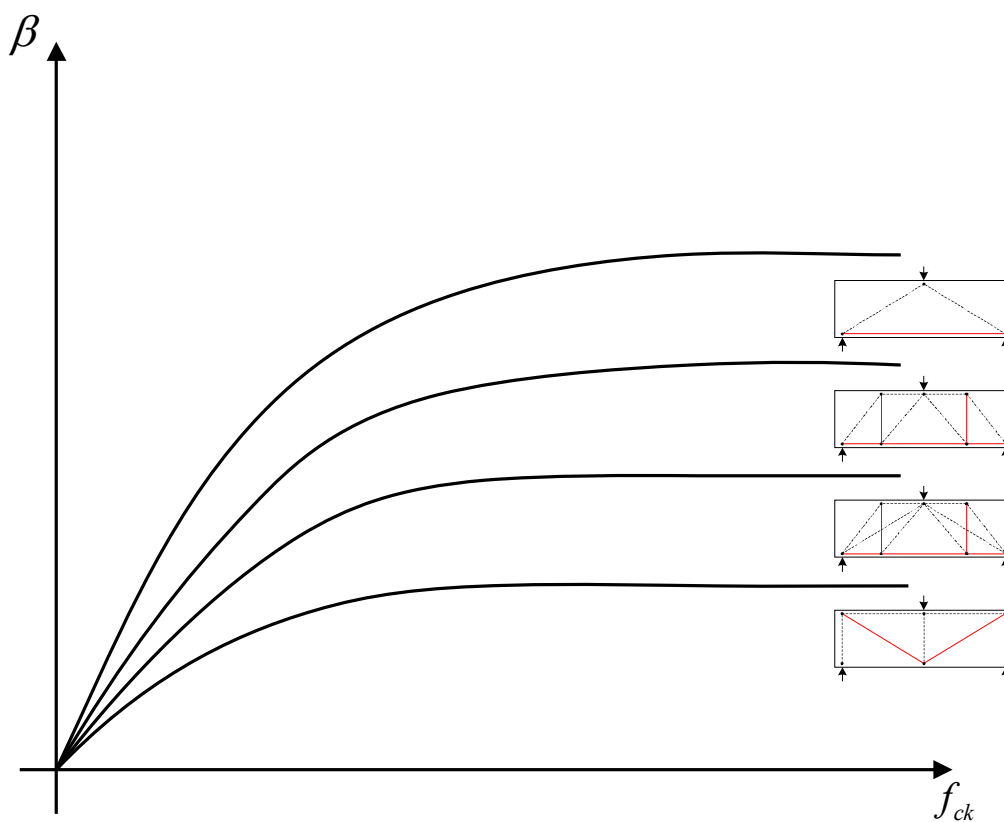


Figura 4-9: Avaliação da segurança de diferentes topologias de um modelo via confiabilidade.

Assim, é possível variar um parâmetro específico, como, por exemplo, a resistência à compressão do concreto no modelo, para uma taxa de armadura fixa, e verificar seu comportamento relacionado ao seu nível de segurança. A Figura 4.9 mostra, para um exemplo hipotético, como topologias diferentes levam a níveis de segurança diferentes para um mesmo modelo.

4.5.1 Algoritmo de implementação

Essa metodologia será adotada nos exemplos neste trabalho e seus resultados mostrados no capítulo 5. Sua maior vantagem é estar perfeitamente compatível com os princípios básicos que envolvem a concepção dos modelos de bielas e tirantes. Isso acontece uma vez que apenas o campo de tensões do modelo é considerado.

A Figura 4.9 mostra um fluxograma esquemático para implementação do algoritmo proposto.

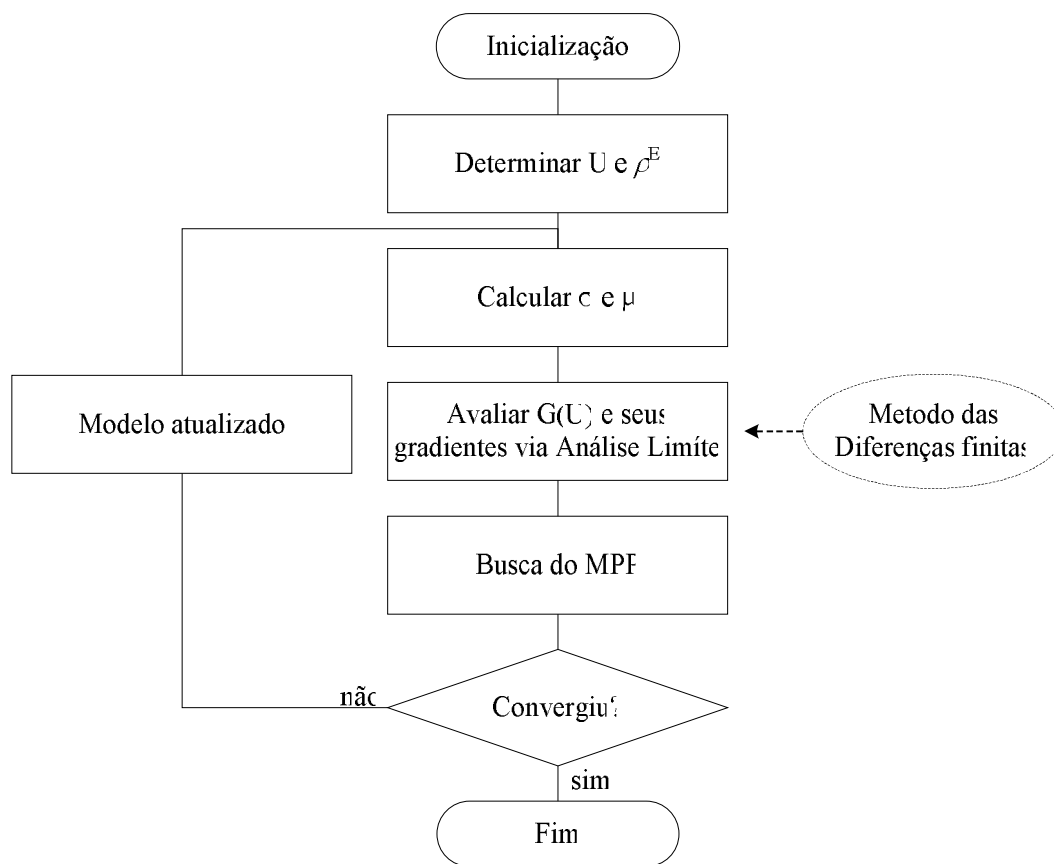


Figura 4-10: Fluxograma esquemático da análise de confiabilidade baseada em análise limite

Para cada topologia considerada um correspondente problema de PL deverá ser montado e suas características randômicas inicializadas no método FORM. Em cada etapa das iterações um subproblema é resolvido e a probabilidade de falha determinada. Duas características principais deverão nortear as principais considerações relativas ao desempenho dos modelos. A primeira é relativa ao

valor obtido para o índice de confiabilidade pelo modelo. Quanto maior o índice de confiabilidade do modelo melhor seu desempenho, pois maior sua proximidade com carga de colapso do modelo real. A outra se refere ao modo de ruptura do modelo. Na maioria dos casos, uma ruptura dúctil associada ao escoamento das armaduras deverá ser adotada pelo projetista estrutural. No capítulo 5 um exemplo será feito de modo a validar a metodologia proposta.

5 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Neste capítulo são apresentados quatro exemplos elaborados de forma que todas as propostas para geração automática de topologia e avaliação de desempenho dos modelos de bielas e tirantes que foram descritas nos capítulos 2, 3 e 4 serão utilizadas. Vários programas em linguagem MATLAB foram desenvolvidos para dimensionamento do modelo de bielas e tirantes, geração automática do modelo via otimização topológica e execução da análise de confiabilidade para verificação de desempenho. Com relação à análise de confiabilidade duas formulações foram implementadas: o método de simulação de Monte Carlo e o método analítico FORM.

A necessidade de geração de malhas bastante refinadas e com algoritmos que possibilitassem a utilização de elementos isoparamétricos triangulares ou quadriláteros, lineares e quadráticos, para posterior processo de otimização topológica, levou à utilização dos programas MTOOL e ELAST_2D desenvolvidos pelo grupo de pesquisa na linha de computação gráfica do TECGRAF da PUC-Rio.

Alguns programas que possuem seus códigos abertos na linguagem MATLAB disponibilizados na literatura técnica ou disponíveis via web foram também utilizados como base para as implementações numéricas propostas por este trabalho. Relacionados com otimização topológica foram utilizados os programas: 99 line topology optimization code (Sigmund, 2001), An 88 line topology optimization code (Andreassen et al., 2010) e PolyTop (Talischi et al., 2011). Relacionados com confiabilidade: FERUM (Haukaas e Der Kiureghian, 2003).

Nos exemplos de aplicação vale esclarecer alguns pontos que exigiram um enorme esforço para sua execução, mas que, não serão mostrados em função de uma maior compactação desejada para este trabalho. Em todos os processos de otimização topológica apresentados nos exemplos um estudo de refinamento de

malha foi executado, conjuntamente com estudo de raio mínimo e coeficiente de penalização. Isso foi feito até que os resultados apresentassem um modelo topológico satisfatório. Assim, apenas, os valores considerados satisfatórios pelo autor são apresentados durante os exemplos.

Na obtenção dos resultados relativos à análise de confiabilidade envolvida nos exemplos via método de Monte Carlo, um processo iterativo externo ao processo foi aplicado. Isso implica que os resultados apresentados são valores médios em função de várias rodadas do MC para uma mesma configuração estrutural.

Como a NBR 6118 (2007) não contempla orientações referentes à aplicação dos modelos de bielas e tirantes a estruturas de concreto armado o código normativo ACI 318 -05 (2005) foi utilizado como base para execução dos exemplos.

As variáveis aleatórias e determinísticas envolvidas nas análises realizadas serão apresentadas para cada exemplo e as equações de falha que estabelecem o limite entre os domínios de falha e segurança seguiram o procedimento explicado no capítulo 4.

A seguir, é descrito um resumo dos procedimentos adotados e executados nos exemplos apresentados.

5.1

Descrição dos Exemplos

No primeiro exemplo uma estrutura de viga parede simplesmente apoiada com uma carga central é resolvido. Cinco modelos topológicos diferentes são então comparados. Quatro modelos foram obtidos da literatura técnica e o quinto obtido via otimização topológica. Uma análise limite como problema de PL (*Programação Linear*) é então utilizada para comparar o desempenho de cada um dos modelos com relação ao seu nível de segurança. Para os dois modelos que apresentaram desempenho mais satisfatório uma metodologia probabilística para verificação da segurança e avaliação da ductilidade com base no método de Monte Carlo é exemplificada. No modelo hiperestático uma solução de mínima norma Euclidiana é utilizada para obtenção dos esforços. Uma modificação de projeto é

então proposta, no modelo com melhor desempenho, visando a diminuição na espessura da estrutura (economia de material) mantendo, no entanto, os níveis de segurança e ductilidade aceitáveis.

Para o segundo exemplo uma estrutura de concreto armado do tipo transversina de ponte é utilizada. É feita uma análise comparativa do desempenho de três modelos topológicos diferentes. Dois deles foram retirados da literatura técnica existente e o terceiro obtido via processo de otimização topológica. Para execução da análise comparativa do desempenho dos modelos apenas uma análise de confiabilidade com a utilização do método de Monte Carlo é feita. Um estudo da ductilidade do modelo é feito com base nos seus correspondentes modos de falha. Também um estudo sobre a influência na segurança do modelo relacionada à utilização de diferentes valores de resistência dos nós e bielas presentes nos códigos normativos é feita.

O terceiro exemplo é uma estrutura de viga parede em concreto armado simplesmente apoiada e com um balanço numa das laterais. Uma análise comparativa do desempenho dos modelos topológicos é feita via análise de confiabilidade utilizando o método FORM e tendo uma análise limite como subproblema. Foram utilizados dois modelos topológicos existentes na literatura e um terceiro obtido via processo de otimização topológica. Para o modelo com melhor desempenho uma avaliação das sensibilidades das variáveis aleatórias envolvidas no problema é feita antes e após o escoamento das armaduras e a participação das variáveis aleatórias envolvidas no nível de segurança da estrutura avaliadas. Também algumas propostas de modificações de projeto como a variação na espessura da estrutura e modificações na taxa de armadura são feitas e comentadas. Um estudo sobre a influência na segurança da estrutura relacionada à utilização de diferentes valores de resistência dos nós e bielas presentes nos diferentes códigos normativos é feita.

No quarto exemplo uma estrutura de concreto armado com geometria complexa e submetida a uma variação de carregamentos independentes é analisada. Nesse caso uma envoltória de topologia é montada para concepção final do modelo. Dois diferentes modelos topológicos são então propostos e uma análise da segurança é feita para um nível de carregamento fixo. A análise de

confiabilidade é feita via método FORM tendo análise limite como subproblema de modo a obter o modelo topológico com melhor desempenho.

Vale mencionar que, em todos os exemplos apresentados neste trabalho, apenas os modos de falha essenciais, ou seja, aqueles que governaram o comportamento da estrutura foram graficamente representados. Esse procedimento foi adotado para tornar mais claro os resultados obtidos nas análises. Também a escala dos mapas de cores foi omitida em todos os exemplos uma vez que a função dos mesmos é apenas qualitativa.

5.2 Primeiro Exemplo de Aplicação

5.2.1 Apresentação da estrutura

O exemplo de viga parede utilizado no primeiro exemplo foi retirado do ACI 318-05 (2005) sendo suas unidades transformadas para o Sistema Internacional de Unidades – SI e seus valores fracionados arredondados. A estrutura considerada é uma viga parede simplesmente apoiada de seção retangular constante cujo desenho esquemático é mostrado na Figura 5.1.

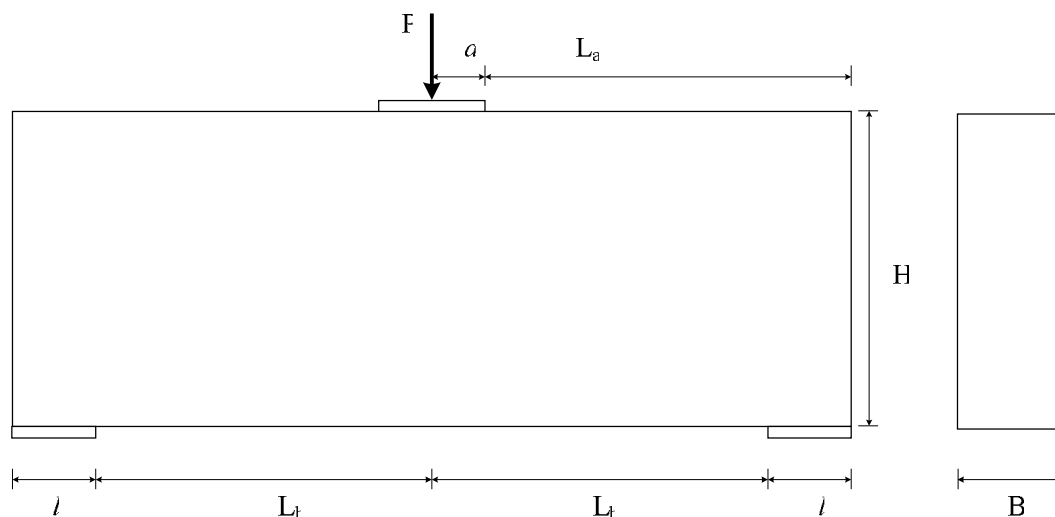


Figura 5-1: Viga parede simplesmente apoiada com carregamento centrado do ACI 318-05 (2005).

Uma carga total P é aplicada de forma centrada na viga sendo dividida em duas parcelas iguais de carga permanente e acidental. A resistência à compressão

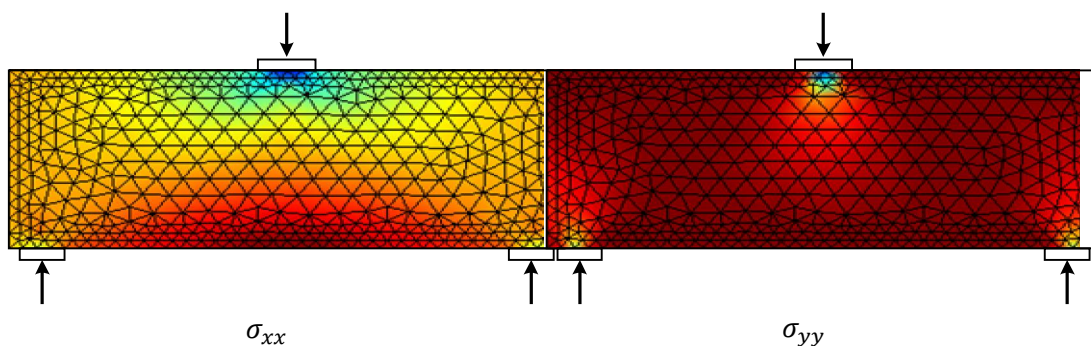
característica do concreto é de 20 MPa, a resistência à tração característica do aço das armaduras é de 50 MPa e as propriedades geométricas da estrutura são $H = 100$ cm; $B = 50$ cm, espessura = 40 cm, $L_a = 85$ cm, $L_b = 70$ cm, $l = 30$ cm e $a = 15$ cm.

Devido à relação entre altura e vão da estrutura descrita acima, não é permitido o uso da hipótese de Bernoulli. Em casos como esse, o modelo de bielas e tirantes é comumente utilizado. Conforme explicado no capítulo 3 a concepção topológica do modelo é uma fase de bastante importância e que normalmente norteia o funcionamento do modelo. Para o presente exemplo uma análise elástica linear será feita, de modo qualitativo, para ser avaliada em conjunto com os modelos obtidos via otimização topológica ou mesmo presentes na literatura.

5.2.2 Análise elástica

Uma análise elástica é então feita considerando um caso de tensão plana pelo programa ELAST_2D. Foram considerados um coeficiente de Poisson no valor de 0.18 e um módulo de elasticidade igual a 20 GPa. Os resultados em forma de tensões estão apresentados através do mapa de cores conforme mostrado na Figura 5.2.

O fluxo relativo às tensões principais e um desenho com o campo de deslocamento foram feitos e são apresentados na Figura 5.3. No desenho do fluxo das tensões principais, a cor vermelha representa as tensões principais de tração e a cor azul representa as tensões principais de compressão.



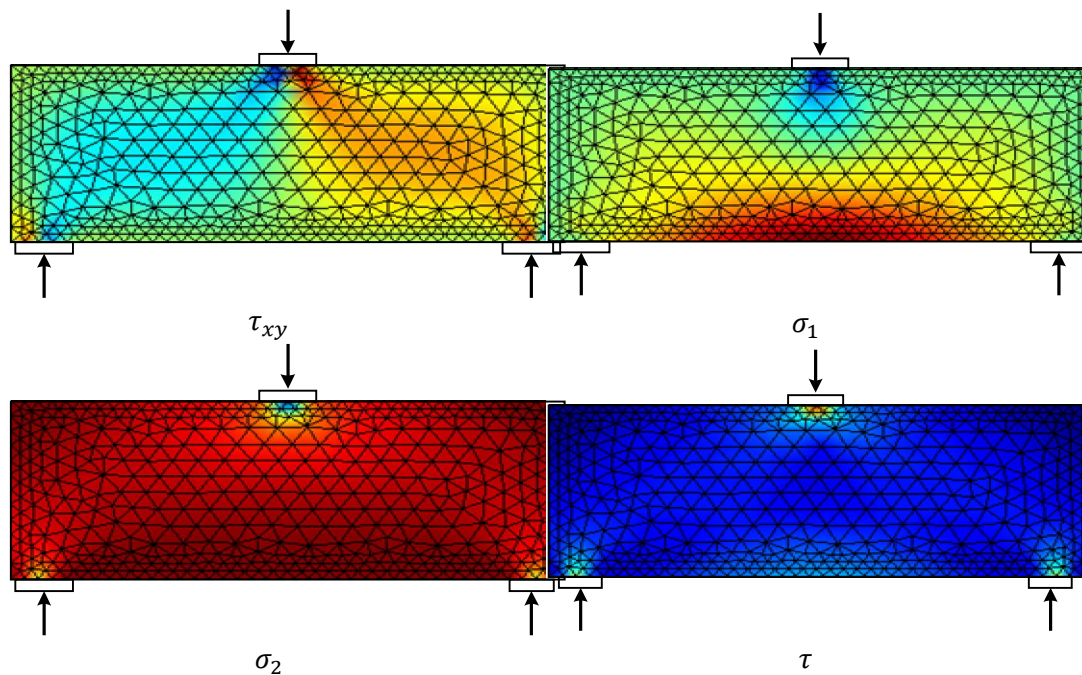


Figura 5-2: Mapas de cores relativos às tensões elásticas da viga parede simplesmente apoiada com carregamento centrado.

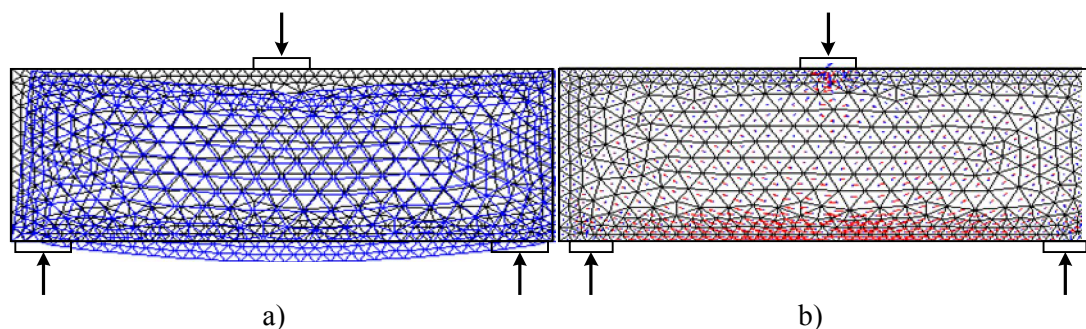


Figura 5-3: Mapas de cores relativos às tensões elásticas da viga parede.

5.2.3 Otimização topológica

A Figura 5.4 apresenta a topologia obtida via otimização topológica com aplicação de simetria, para a estrutura analisada. O problema de otimização de topologia foi formulado como um problema de distribuição de material no contínuo via modelo SIMP cuja formulação foi apresentada no capítulo 3. Essa modelagem busca a topologia ótima para uma estrutura através da aplicação de um material isotrópico com penalização. Uma malha com 7500 elementos quadriláteros de 4 nós foi utilizada de forma a distribuir o material no seu interior. Uma fração de volume de 25% do volume inicial foi adotada como

equação de restrição no processo de otimização. Nesse exemplo nenhum elemento indutor foi utilizado.

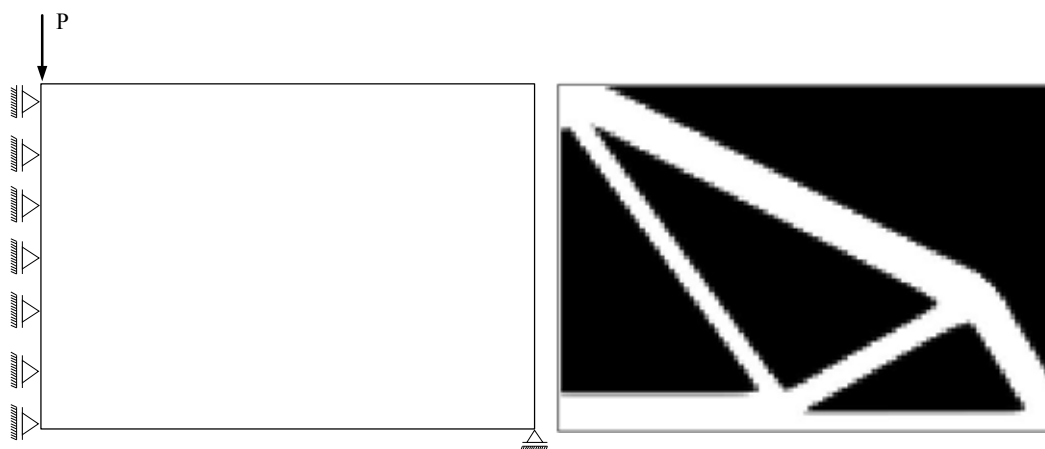


Figura 5-4: Resultado da otimização Viga parede simplesmente apoiada com carregamento centrado do ACI 318-02 (2002).

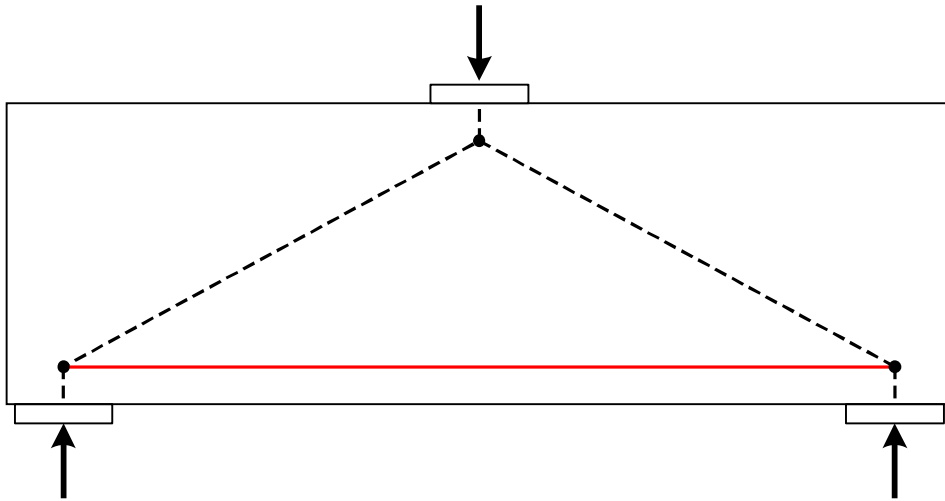
Figura 5.4:

É possível verificar que o resultado da análise elástica e do fluxo de tensões coincide com o resultado do processo de otimização topológica na formação da biela de tração na parte inferior e na concentração do nó superior. A parte interna, entretanto, dificilmente poderia ser imaginada apenas com o uso da análise linear e do fluxo de tensões principais.

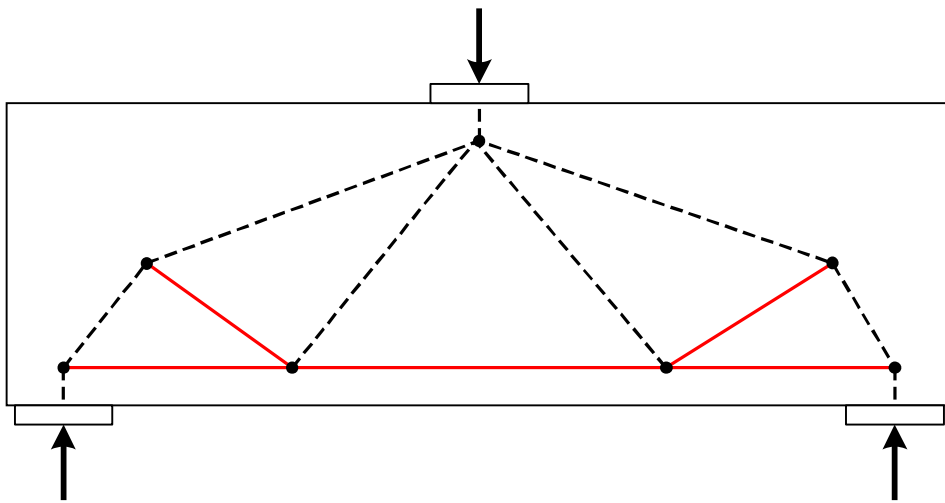
5.2.4 Modelos de bielas e tirantes considerados

Cinco modelos topológicos são então propostos para representação da estrutura considerada (Figura 5.5). O modelo 1 foi retirado do ACI 318-02 (2002), o modelo 2 foi obtido via otimização topológica, os modelos 3 e 4 foram analisados em ensaios por Brown e Bayrak (2008) e o modelo 5 exemplificado como um modelo inadequado em Macgregor (1988).

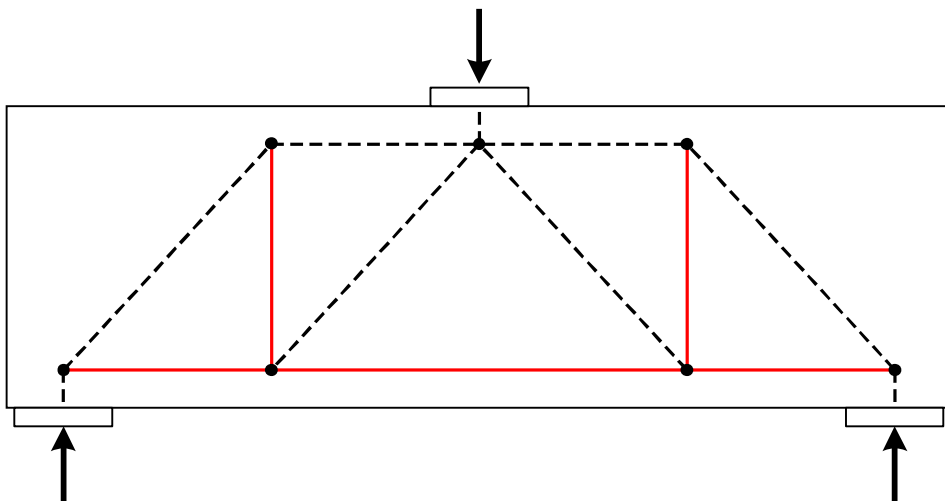
Observa-se uma razoável modificação na topologia dos modelos se comparamos o modelo proposto pelo ACI 318-05 (2005) com os outros. Isso mostra como é possível a obtenção de modelos topológicos distintos, estaticamente admissíveis, capazes de representar o encaminhamento de cargas no interior do contínuo para uma estrutura submetida a um mesmo carregamento.



Modelo 1



Modelo2



Modelo3

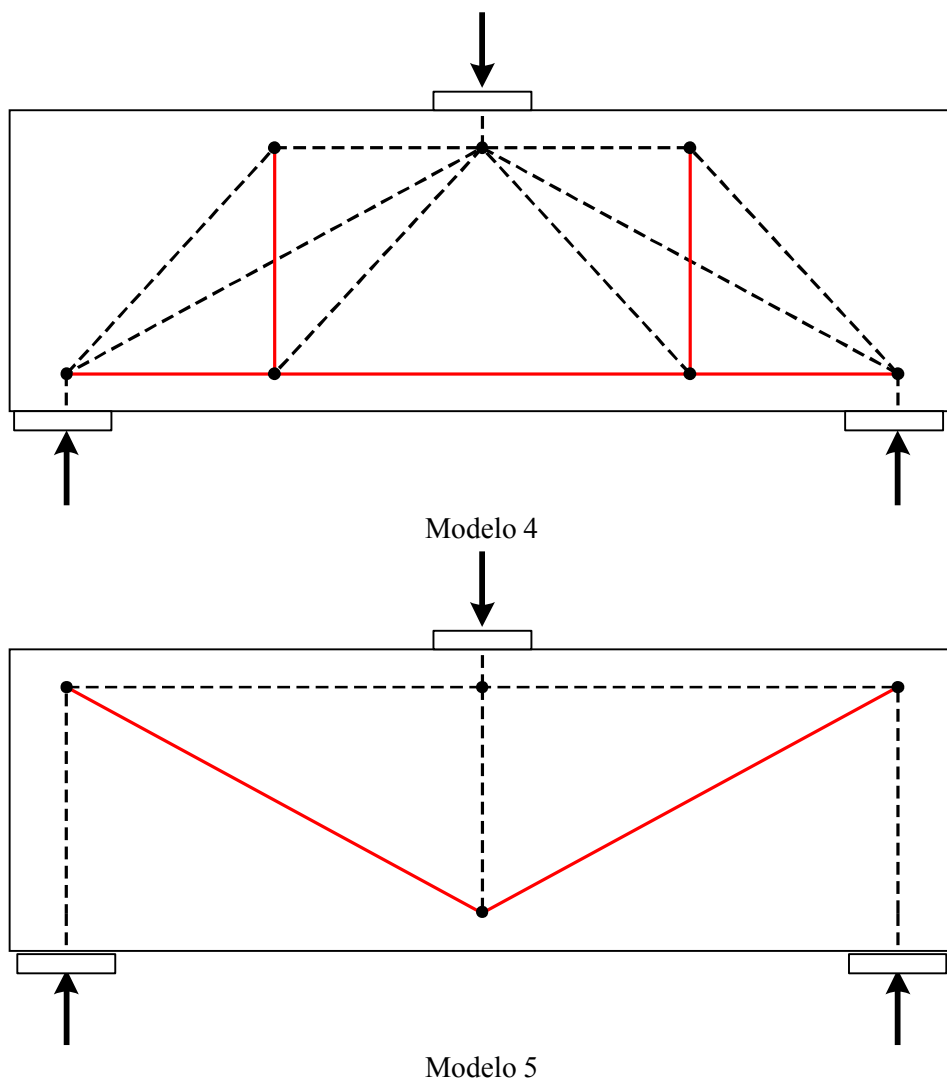


Figura 5-5: Modelos topológicos possíveis para representação da viga parede.

5.2.5 Parâmetros e métodos para execução da análise de confiabilidade

Neste exemplo são consideradas como variáveis aleatórias a resistência à compressão do concreto (f_c), a resistência à tração do aço das armaduras (f_y), uma parcela permanente do carregamento (P_g), uma parcela acidental (P_q), um fator para modelagem das resistências (Φ_R) e um fator de modelagem dos carregamentos (Φ_S). Na verdade, a fator de modelagem dos carregamentos foi apenas incluído nas equações do problema sendo, na verdade, desconsiderado através dos valores adotados. A tabela 5. 1 mostra os valores considerados para as variáveis aleatórias do problema durante a análise de confiabilidade. Para execução da análise de confiabilidade do problema o método de simulação de Monte Carlo foi utilizado. Uma variação nos valores característicos da resistência

à compressão foi feita e sua influência nos níveis de segurança e modos de falha observados.

Tabela 5-1: Modelos probabilísticos das variáveis aleatórias do exemplo 1

Variável Aleatória	Valor Característico	Média	Desvio Padrão	Coefficiente de Variação (%)	Distribuição
f_c (MPa)	20	26.6	4	17	Lognormal
f_y (MPa)	500	560	30	5	Lognormal
P_g (kN)	1000	915.5	45.8	5	Normal
P_q (kN)	1000	900	270	30	Gumbel
ϕ_R	-	1.32	0.24	18	Lognormal
ϕ_S	-	1.0	0.02	2	Lognormal

A formulação baseada em confiabilidade proposta nesse trabalho considera os aspectos randômicos existentes nas variáveis do problema através de suas correspondentes distribuições de probabilidades, valores médios e desvios padrão. O método de simulação do tipo Monte Carlo é então aplicado em cada modelo e os valores de índices de confiabilidade e razões de probabilidade obtidas para avaliação do modelo. Nesse trabalho, em cada iteração do processo de simulação, 15.000.000 de valores randômicos para cada uma das variáveis foram gerados para obtenção de valores médios e coeficientes de correlação relativos aos resultados obtidos. Esse enorme número de dados só foi possível devido à relativa simplicidade dos modelos considerados levando a equações de falha explícitas para cada modo de falha.

Inicia-se com o dimensionamento dos modelos de bielas e tirantes para cada modelo. Isso é feito antes da execução da análise de confiabilidade do modelo. Apenas após a determinação dos valores de projeto do modelo é possível aplicar uma análise de confiabilidade no modelo e avaliação do seu desempenho. Os modos de falha referentes aos modelos considerados são: esmagamento dos nós, esmagamento das bielas e escoamento das armaduras. Não foram verificados os modos de falha referentes aos comprimentos de ancoragem das armaduras.

5.2.6 Avaliação de desempenho

Uma hipótese simplificadora foi adotada neste exemplo. O valor da largura das bielas comprimidas tem um valor constante de 40 cm com base nos resultados apresentados no ACI 318-02 (2002). Isso parece estar de acordo com uma

orientação específica do ACI 318-05 (2005) que permite que seja adotado para largura da biela um valor igual à espessura da viga parede. A adoção desta hipótese conduz a uma maior uniformidade na avaliação dos modelos permitindo uma análise da ductilidade do mesmo. Para montagem das funções de falha de cada modelo um procedimento semelhante ao descrito no capítulo 3 item 3.4.2 foi adotado.

Inicialmente, uma análise limite foi executada como um problema de PL. Para isso, as equações de equilíbrio de cada nó foram montadas e os valores específicos relativos às resistências das bielas de compressão e de cada nó considerados conforme descrito no capítulo 2.

A Figura 5.6 mostra o desempenho dos modelos topológicos considerados com a variação da resistência à compressão do concreto. Observa-se que o modelo 4 foi o que apresentou melhor desempenho. É possível verificar que a carga de colapso do modelo 4 independe do f_{ck} do concreto para intervalo de valores adotado. Isso significa que o escoamento das armaduras aconteceu antes que houvesse qualquer tipo de esmagamento nas bielas garantindo ductilidade ao modelo.

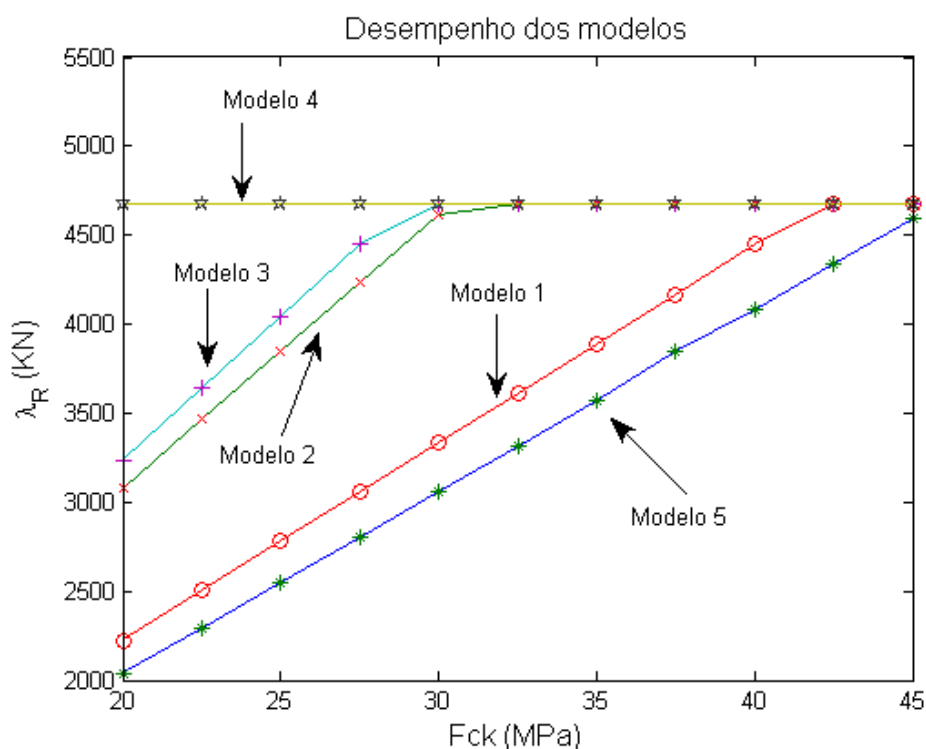


Figura 5-6: Variação da carga de colapso dos modelos com relação ao aumento do f_{ck} .

Os outros quatro modelos tiveram desempenho inferior ao modelo 4 sendo que os modelos 2 e 3 obtiveram desempenhos parecidos atingindo o escoamento das armaduras para valores de f_{ck} acima de 30 MPa. Os modelos 1 e 5 foram os que obtiveram os piores valores de desempenho. O modelo 1 se mostrou bastante frágil atingindo o patamar de escoamento das armaduras apenas para valores acima de 42 MPa.

O modelo 5 foi o que mostrou o pior desempenho, não conseguindo apresentar escoamento das armaduras no intervalo de f_{ck} adotado. Isso já era esperado para esse modelo uma vez que é apresentado em Macgregor (1997) como um modelo baixo desempenho.

A metodologia proposta contrapõe as orientações propostas por Schlaich et al (1987) responsáveis pela generalização do método das bielas e tirantes e que são baseadas em conceitos de energia de deformação. Segundo esse critério o modelo 1 seria o mais indicado pois possui menos armadura comparativamente aos outros.

Em seguida uma análise de confiabilidade é aplicada aos modelos 3 e 4, de melhor desempenho, para verificação do nível de segurança e ductilidade dos modos de falha. O método de Monte Carlo foi utilizado neste caso. A Figura 5.7 mostra que o modelo 4 possui um nível de segurança melhor do que o modelo 3. Também é possível verificar que probabilisticamente o modelo 4 atinge seu nível de segurança máximo para valores de f_{ck} acima de 25 MPa, muito antes do modelo 3. Isso significa que o modelo 4 é um modelo mais dúctil e que é normalmente buscado pelos projetistas estruturais.

A Figura 5.8 mostra como a razão de falha varia com o aumento do f_{ck} do modelo 3. Um ponto de transição (PT) pode então ser verificado. A partir dele a probabilidade de ocorrer o escoamento das armaduras (falha dúctil) supera a probabilidade de ocorrência de um esmagamento do concreto (falha frágil). O gráfico mostra que para o modelo 3 valores de f_{ck} abaixo de 30 MPa levariam a uma probabilidade de ocorrência muito alta para o modo de falha relativo ao esmagamento do concreto.

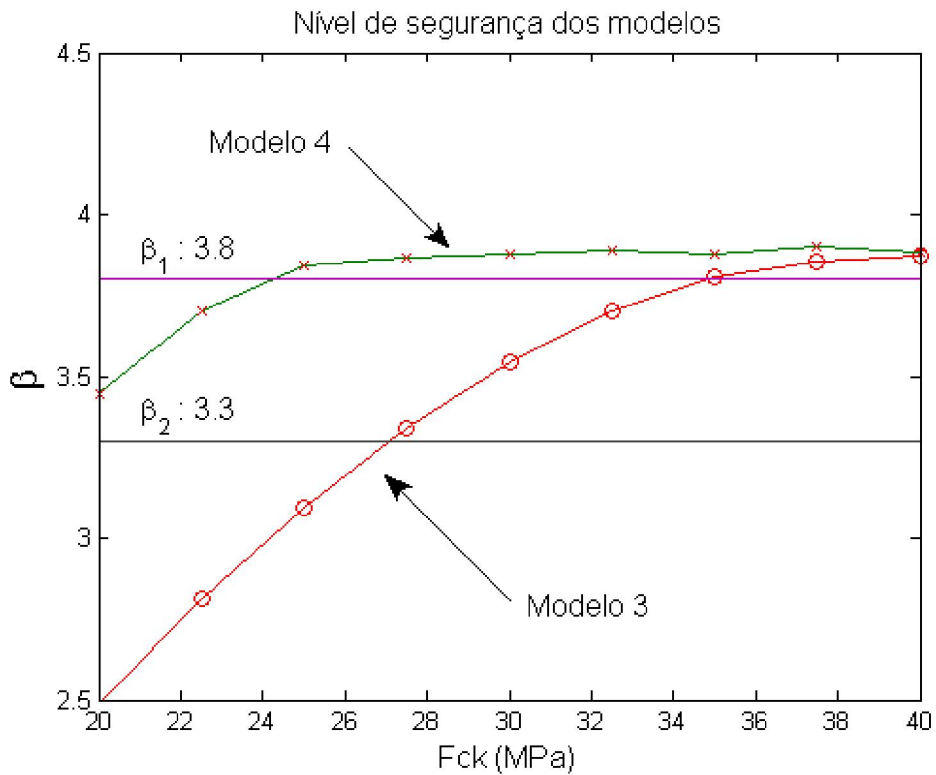


Figura 5-7: Variação do nível de segurança dos modelos 3 e 4 com a variação do f_{ck} .

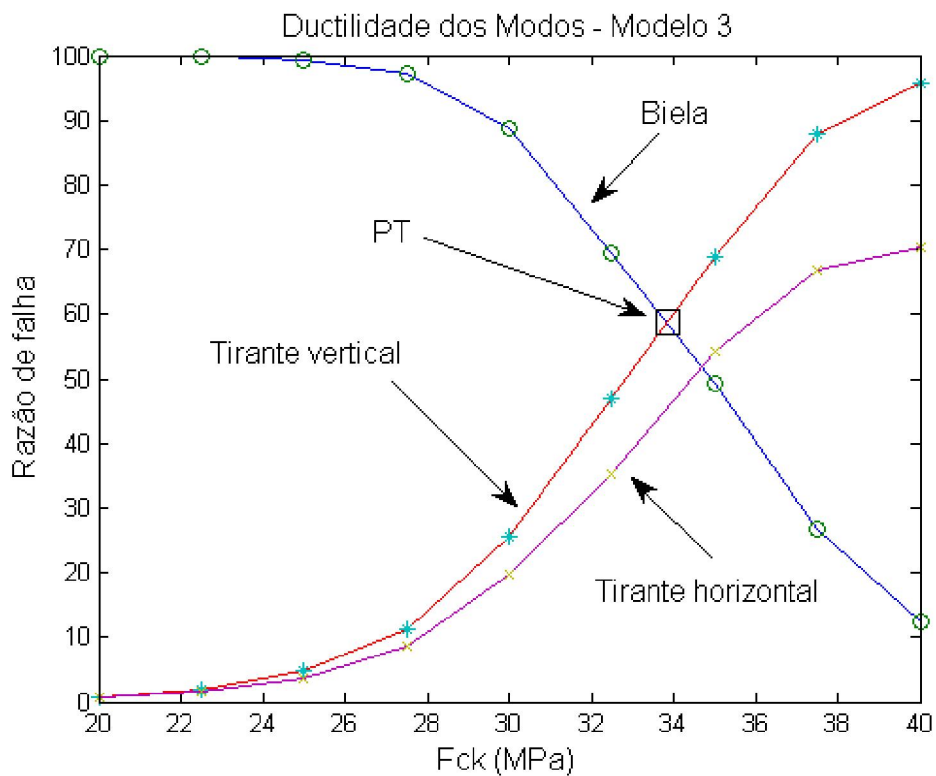


Figura 5-8: Variação da razão de falha dos modos principais do modelo 3 com o aumento do f_{ck} .

O modelo 4 é um modelo hiperestático pois é impossível apenas com base nas equações de equilíbrio determinar os esforços internos devido ao carregamento aplicado. Assim, uma solução de mínima norma conforme descrito no capítulo 2 é utilizada. Conforme apresentado, a única alteração a ser feita num programa de cálculo de treliças planas convencionais é a modificação referente a matriz de rigidez do elemento de treliça desconexo. Uma vez modificada, a solução da estrutura completa será uma solução de mínima norma. É importante salientar que os valores dos deslocamentos obtidos para a estrutura com a solução de via mínima norma Euclidiana não apresentam nenhum significado físico.

A ductilidade do modelo 4 está mostrada na Figura 5.9. Para esse modelo o ponto de transição (PT) possui uma localização mais a esquerda do gráfico. Isso que significa que a transição em termos probabilísticos entre o modo de falha frágil (esmagamento do concreto) e o modo de falha dúctil (escoamento do aço) acontece para valores bem mais baixos de f_{ck} do que para o modelo 3. Teoricamente, valores de f_{ck} acima de 30 MPa já garantiriam uma razão de falha dúctil muito superior ao da falha frágil. Também é possível verificar que o tirante vertical é o modo de falha que governa o colapso da estrutura neste caso.

De modo a exemplificar o ganho da aplicação do uso da análise de confiabilidade no projeto de estruturas de concreto armado uma modificação visando uma diminuição de custo é proposta para o modelo 4. Partindo da hipótese que um aumento de f_{ck} poderia acarretar uma melhora do desempenho da estrutura com relação a sua durabilidade uma diminuição na espessura da peça é proposta passando de 50 cm para 40 cm. Assim, uma nova análise de confiabilidade foi executada e os resultados em termos de nível de segurança apresentados na Figura 5.10.

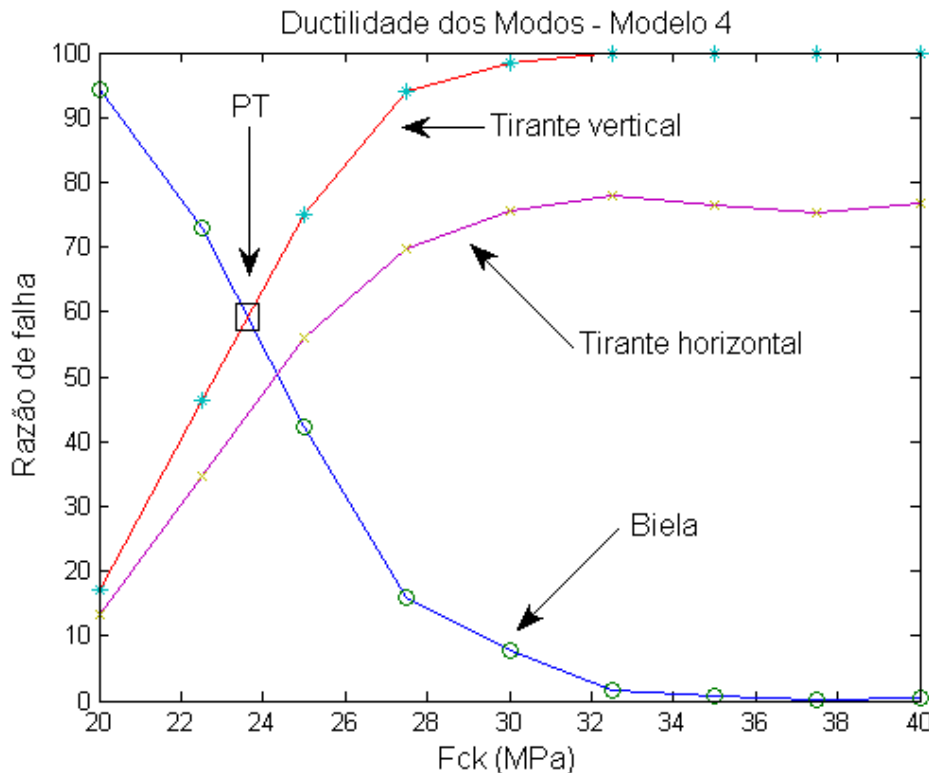


Figura 5-9: Variação da razão de falha dos modos principais do modelo 4 com o aumento do f_{ck} .

Com a variação a menor, da espessura, da estrutura o modelo 4 apresentou uma diminuição no desempenho, se tornando um modelo menos seguro e mais frágil. Isso pode ser observado graficamente uma vez que os valores do índice de confiabilidade β diminuem do modelo 4 original para o modelo 4 modificado. Isso, no entanto, acontece apenas no trecho inicial com valores de f_{ck} baixos. Para valores maiores acima de 35 MPa o escoamento da armadura acontece e a carga de colapso volta ao mesmo valor. Isso também pode ser observado com a mudança gráfica de posição do ponto de transição. O deslocamento do ponto de transição mais para direita mostra o modelo se tornando mais frágil e exigindo valores maiores para escoamento da armadura (Figura 5.11). Com aumento nos valores de f_{ck} de 25 MPa para 35 MPa é possível restituir ao modelo 4 uma razão de falha dúctil superior a razão de falha frágil.

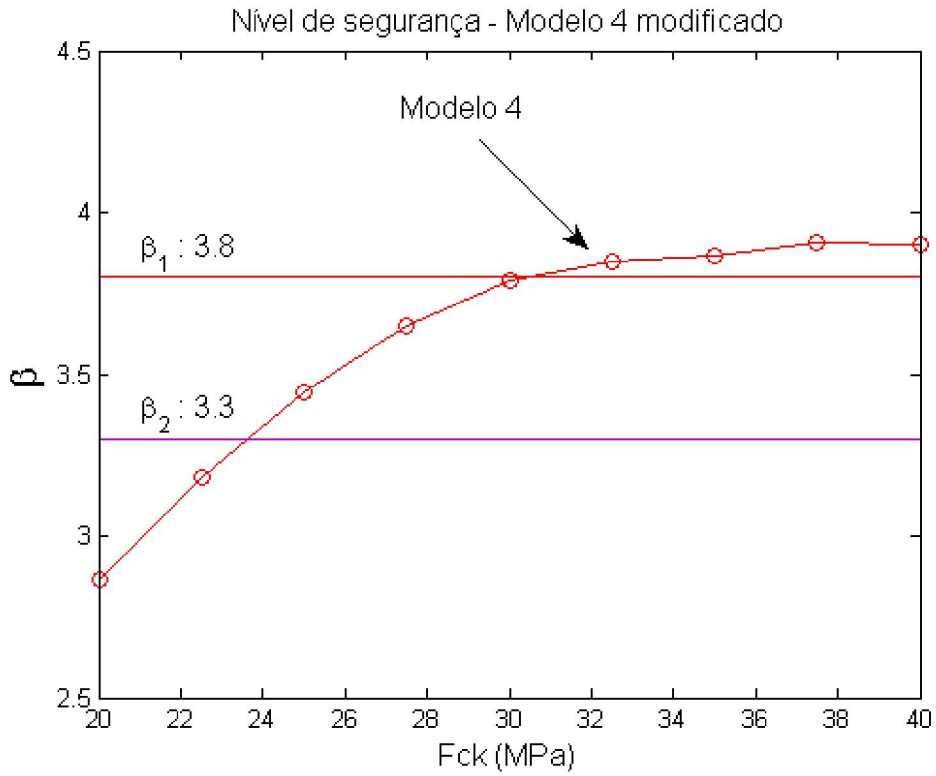


Figura 5-10: Variação do nível de segurança do modelo 4 modificado com aumento do f_{ck} .

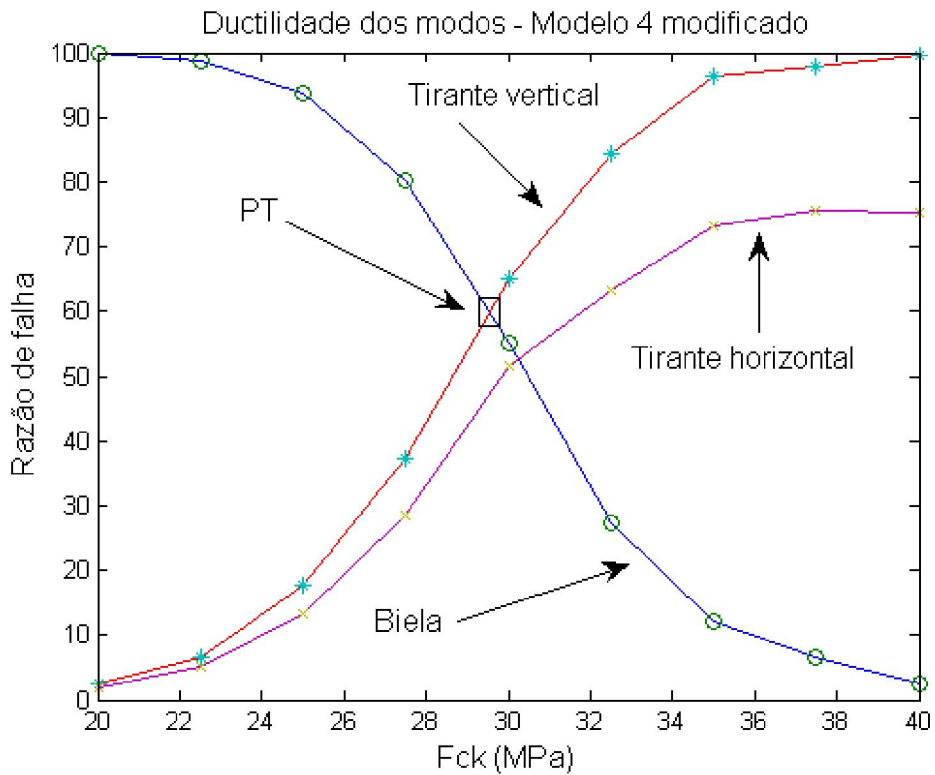


Figura 5-11: Ductilidade do modelo 4 modificado com aumento do f_{ck} .

É possível também traçar um gráfico onde fique claro qual valor necessário de f_{ck} que garanta uma maior probabilidade do modo de falha dúctil sobre o modo de falha frágil. A Figura 5.12 mostra a razão de ductilidade T definida no capítulo 4 para o modelo 4 modificado. Valores de f_{ck} superiores a 30 MPa, ou seja para $T > 1$, as probabilidades de escoamento das armaduras serão maiores do que as probabilidades de esmagamento do concreto.

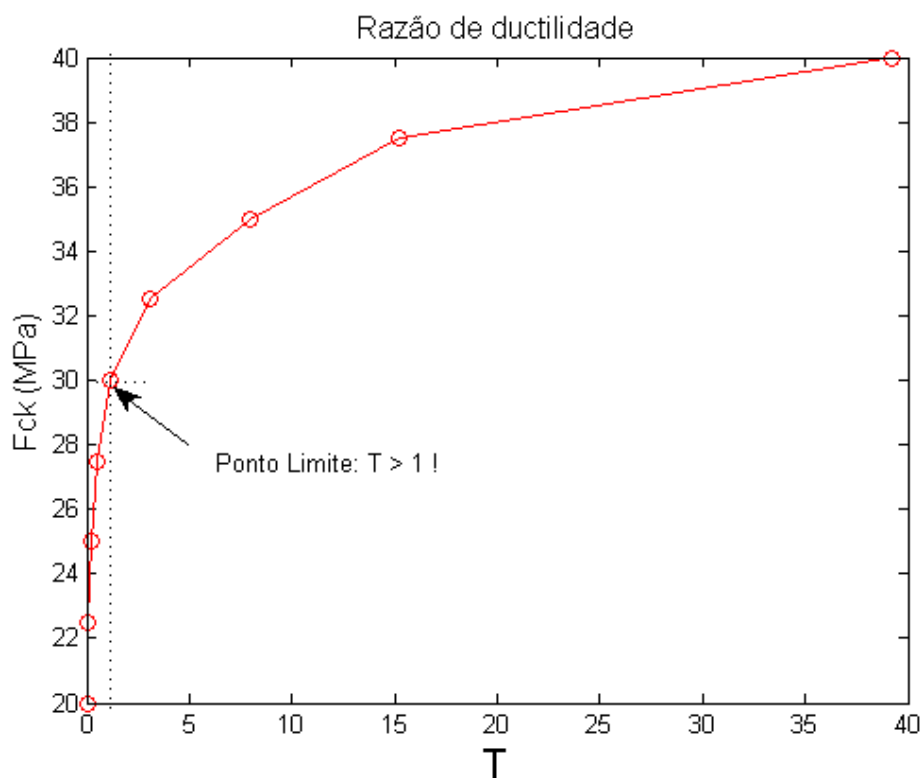


Figura 5-12: Variação da razão de ductilidade do modelo 4 modificado com aumento do f_{ck} .

Os resultados apresentados no exemplo 1 mostraram como é possível verificar o desempenho de modelos topológico com relação a sua carga de colapso via análise limite e com relação ao seu nível de segurança e ductilidade através da análise de confiabilidade. Os conceitos aplicados aos modelos de bielas e tirante do exemplo 1 mostraram um real ganho com relação aos modelos semi-probabilísticos adotados atualmente na norma brasileira. Primeiro possibilitam uma análise completa do nível de segurança da estrutura como também permitem que os modos de falha sejam identificados e quantificados de modo muito simples. Isso é bastante vantajoso do ponto de vista do projeto de estruturas, pois,

permite ao projetista escolher de um modo bastante criterioso como dimensionar sua estrutura. Apesar de serem amplamente utilizados neste trabalho de pesquisa os conceitos aqui apresentados são totalmente gerais, e podem ser aplicados a estruturas de concreto armado de diversos tipos e com objetivos bastante diferentes.

5.3 Segundo Exemplo de Aplicação

5.3.1 Apresentação da estrutura

O segundo exemplo de aplicação é uma transversina de ponte com geometria simétrica e carregamento assimétrico, cujas propriedades geométricas, carregamentos e dados de materiais foram apresentados no trabalho de Reineck e Novak (2010). Um desenho esquemático com um detalhamento geométrico é apresentado na Figura 5.13.

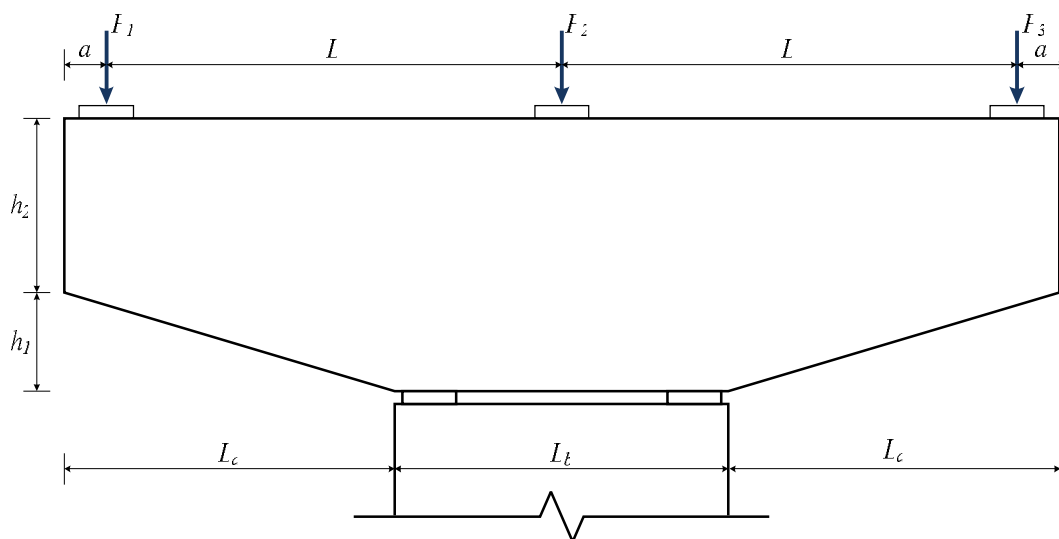


Figura 5-13: Transversina de ponte simplesmente apoiada com carregamento assimétrico.

Alguns valores para geometria e carregamento da transversina foram arredondados ou mesmo modificados de forma a simplificar a apresentação do exemplo. Os valores adotados no exemplo 2 são: $h_1 = 70$ cm, $h_2 = 122$ cm, $L = 366$ cm, $L_a = 263$ cm, $L_b = 274$ cm, $a = 34$ cm, $P_1 = 2040.5$ kN, $P_2 = 1169$ kN e $P_3 = 290.5$ kN. O carregamento atuante é assimétrico.

5.3.2 Análise elástica

Inicialmente uma análise elástica foi executada via programa ELAST2D para posterior verificação e análise dos resultados obtidos. Um valor de módulo de elasticidade igual a 200 *GPa* foi utilizado com coeficiente de Poisson igual 0.18.

A Figura 5.14 mostra os mapas coloridos em termos de tensões para o exemplo 2. De modo similar ao exemplo 1 nenhuma barra de cores com escala de valores foi feita, pois, a avaliação das tensões é apenas qualitativa. Para o fluxo de tensões principais do exemplo 2 apresentado na Figura 5.15 a cor vermelha representa as tensões principais de tração e a cor azul representa as tensões principais de compressão.

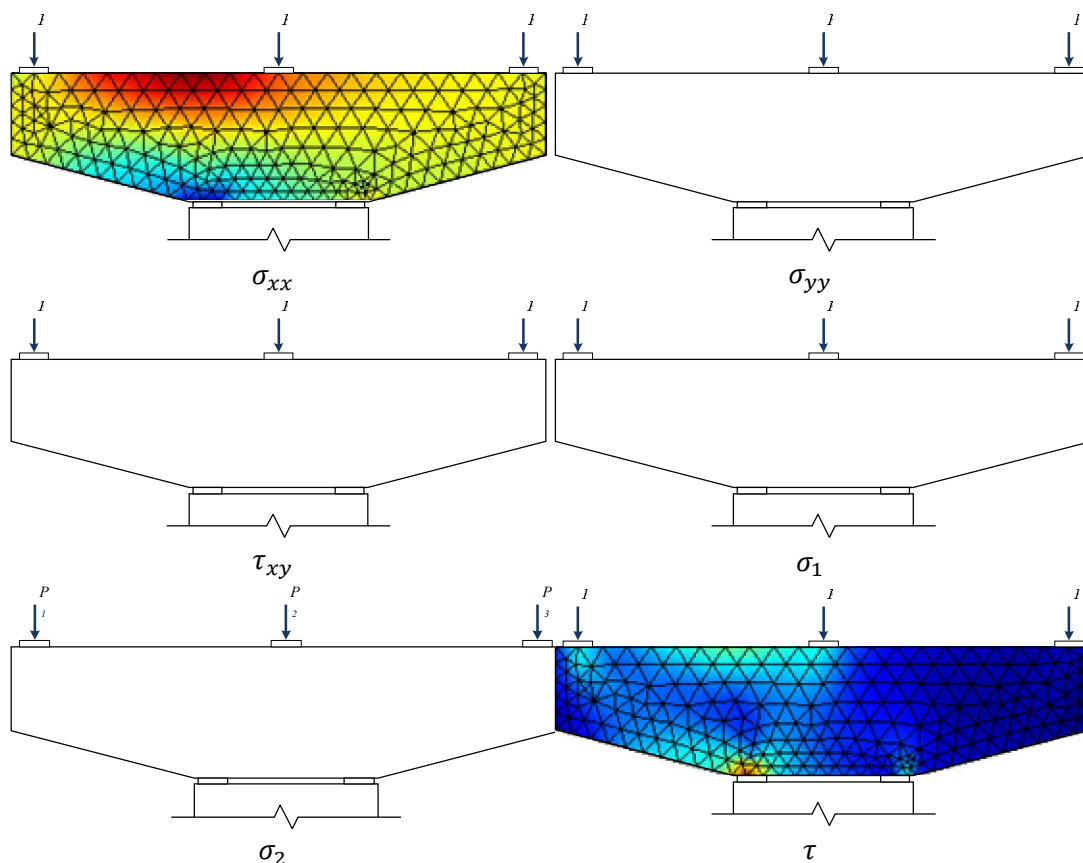


Figura 5-14: Mapa colorido das tensões elásticas da transversina com carregamento assimétrico.

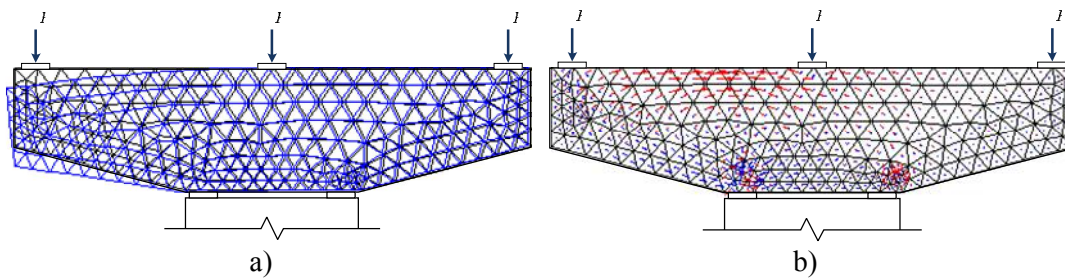


Figura 5-15: Análise elástica da transversina com carregamento assimétrico: a) Deformações elásticas e b) Fluxo das tensões principais.

5.3.3 Otimização topológica

Para o processo de otimização topológica da transversina um número de 17.232 elementos triangulares lineares foram utilizados. Um coeficiente de penalização igual a 3 e um raio mínimo igual a 5 foram adotados, além de uma fração do volume inicial no valor de 25 %. O processo de otimização é mostrado na Figura 5.4 em cinco etapas diferentes (Figura 5.16).

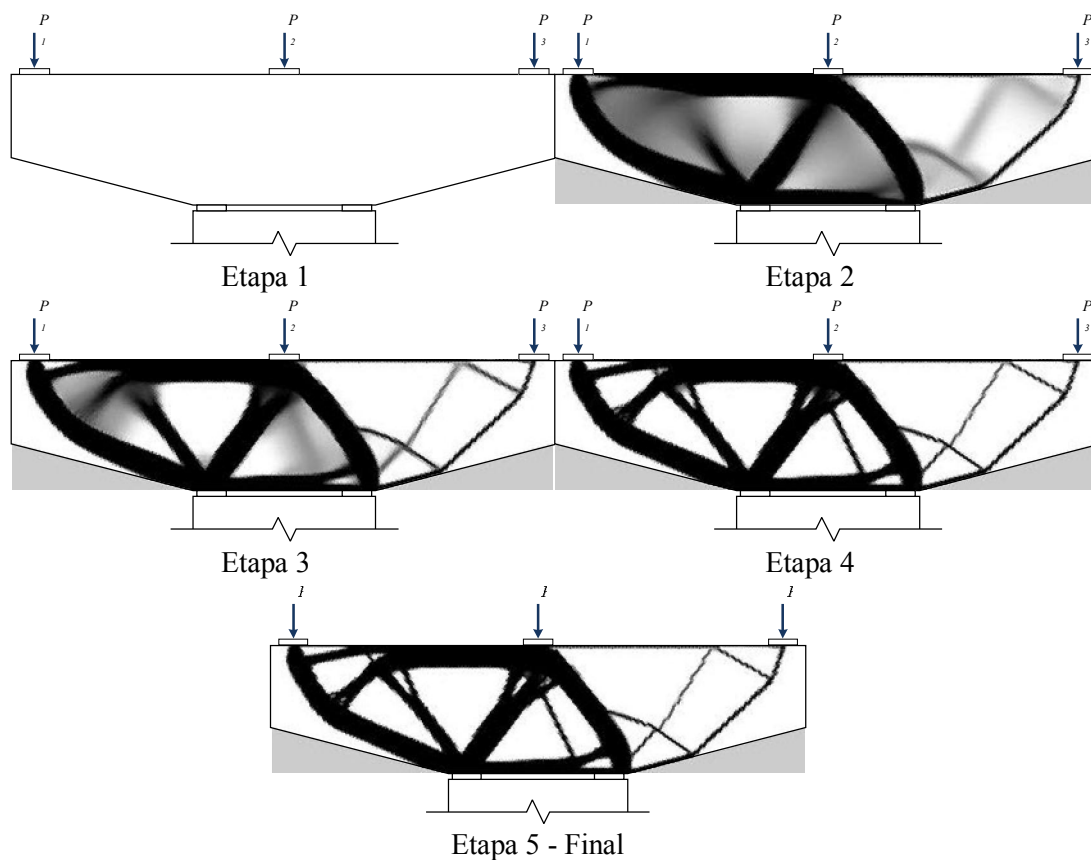
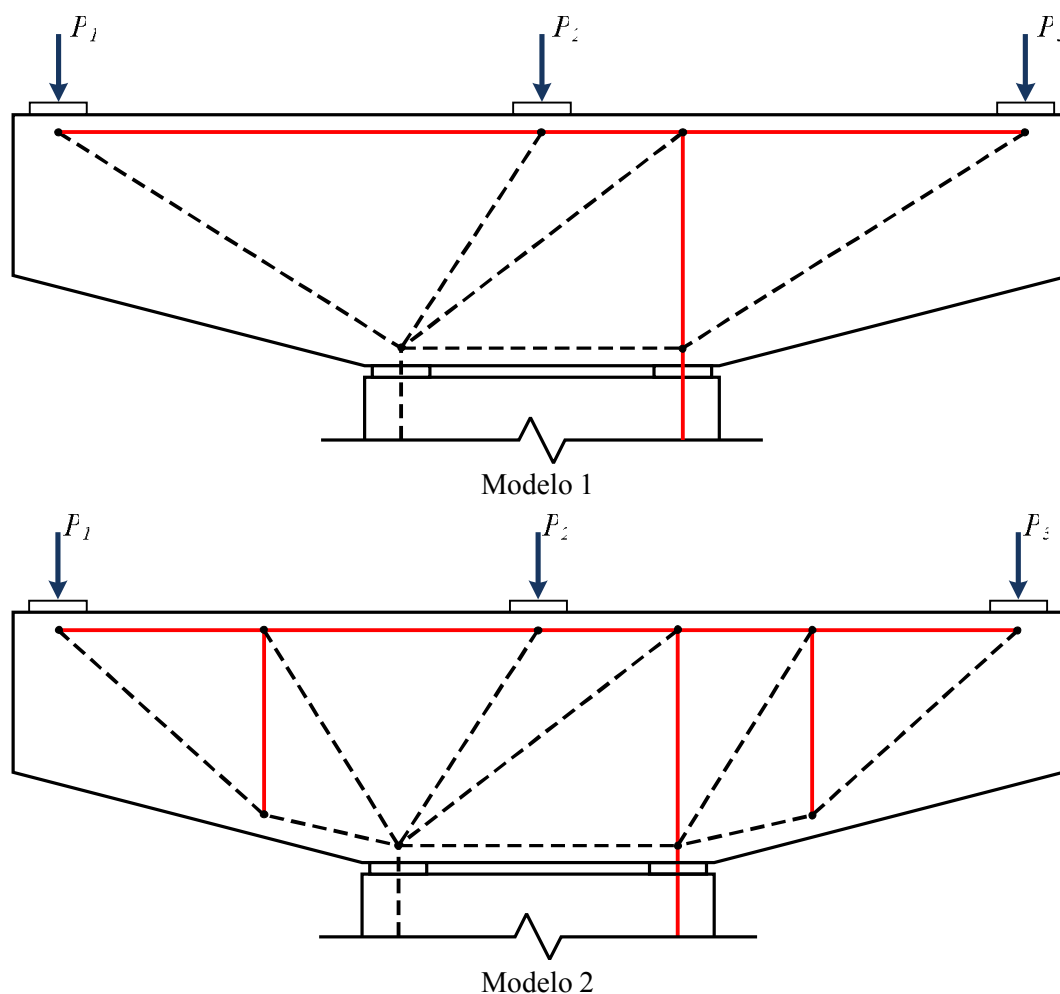


Figura 5-16: Desenvolvimento do processo de otimização topológica da transversina com carregamento assimétrico em 5 etapas diferentes.

Observa-se que a assimetria presente no carregamento da transversina influencia diretamente no modelo topológico obtido. Vale ressaltar que especificamente neste caso, o resultado topológico apresenta uma série de barras inclinadas que dificultariam tremendamente o posicionamento das armaduras durante sua execução na obra. Entretanto, como veremos a seguir a presença de barras inclinadas pressupõem a existência de esforços de tração numa determinada região. Isso também aconteceu no exemplo 1 (Figura 5.4 e 5.5). Ao contrário de invalidar a técnica isso auxilia e muito o projetista que com essa indicação pode colocar barras verticais posicionadas nestes locais. Isso será mostrado a seguir nos modelos de bielas e tirantes considerados.

5.3.4 Modelos de bielas e tirantes considerados



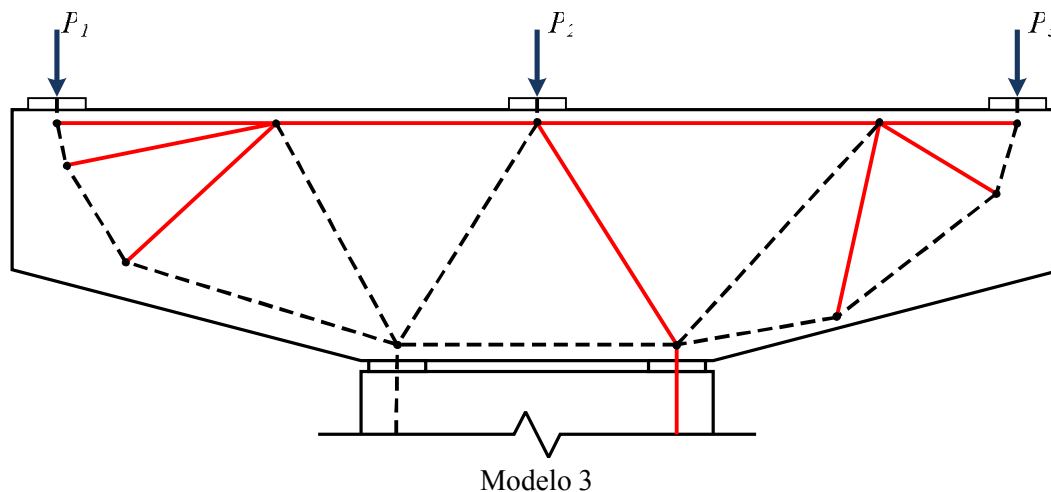


Figura 5-17: Modelos topológicos da transversina utilizados na avaliação de desempenho.

Três modelos topológicos foram considerados como candidatos a avaliação de segurança via confiabilidade. Dois deles são apresentados no trabalho de Reineck e Novak (2010) e um terceiro obtido via otimização topológica (Figura 5.17). É importante notar como o modelo 2 guarda uma relação com modelo 3. Enquanto o modelo 1 possui apenas uma barra vertical na região central, os modelos 2 e 3 possuem barras verticais e inclinadas nas regiões dos balanços. Isso mostra que a ocorrência de barras inclinadas com esforços de tração via otimização topológica (modelo 3) indicam a necessidade de uma armadura de tração naquela região. No modelo 2 uma armadura vertical sem nenhuma inclinação, o que é muito melhor considerando os aspectos construtivos, foi colocada para combater as trações.

5.3.5 Parâmetros e métodos para execução da análise de confiabilidade

No exemplo 2 são consideradas como variáveis aleatórias a resistência à compressão do concreto (f_c), a resistência à tração do aço das armaduras (f_y), três parcelas do carregamento permanente (P_{iq}), três parcelas do carregamento acidental (P_{iq}), um fator para modelagem das resistências (ϕ_R) e um fator de modelagem dos carregamentos (ϕ_S). O fator de modelagem dos carregamentos foi desconsiderado através dos valores adotados. A tabela 5.2 mostra os valores considerados para as variáveis aleatórias do problema durante a análise de confiabilidade.

Tabela 5-2: Modelos probabilísticos das variáveis aleatórias do exemplo 2

Variável Aleatória	Valor Característico	Média	Desvio Padrão	Coefficiente de Variação (%)	Distribuição
f_c (MPa)	20	26.6	4	17	Lognormal
f_y (MPa)	500	560	30	5	Lognormal
P_{1g} (kN)	1020.25	934.04	46.70	5	Normal
P_{1q} (kN)	1020.25	918.45	275.54	30	Gumbel
P_{2g} (kN)	1169	1070.22	53.51	5	Normal
P_{2q} (kN)	1169	1052.10	315.63	30	Gumbel
P_{3g} (kN)	290.5	265.93	13.30	5	Normal
P_{3q} (kN)	290.5	261.45	78.43	30	Gumbel
ϕ_R	-	1.32	0.24	18	Lognormal
ϕ_S	-	1.0	0.02	2	Lognormal

Nenhuma análise limite foi utilizada neste caso. A avaliação do desempenho do modelo ficou então apenas por conta da análise de confiabilidade feita através do método de Monte Carlo.

5.3.6 Avaliação de desempenho

A mesma hipótese feita no exemplo 1 foi adotada para os valores de largura da biela do exemplo 2. Neste exemplo um valor fixo de 40 cm de espessura foi adotado. Também o método de Monte Carlo foi utilizado para avaliação do desempenho de cada modelo. A Figura 5.18 mostra os valores obtidos para os índices de confiabilidade para cada um dos modelos com a variação do f_{ck} do concreto.

O modelo 2 apresentou um melhor nível de segurança se comparado com os modelos 1 e 3. Apesar de ser obtido via otimização topológica o modelo 3 com barras inclinadas ficou ainda um pouco abaixo do modelo 2. O modelo 1 ficou com o pior desempenho entre os modelos. Isso pode ser observado uma vez que o mesmo apresenta um nível de segurança menor do que os modelos 2 e 3. Além disso, mesmo para valores altos de f_{ck} o modelo 1 não atinge o patamar de escoamento necessário para que seu modo de colapso seja ductil.

A Figura 5.19 apresenta o comportamento do modelo 1 com relação a sua razão de falha com aumento do f_{ck} . Mesmo com um valor de 40 MPa o modelo ainda apresenta uma razão de falha muito grande (25%) de romper bruscamente apesar de também possuir uma razão de falha grande ao escoamento (98%).

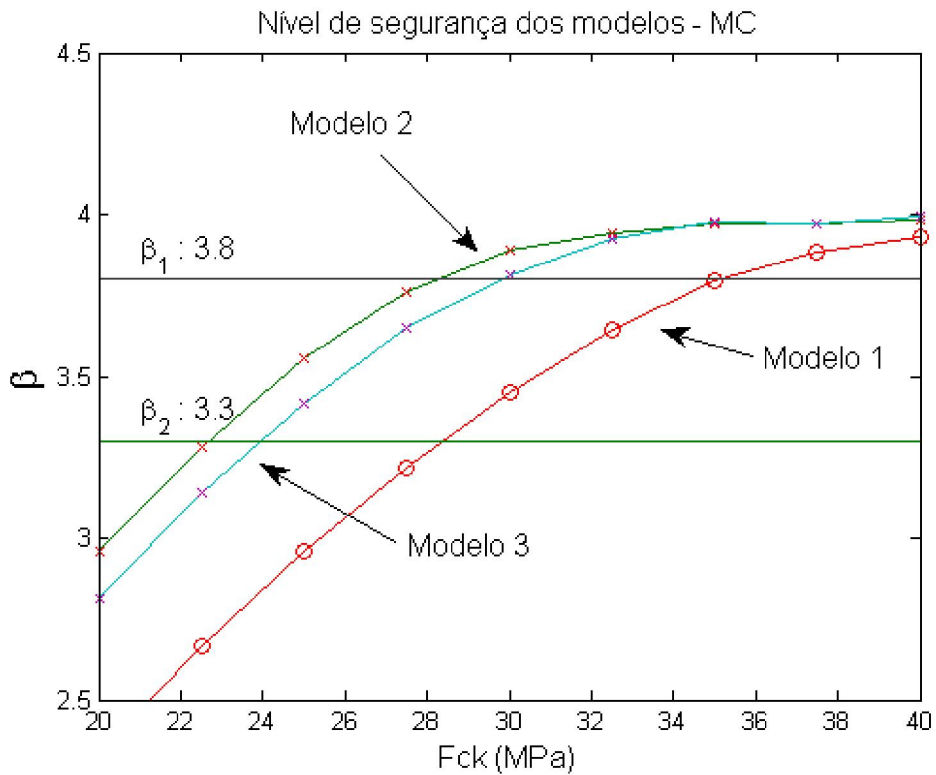


Figura 5-18: Variação do nível de segurança dos modelos 1,2 e 3 com a variação do f_{ck} para o exemplo 2.

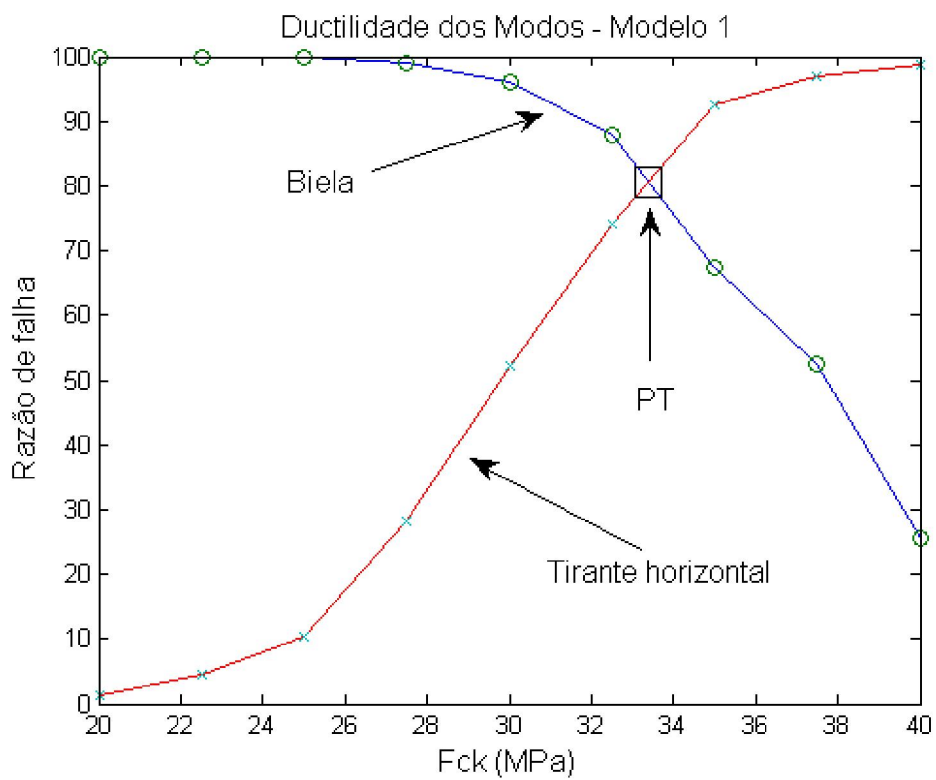


Figura 5-19: Variação da razão de falha do modelo 1 com a variação do f_{ck} para o exemplo 2.

As Figuras 5.20 e 5.21 mostram o desempenho dos modelos 2 e 3 com relação à ductilidade e à posição do ponto de transição em cada uma dos casos. O modelo 2 apresentou uma ductilidade maior uma vez que seu ponto de transição foi alcançado a perto dos 29 MPa. O modelo 3 alcançou seu ponto de transição em 31 MPa podendo ser considerado com comportamento mais frágil do que o modelo 2.

Uma das vantagens da análise de confiabilidade é que seu resultado pode ser diretamente aplicado ao modelo para avaliação de sua segurança e de sua ductilidade sem que haja a necessidade do cálculo da carga de colapso do mesmo. No entanto, caso o projetista queira obter o valor numérico da carga de colapso do modelo uma análise limite poderá ser efetuada de um modo similar ao executado no exemplo 1.

A utilização do Método de Monte Carlo em problemas dessa natureza é bastante satisfatório pois as equações de falha podem ser obtidas explicitamente e de forma fácil através das equações de equilíbrio do modelo. No exemplo a ser apresentado a seguir um subproblema de análise limite foi resolvido dentro do algoritmo de confiabilidade. Neste caso, ter um número de simulações muito grande torna o problema proibitivo do ponto de vista de desempenho (tempo de execução).

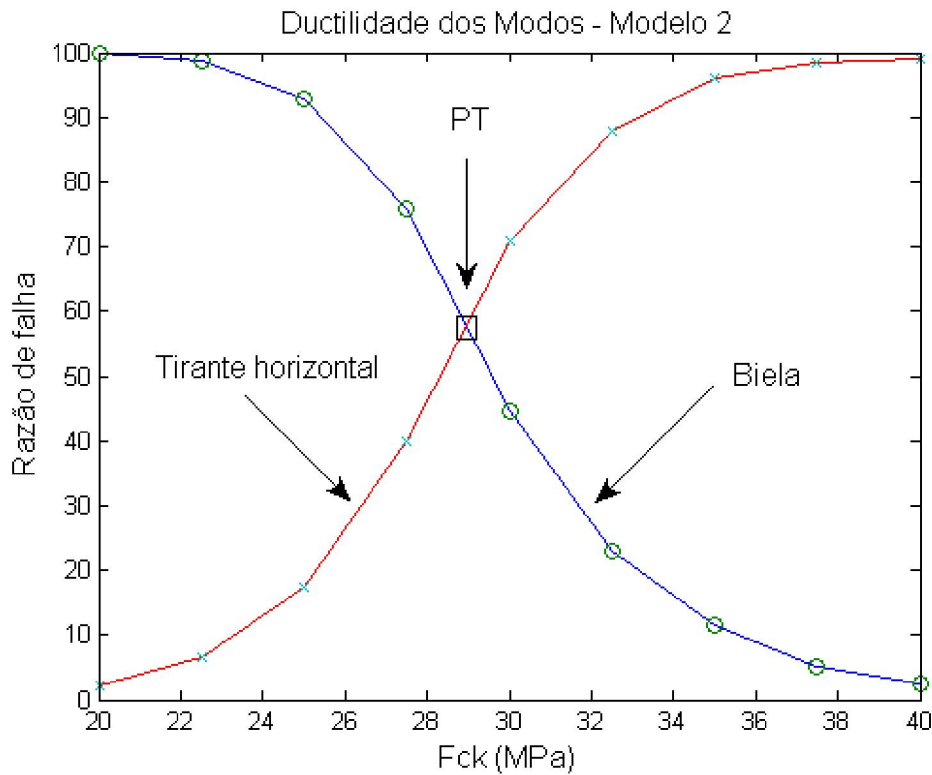


Figura 5-20: Ductilidade do modelo 2 com a variação do f_{ck} para o exemplo 2.

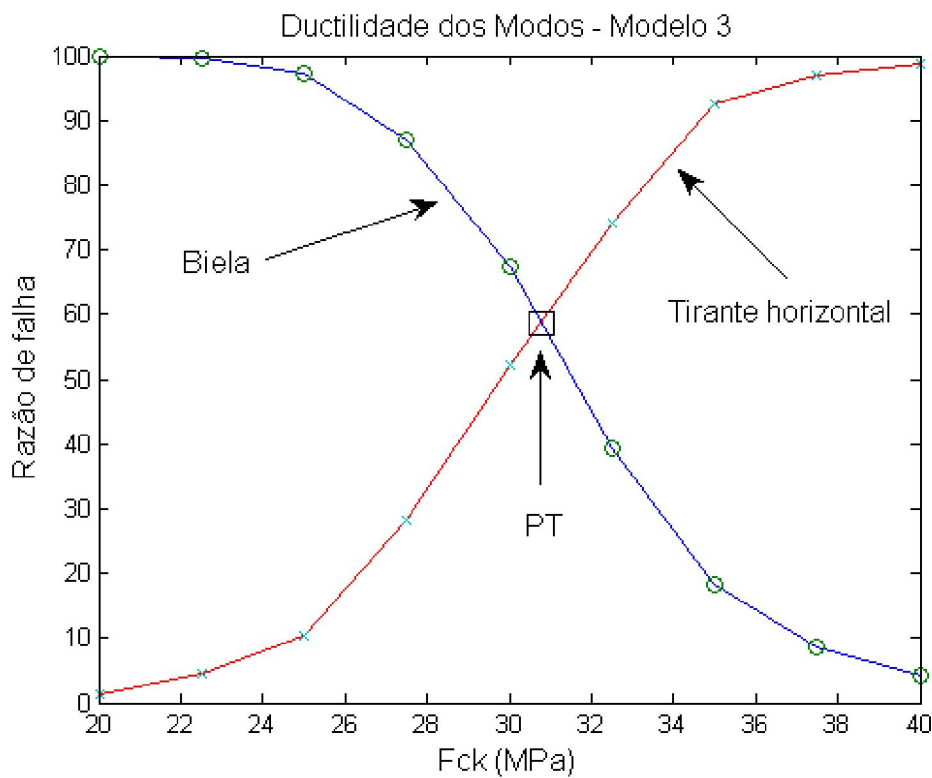


Figura 5-21: Ductilidade do modelo 3 com a variação do f_{ck} para o exemplo 2.

5.4 Terceiro Exemplo de Aplicação

5.4.1 Apresentação da estrutura

Neste exemplo tem-se uma viga parede de concreto armado como mostra a Figura 5.22. A viga parede está simplesmente apoiada e possui um balanço no seu lado direito. Esse problema foi retirado do trabalho de Tijhin e Kuchma (2007) sendo suas unidades transformadas para o Sistema Internacional de Unidades – SI. Um desenho esquemático da viga com balanço é mostrado na Figura 5.22.

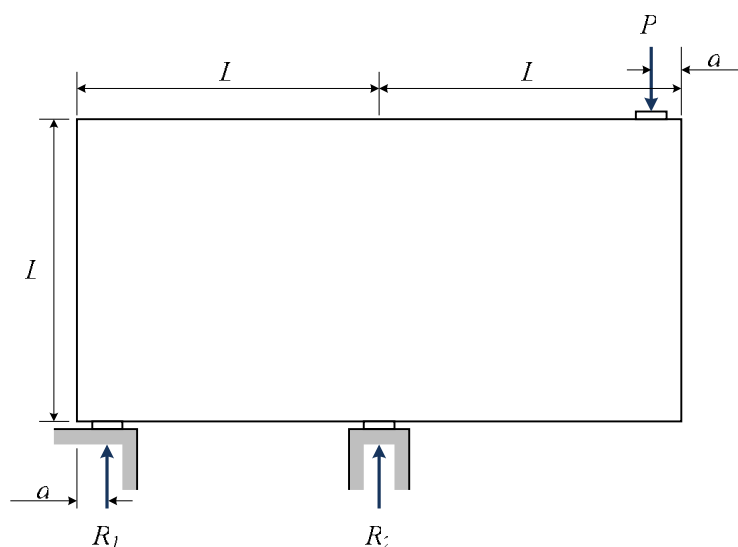


Figura 5-22: Viga parede simplesmente apoiada com balanço no lado direito.

Para as propriedades geométricas da estrutura foram utilizados os seguintes valores: $L = 250$ cm e $a = 30$ cm.

5.4.2 Análise elástica

Do mesmo modo que nos exemplos anteriores uma análise elástica foi feita e a distribuição de tensões elásticas, fluxo das tensões principais e as deformações relativas ao modelo são mostrados nas Figuras 5.23 e 5.24. É possível verificar que a concepção da topologia do modelo com base nos gráficos mostrados é muito penosa sendo muitas vezes bastante difícil. Isso acontece principalmente quando há uma dispersão muito grande das tensões fazendo com

que a visualização do fluxo de forças no interior da estrutura fique vaga. Nestes casos, um processo de otimização topológica é de grande ajuda. Ele possibilita ao projetista ter uma ideia mais clara do caminho de forças no interior do contínuo de concreto. Os valores utilizados nas análises para módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson seguiram os mesmos dos exemplos anteriores.

Apesar das orientações existentes na literatura sobre a utilização da análise elástica na concepção dos modelos topológicos, esse tipo de procedimento se mostra bastante ineficaz e depende em demasia da experiência anterior do projetista estrutural.

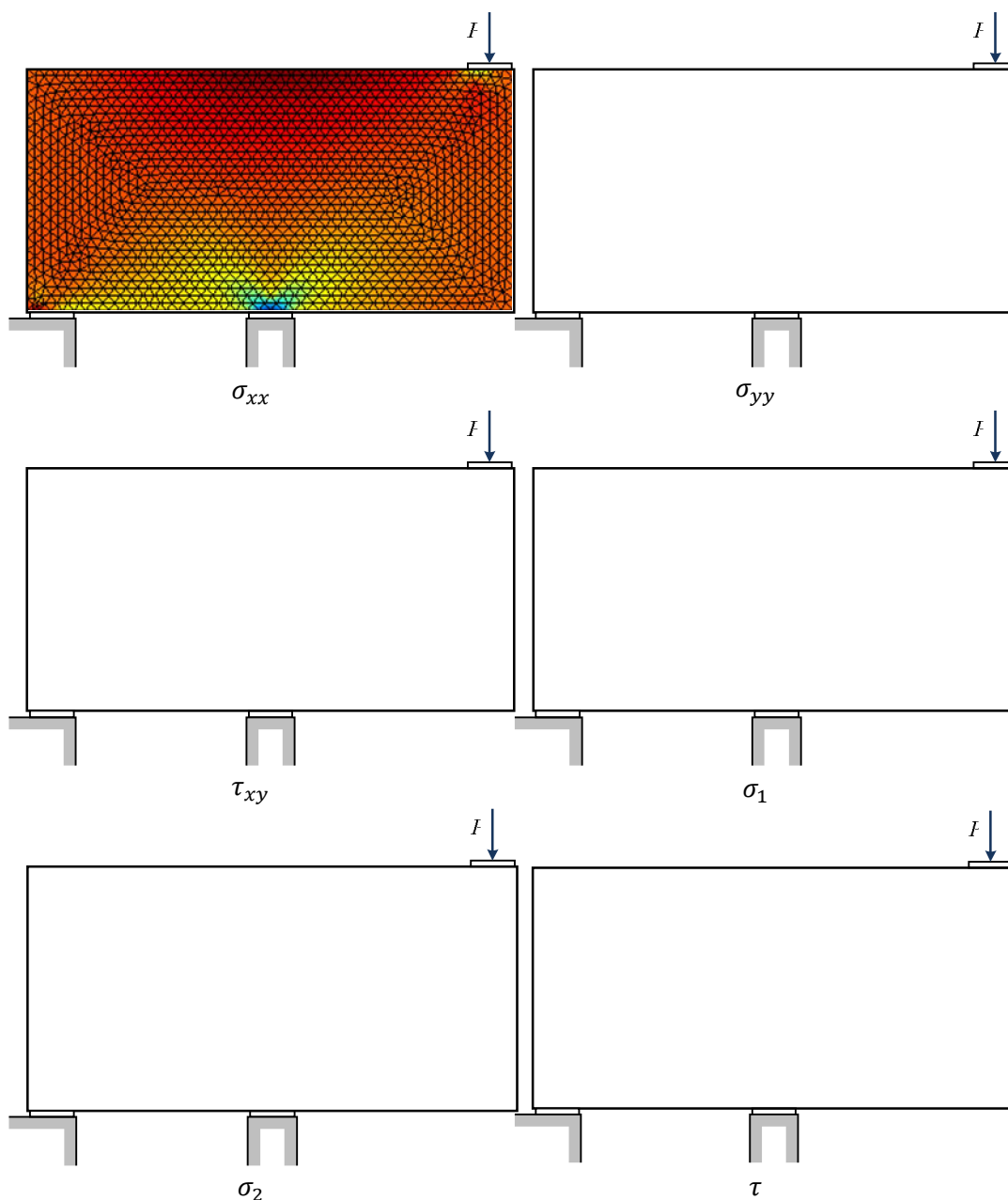


Figura 5-23: Mapa colorido das tensões elásticas da viga parede com balanço.

Diferentemente dos casos anteriores onde o fluxo das tensões principais se mostrava mais adequado para uma análise comparativa com resultado obtido via otimização topológica, os mapas de cores apresentados nas tensões de cisalhamento τ_{xy} e σ_1 parecem mostrar mais claramente como o encaminhamento de cargas será feito. No primeiro caso há uma mudança de cores indicando a presença de bielas inclinadas saindo dos apoios e do carregamento e no segundo de uma biela vertical à esquerda e outra horizontal superior.

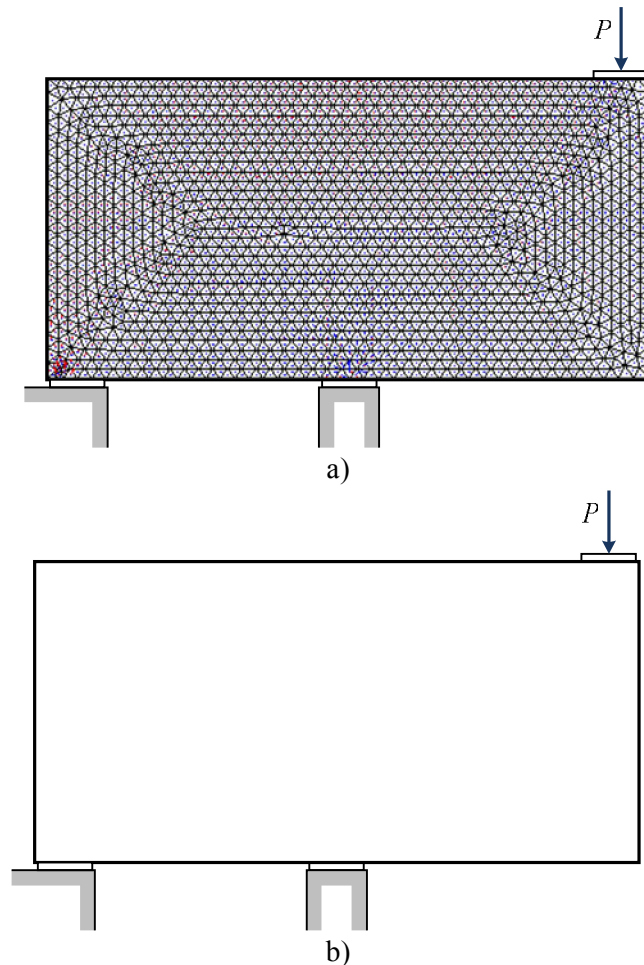


Figura 5-24: Análise elástica da viga parede com balanço: a) Fluxo das tensões principais e b) Deformações elásticas

5.4.3 Otimização topológica

A Figura 5.25 mostra o processo de otimização de topologia utilizado para encontrar uma solução ótima para o modelo. Os seguintes valores foram adotados para a otimização: número de elementos da malha igual a 5.000 do tipo quadriláteros lineares ($n_{elx} = 100$ e $n_{ely} = 50$), um coeficiente de penalização no

valor de 3, uma fração do volume inicial igual 25% e um raio mínimo no valor de 2.5.

O processo de formação do modelo topológico passa por uma retirada do material em áreas com menor rigidez (alta flexibilidade) concentrando o mesmo em áreas com maior rigidez. Muitas das vezes áreas que inicialmente eram necessárias ao equilíbrio da estrutura são desconsideradas no resultado final do processo. Um exemplo claro é a região situada na parte inferior da viga parede com balanço. Essa região esteve presente em todas as etapas do processo de otimização sendo eliminada no final (Figura 5.25).

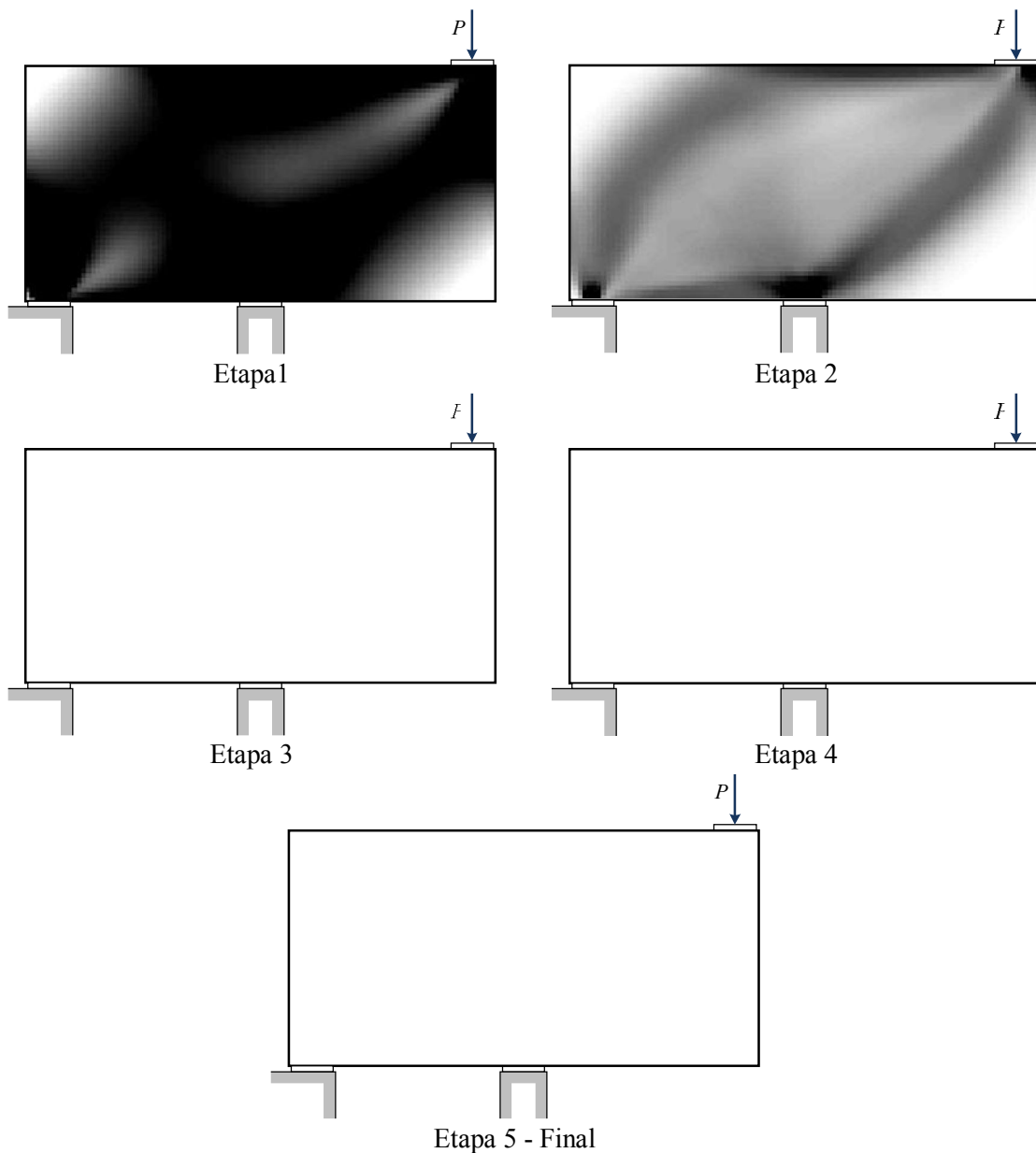


Figura 5-25: Processo de otimização topológica via método SIMP da viga parede com balanço em 5 etapas.

5.4.4 Modelos de bielas e tirantes considerados

Quatro modelos topológicos são considerados candidatos para a análise de desempenho via confiabilidade. Todos os modelos são mostrados esquematicamente na Figura 5.26. O modelo 4 foi obtido via otimização topológica e os outros retirados da literatura (Tijhin e Kuchma (2007)).

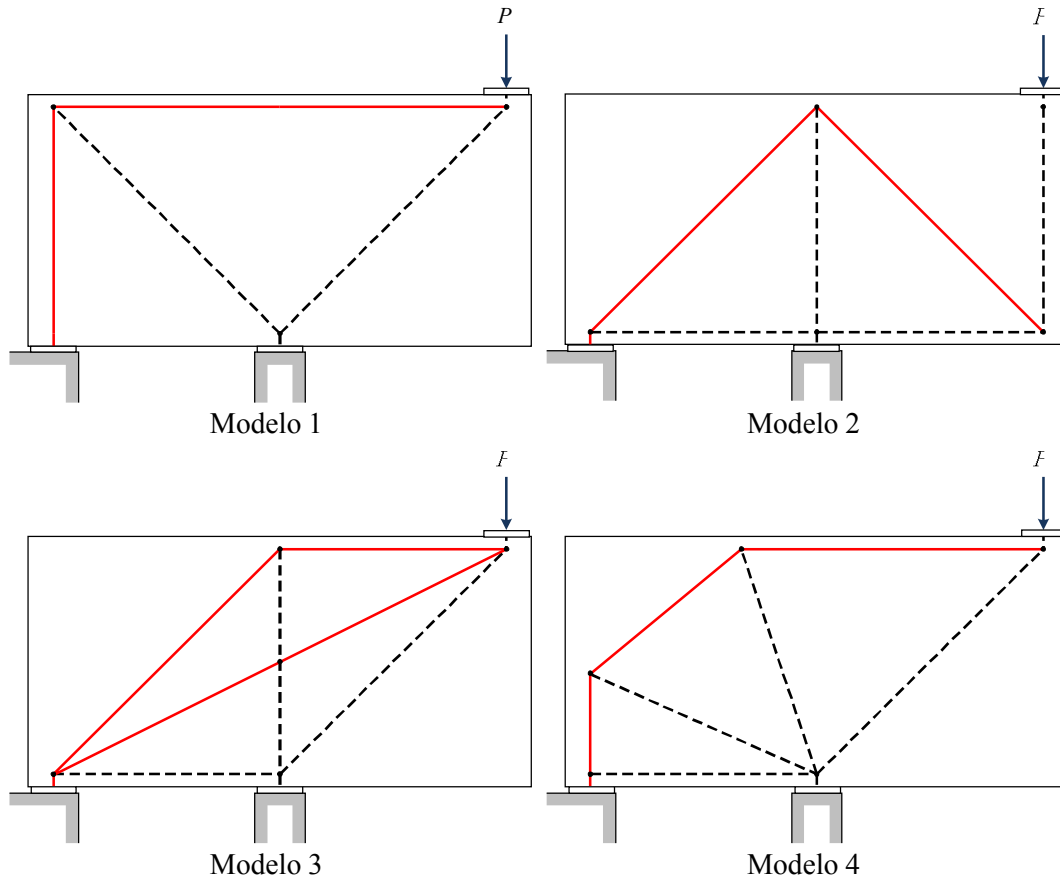


Figura 5-26: Modelos topológicos utilizados na avaliação de desempenho da viga parede com balanço.

Novamente o aparecimento de barras inclinadas indica a necessidade da presença de tirantes. É o caso do modelo 4 obtido por otimização topológica que possui um tirante inclinado a direita. O modelo 1 parece atender os mesmos requisitos do modelo 4 substituindo no entanto o tirante inclinado por um outro vertical.

5.4.5 Parâmetros e métodos para execução da análise de confiabilidade

A tabela 5.3 mostra as variáveis aleatórias envolvidas na análise de confiabilidade a ser executada. Neste exemplo um novo tipo de análise para avaliação do desempenho dos modelos é proposta. Uma análise de confiabilidade será então executada considerando toda a estrutura conjuntamente e tendo uma análise limite como subproblema. Com isso um índice de confiabilidade global é encontrado medindo assim o nível de segurança total do modelo. Inicialmente, o procedimento pareceu bastante simples de ser feito. O algoritmo para o método de simulação de Monte Carlo foi utilizado e uma análise limite como problema de PL resolvida a cada simulação. Apesar da simplicidade esse procedimento acarretou numa processo demasiadamente demorado e bastante ineficaz. A solução encontrada foi então a implementação do método analítico FORM que com poucas iterações é capaz de encontrar a solução procurada. Os gradientes da função de falha foram então obtidos via método das diferenças finitas que neste caso não apresentou problemas de instabilidade. O algoritmo utilizado foi o HRLF conforme descrito no capítulo 4. Uma nova variável aleatória referente à largura das bielas também foi adicionada ao problema.

Tabela 5-3: Modelos probabilísticos das variáveis aleatórias do exemplo 3

Variável Aleatória	Valor Característico	Média	Desvio Padrão	Coefficiente de Variação (%)	Distribuição
f_c (MPa)	20	26.6	4	17	Lognormal
f_y (MPa)	500	560	30	5	Lognormal
P_g (kN)	1000	915.5	45.8	5	Normal
P_q (kN)	1000	900	270	30	Gumbel
Wb (cm)	-	30	3	10	Normal
ϕ_R	-	1.32	0.24	18	Lognormal
ϕ_S	-	1.0	0.02	2	Lognormal

5.4.6 Avaliação de desempenho

Os desempenhos de cada um dos modelos, relativos ao nível de segurança global da estrutura, são apresentados na Figura 5.27. Tanto o critério relativo ao esmagamento de qualquer uma das bielas de concreto, representado graficamente pelos trechos inclinados iniciais, como também o critério relativo ao escoamento da armadura de aço de qualquer um dos tirantes, representados pelos patamares de

escoamento, levam ao colapso global da estrutura. Isso é estaticamente justificável uma vez que os modelos considerados nesse trabalho são isostáticos, inclusive o modelo 3, não havendo assim possibilidade de redistribuição de esforços.

Os modelos 1 e 2 apresentaram graficamente uma diferença bastante clara entre os dois critérios existentes para consideração do colapso da estrutura. Os trechos iniciais dos modelos 1 e 2 são relacionados com o esmagamento do concreto de uma das bielas da estrutura. Assim, a adoção de valores para resistência à compressão do concreto abaixo de 28.4 MPa levarão a uma ruptura frágil do modelo. Acima desse valor, o critério de ruptura que comandará o colapso será do tipo dúctil, ou seja, devido ao escoamento de uma das armaduras dos tirantes. O critério dúctil é representado graficamente através dos trechos onde os patamares de escoamento acontecem (modelos 1 e 2).

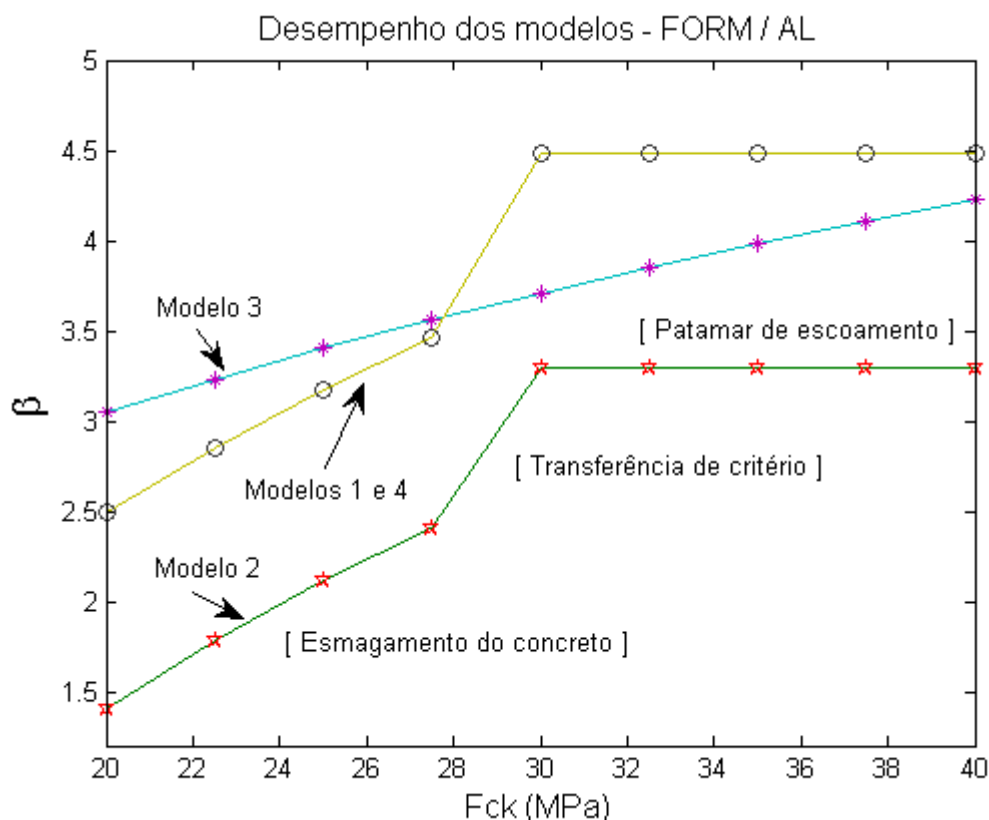


Figura 5-27: Desempenho de segurança dos modelos topológicos via método FORM com análise limite como subproblema do exemplo 3.

Conforme pode ser observado, o modelo 1 tem um desempenho superior ao modelo 2. Isso significa que o nível de segurança do modelo 1 é superior ao do

modelo 2 para a situação de carregamento proposta. Apesar do modelo 3 apresentar inicialmente um desempenho superior ao dos outros dois modelos, é possível ver que para os valores de resistência à compressão do concreto considerados, sua ruptura será sempre frágil. Isso significa que o modelo 3 não consegue modificar seu modo de ruptura de frágil para dúctil com o aumento da resistência à compressão do concreto. Isso pode ser um ponto bastante relevante se a ductilidade for um ponto importante no dimensionamento da estrutura.

A zona de transição entre os critérios de ruptura frágil e dúctil é representada nesse trabalho por um salto tanto para o modelo 1 como para o modelo 2 (Figura 5.28). Isso pode ser explicado uma vez que a análise limite aplicada ao problema considera apenas valores limites para o concreto e o aço, não havendo nenhum critério ou mesmo elemento de especial que considere o mecanismo de transferência de forças de um mecanismo de ruptura para outro.

Para exemplificar o salto existente entre os modos de ruptura um refinamento foi feito nos valores relativos à resistência à compressão para o modelo 1. A Figura 5.28 representativa desse refinamento mostra que a fronteira entre os trechos diferenciados pela ruptura frágil e dúctil é realmente representada por uma descontinuidade ou mesmo salto vertical, relativa à mudança no critério de ruptura.

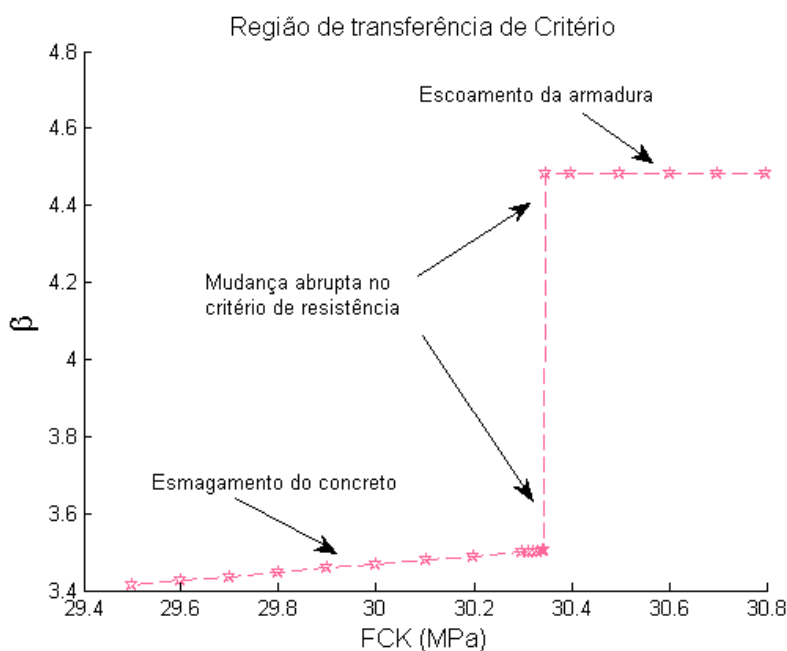


Figura 5-28: Região de transferência entre os critérios frágil e dúctil.

Com base no exposto anteriormente, foi possível definir o modelo 1 como o de melhor desempenho relativo aos modelos 2 e 3. Tanto em relação ao nível de segurança considerado como em relação à possibilidade de transferência do modo de ruptura, o que é bastante interessante em estruturas de concreto armado, de modo a evitar rupturas abruptas, ou seja, sem aviso prévio.

A Figura 5.29 apresenta os fatores de importância de cada variável aleatória relacionadas com as sensibilidades das variáveis aleatórias utilizadas pelo método FORM na região de falha frágil. Correspondentemente teremos 25% para resistência à compressão do concreto, 0% para resistência à tração do aço, 8,94% para largura da biela mais comprimida, 0% e 0% para outras bielas, 0,11% para o carregamento permanente, 35,86% para o carregamento acidental, 0,81% para o fator de modelagem dos carregamentos e 28,66% para o fator de modelagem das resistências.

Os resultados obtidos parecem estar bem coerentes uma vez que para o esmagamento do concreto o valor relativo à resistência do aço é desconsiderado. Outra observação importante é a existência de um valor de importância mediano para largura da biela mais comprimida.

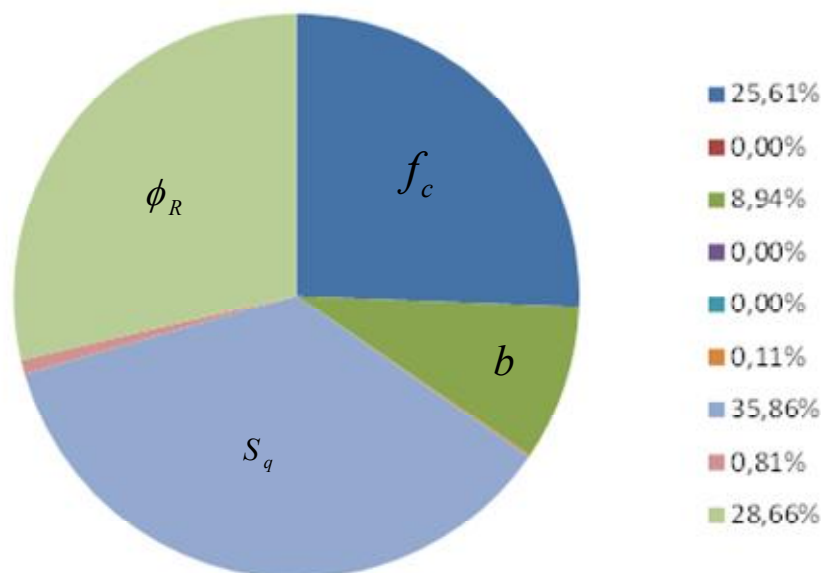


Figura 5-29: Sensibilidades das variáveis aleatórias do modelo 1 na região de falha frágil.

Posteriormente, uma nova análise de sensibilidade foi executada e os fatores de importância associados às sensibilidades das variáveis aleatórias no método FORM são mostradas na Figura 5.30. Agora na região dúctil os valores das sensibilidades foram todos modificados. São eles: 0% para resistência à compressão do concreto, 2,86% para resistência à tração do aço, 0% para largura da biela mais comprimida, 0% e 0% para outras bielas, 0,07% para o carregamento permanente, 59,52% para o carregamento acidental, 1,31% para o fator de modelagem dos carregamentos e 36,51% para o fator de modelagem das resistências.

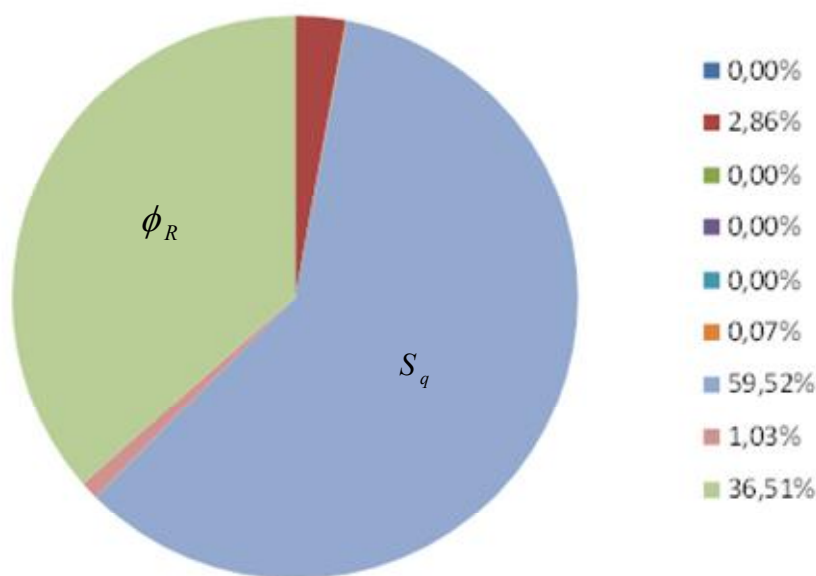


Figura 5-30: Sensibilidades das variáveis aleatórias do modelo 1 na região de falha dúctil.

A Figura 5.31 mostra como uma alteração de projeto do tipo aumento da taxa de armadura conjuntamente com aumento do f_{ck} poderiam influenciar o nível de segurança do modelo 1. Graficamente o aumento na taxa de armadura e do f_{ck} levariam a um deslocamento do patamar de escoamento que aumentaria o nível de segurança da estrutura. Para o modelo 1 foi considerado um aumento na taxa de armadura o qual foi seguido por um aumento no f_{ck} para que o patamar de escoamento fosse atingido. Caso o valor do f_{ck} seja constante a ruptura será frágil.

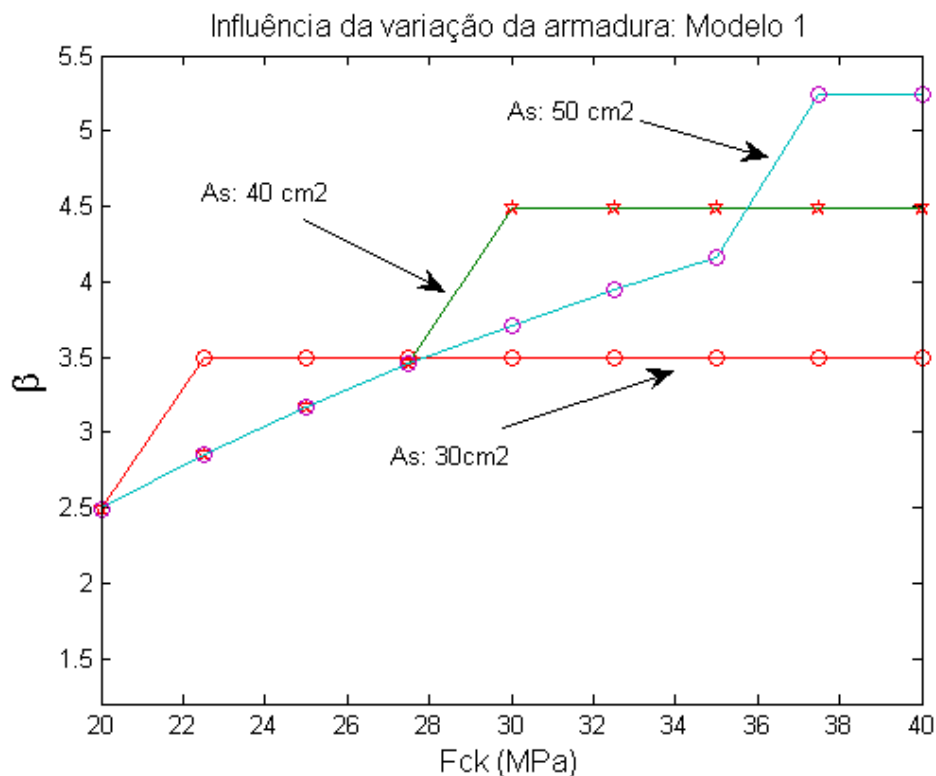


Figura 5-31: Variação do nível de segurança do modelo 1 com aumento da taxa de armadura e do f_{ck} da estrutura.

Outra alteração de projeto é então proposta, mantendo a taxa de armadura fixa e variando a espessura e o f_{ck} da estrutura (Figura 5.32). Também nesse caso o nível de segurança aumenta. Entretanto, isso aconteceu apenas na região onde o modo de falha é frágil. Isso porque, uma vez atingido o patamar de escoamento, o valor da carga de colapso é mantido constante conforme já observado nos exemplos anteriores.

As alterações de projetos sugeridas e apresentadas no modelo 1 mostraram como a análise de confiabilidade pode ser uma ferramenta poderosa para avaliação da segurança e determinação do tipo de falha numa estrutura de concreto.

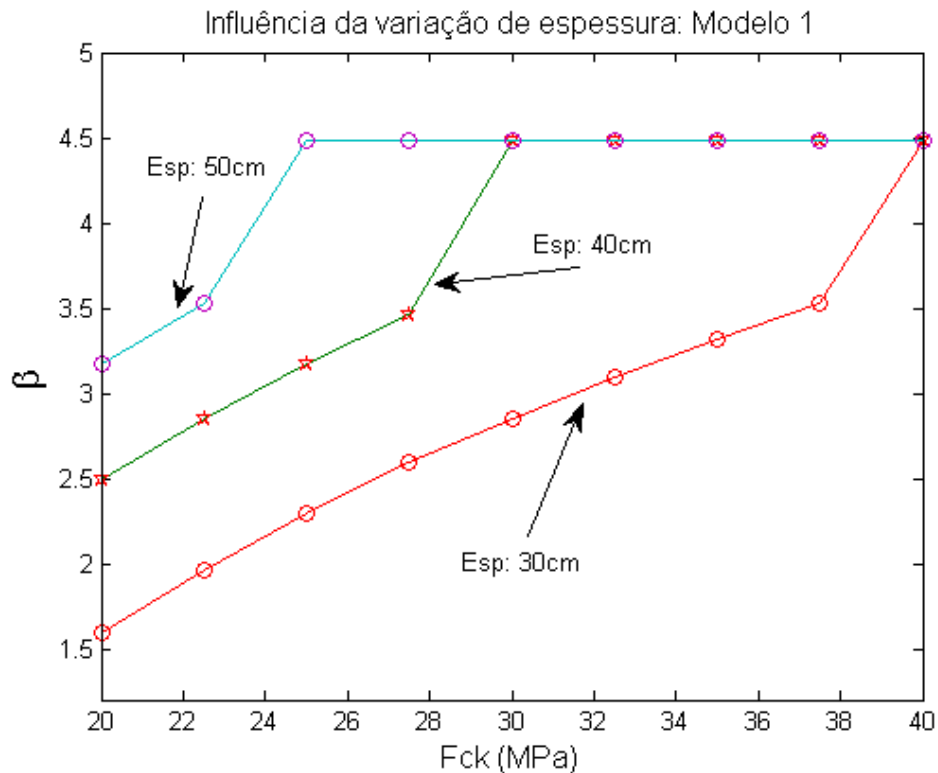


Figura 5-32: Variação do nível de segurança do modelo 1 com aumento da espessura e do f_{ck} da estrutura.

5.5 Quarto Exemplo de Aplicação

5.5.1 Apresentação da estrutura

O exemplo 4 é uma estrutura de concreto armado com geometria complexa apresentado no trabalho de Yindeesuk (2009). Um carregamento independente do existente na estrutura original foi acrescido de forma que uma envoltória topológica pudesse ser gerada. A Figura 5.33 mostra um desenho esquemático da estrutura em análise. Os valores adotados para geometria da estrutura segue os dados originais é são: $L = 200$ cm, $h1 = 60$ cm, $h2 = 50$ cm, $h3 = 30$ cm, $h4 = 20$ cm, $l1 = 5$ cm; $l2 = 35$ cm, $l3 = 40$ cm, $l4 = 15$ cm, $l5 = 15$ cm e $l6 = 15$ cm. Os carregamentos são independentes e uma combinação linear será montada de forma a possibilitar a geração dos pontos de Pareto conforme explicado e exemplificado no capítulo 3.

Para geração dos pares de carregamentos a serem utilizados na montagem da envoltória a seguinte relação será utilizada: $\beta = (1 - \alpha)$. Para o carregamento P atuante no sentido vertical e horizontal um valor de 550 kN é considerado. Um valor de 2000 kN/cm² é tomado para módulo de elasticidade da estrutura de concreto.

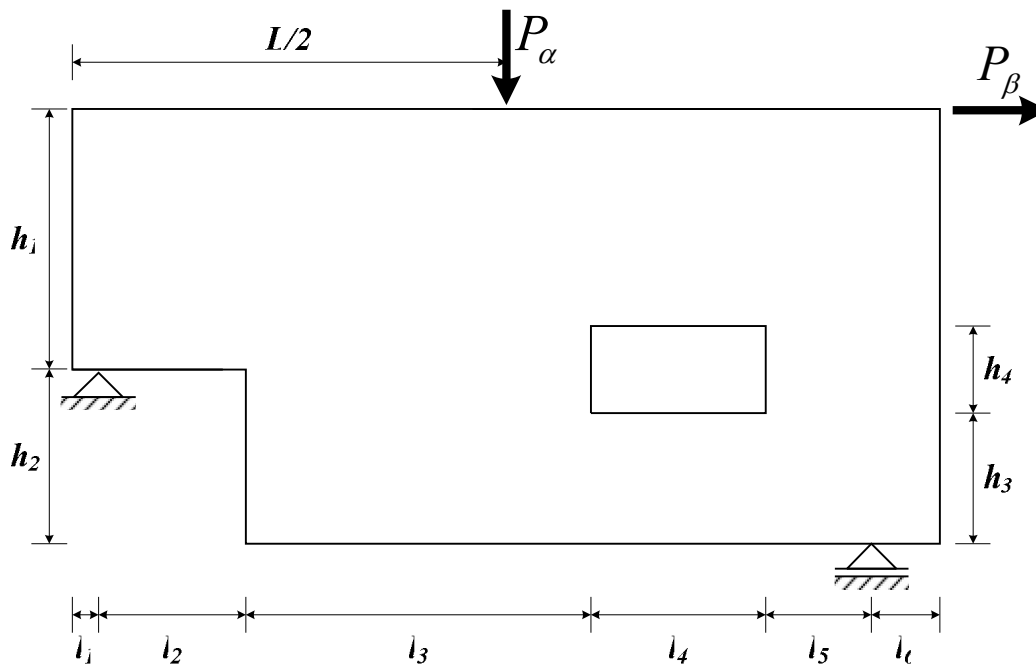


Figura 5-33: Estrutura com geometria complexa.

5.5.2 Envoltória de topologia

Para o processo de obtenção da envoltória topológica da estrutura com geometria complexa um número de 41.690 elementos triangulares lineares foram utilizados. Um coeficiente de penalização igual a 3 e um raio mínimo igual a 3 foram adotados, além de uma fração do volume inicial no valor de 25 %.

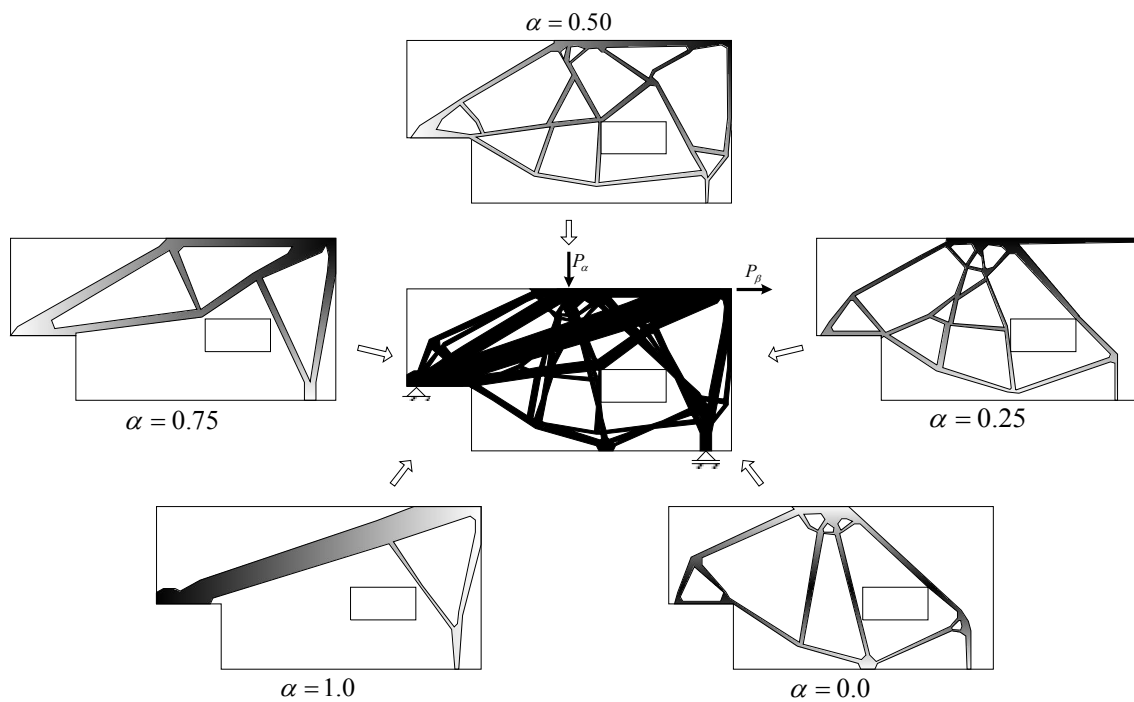


Figura 5-34: Processo de obtenção da envoltória de topologia na estrutura de geometria complexa.

O processo de obtenção é mostrado na Figura 5.34 para diversas combinações lineares de carregamentos. No exemplo são mostrados apenas alguns valores de α e seus respectivos resultados de modo a facilitar o entendimento de como a envoltória de topologia foi gerada.

5.5.3 Modelos de bielas e tirantes considerados

Uma vez gerada a envoltória de topologia é possível conceber uma série de modelos que se encaixem dentro da região da envoltória. Também modificações que sejam compatíveis com a geometria da estrutura e auxiliem na parte construtiva podem ser feitas sem que haja problemas no resultado final.

A Figura 5.35 mostra a concepção geral um modelo de bielas e tirantes que atenda a envoltória de topologia.

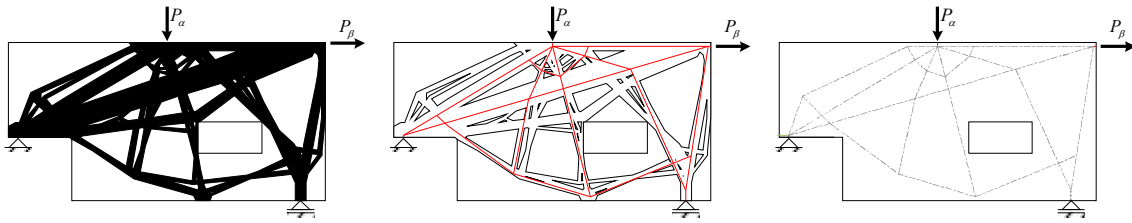
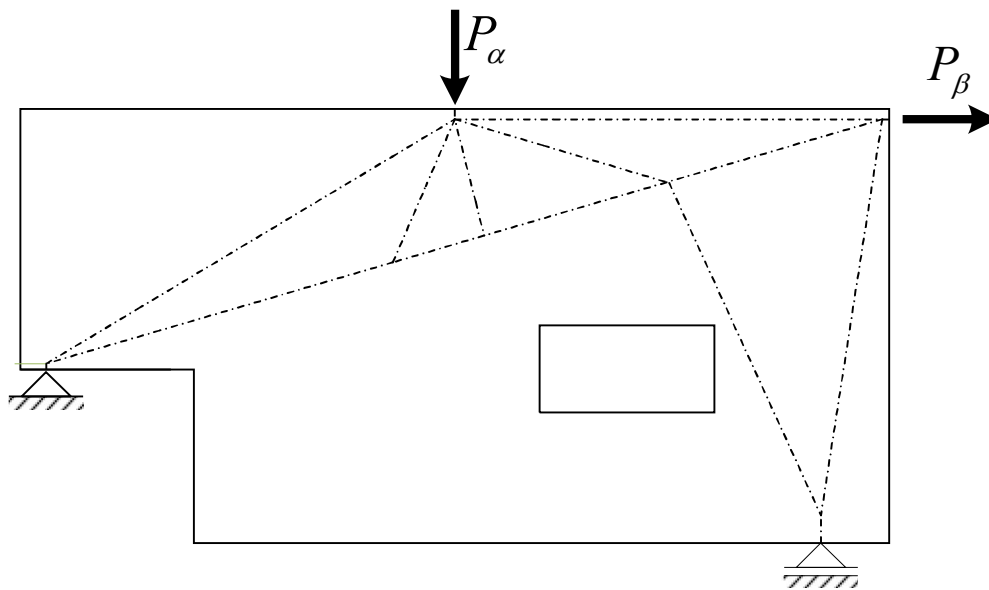
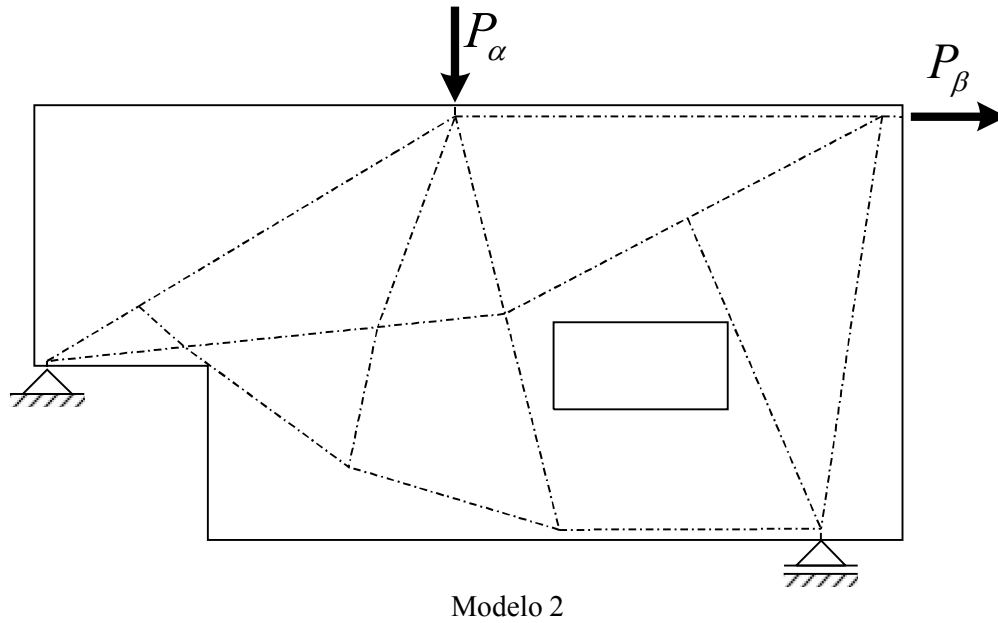


Figura 5-35: Concepção do modelo topológico para carregamentos independentes.

A aplicação de modelos de bielas e tirantes em casos como este deverá considerar que algumas barras sofrerão tensões de compressão e também tensões de tração conforme a combinação de carregamentos. Assim todas as combinações deverão ser consideradas e os resultados em cada barra (biela e/ou tirante) utilizados no dimensionamento. Está além do escopo deste trabalho a execução de um procedimento como esse.



Modelo 1



Modelo 2
Figura 5-36: Modelos topológicos possíveis de serem utilizados na avaliação da segurança da estrutura de geometria complexa.

De um modo apenas ilustrativo dois modelos topológicos possíveis de serem utilizados são mostrados na Figura 5.36.

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O trabalho de pesquisa realizado permite a elaboração de algumas conclusões. Uma delas é a de que a carga de colapso obtida para os modelos de bielas e tirantes depende diretamente do tipo de modo de falha envolvido. Modelos frágeis têm o valor de sua carga de colapso dependente apenas da resistência característica do concreto enquanto que modelos dúcteis ou com modo de falha dúctil têm seu valor de carga de colapso associado apenas à resistência característica do aço. Assim sendo, para avaliação correta do desempenho de um determinado modelo topológico é necessário definir qual tipo de modo de falha será dominante dependendo das características geométricas, propriedades físicas e carregamentos envolvidos.

A utilização da análise limite conjuntamente ou não com a análise de confiabilidade mostrou ser uma ferramenta bastante poderosa na avaliação do desempenho dos modelos topológicos considerados neste trabalho de pesquisa. Essa opção é totalmente fundamentada no Teorema do Limite Inferior da plasticidade e coerente com a concepção inicial dos modelos de bielas e tirantes. Os modelos finais que apresentaram melhor desempenho e que foram obtidos desta maneira contrapõem a literatura técnica do assunto. Isso acontece uma vez que a literatura técnica existente se baseia nos campos de deformações elásticas dos modelos de treliça. Uma vez que o modelo de treliça idealizado representa um limite inferior do modelo real no colapso através de um campo tensões estaticamente admissível e que atenda os limites de resistência aplicados aos materiais da estrutura, a utilização de modelos elásticos é questionável.

A solução de mínima norma Euclidiana utilizada para obtenção dos esforços das barras dos modelos hiperestáticos sem a necessidade de consideração das propriedades geométricas ou mesmo módulo de elasticidade do material foi bastante satisfatória. Isso permite ao projetista idealizar modelos de várias maneiras diferentes aumentando em muito o leque das opções a serem utilizadas.

Um aspecto interessante é que a solução de mínima norma na verdade é uma solução muito similar à solução elástica tendo, entretanto, um fator de ponderação menor. Isso implica que as equações de equilíbrio são todas cumpridas tendo apenas seus valores alterados conforme a geometria envolvida (matriz de equilíbrio).

A utilização de métodos de otimização topológica na obtenção de modelos de bielas e tirantes é justificada uma vez que possibilita ao projetista uma aproximação inicial bastante realista. No entanto, conforme foi observado nos exemplos apresentados, situações de projeto que envolvam considerações relacionadas a tecnologias construtivas do tipo barras retas e limitações de ângulos deverão ser observadas pelo projetista, após o resultado final da otimização topológica. Uma opção bastante interessante é o uso dos elementos indutores conforme exemplificado no capítulo 3. Entretanto, mesmo com a utilização desta técnica pode ser necessária a intervenção do projetista para obtenção de um modelo topológico ótimo que cumpra todos os requisitos de resistência, equilíbrio, restrições construtivas e de custos, etc. Vale também observar a não necessidade de cumprir totalmente os caminhos de carga mostrados na otimização topológica. Isso pode ser observado nos exemplos apresentados no capítulo 3 e 5 via modificação do raio mínimo ou desconsideração de regiões com pouco material, que levam a uma modificação na solução topológica final.

Apesar da topologia obtida pela otimização topológica não garantir ainda um modelo final realístico, sua aplicação esclarece muito o funcionamento do modelo analisado, sendo assim um ponto inicial bastante interessante para definição do modelo topológico desejado. Um procedimento interessante e que foi utilizado neste trabalho foi a execução de uma rodada inicial do processo de otimização topológica seguida por uma avaliação cuidadosa do resultado pelo projetista. Posteriormente, a técnica dos elementos indutores poderia ser utilizada ou mesmo o modelo ser modificado graficamente pelo projetista, levando a um modelo que cumpra minimamente os requisitos exigidos. Também a opção de utilização de uma envoltória topológica na concepção de um modelo que cumpra uma topologia geral para o caso de carregamentos independentes com muita variação de valores mostrou ser eficiente.

O critério de desempenho relacionado com nível de segurança para avaliação do desempenho dos modelos topológicos neste trabalho utilizou um abordagem probabilística. A análise de confiabilidade foi feita via métodos de Monte Carlo e FORM. Sua utilização permitiu a definição do nível de segurança relativo aos modelos topológicos considerados além de mostrar quais as principais modos de falha envolvidos no problema e determinar uma localização aproximada para o ponto de transição entre os diferentes tipos de falha com a variação da resistência característica do concreto.

6.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

É importante salientar que este trabalho agrupa várias linhas de pesquisas existentes na PUC-Rio. As linhas de pesquisas abordadas são: aplicação e técnicas de otimização, a análise de confiabilidade estrutural, computação gráfica aplicada e estruturas de concreto armado e protendido. Sendo assim, todas as metodologias propostas e desenvolvidas nesta pesquisa servem de base para inúmeras aplicações práticas e futuras investigações no sentido de generalizar sua aplicabilidade em modelos reais de engenharia, calibrar e confirmar os resultados demonstrados.

Uma série de melhoramentos pode ser sugerida neste trabalho, sendo a maior parte relacionada com a extensão dos códigos desenvolvidos, execução de programas experimentais associados aos conceitos propostos e investigações teóricas, sendo alguns deles descritos a seguir:

6.1.1 Análise estrutural e modelos de bielas e tirantes

- Estender a aplicação da solução de mínima norma Euclidiana a modelos hiperestáticos. Problemas utilizando modelos hiperestáticos podem ser testados e seu desempenho avaliado, principalmente em casos envolvendo geometrias complexas onde a aplicação de modelos isostáticos normalmente não apresentam bons resultados.

- Estudar outros critérios existentes para avaliação do desempenho estrutural dos modelos de bielas e tirantes em estruturas de concreto armado e comparar com o critério via confiabilidade e análise limite verificando as principais limitações e inconsistência de aplicação de cada um deles.
- Propor um programa experimental que utilize o critério de desempenho proposto na concepção dos modelos de bielas e tirantes e estude as principais limitações de metodologia relacionadas com definição da ductilidade e o nível de segurança do modelo.

6.1.2

Otimização topológica

- Desenvolvimento de uma ferramenta gráfica que possibilite a geração automática de malha refinadas, com vários tipos de elementos planos, como também a posterior inclusão gráfica de elementos indutores de barras no interior da malha antes do processo de otimização. Isso permitiria ao projetista estrutural interceder no processo de otimização topológica gerando inúmeros novos modelos possíveis de serem utilizados como solução.
- Desenvolver o conceito da envoltória de topologia de modo a torná-lo aplicável a casos de carregamentos mais abrangentes com maiores quantidades de carregamentos e com combinações que possam ser não lineares verificando suas principais implicações práticas e limitações.
- Aplicar o conceito de otimização topológica em estrutura planas de concreto armado existentes onde haja a necessidade da aplicação de reforço estrutural. Em casos desse tipo o algoritmo de otimização aplicaria a definição dos elementos indutores para estrutura já existente e determinaria o melhor encaminhamento de cargas ou posicionamento para aplicação do reforço.

6.1.3

Análise de confiabilidade

- Incluir dentro da avaliação de desempenho dos modelos topológicos uma variável de custo associada aos diferentes modos de falha (frágil e dúctil) envolvidos no problema. Com isso a busca do modelo topológico com

desempenho ótimo consideraria automaticamente o custo das consequências relacionadas com os diferentes tipos de modos de falha do problema passando a ser considerada como uma análise de risco.

- Utilizar técnicas do tipo Monte Carlo por amostragem por pontos de importância (IS – *Importance Sampling*) na análise de desempenho dos modelos considerados. Isso implicaria numa redução do tempo de execução de cada análise com diminuição no número de simulações necessário, além de uma maior precisão comparada com o método analítico FORM.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimentos: NBR 6118**. Rio de Janeiro, Brasil, 2007.

_____. **Concreto – Preparo, controle e recebimento: NBR 12655**. Rio de Janeiro, Brasil, 2006.

_____. **Ações e Segurança nas Estruturas – Procedimentos: NBR 8681**. Rio de Janeiro, Brasil, 2003.

ACI COMMITTEE 318-05, **Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary**, APPENDIX A: Strut-And-Tie Models”. American Concrete Institute, Detroit, 2005.

AGUILAR, G., MATAMOROS, A. B., PARRA-MONTESINOS, G. J., RAMIREZ, J. A, WIGHT, J. K. **Experimental Evaluation of Design Procedures for Shear Strength of Deep Reinforced Concrete Beams**. ACI Structural Journal. V. 99, No. 4, July-August, pp 539-548, 2002.

ALI M. A. **Automatic generation of truss models for the optimal design of reinforced concrete structures**. PhD thesis, Cornell Univ, Ithaca, NY, 1997.

ALI MA, WHITE RN. **Automatic generation of truss model for optimal design of reinforced concrete structures**. ACI Struct J, 98(4):421–431, 2001.

_____. **Formulation of optimal strut-and-tie models in design of reinforced concrete structures**. ACI Special Publications, 193:979–998, 2000.

ALMEIDA, A. F. **Projeto Ótimo Baseado em Confiabilidade de Pórticos Planos de Concreto Armado**, Tese de Doutorado, Programa Pós-Graduação em Engenharia Civil, Área de Estruturas, Pontifícia Católica

Universidade do Rio de Janeiro – PUC Rio, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2008.

ALSHEGEIR A, RAMIREZ J.A. **Computer graphics in detailing strut-tie models**. ASCE J Comput Civ Eng 6(2):220–232, 1992.

ALSHEGEIR, A. **Analysis of Disturbed Regions with Strut-and-Tie Models**. Dissertation, Department of Civil Engineering, Purdue University, December, 274 pp, 1992

ALVES, E.C. **Um Sistema para Determinação de Modelos de Bielas e Tirantes**. Dissertação de Mestrado, 96p. PUC-RJ, Rio de Janeiro, 1998.

AMARAL, R. S. **Análise de Segurança de Dutos com Defeitos de Corrosão**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP, Departamento de Engenharia Civil, Ouro Preto/MG, 2011.

ANDRESSEN, E., CLAUSEN, A., SCHEVENELS, M., LAZAROV, B. S., SIGMUND, O. **Efficient Topology Optimization in Matlab Using 88 Lines of Code**. Struct. Multidisc.Optim, Educational Article, 2010.

ANG, A. H. S., TANG, W. H. **Probability Concepts in Engineering planning and Design: Basic Principles**, John Wiley, New York, V. 2, 1975.

ARAÚJO, J. M.; AWRUCH, A. M. **On Stochastic Finite Elements for Structural Analysis**, Computers and Structures, V. 52, No. 3, pp. 461-469, 1994.

ARORA, J.S. **Optimization of Structural and Mechanical Systems**. World Scientific. 2006.

ÁVILA, G. G. **Cálculo de Fadiga de Risers Rígidos Através da Mecânica da Fratura**, Dissertação de Mestrado, Programa de Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2005.

AZEVEDO, C. P. B. **Avaliação da Confiabilidade de Fundações de Torres Estaiadas em Linha de Transmissão**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, Departamento de Engenharia de Estruturas, Belo Horizonte/MG, 2007.

_____. **Projeto de Fundações de Linha de Transmissão Baseado em Confiabilidade**. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, Departamento de Engenharia de Estruturas, Belo Horizonte/MG, 2011.

BARBOSA, A. H. **Análise de Confiabilidade Estrutural Utilizando o Método de Monte Carlo e Redes Neurais**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP, Departamento de Engenharia Civil, Ouro Preto/MG, 2004.

BAZÁN, F. A. V. **Metodologia para Análise Estrutural e Otimização de Estruturas de Conexão de Risers**, Tese de Doutorado, Programa de Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2009.

_____. **Técnicas BOOTSTRAP Aplicadas à Avaliação de Incertezas Estatísticas na Análise de Extremos**, Dissertação de Mestrado, Programa de Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2005.

BECK, A. T. **Apostila do Curso de Confiabilidade Estrutural**, Universidade de São Paulo. Escola de Engenharia de São Carlos/SP, 2010.

BENABDALLAH, S. RAMIREZ, J. A., LEE, R. H. **Computer graphics in truss-model design approach**. ASCE J Comput Civ Eng 3(3):285–301, 1989.

BENDSØE, M. P. **Optimal shape design as a material distribution problem**. Struct Optim 1: 193-202, 1989.

- BENDSØE, M. P. KIKUCHI, N. **Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, [s.l.], v. 71, n. 2, p. 197-224, 1988.
- BENDSØE, M. P. SIGMUND, O. **Topology optimization: theory, methods, and applications.** 2° ed. New York: Springer, 370 p., 2003.
- BERGMEISTER, K., BREEN, J.E., JIRSA, J.O., KREGER, M.E. **Detailing for Structural Concrete.** Center for Transportation Research Report 0-1127-3F, University of Texas, Austin, May, 300 pp, 1993.
- BIONDINI F., BONTEMPI, F., MALERBA, P. G. **Optimal strut-and-tie models in reinforced concrete structures.** Comput Assist Mech Eng Sci 6,:279–293, 1999.
- _____. **Stress path adapting strut-and-tie models in cracked and uncracked R.C. elements.** Struct Eng Mech 12(6):685–698, 2001.
- BRANDÃO, A. L. R. **Segurança de Estruturas em Perfis Formados a Frio.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP, Departamento de Engenharia Civil, Ouro Preto/MG, 2007.
- BROWN, M. D., BAYRAK, O. **Minimum Transverse Reinforcement for Bottle-Shaped Struts.** ACI Structural Journal. V. 103, No. 6, November-December, pp 813-821, 2006.
- BRUGGI M. **On the automatic generation of strut and tie patterns under multiple load cases with application to the aseismic design of concrete structures.** Adv Struct Eng 13(6):1167–1181, 2010.
- CAMPOS, V.E.M. **Dimensionamento de Estruturas de Concreto Armado pelo Método de Bielas e Tirantes com o Uso de Computação Gráfica.** Dissertação de Mestrado, 89p.PUC-RJ, Rio de Janeiro, 1995.

- CASTANHEIRA, A. M. **Avaliação da Confiabilidade de Vigas Metálicas Dimensionadas pela NBR 8800**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP, Departamento de Engenharia Civil, Ouro Preto/MG, 2004.
- CASTRO, L. A. **Análise da Segurança no Projeto de Estruturas: Método dos Estados Limites**. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo. Escola de Engenharia de São Carlos/SP, 1997.
- CÍCILIA, F. B. **Critério de Projeto Baseado em Confiabilidade para o Sistema de Tendões de uma TLP**, Tese de Doutorado, Programa de Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2004.
- COLLINS, M. P., MITCHELL, D. **Rational Approach to Shear Design—The 1984 Canadian Code Provisions**. ACI Journal. V. 83, No. 6, November-December, pp 925-933, 1986.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB-FIP Model Code 1990**. Thomas Telford Services, Ltd., London, 1993.
- _____. **CEB-FIP Model Code 2010**. First complete draft, Lausanne, Switzerland, 2010.
- DER KIUREGHIAN, A.; LIU, P. **Structural Reliability Under Incomplete Probability Information**, J. Eng. Mech., 112:85,104, 1986.
- DRUCKER, D. C.; GREENBERG, H. J.; PRAGER, W. **Extended limit design theorems for continuous media**, 9 v., 1952.
- ELLINGWOOD, B.; GALAMBOS, T. V.; MACGREGOR, J. G.; CORNELL, C. A. **Development of Probability Based on Load Criterion for American National Standard A58**, NBS Special Publications, No. 577, Washington, D. C., National Bureau of Standards, 1995.

EUROCODE 2: **Design of Concrete Structures**. Part 1.1: General Rules and Rules for Buildings, 1999.

FABER, M. H.; SØRENSEN, J. D. **Reliability Based Code Calibration**, Joint Committee on Structural Safety, pp. 1-17, 2002.

FAIRBAIRN, E. M. R.; EBECKEN, N. F. F.; PAZ, C. N. M.; ULM, F. J. **Determination of Probabilistic Parameters of Concrete: Solving the Inverse Analysis Problem by Using Artificial Neural Networks**, Computers and Structures, V. 78, pp. 497-503, 2000.

FAIRBAIRN, E. M. R.; GOULART, E.; COUTINHO, A. L. G. A.; EBECKEN, N. F. F.; VIANA, D. M.; GUEDES, Q. M. **Proceedings of the Computational Methods in Engineering'99**, Edited by P. M. Pimenta; R. M. L. F. Almeida N., pp. 248.1-248.12, 1999.

_____. **Durability Assessment of an Arch Dam using Inverse Analysis with Neural Networks and High Performance Computing**. In: Proceedings of the 13th ASCE-Engineering Mechanics Division Conference. Baltimore, MD, USA, ASCE, pp.1-6, 1999.

FERNANDES, J. V. V. **Análise Estocástica dos Tensões de uma TLP**, Dissertação de Mestrado, Programa de Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2011.

FRANGOPOL, D. M., IDE, Y., SPACONE, E., IWAKI, I. A New Look at Reliability of reinforced Concrete Columns, Structural Safety, V. 18, No. 2/3, pp. 123-150, 1996.

FREUDENTHAL, A. M. **The Safety of Structures**, ASCE Transactions, V. 112, No. 2296, pp. 125-180, 1947.

FU, C. C. **The Strut and Tie Model of Concrete Structures**. Presented to Maryland State Highway Administration. University of Maryland, 2001.

FUSCO, P. B. **Estruturas de Concreto: Fundamentos Estatísticos da Segurança das Estruturas**, Brasil, McGraw-Hill, 1976

GERE, J. M.; WEAVER, W. JR. **Análise de Estruturas reticulares**, Guanabara S.A., 1987.

GOMES, H. M.; AWRUCH, A. M. **Análise de Confiabilidade de estruturas de Concreto Armado incluindo o Efeito da Corrosão**, In: Proceedings of 1º Congresso Internacional sobre estruturas Danificadas, CD-ROM, Rio de Janeiro, RJ, 1998.

_____. **Neural Networks for Structural Analysis**, In: Proceedings of the XIX CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano em Métodos Computacionais em Engenharia, CD-ROM, São Paulo, SP 1999.

GOMES, H.M. **Análise de Confiabilidade de Estruturas de Concreto Armado e Processos de Simulação**, Dissertação de Mestrado, CPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 118p., 1997.

_____. **Técnicas de Avaliação da Confiabilidade de Estruturas de Concreto Armado**, Tese de Doutorado, CPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 228p., 2001.

GOMES, W. J. S. **Estudo do Efeito das Incertezas na Otimização Estrutural**. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo. Escola de Engenharia de São Carlos. São Carlos/SP, 2010.

GROENWOLD, N.N., ETYMAN, H.H. **On the Equivalence of Optimality Criterion and Sequential Approximate Optimization Methods in the Classical Topology Layout Problem**. Int. J. Numer. Meth. Engng, 73:297-316, 2007.

GUEST, J. K., PRÉVOST, J. H., BELYTSCHKO, T. **Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, [s.l.], v. 61, n. 2, p. 238-254, 2004.

GVOZDEV, A. A. **The determination of the value of the collapse load for statically indeterminate systems undergoing plastic deformation.**, tradução do original de 1938. 1v., 1960.

HARRISON, H. B. **Computer Methods in Structural Analysis**, Pretince-Hall, 1973.

HART, G. C. **Uncertainty Analysis, Loads and Safety in Structural Engineering**, Prentice-Hall, New Jersey, 1982.

HASOFER, A. M., LIND, N. C. **Exact and Invariant Second Moment Code Format**, Journal of Engineering Mechanics Division, New York, ASCE, V. 100, No. 1, pp. 111-121, 1974.

IBAÑEZ, S. H. **Metodos de Diseño Optimo de Estructuras**. Coleccion Señor, N. 8, Paraninfo S.A., 1990.

JIRÁSEK, M., BAZANT, Z. P. **Inelastic Analysis of Structures**, John Wiley & Sons, 720p., 2000.

JOINT COMMITTEE ON STRUCTURAL SAFETY, JCSS: **Probabilistic Model Code**, 2001.

KIKUCHI, N., ODEN, J. T., SONG, Y. J. **Convergence of Modified Penalty Methods and Smoothing Schemes of Pressure for Stoke's Flow Problems**, In Gallagher, R. et al. (eds), "Finite Elements in Fluids", vol. 5, John Wiley & Sons, pp. 107-126, 1984.

KIM HA, BAKER G **Topology optimisation of reinforced concrete structures. In: Computational Mechanics - New Frontiers for the New Millennium: proceedings for the 1st Asian-Pacific congress on computational mechanics**, vol 2, pp 1251–1256, 2001.

- _____. **Topology optimization for reinforced concrete design.** In: Mang HA, Rammerstorfer FG, Eberhardsteiner Journal(eds) WCCM V fifth world congress on computational mechanics. Vienna, Austria, 2002
- KUMAR, P. **Optimal force transmission in reinforced concrete deep beams.** Comput Struct 8(2):223–229, 1978.
- KWAK, H. G., NOH, S. H. **Determination of strut-and-tie models using evolutionary structural optimization.** Eng Struct 28:1440–1449, 2006.
- LAMPERT, P., THURLIMANN, B. **Ultimate Strength and Design of Reinforced Concrete Beams in Torsion and Bending.** IABSE, Publications. V. 31-I, pp. 107-131, 1971.
- LEONEL, E. D. **Modelos Não Lineares do Método dos Elementos de Contorno para Análise de Problemas de Fratura e Aplicação de Modelos de Confiabilidade e Otimização em estruturas Submetidas à Fadiga.** Tese de doutorado. Universidade de São Paulo. Escola de Engenharia de São Carlos/SP, 2009.
- LEONHARDT, F. **Reducing the Shear Reinforcement in Reinforced Concrete Beams and Slabs.** Mag. Concrete Res., 17(53), 187, 1965.
- LEU, L. J., HUANG, C.W., CHEN, C. S., LIAO, Y. P. **Strut-and-tie design methodology for three-dimensional reinforced concrete structures.** J Struct Eng 132(6):929–938, 2006.
- LIANG QQ. **Performance-based optimization of strut-and-tie models in reinforced concrete beam-column connections.** In: 10th East Asia-Pacific conference on structural engineering and construction: Materials, experimentation, maintenance and rehabilitation (EASEC-10). Bangkok, Thailand, 2006.

- LIANG QQ, XIE YM, STEVEN G.P. **Topology optimization of strut-and-tie models in reinforced concrete structures using an evolutionary procedure.** ACI Struct J 97(2):322–330, 2000.
- _____. **Optimal topology design of bracing systems for multistory steel frames.** J Struct Eng 126(7):823–829, 2000.
- _____. **Generating optimal strut-and-tie models in prestressed concrete beams by performance based optimization.** 2001 ACI Struct J 98(2):226–232, 2001.
- LIANG, QQ., UY, B., STEVEN, G. P. **Performance-based optimization for strut-and-tie modeling of structural concrete.** J Struct Eng 128(6):815–823, 2002.
- LINDQUIST, M. **Confiabilidade Estrutural de Pontes Laminadas Protendidas de Madeira.** Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo. Escola de Engenharia de São Carlos/SP, 2006.
- LIU, P. L.; DER KIUREGHIAN, A. **Optimization Algorithms for Structural Reliability.** Computational Probabilistic Mechanics. V.933, pp.185-196, 1988.
- LIVESLEY, R. K. **Matrix Methods os Structural Analysis,** Pergamon Press, 1975.
- LOPES, M. T. A. **Análise de Confiabilidade Aplicada ao Projeto de Reforço à Força Cortante de Vigas em Concreto Armado com Compósitos de Fibra de Carbono,** Tese de Doutorado, Programa Pós-Graduação em Engenharia Civil, Área de Estruturas, Pontifícia Católica Universidade do Rio de Janeiro – PUC Rio, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2007.
- LOUREIRO FILHO, F. S. **Metodologia para Análise de Fadiga de Dutos Flexíveis Baseada em Confiabilidade Estrutural,** Dissertação de Mestrado, Programa de Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2008.

MACHADO, E. R. **Avaliação da Confiabilidade de Estruturas de Concreto Armado**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, Departamento de Engenharia de Estruturas, Belo Horizonte/MG, 2001.

MADSEN, H. O.; KRENK, S.; LIND, N. C. **Methods of Structural Safety**. Prentice-Hall, 1986.

MACGREGOR, J.G. **Reinforced concrete mechanics and desing**. New Jersey. Prentice Hall, 1997.

MAHADEVAN, S.; RAGHOTHAMACHAR, P. **Adaptive Simulation for System Reliability Analysis of Large Structures**. Computers and Structures, V. 77, pp. 735-744, 2000.

MARTHA, L. F. **Análise de Estruturas: conceitos e métodos básicos**. Elsevier. Rio de Janeiro, 2010.

MARTHA, L. F. **Programa ELAST_2D: Tensão Plana em matlab**. Notas de aula e código. Sistemas Gráficos.-PUC –Rio. Rio de Janeiro, 2010.

MARTI, P. **Basic Tools of Reinforced Concrete Beam Design**. ACI Journal. V.82, No. 1, January-February, pp 45-56, 1985.

MATSUI, K.; TERADA, K. **Continuous approximation of material distribution for topology optimization**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, [s.l.], v. 59, n. 14, p. 1925-1944, 2004.

MAXWELL, B. S., BREEN, J. E. **Experimental Evaluation of Strut-and-Tie Model Applied to Deep Beam with Opening**. ACI Structural Journal. V. 97, No. 1, January-February, pp 142-148, 2000.

MELCHERS, R. E. **On Bounds and Approximations in Structural Systems Reliability**. Research Report No. 1/1981, Department of Civil Engineering, Monash University, Australia, 1981.

MELCHERS, R. E. **Structural Reliability Analysis and Prediction**, New York, John Wiley & Sons, 2002.

MELLO, E. L. **Some Applications of Generalized Inverse Theory to Structural Problems**, Phd Thesis, Imperial College, London, 105p, 1979.

MÖRSCH, E. **Concrete-Steel Construction** (English Translation by E. P. Goodrich). McGraw Hill, New York, 368 pp, 1909.

MÜLLER, A. L. **Otimização de Estruturas Reticuladas Considerando Incertezas**, Dissertação de Mestrado, Programa Pós-Graduação em Engenharia Civil, Área de Estruturas, Pontifícia Católica Universidade do Rio de Janeiro – PUC Rio, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2003.

NAGARAJAN P., MADHAVAN PILLAI, T.M. **Development of strut and tie models for simply supported deep beams using topology optimization**. Songklanakharin J Sci Technol 30(5):641– 647, 2008.

NEVES, R. A. **Desenvolvimento de Modelos Mecânicos-Probabilísticos para estruturas de Pavimentos de Edifícios**. Tese de doutorado. Universidade de São Paulo. Escola de Engenharia de São Carlos/SP, 2004.

NOGUEIRA, C. G. **Um Modelo de Confiabilidade e Otimização Aplicado às Estruturas de Barras de Concreto Armado**. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo. Escola de Engenharia de São Carlos/SP, 2005.

NOGUEIRA, H. A. T. **Avaliação da Confiabilidade de Pilares Curtos em Concreto Armado Projetados segundo a NBR 6118:2003**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, Departamento de Engenharia de Estruturas, Belo Horizonte/MG, 2006.

OLIVEIRA, L. D. **Projeto de Estruturas de Concreto Armado pelo Modelo Biela-Tirante via Mínima Norma Euclidiana**, Dissertação de mestrado, Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Brasília-UNB, Brasília, 108p, 1995

OLIVEIRA, R. **Determinação de Modelos de Bielas e Tirantes com Utilização de Técnicas de Otimização Topológica**. Dissertação de Mestrado, 70p. PUC-RJ, Rio de Janeiro, 1998.

PAIVA JÚNIOR, J. M. **Análise de Extremos Utilizando a Hipótese de Poisson**, Dissertação de Mestrado, Programa de Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2010.

PARK, J. W., KUCHMA, D. A. **Strut-and-Tie Model Analysis for Strength Prediction of Deep Beams**. ACI Structural Journal. V. 104, No. 6, November-December, pp 657-666, 2007.

PARK, J. W., YINDEESUK, S., TJHIN, T. N., KUCHMA, D. A. **Automated finite element-based validation of structures designed by the strut-and-tie method**. J Struct Eng 136(2):203–210, 2010.

PARK, YINDEESU, TJHIN E KUCHMA. **Automated Finite-Element-Based Validation of Structures Designed by the Strut-and-Tie Method**. Journal of Structural Engineering-ASCE . V. 136, No. 2, February, pp 203-210., 2010.

PEREIRA, A. **Otimização Baseada em Confiabilidade: Aplicação a Treliças Espaciais**, Tese de Doutorado, Programa Pós-Graduação em Engenharia Civil, Área de Estruturas, Pontifícia Católica Universidade do Rio de Janeiro – PUC Rio, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2007.

PETERSSON, J.; SIGMUND, O. **Slope constrained topology optimization**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, [s.l.], v. 41, n. 8, p. 1417-1434, 1998.

PIMENTA, R. J. **Perfis de Alma Senoidal: Proposição de Métodos de Cálculo e Análise de Confiabilidade Estrutural**. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, Departamento de Engenharia de Estruturas, Belo Horizonte/MG, 2008.

PRADO, R. C. M. F. **Comportamento Estrutural de Pilares Curtos de Alta Resistência**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, Departamento de Engenharia de Estruturas, Belo Horizonte/MG, 2001.

RACKWITZ; FIESSLER, B. **Structural reliability under combined load sequences**, Computers and Structures, 9:489-494, 1978.

RAJASHEKHAR, M. R., ELLINGWOOD, B. R. **A New Look at The Response Surface Approach for Reliability Analysis, Structural Safety**, V.12, pp. 205-220, 1993.

RAVINDRA, M.K. AND LIND, N.C. **Trends in Safety Factor Optimization. In Beams and Beam Columns**, R. Narayanan (ed.), Applied Science Publishers, Barking, Essex, England, pp. 207-236, 1983.

REAL, M. V. **Análise Probabilística de estruturas de Concreto Armado, sob o Estado Plano de Tensão, através do Método dos Elementos Finitos**, Tese de Doutorado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 2000.

REINECK, K. H., NOVAK, L. C. **SP-273 - Further Examples for the Design of Structural Concrete with Strut-and-Tie Models**, ACI-ASCE Committee 445, 2010.

RITTER, W. **Die Bauweise Hennebique**. Schweizerische Bauzeitung. V. 33, No. 7, pp 49-52., 1899.

ROCHA, M. M. **Ruptura e Efeito de escala em Materiais Não Homogêneos de Comportamento Frágil**, Dissertação de Mestrado, CPGEC/UFRGS, 113p, Porto Alegre, 1989.

SAGRILO, L. V. S. **Análise de Confiabilidade Estrutural Utilizando os Métodos Analíticos FORM e SORM**, Tese de Doutorado, Programa de Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1994.

_____. **Apostila do Curso de Confiabilidade Estrutural**, UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2003.

_____. **Confiabilidade de Estruturas Reticuladas em Ambientes de Processamento Paralelo**, Dissertação de Mestrado, Programa de Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1989.

SANT'ANNA, H. M. **Otimização Topológica de Estruturas Bidimensionais Contínuas Submetidas a Restrições de Flexibilidade e Tensão**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul – URGs. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Porto Alegre/RS, 2002.

SANTOS, D. **Concreto Armado: Análise de Vigas de Concreto Armado Utilizando Modelos de Bielas e Tirantes**. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo. Escola de Engenharia de São Carlos/SP, 2006.

SANTOS, F. D. **Análise Limite e Projeto Ótimo de Vigas em Concreto Armado**. Dissertação de Mestrado, 154p. PUC-RJ, Rio de Janeiro, 2003.

SCHAEFER, K., SCHLAICH, J. **Consistent Design of Structural Concrete using Strut and Tie Models**. In: Colóquio sobre Comportamento e Projeto de Estruturas, PUC Rio., Rio de Janeiro/RJ, 1988.

_____. **Design and Detailing of Structural Concrete Using Strut-and-tie Models**. The Structural Engineer, v.69, N.6, p.113-125, 1991.

SCHLAICH, J., SCHAEFER, K., AND JENNEWEIN, M. **Towards a Consistent Design of Structural Concrete**. PCI Journal. V. 32, No. 3, May-June, pp 74-150, 1987.

SCHÜELLER, G. L.; STIX, R. A. **Critical Appraisal of Methods to determine Failure Probabilities**, Structural Safety, V. 4, pp. 293-309, 1987.

- SHINOZUKA, M. **Basic Analysis of Structural Safety**. Journal of Structural Engineering, V. 109, No. 3, pp. 721-740, 1983.
- SIGMUND, O. **A 99 line topology optimization code written in Matlab. Structural and Multidisciplinary Optimization**, Berlin, v. 21, n. 2, p. 120-127, 2001.
- SIGMUND, O.; PETERSSON, J. **Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local-minima**. Structural and Multidisciplinary Optimization, Berlin, v. 16, n. 1, p. 68-75, 1998.
- SILVA, R. C. **Concreto Armado: Aplicações de Modelos de Bielas e Tirantes**. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo. Escola de Engenharia de São Carlos/SP, 1991.
- SILVA, R. J. C. **Modelos de Bielas e Tirantes Através de Modelagem Aporticada**. Dissertação de mestrado, Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Brasília-UNB, Brasília, 1998.
- SILVA, R. C., GIONGO, J. S. **Modelos de Bielas e Tirantes Aplicados a Estruturas de Concreto Armado**. Livro. Editora EESC-USP. São Carlos/SP, 2000.
- SOUZA JUNIOR, A. C. **Aplicação de Confiabilidade na Calibração de Coeficientes Parciais de Segurança de Normas Brasileiras de Projeto Estrutural**. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo. Escola de Engenharia de São Carlos/SP, 2008.
- SOUZA, O. L. C. **Aplicação da Teoria de Confiabilidade às Vigas de Concreto Armado Reforçadas à Torção com Compósito de Fibra de Carbono**. Tese de doutorado. Universidade Federal Fluminense – UFF. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Niterói/RJ, 2011.

SOUZA, R. A. **Concreto Estrutural: análise e dimensionamento de elementos com descontinuidades**. Tese de doutorado. USP – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia e Fundações. São Paulo/SP, 2004.

SOUZA, R. A.; BITTENCOURT, T. N. **Parâmetros de Resistência Efetiva do Concreto Estrutural para a Análise e Dimensionamento Utilizando Modelos de Escoras e Tirantes**. In: V Simpósio EPUSP Sobre Estruturas de Concreto, São Paulo, 2003.

SVANBERG, K. **The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, [s.l.], v. 24, n. 2, p. 359-373, 1987.

SVANBERG, K. **A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations**. SIAM Journal on Optimization, 12(2):555-573, 2002.

TALISCHI, C., PAULINO, G. H., PEREIRA, A., MENEZES, I. F. M. **PolyTop: a Matlab implementation of a general topology optimization framework using unstructured polygonal finite element meshes**. Struct. Multidisc. Optim, Educational Article, 2011.

TÁVORA, F. G. **Comportamento Estrutural de Vigas Parede com Furos Armadas pelo Critério de Mínima Norma Euclidiana**, Trabalho de conclusão de curso, Universidade de Brasília – UNB, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Brasília/DF, 1995.

TJHIN T. N., KUCHMA, D.A. **Computer-based tools for design by the strut-and-tie method: advances and challenges**. ACI Struct Journal 99(5):586–594, 2002.

TJHIN, T. N., KUCHMA, D.A. **Computer-Based Tools for Design by Strut-and-Tie Method: Advanced and Challenges**. ACI Structural Journal. V. 99, No. 5, September-October, pp 586-594, 2002.

_____. **Integrated Analysis and Design Tool for the Strut-and-tie Method**. Eng Struct 29:3042–3052, 2007.

TRALDI, M. A. B. **Otimização de Topologia de estruturas e Componentes**. Dissertação de Mestrado, 134p. Universidade Federal de Goiás – UFG. Escola de Engenharia Civil. Goiânia/GO, 2010.

VAZ, L. E. **Análise de Confiabilidade - DME, Escola Politécnica da UFRJ**, Notas de Aula, Rio de Janeiro, RJ, 2011.

_____. **Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas**, Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.

_____. **Applications of Reliability Analysis in Civil Engineering Problems - Plenary Lecture**, Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais para Engenharia – CILAMCE XXXII, Ouro Preto, 2011.

VERZENHASSI, C. C. **Otimização de Risco Estrutural Baseada em Confiabilidade**. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo. Escola de Engenharia de São Carlos/SP, 2008.

VICTORIA M., QUERIN O. M., MARTI, P. **Generation of strut-and-tie models by topology design using different material properties in tension and compression**. Struct Multidisc Optim (2011) 44:247–258, 2011.

VIEIRA, P. C. S., MELLO, E. L., BEZERRA, L. M. **Síntese Estrutural e Análise Modal de Pórticos Espaciais com Diferentes Graus de Redistribuição de Esforços Solicitantes**, Congresso Ibero-Latino-Americano de Métodos Computacionais para Engenharia - CILAMCE, pp.1-21,2000.

- WANG, D., CHOWDHURY, M. R., HALDAR, A. **System Reliability Evaluation Considering Strength and Serviceability Requirements.** Computers and Structures, V. 62, No. 5, pp. 883-896, 1997.
- YANG, Y. S.; LEE, J. O. **Importance Sampling Combined with Variance Reduction Techniques and Its Application to Response Surface Method.** **Internal Working Report – Lecture Notes, INSDEL, NAOE, Seoul National University, Korea, 1999.**
- YINDEESUK, S. **Design and Analysis os Simple and Complex D-Regions in Reinforced Concrete Structures.** Phd Thesis. University of Illinois at Urbana Champaign. Illinois/USA. 2009
- YUN, Y.M. **Computer graphics for nonlinear strut-tie model approach.** ASCE J Comput Civ Eng 14(2):127–33, 2000.
- YUN, Y. M., RAMIREZ, J. A. **Strength of Struts and Nodes in Strut-and-Tie Model.** Journal of Structural Engineering. V. 122, No. 1, January, pp 20-29, 1996.
- ZHANG, J.; ELLINGWOOD, B. **SFEM in Nonlinear Structural Reliability Analysis. In: Proceedings of the ICOSSAR'98.** Edited by Shiraishi, Shinokuza & Wen, Balkena, Rotterdam, pp. 867-874, 1998.
- ZHAO, Y. G.; ONO, T. **New Approximations for SORM: Part 1 and 2,** Journal of Engineering Mechanics, V. 125, No. 1, 1999.
- ZHOU, M., ROZVANY, G. I. N. **The COC algorithm, part II: topological, geometrical and generalized shape optimization.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, [s.l.], v.89, n. 1-3, p. 309-336, 1991.
- ZHU, R.R.H., WANICHAKORN, W., HSU, T.T.C., VOGEL, J. **Crack Width Prediction Using Compatibility-Aided Strut-and-Tie Model.** ACI Structural Journal, V. 100, No. 4, July-August, pp 413-421, 2003.