



Christian Leite Dias

**Análise de estruturas metálicas com ligações
semirrígidas utilizando a ferramenta educacional
FTOOL**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para
obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Luiz Fernando Martha

Rio de Janeiro,
Julho de 2021



Christian Leite Dias

**Análise de estruturas metálicas com ligações
semirrígidas utilizando a ferramenta educacional
FTOOL**

Dissertação apresentada como requisito parcial para
obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio.
Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo.

Prof. Luiz Fernando Martha

Orientador

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Profa. Elisa Dominguez Sotelino

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP

Rio de Janeiro, 26 de Julho de 2021

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Christian Leite Dias

Graduou-se em Engenharia Mecânica pela UERJ - Universidade do Estado do Rio de Janeiro em 2018. Possui trabalhos publicados em atas de conferências e revistas nacionais na área de Análise de Estruturas e Robótica.

Ficha Catalográfica

Dias, Christian Leite

Análise de estruturas metálicas com ligações semirrígidas utilizando a ferramenta educacional FTOOL / Christian Leite Dias; orientador: Luiz Fernando Martha. – 2021.

v., 141 f.: il. color. ; 29.7 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, 2021.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Civil e Ambiental - Teses. 2. Análise estrutural. 3. Ligações semirrígidas. 4. Não linearidade física. 5. Modelagem computacional. 6. Ferramenta gráfica interativa. I. Martha, Luiz Fernando. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. III. Título.

CDD: 624

Aos meus pais, Álvaro e Elaine,
ao meu irmão, Victor, pelo todo
incentivo e motivação ao longo de toda
minha vida.

Agradecimentos

Ao meu orientador Professor Luiz Fernando Martha por todo seu apoio e compreensão ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Ao Rafael Rangel, de quem a dissertação serviu como base e possibilitou a produção do presente trabalho.

Ao CAPES/CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Aos professores integrantes da banca examinadora.

Aos meus amigos de Pós-Graduação, em especial ao Ronald Junior Lemos Assunção, pelo apoio e companhia durante o percurso.

Aos meus amigos da “gameplay”, Bernardo Delle Piane, Caio Iezzi Tardin, Mateus da Rosa Costa e Rodrigo do Valle Alves, responsáveis por muitos momentos de descontração durante essa trajetória.

Ao meu primo Rafael Dias, com quem sempre pude contar e dividir a moradia ao longo do mestrado.

A minha vó Josina Dias por todo o incentivo para que eu pudesse cursar e completar o curso.

"O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001"

Resumo

Dias, Christian Leite; Martha, Luiz Fernando Campos Ramos (Orientador). **Análise de estruturas metálicas com ligações semirrígidas utilizando a ferramenta educacional FTOOL**, 2021. 141p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Em estruturas metálicas a conexão entre os elementos estruturais é realizada por meio de soldas e/ou parafusos, sendo que seu comportamento é simplificado como perfeitamente rígido ou idealmente rotulado. Porém, essa simplificação não representa o real comportamento da conexão, a qual apresenta um comportamento intermediário a esses dois extremos. Esse tipo de ligação é chamado de semirrígida.

As ligações semirrígidas apresentam um comportamento complexo devido a sua não linearidade física, sendo comumente representado por curvas *momento x rotação* na literatura. Diversos modelos matemáticos também são utilizados para acomodar o comportamento não linear das ligações. Uma alternativa comum é a utilização de um elemento híbrido que incorpora a rigidez das ligações semirrígidas diretamente na formulação elemento estrutural.

Uma análise estrutural com não linearidade física e geométrica ainda não é praticada de forma disseminada entre os engenheiros estruturais. Isso porque esse tipo de análise exige a definição de muitos parâmetros para o controle dos procedimentos numéricos. No meio científico e acadêmico, uma análise estrutural não linear é uma prática conhecida. Entretanto, esse tipo de análise ainda é no momento atual pouco explorada no ensino de graduação e pouco conhecida no meio profissional de Engenharia Civil. Nesse contexto, a principal motivação para este trabalho é o desenvolvimento de uma extensão da ferramenta educacional FTOOL para a análise não linear de pórticos planos com ligações semirrígidas.

O modelo de ligação adotado no presente trabalho é um elemento finito isolado de mola rotacional, que permite a incorporação da rigidez das ligações semirrígidas de forma independente no comportamento global da estrutura. A não linearidade física da ligação foi representada pela definição dos pontos da curva *momento x rotação relativa* da ligação semirrígida, baseando-se no modelo multilinear.

Os métodos de solução não linear geométrica incremental-iterativos existentes no FTOOL foram adaptados de forma a conter também a não

linearidade física das ligações semirrígidas. Diversos exemplos com resultados da literatura demonstram a eficácia e robustez da presente versão do FTOOL.

Palavras-chave

Análise estrutural; Ligações semirrígidas; não linearidade física; Modelagem computacional; Ferramenta gráfica interativa.

Abstract

Dias, Christian Leite; Martha, Luiz Fernando Campos Ramos (Orientador). **Analysis of steel structures with semi-rigid connections using the educational software FTOOL**, Rio de Janeiro, 2021. **141p.** MSc Dissertation – Civil Engineering Department, Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro.

In steel structures, the connection between the structural elements is made by welds and/or screws, and their behavior is simplified as perfectly rigid or ideally labeled. However, this simplification does not represent the real behavior of the connection, which presents an intermediate behavior to these two extremes. This type of connection is called semi-rigid.

Semi-rigid connections presents a complex behavior due to their physical nonlinearity, being commonly represented by moment x rotation curves in the literature. Several mathematical models are also used to accommodate the nonlinear behavior of connections. A common alternative is the use of a hybrid element that incorporates the rigidity of the semi-rigid connections directly into the structural element formulation.

Structural analysis with physical and geometric nonlinearity is not yet common among structural engineers. This is because this type of analysis requires the definition of many parameters to control numerical procedures. In the scientific and academic environment, a non-linear structural analysis is a known practice. However, this type of analysis is currently little explored in undergraduate education and little known in the professional Civil Engineering field. In this context, the main motivation for this work is the development of an extension of the educational tool FTOOL for non-linear analysis of plane frames with semi-rigid connections.

The connection model adopted in this work is an isolated finite element with a rotational spring, which allows the incorporation of the rigidity of the semi-rigid connections independently in the overall behavior of the structure. The physical nonlinearity of the connection was represented by the definition of the points of the moment curve x relative rotation of the semi-rigid connection, based on the multilinear model.

The incremental-iterative geometric nonlinear solution methods existing in FTOOL were adapted in order to also contain the physical nonlinearity of the semi-rigid connections. Several examples with results from the literature demonstrate the effectiveness and robustness of this version of FTOOL.

Keywords

Structural Analysis; Semi-rigid Connections; Physical Nonlinearity;
Computer Modeling; Graphics-interactive Tool.

Sumário

1.	Introdução	22
1.1.	Considerações Iniciais	22
1.2.	Evolução histórica	25
1.3.	Motivação.....	27
1.4.	Principais contribuições.....	28
1.5.	Objetivos.....	29
1.6.	Organização de dissertação.....	30
2.	Ligação semirrígida.....	32
2.1.	Comportamento da ligação semirrígida.....	33
2.2.	Modelo numérico de ligação semirrígida adotado	37
2.3.	Classificação dos modelos matemáticos de ligação semirrígida	42
2.3.1.	Modelo linear	44
2.3.2.	Modelo exponencial	45
2.3.3.	Modelo multilinear	48
2.4.	Elemento de ligação proposto por Del Savio (2004).....	49
3.	Métodos numéricos para solução não linear	52
3.1.	Metodologia de solução não linear	52
3.1.1.	Soluções incrementais	54
3.1.2.	Soluções incremental iterativas.....	55
3.1.3.	Sistema não linear atualizado	57
3.2.	Métodos de solução incremental-iterativos.....	59
3.2.1.	Método de Controle de Carga (MCC).....	60
3.3.	Adaptação para não linearidade física da ligação semirrígida	61
3.4.	Sumário dos métodos de solução	63
4.	Implementação Computacional	68

4.1.	Solver FRAMOOOP	69
4.2.	Programa FTOOL	70
4.3.	Implementações realizadas.....	71
4.3.1.	Implementações no FTOOL	71
4.3.1.1.	Classe <i>Srcn</i>	72
4.3.1.2.	Classe <i>Srcnpa</i>	72
4.3.1.3.	Classe <i>Anl</i>	73
4.3.2.	Implementações no FRAMOOOP	74
4.3.2.1.	Classe AlgGNL.....	75
4.3.2.2.	Sub-classe <i>Elcsrcn</i>	75
4.3.2.3.	Classe <i>Gbldefs</i>	76
4.3.2.4.	Classe <i>Gblvar</i>	77
4.3.3.	Modificações na interface gráfica	77
4.4.	Incorporação do elemento de ligação semirrígida no modelo global	81
5.	Exemplos Numéricos	86
5.1.	Exemplos em análises lineares	87
5.1.1.	Pórtico simples - Chan e Chui (2000).....	87
5.1.2.	Pórtico simples - Steenhuis <i>et al.</i> (1994) e Brito (2001).....	90
5.1.3.	Vigas de Vierendeel - Del Savio <i>et al.</i> (2005)	93
5.2.	Análise não-linear e de modos de flambagem.....	97
5.2.1.	Viga com ligações lineares - Mondkar e Powell (1977)	98
5.2.2.	Pórtico de dois andares - Chan e Chui (2000).....	99
5.2.3.	Pórtico semirrígido simples – Keulen <i>et al.</i> (2003).....	102
5.2.4.	Pórtico de dois andares - Stelmack <i>et al.</i> (1986)	107
5.2.5.	Pórtico de seis andares – Vogel (1985).....	110
5.2.6.	Análise dos modos de flambagem com ligações semirrígidas.....	112
5.2.7.	Análise limite de vigas hiperestáticas com formação de rótulas plásticas	117
6.	Conclusão	128

6.1.	Considerações finais	128
6.2.	Trabalhos futuros	132
7.	Referências bibliográficas	134

Lista de figuras

Figura 1: Comportamento típicos de algumas ligações semirrígidas.....	23
Figura 2: Efeitos de segunda ordem (Silva, 2009)	24
Figura 3: Exemplos comuns de ligações entre viga e pilar de estruturas metálicas (adaptado de Chan e Chui, 2000).	34
Figura 4: Efeito da flexão em uma ligação (Chan e Chui, 2000).	35
Figura 5: Rigidez inicial, secante, tangente e capacidade de momento de uma ligação semirrígida.....	37
Figura 6: Elemento de mola para representação de uma ligação (adaptado de Chan e Chui, 2000).	38
Figura 7: Elemento híbrido proposto por Chan e Chui (2000).	38
Figura 8: Elemento finito considerando efeito da ligação semirrígida (Silva, 2009).	39
Figura 9: Configuração deformada do elemento finito com ligações semirrígidas (Silva, 2009).	40
Figura 10: Curvas momento x rotação para as ligações consideradas na análise.	47
Figura 11: Curvas rigidez x rotação para as ligações consideradas na análise..	47
Figura 12: Modelo multilinear para ajuste do comportamento.	48
Figura 13: Modelo de ligação com todas rizezas (Del Savio, 2004).	50
Figura 14: Ajuste do comportamento não linear em métodos incrementais.	55
Figura 15: Comportamento da solução para o Método de Controle de Carga....	60
Figura 16: Método multilinear para obtenção da rigidez da ligação.....	62
Figura 17: Fluxograma para solução não linear (Rangel, 2019 Adaptado).	64
Figura 18: Nova interface do FTOOL para a criação da ligação semirrígida (Dias et al., 2020).	78
Figura 19: Representação gráfica das ligações semirrígidas em um modelo no FTOOL.....	80
Figura 20: Parâmetros de inserção do usuário para análise não linear no FTOOL.	81
Figura 21: Exemplo de um pórtico com ligações semirrígidas e numeração dos graus de liberdade.	83

Figura 22: Matriz [ID] com a numeração dos graus de liberdade dos nós do pórtico da Figura 21.	84
Figura 23: Pórtico simples (Chan e Chui, 2000) – modelo proposto para análise linear.....	88
Figura 24: Pórtico simples (Chan e Chui, 2000) – modelo proposto modelado no FTOOL para análise linear.....	88
Figura 25: Pórtico simples - resultados apresentados por Chan e Chui (2000)..	89
Figura 26: Pórtico simples (Steenhuis <i>et al.</i> (1994) - modelo criado no ambiente FTOOL.....	91
Figura 27: Vigas de Vierendeel (Del Savio et al., 2005) - modelo de análise no ambiente FTOOL.....	94
Figura 28: Viga com ligações lineares (Mondkar e Powell, 1977) - elemento proposto para análise.	98
Figura 29: Viga com ligações semirrígidas (Mondkar ,1977) - curva carga-flecha.	99
Figura 30: Pórtico de dois andares (Chan e Chui, 2000) - elementos para o caso em análise.....	100
Figura 31: Pórtico de dois andares (rígido) (Chan e Chui ,2000) - curva carga-deslocamento u.	101
Figura 32: Pórtico de dois andares (rotulado) (Chan e Chui ,2000) - curva carga-deslocamento u.	101
Figura 33: Pórtico semirrígido simples (Keulen et al., 2003) - modelo para conter as cargas de análise.....	103
Figura 34: Pontos utilizados para ligações não lineares para o pórtico simples (Keulen et al., 2003).....	104
Figura 35: Modelo de ligação utilizado na análise (Keulen et al, 2003).	104
Figura 36: Pórtico semirrígido simples (Keulen et al., 2003) ($\alpha = 0.10$) - curva carga-deslocamento u.	105
Figura 37: Pórtico semirrígido simples (Keulen et al., 2003) ($\alpha = 0.15$) - curva carga-deslocamento u.	105
Figura 38: Pórtico semirrígido simples (Keulen et al., 2003) ($\alpha = 0.20$) - curva carga-deslocamento u.	106
Figura 39: Pórtico semirrígido simples (Keulen et al., 2003) ($\alpha = 0.30$) - curva carga-deslocamento u.	106
Figura 40: Pórtico semirrígido simples (Keulen et al., 2003) ($\alpha = 0.50$) - curva carga-deslocamento u.	107

Figura 41: Pórtico de dois andares (Stelmack et al.,1986) - modelo estrutural criado para a análise.	108
Figura 42: Pontos da curva $M \times \theta_c$ utilizados para modelar comportamento da ligação para o pórtico de dois andares.	109
Figura 43: Pórtico de dois andares (Stelmack et al.,1986) - curva carga-delocamento u.	109
Figura 44: Pórtico de seis andares (Vogel, 1985) - modelo estrutural de calibração.	111
Figura 45: Pórtico de seis andares (Vogel, 1985) - curva fator de carga-delocamento u	112
Figura 46: Modelo estrutural considerado na análise de modos de flambagem.	113
Figura 47: Modo 1 de flambagem da estrutura.....	113
Figura 48: Modo 2 de flambagem da estrutura.....	114
Figura 49: Modo 3 de flambagem da estrutura.....	114
Figura 50: Modo 4 de flambagem da estrutura.....	114
Figura 51: Modo 5 de flambagem da estrutura.....	115
Figura 52: Modo 6 de flambagem da estrutura.....	115
Figura 53: Modo 1 de flambagem para a viga de Vierendeel.	116
Figura 54: Modo 2 de flambagem para a viga de Vierendeel.	116
Figura 55: Modo 3 de flambagem para a viga de Vierendeel.	116
Figura 56: Viga hiperestática de seção transversal retangular.	117
Figura 57: Relação entre tensão e deformação normal em um comportamento elasto-plástico perfeito.	118
Figura 58: Diagramas de momento para o caso analisado.	118
Figura 59: Evolução da plastificação da seção transversal.	119
Figura 60: Relação curvatura x deformação normal da seção,	119
Figura 61: Representação da seção retangular.	120
Figura 62: Curva momento x curvatura de uma seção ao longo da plastificação.	121
Figura 63: Esquema adotado para a viga do caso de estudo com ligações semirrígidas como rótulas plásticas.	122
Figura 64: Curva momento x rotação para ligações semirrígidas como rótulas plásticas.....	122
Figura 65: Comportamento das ligações semirrígidas adotadas para a análise.	123
Figura 66: Diagrama de momento para uma análise linear-elástica.....	123

Figura 67: Diagrama de momento de ambos casos analisados.	124
Figura 68: Gráfico deslocamento x fator de carga do nó central.	125
Figura 69: Gráfico momento x fator de carga nas rótulas plásticas.	126

Lista de tabelas

Tabela 1: Valores dos parâmetros fornecidos por Lui e Chen (1986).....	46
Tabela 2: Classes do FTOOL criados/modificados.	72
Tabela 3: Classes do FRAMOOOP criados/modificados.	74
Tabela 4: Casos hipotéticos para análise do pórtico simples	89
Tabela 5: Valores obtidos para o caso 1	89
Tabela 6: Valores obtidos para o caso 2.....	89
Tabela 7: Valores obtidos para o caso 3.....	90
Tabela 8: Valores obtidos para o caso 4.....	90
Tabela 9: Momento fletor no Nó A em cada caso.	92
Tabela 10: Momento fletor no Nó B em cada caso.	92
Tabela 11: Momento fletor no Nó C em cada caso.	92
Tabela 12: Deslocamentos horizontais do pavimento.	93
Tabela 13: Erro percentual em relação a Steenhuis et al. (1994).....	93
Tabela 14: Valores utilizados para as seções em cada membros.	94
Tabela 15: Valores de cada ligação em cada caso de análise proposto por Del Savio et al. (2005).....	95
Tabela 16: Deslocamentos/rotações comparados com Del Savio et al. (2005)..	96
Tabela 17: Cargas internas comparados com Del Savio (2005).	96
Tabela 18: Cargas críticas comparadas com Chan e Chui (2000) – Suporte fixo	102
Tabela 19: Cargas críticas comparadas com Chan e Chui (2000) – Suporte rotulado.....	102
Tabela 20: Perfis utilizados no modelo de Vogel (1985).	110
Tabela 21: Fatores de carga crítica para cada modo de flambagem.....	115

Lista de Símbolos

P	Força axial/Esforço axial
Δ	Varição
δ	Incremento
M	Momento fletor
K	Matriz de rigidez
ϕ_c	Rotação da ligação
S_c	Rigidez da ligação
$S_{c,ini}$	Rigidez inicial da ligação
$S_{c,secante}$	Rigidez secante da ligação
M_u	Momento último
EI	Rigidez à flexão
L	Comprimento
γ	Fator end-fixing (fator de rigidez)
M_c	Momento na coluna
M_b	Momento na barra
θ_c	Rotação na coluna
θ_b	Rotação na barra
Q	Esforço cortante
M_0	Momento inicial
R_{kf}	Rigidez devido encruamento

C_m	Coeficientes de ajuste
α	Fator de escala
t	Tempo
Δt	Incremento de tempo
S_A	Rigidez axial
S_R	Rigidez rotacional
S_T	Rigidez translacional
d	Deslocamento
q	Vetor de forças internas nodais
u	Vetor de deslocamentos nodais
p	Vetor de forças externas
λ	Fator de carga
\bar{p}	Vetor de cargas de referência
r	Vetor de forças residuais
ε	Tolerância
A	Vetor de restrição
B e C	Constantes de restrição
l	Comprimento de arco
W	Trabalho realizado
\bar{u}	Deslocamentos tangentes
$\bar{\bar{u}}$	Deslocamentos residuais
β	Parâmetro de restrição de comprimento de arco
μ	Fração de interpolação
E	Módulo de elasticidade

σ_p	Tensão normal
l_p	Comprimento característico de rótula plástica
M_e	Momento limite elástico
M_p	Momento limite plástico
P_{lim}	Carga limite de colapso
ε_x	Deformação normal
ε_p	Deformação limite plástica
ρ	Curvatura de seção da viga
γ_e	Posição limite da fibra

Lista de Abreviaturas

<i>FTOOL</i>	Two-Dimensional Frame Analysis Tool Program
<i>PUC-Rio</i>	Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
<i>UERJ</i>	Universidade do Estado do Rio de Janeiro
<i>CAPES</i>	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
<i>CNPq</i>	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
<i>Eurocode</i>	European Committee for Standardisation
<i>AISC</i>	American Institute of Steel Construction
<i>BS</i>	British Standard
<i>NBR</i>	Norma técnica brasileira
<i>BWRA</i>	British Welding Research Association
<i>CS-ASA</i>	Computational System for Advanced Structural Analysis
<i>LESM</i>	Linear Elements Structure Model
<i>POO</i>	Programação orientada a objetos
<i>MCD</i>	Método da Compatibilidade de Deformações
<i>SRC</i>	Semi Rigid connections
<i>MEF</i>	Método dos Elementos Finitos
<i>MCC</i>	Método Controle de Cargas
<i>IUP</i>	Portable User Interface
<i>FEMOOP</i>	Finite Element Method Object Oriented Program
<i>HED</i>	Half-Edge Data Structure
<i>EPUSP</i>	Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
<i>UNICAMP</i>	Universidade Estadual de Campinas

<i>UPF</i>	Universidade de Passo Fundo
<i>API</i>	Application Programming Interface
<i>LED</i>	Dialog Specification Language
<i>MATLAB</i>	Matrix Laboratory
<i>Srcn</i>	Semi rigid connection
<i>Srcnpa</i>	Semi rigid connection parameters
<i>Anl</i>	Analysis
<i>Elcsrcn</i>	Semi rigid connection element
<i>Gbldefs</i>	Global definitions
<i>Gblvar</i>	Global variables
<i>AlgGNL</i>	Algorithm Generic Non Linear

1. Introdução

1.1. Considerações Iniciais

As ligações, em estruturas metálicas, além de unirem dois elementos estruturais distintos, representam um meio aos quais os esforços internos são transmitidos, como na ligação entre uma viga e uma coluna. Essas ligações desempenham um papel fundamental quando analisado o comportamento estrutural, além da montagem e o custo de operação. Comumente, em projetos de análise estrutural, essas ligações apresentam um comportamento idealizado com respeito a rotações relativas: perfeitamente rígido ou idealmente rotulado. O caso de uma ligação perfeitamente rígida determina que os membros conectados não apresentem liberdade de rotação relativa na conexão quando a estrutura se deforma. Nesse caso, o momento atuante na extremidade de uma viga é completamente transferido para a coluna e vigas conectadas. Já no caso de uma ligação idealmente rotulada existe a liberdade de rotação relativa entre os membros, sendo que nenhum momento é transferido de um membro ao outro. Essas considerações são utilizadas de forma a facilitar a análise estrutural, embora o comportamento real de uma ligação entre membros estruturais apresente um comportamento intermediário entre esses dois extremos, em que permite uma rotação relativa entre os membros e também transferindo momentos. Esse tipo de ligação com um comportamento intermediário é denominado “ligação semirrígida”.

As conexões em estruturas metálicas são construídas por meio de parafusos ou soldas. Logo, esses elementos de ligações também apresentam suas próprias características, como rigidez e capacidade de carga, as quais devem ser analisadas para obter o comportamento mais preciso da estrutura como um todo, uma vez que o tipo de ligação adotado afeta esse comportamento.

A Figura 1 ilustra o comportamento momento-rotação típico de quatro ligações semirrígidas, em um gráfico que define o comportamento idealmente rígido (eixo das ordenadas), a qual não existe rotação relativa e todo momento é transferido, e o comportamento idealmente rotulado (eixo das abscissas), o qual

permite rotação relativa e nenhum momento é transferido. O comportamento intermediário de uma ligação semirrígida é, em geral, não linear, e sua rigidez pode ser caracterizada por uma função entre o momento e rotação. Nesse caso, como a não linearidade está associada a um elemento estrutural, ela é classificada como não linearidade física.

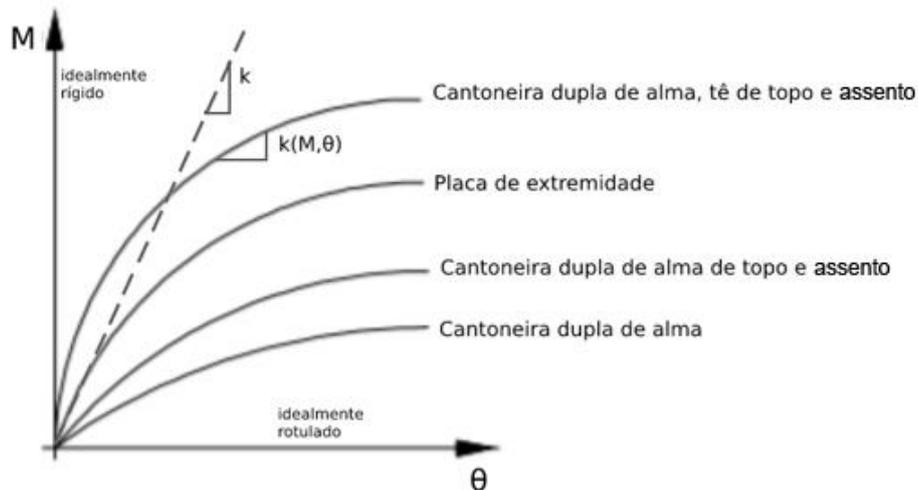


Figura 1: Comportamento típicos de algumas ligações semirrígidas.

Em respeito a não linearidade física das ligações, diversas normas para análise de projeto estrutural passaram a considerar as ligações semirrígidas de forma mais realista, como por exemplo NBR-8800 (1986; 2008), AISC (1986; 1989; 1994), BS5950 (1990) e Eurocode 3 (1990; 1992). Essas conexões são tradicionalmente aproximadas por molas conectadas nas extremidades dos membros, e implicam em soluções iterativas, o qual a rigidez dessas molas são dependentes de parâmetros de interação, que por sua vez são dependentes das forças internas.

Outro tipo de não linearidade de uma estrutura é a não linearidade geométrica. Esse tipo de não linearidade ocorre quando as deflexões da estrutura não podem ser negligenciadas na formulação das condições de equilíbrio. Uma análise estrutural que considera pequenos deslocamentos, isto é, que despreza os deslocamentos para formular as condições de equilíbrio, é denominada análise de primeira ordem. Uma análise de primeira ordem é linear quando o material tem um comportamento linear. Quando não é possível desprezar os deslocamentos nas condições de equilíbrio aparecem efeitos não lineares de segunda ordem (não linearidade geométrica), pois existe uma dependência das equações de equilíbrio em relação aos deslocamentos, que não são conhecidos a priori.

Estruturas civis são sistemas deformáveis, porém rígidos, isto é, em geral apresentam pequenos deslocamentos. Entretanto, no projeto de estruturas, para garantir segurança, a análise estrutural tem que levar em conta deslocamentos de ordem moderada. Em casos especiais, grandes deslocamentos devem ser considerados. De qualquer maneira, deslocamentos moderados ou grandes podem afetar a estabilidade da estrutura. Isso pode ser entendido com auxílio da Figura 2. O efeito $P-\delta$ pode desestabilizar uma coluna da estrutura porque o momento provocado pela carga axial P na coluna pela deflexão local δ pode aumentar indefinidamente a própria deflexão local, levando a coluna ao colapso. Esse fenômeno é conhecido como flambagem local da coluna. Por outro lado, o efeito $P-\Delta$ pode desestabilizar a estrutura globalmente pois os momentos provocados pelas cargas verticais com o deslocamento global Δ podem aumentar indefinidamente o deslocamento lateral, provocando a flambagem global.

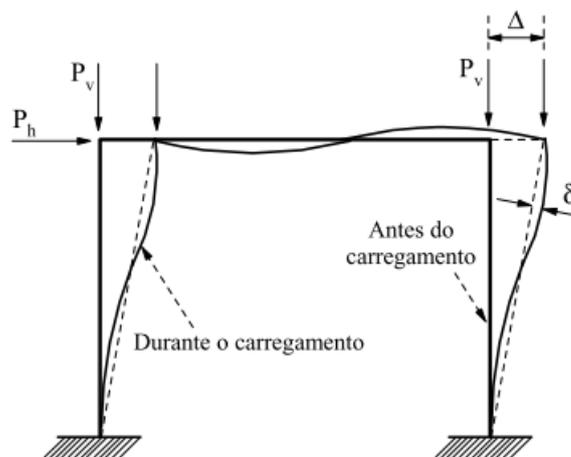


Figura 2: Efeitos de segunda ordem (Silva, 2009)

Este trabalho tem como foco principal a análise de pórticos bidimensionais considerando a não linearidade física de ligações semirrígidas, apenas a rotação relativa entre as extremidades da ligação. Embora também seja considerada a não linearidade geométrica do modelo, isso é tratado aqui apenas de maneira resumida porque foi objeto do trabalho de Rangel (2019) na mesma linha de pesquisa à qual este trabalho está inserido.

1.2. Evolução histórica

Na Universidade de Illinois, Willard *et al.* (1917) realizaram os primeiros experimentos para obter a rigidez de conexões de um pórtico de aço, o qual avaliaram a rigidez rotacional das ligações com utilização de rebites na conexão dos membros.

A partir da década de 40, com a popularização do uso de solda e parafusos de alta resistência, surgiram diversos trabalhos focados no comportamento semirrígido das ligações, nos quais destacam-se os trabalhos realizados por Young e Jackson (1934) e Rathbun (1936). Posteriormente a esse período, surgiu a utilização extensiva de parafusos de alta-resistência nas construções de aço, tais como as pesquisas realizadas por Bell *et al.* (1958). As pesquisas se intensificaram ainda mais na década de 60, com a necessidade de incorporar esse comportamento no projeto estrutural. De acordo com Ribeiro (1998), os principais objetivos desses trabalhos eram:

- i. criação e definição de modelos teóricos para comparação com os resultados experimentais, capazes de determinar a rigidez, resistência e ductilidade da ligação;
- ii. desenvolvimento de formulações utilizando como base os resultados experimentais;
- iii. desenvolvimento de formulações empíricas, através de modelos matemáticos e computacionais, e aferição com base em resultados obtidos em experimentos;
- iv. análise do comportamento das ligações semirrígidas e seus efeitos no comportamento global da estrutura;
- v. inclusão de parâmetros relativos à rigidez inicial das ligações na análise estrutural.

Um dos pioneiros do estudo das ligações com chapa de topo foi Sherbourne (1961), na Universidade de Cambridge, com o patrocínio da *British Welding Research Association (BWRA)*. Douty & McGuire (1965) foram os pioneiros com o estudo de ligações semirrígidas com a utilização de perfis T parafusados às vigas e colunas, e em seguida, o modelo para verificação da capacidade resistente de perfis T proposto por De Back e Zoetemeyer (1972), o qual serviu como base

para a metodologia utilizada pelo Eurocode 3 (1992) para o dimensionamento da chapa de topo.

A crescente necessidade de entender o comportamento das ligações semirrígidas, acompanhada das simulações com resultados mais precisos, resultou em um grande volume de estudos desenvolvidos nessa área (Lui e Chen, 1986; Chen e Lui, 1991; Chen *et al.*, 1995; Chan e Chui, 2000; Pinheiro, 2003; Del Savio, 2005; Rocha, 2006; Silva, 2009; Alvarenga, 2010; Lemes, 2018). Dentre esses trabalhos, destacam-se o livro de Chan e Chui (2000), que propuseram um elemento híbrido com molas rotacionais fictícias com comprimento nulo nas extremidades. Seguindo esse modelo, Del Savio (2004) propôs um elemento de ligação que resolvesse os problemas apresentados pelo modelo de Chan e Chui (2000). Dentre os problemas, constatou-se a má representação do comportamento da estrutura quando submetida a carregamentos distribuídos.

Chen *et al.* (1995) apontam que grande maioria das estruturas de aço, os efeitos das forças axiais e cisalhantes são desprezíveis quando comparados com os efeitos resultantes do momento fletor. Desta forma, os modelos propostos com molas fictícias apresentam um bom ajuste do comportamento da estrutural global. Embora existam trabalhos que propõem modelos para considerar os demais efeitos, como o estudo Sekulovic e Salatic (2001), que consideram também a excentricidade da ligação semirrígida.

A utilização da análise não-linear está se tornando cada vez mais usual na elaboração de projetos estruturais. Esse crescimento deu-se início na década de 60, quando formulações geometricamente não-lineares foram desenvolvidas, utilizando o método dos elementos finitos (MEF) com soluções diretas e/ou incrementais (Galvão, 2000).

Em formulações Eulerianas, as coordenadas utilizadas como referência são coordenadas espaciais, muito utilizado na mecânica dos fluidos, uma vez que focam na evolução de variáveis em pontos fixos de um domínio. Já as formulações Lagrangianas, utilizam coordenadas dos pontos materiais. Tal definição facilita análise não-lineares e incrementais, na qual a história de deformação de cada ponto do corpo pode ser acompanhada ao longo do processo de carregamento (Pinheiro, 2003). Por conta dessas características, o presente trabalho, assim como a maioria das análises de estruturas com não linearidade geométrica, foca no referencial Lagrangiano (Silva, 2016).

Entre esses métodos, destacam-se formulações em referencial Lagrangiano total (RLT) desenvolvidos por Mallett e Marcal (1968) e Jennings (1968), que incluíram uma matriz de ordem elevada no cálculo da matriz de rigidez do

elemento. Martin (1965) desenvolveu em referencial Lagrangiano atualizado (RLA), uma formulação que inclui a matriz geométrica para o cálculo da matriz de rigidez do elemento.

De Lima (2005) apresentou um conceito utilizando redes neurais para determinar a rigidez inicial de ligações viga-coluna. Del Savio (2004) desenvolveu um modelo baseado em um estudo paramétrico de ligações semirrígidas utilizadas na análise de vigas de Vierendeel. A utilização de materiais compósitos cresce constantemente na Engenharia, e da mesma forma, conexões semirrígidas de materiais compósitos tornam-se uma ótima alternativa, como no contexto de estruturas mistas de aço e concreto, onde a maioria dos trabalhos estão focados na análise experimental e obtenção das curvas *momento x rotação* das ligações ensaiadas (Wang et al., 2009; Dabaon et al., 2009; Fu et al., 2010).

Silva (2009) desenvolveu uma ferramenta computacional para a análise avançada estática e dinâmica de estruturas baseadas no MEF, chamada de CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*). Por meio de formulações não lineares mais complexas, Silva (2009) considerou tanto os efeitos não lineares geométricas dos deslocamentos quanto os efeitos não lineares físicos das ligações semirrígidas em um conjunto de método de solução não linear, considerados diretamente na formulação dos elementos. Lemes (2018) propôs uma abordagem baseada no Método da Compatibilidade de Deformações (MCD) para avaliar a capacidade resistente da seção e também as rigidezes axiais e à flexão, a partir da plataforma CS-ASA, viabilizando três fontes de não linearidade: geométrica, física e material.

Marques *et al.* (2019) implementaram a aplicação de ligações semirrígidas no contexto de pórticos reticulados. A metodologia utilizada baseia-se na adoção de molas rotacionais que simulam as ligações entre elementos, permitindo uma análise matricial através do Método da Rigidez Direta. Tal implementação serviu como uma extensão ao software LESM (Linear Elements Structure Model), e seu código foi inteiramente desenvolvido em MATLAB, seguindo a filosofia da programação orientada a objetos (POO).

1.3. Motivação

Uma análise estrutural com não linearidade física e geométrica ainda não é praticada de forma disseminada entre os engenheiros estruturais. Isso porque esse tipo de análise exige a definição de muitos parâmetros para o controle dos

procedimentos numéricos. No meio científico e acadêmico da área, uma análise estrutural não linear é uma prática conhecida. Entretanto, esse tipo de análise ainda é no momento atual pouco explorada no ensino de graduação e pouco conhecida no meio profissional de Engenharia Civil. Nesse contexto, a principal motivação para este trabalho é o desenvolvimento de uma nova extensão da ferramenta educacional FTOOL para análise não linear de pórticos planos com ligações semirrígidas.

Apenas o comportamento rotacional das ligações é considerado, o que é realizado com base em relações não lineares entre momentos e rotações fornecidas para as ligações. Este trabalho complementa a dissertação de mestrado de Rangel (2019), que desenvolveu uma extensão do programa FTOOL para análise não linear geométrica. Dessa forma, este trabalho faz uso dos procedimentos desenvolvidos no trabalho de Rangel para acompanhamento da trajetória de equilíbrio em uma análise estrutural não linear.

O trabalho previamente realizado por Del Savio (2004) serviu como base para o desenvolvimento do presente trabalho. Del Savio (2004) buscou a implementação das ligações semirrígidas com comportamento não linear adotando a hipótese de pequenos deslocamentos, isto é, em uma análise linear geométrica para modelar o comportamento estrutural dentro do ambiente FTOOL. Entretanto, Del Savio (2004) criou uma estrutura de dados à parte, chamada de FTOOL SRC (semi rigid connections), a qual não pode ser aproveitada na versão oficial do FTOOL.

Além de revisitar o desenvolvimento de Del Savio, outra grande motivação foi a implementação realizada por Rangel (2019), o qual implementou diversos métodos de solução não linear geométrica no FTOOL. Esse novo tipo de análise é realizado através de algoritmos numéricos iterativos, e permite a visualização dos resultados ao longo dos passos do processo incremental para sua melhor compreensão. Neste trabalho, os algoritmos de solução não linear desenvolvidos por Rangel (2019) foram adaptados para considerar o efeito não linear da rigidez das ligações semirrígidas.

1.4. Principais contribuições

Dentre as principais contribuições deste trabalho acerca da nova ferramenta de análise de estruturas com ligações semirrígidas, implementadas no FTOOL e na biblioteca de solução FRAMOOOP, destacam-se:

A implementação de um modelo de ligação de mola rotacional, capaz de acomodar de forma satisfatória os momentos fletores atuantes no elemento para todos os tipos de carregamento. Tal elemento foi previamente implementado por Del Savio (2004) e novamente revisitado neste trabalho. O modelo comportou-se de forma adequada tanto em análises lineares elásticas quanto em análises que consideraram a não linearidade física dos elementos de ligação, ajustando-se de forma precisa ao comportamento esperado da estrutura.

As adaptações do programa de análise FTOOL e da biblioteca FRAMOOOP para conter o comportamento e contribuição da não linearidade física das ligações semirrígidas se mostraram bem adequadas, como demonstram as comparações com resultados da literatura, tornando o FTOOL uma importante ferramenta para a ilustração e entendimento do comportamento desse tipo de ligação no comportamento global do pórtico. A inserção da nova etapa no processo de análise não linear aos métodos não lineares implementados por Rangel (2019), para considerar a não linearidade física das ligações semirrígidas, mostrou-se eficiente e foi desenvolvida para permitir o acoplamento de futuras extensões para ligações.

Por fim, a interface gráfica do FTOOL foi modificada e adaptada para conter as ligações dentro do ambiente de análise do programa. A incorporação se demonstrou adequada e de fácil uso e manipulação ao longo de todos os processos de análise, respeitando e cultivando a cultura da simplicidade na criação, manipulação e leitura de dados do software. A apresentação dos resultados das análises não lineares é bastante didática, em que é possível visualizar a estrutura deformada e os diagramas de esforços internos em cada etapa incremental iterativa de análise, além de visualizar diversos tipos de gráficos de resultados.

Todos esses ganhos só foram possíveis porque o presente trabalho usufruiu do trabalho de mestrado de Rangel (2019) que, além de implementar no FTOOL/FRAMOOOP todos os procedimentos para análise não linear geométrica, implementou todos os procedimentos para visualização e controle de uma análise não linear interativa e adaptativa.

1.5. Objetivos

Este trabalho descreve a implementação e o uso de uma ferramenta computacional para análise de modelos estruturais de duas dimensões no

contexto das ligações semirrígidas, permitindo a modelagem de um comportamento linear e não linear físico da conexão. Tais modelos são representados como elementos de molas rotacionais. A aplicação foi desenvolvida e incorporada como uma nova ferramenta do programa FTOOL, software muito utilizado na Engenharia Civil e muito bem avaliado pela comunidade no contexto do ensino da análise estrutural.

O principal objetivo deste trabalho é voltado para a comunidade acadêmica, apresentando uma aplicação educacional para a análise e melhor entendimento sobre o comportamento de estruturas de aço com ligações semirrígidas não lineares. Além disso, o trabalho buscou a implementação dessa nova ferramenta da forma mais amigável possível ao usuário, permitindo uma fácil configuração do modelo desde o pré-processamento (atribuição das características da estrutura) ao pós-processamento (visualização dos resultados).

Foi elaborado um modelo de ligação semirrígida capaz de adequar-se a qualquer tipo de carregamento, integrada à metodologia de solução numérica utilizada no módulo de análise do FTOOL, denominado FRAMOOOP. Foi modificada a interface de pré-processamento do programa, de modo a torná-lo apto a realizar análise não lineares de estrutura com ligações semirrígidas.

Este trabalho também tem por objetivo a realização de avaliações de diversos estudos de casos, utilizando como base a literatura disponível, e assim validar a eficiência da interface gráfica e dos métodos computacionais empregados.

1.6. Organização de dissertação

O atual capítulo apresentou considerações iniciais sobre os efeitos não lineares das ligações semirrígidas em pórticos planos. Na ordem, realizou-se um resumo do contexto histórico envolvendo a modelagem das ligações semirrígidas e das análises geométricas não lineares. Em seguida, exposta a motivação para a realização do trabalho, a apresentação dos objetivos e uma breve descrição do conteúdo que é abordado em cada capítulo.

O Capítulo 2 apresenta o comportamento das ligações semirrígidas e as propriedades importantes para seu entendimento e modelagem, além dos modelos para a representação do comportamento da ligação semirrígida mais comuns presentes na literatura. Também são apresentados os modelos propostos por Chan e Chui (2000) e Del Savio (2004), que serviram como base para a

implementação neste trabalho. Por fim são pontuadas as considerações acerca da metodologia empregada.

O Capítulo 3 é iniciado com considerações importantes sobre as trajetórias de equilíbrio em uma análise incremental, atentando-se para os pontos críticos na análise. Posteriormente, é realizada uma breve descrição dos métodos incremental-iterativos implementados e descritos no trabalho de Rangel (2019). Por fim, são descritas as modificações necessárias no cenário da análise não linear para considerar a influência da ligação semirrígida na solução e é apresentado um fluxograma detalhado do processo de análise.

No Capítulo 4, são expostos as modificações e implementações realizadas no *so/ver* FRAMOOOP e também no FTOOL para a integração da análise do comportamento de ligações semirrígidas no software, também considerando a nova interface elaborada/adaptada para conter a nova ferramenta de análise.

As validações dos procedimentos realizados neste trabalho estão presentes no Capítulo 5. Esse capítulo é dividido em duas grandes sessões: análises lineares e não lineares e modos de flambagens. Na primeira seção são apresentadas análises linear-elásticas com resultados comparados com os da literatura. Enquanto que na segunda seção são realizadas análises considerando a não linearidade físico/geométrica da estrutura, além de uma análise qualitativa dos modos de flambagem considerando ligações semirrígidas com comportamento linear e por fim uma análise limite inserindo ligações semirrígidas como rótulas plásticas.

No Capítulo 6 são apresentadas as considerações finais, conclusões e uma breve descrição de possíveis trabalhos futuros que possam ser realizadas a partir da implementação realizada.

2. Ligação semirrígida

Como mencionado no capítulo anterior, em projetos de estrutura metálicas, em geral, as ligações entre os elementos de vigas e colunas são consideradas como perfeitamente rígidas ou idealmente rotuladas. Entretanto, essas conexões estruturais são realizadas no local da edificação por meio de parafusos ou soldas. Logo, essas ligações apresentam sua própria rigidez e capacidade resistente, e, portanto, essas propriedades devem ser consideradas a fim de determinar com precisão a capacidade de carga da estrutura global.

O tipo de elemento de ligação utilizado para as conexões entre elementos estruturais influencia diretamente na capacidade de carga do sistema global, e, devido ao comportamento não linear das ligações semirrígidas, é relativamente complexo representá-lo matematicamente. Embora existam muitos modelos analíticos capazes de reproduzir de forma adequada o comportamento do elemento de uma ligação semirrígida, seu uso é limitado por conta da quantidade necessária de parâmetros para descrição e serem restritos a uma determinada topologia. De acordo com Rocha (2006), os melhores modelos utilizados para caracterizar o comportamento das ligações semirrígidas são: o modelo linear, o exponencial (Lui e Chen, 1986), o exponencial modificado (Kishi e Chen, 1987) e o multilinear.

Geralmente, os modelos exponenciais exigem um grande número de parâmetros para um bom ajuste do comportamento da ligação, e embora sejam funções contínuas, são insensíveis a mudanças abruptas no comportamento. Já o modelo multilinear, base da implementação deste trabalho, utiliza os pontos da curva $M \times \phi_c$ (*momento x rotação relativa*) característica da ligação semirrígida, que podem ser obtidos diretamente de ensaios experimentais.

Embora o estudo do comportamento das ligações semirrígidas não seja essencialmente novo, existe muito a ser explorado nesse campo. Nesse sentido, diversos trabalhos e estudos vem sido realizados na área da simulação numérica (Lui e Chen, 1986; Chen e Lui, 1991; Chen *et al*, 1995; Chan e Chui, 2000; Rocha, 2006; Silva, 2009; Alvarenga, 2010). Dos trabalhos apresentados, destaca-se o livro de Chan e Chui (2000), o qual aborda o uso de molas rotacionais fictícias na extremidade de um elemento finito de barra para simular ligações semirrígidas. A matriz de rigidez do conjunto formado pelo elemento de barra e ligações

semirrígidas nas extremidades é condensado, resultando em um elemento finito especial com graus de liberdade de deslocamentos e rotação nodais convencionais. Dessa maneira, o comportamento da ligação semirrígida é inserido diretamente na formulação do elemento estrutural. Além disso, como destacado por Chen *et al.* (1995), a deformação da ligação é, em sua grande maioria, devido ao momento fletor. Logo, os efeitos das forças axiais e cortantes são pequenas quando comparadas com os efeitos causados pela flexão, sendo descartadas em muito dos casos de análise.

Deve-se observar que existem trabalhos que consideram efeitos axiais e cortantes, assim como a excentricidade da ligação (Bergan *et al.*, 1978; Sekulovic e Salatic, 2001; Baldassino e Zandonini, 2009; Del Savio *et al.*, 2010).

2.1. Comportamento da ligação semirrígida

Essencialmente, o comportamento não linear das ligações semirrígidas é explicado pela plastificação gradual de seus componentes (placas, parafusos, soldas) e outros efeitos, como: imperfeições geométricas, tensões residuais devido a soldagem, e a concentração de tensões e efeitos locais secundários. Por conta da complexidade na modelagem desse comportamento, a definição de suas propriedades se torna um procedimento incerto e imprevisível. A Figura 3 mostra alguns dos principais tipos de ligações comuns encontradas na construção civil de pórticos metálicos.

Inicialmente, para a análise de pórticos com ligações semirrígidas, é necessário primeiramente conhecer e modelar o comportamento da ligação. A modelagem desse comportamento pode ser realizada de diversas maneiras: pelas curvas momento-rotação característica da ligação, obtidas através de ensaios experimentais, através de simulações numéricas em elementos finitos (Campos Júnior, 1990; Toma e Chen, 1994; Ribeiro, 1998) ou por modelos teóricos analíticos/matemáticos, desenvolvidos por técnicas de ajuste de curvas a partir dos resultados obtidos experimentalmente.

Em geral, para a maior parte dos casos de uso, as deformações ocasionadas pelos efeitos axiais e cisalhantes são pequenas o suficiente para serem desconsideradas quando comparadas com as rotações oriundas da flexão. Por conta disso, somente os efeitos dos momentos fletores e rotações relativas são considerados neste trabalho. Essa consideração se adequa ao modelo de mola rotacional adotado, que considera apenas a rotação relativa do elemento de

ligação. A Figura 4 ilustra uma deformação rotacional típica de uma ligação sob efeito da flexão.

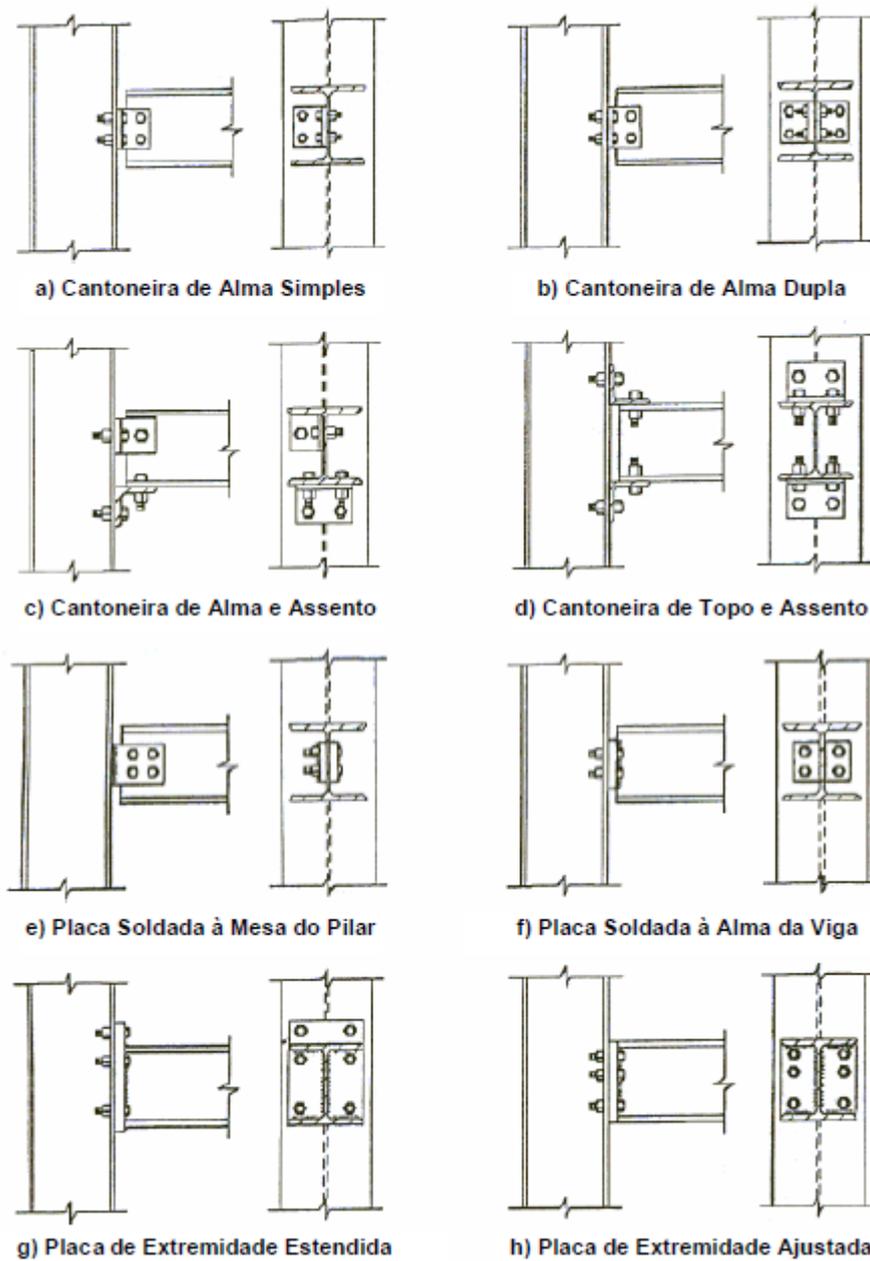


Figura 3: Exemplos comuns de ligações entre viga e pilar de estruturas metálicas (adaptado de Chan e Chui, 2000).

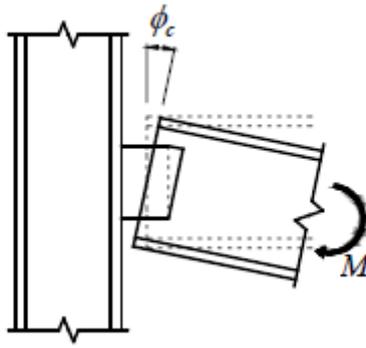


Figura 4: Efeito da flexão em uma ligação (Chan e Chui, 2000).

O comportamento das ligações semirrígidas é encontrado na literatura por curvas ($M \times \phi_c$) que relacionam o momento fletor com sua rotação relativa, e caracterizam a ligação a partir de sua topologia e são obtidos diretamente de ensaios experimentais. Muitos trabalhos buscam modelos analíticos/matemáticos para incorporar o comportamento das ligações de forma mais eficiente em uma análise computacional (Sivakumaran, 1988; Youssef-Agha e Aktan, 1989; Stelmack *et al.* 1986; Gerstle, 1988; Frye e Morris, 1975; Lui e Chen, 1986, 1988; Kishi e Chen, 1986). Alguns desses modelos, são pontuados e detalhados na seção 2.3.1.

Uma boa função matemática para representar o comportamento da ligação deve ser simples, requerendo poucos parâmetros de ajuste de curva, e apresentar uma resposta fisicamente possível, sem derivadas negativas e numericamente estável. Entretanto, as formulações matemáticas que conseguem representar o comportamento de ligações de maneira eficiente requerem muitos parâmetros de entrada e estão restritas a somente uma específica tipologia de ligação, o que restringe sua utilização.

Uma alternativa para a dependência da formulação utilizada para cada tipologia é a utilização do modelo multilinear. Nesse modelo, o comportamento momento-rotação característico de uma ligação semirrígida é dividido em diversos segmentos lineares que se ajustam à curva *momento x rotação* da ligação. A entrada desses valores é realizada pela inserção dos pares dos pontos da curva da ligação, e quanto maior o número de pontos (segmentos), melhor será o ajuste do comportamento da ligação.

De forma geral, pode-se representar o comportamento dessas ligações segundo as relações ilustradas pelas Eq. 2.1 e Eq. 2.2:

$$M = f(\theta_c) \quad 2.1$$

$$\phi_c = g(M) \quad 2.2$$

Onde M representa o momento atuante na ligação e ϕ_c é a sua rotação relativa.

A rigidez da ligação, representada por S_c , é uma propriedade da ligação e é representada pela inclinação da reta tangente à curva momento-rotação ($M \times \phi_c$) da ligação. Matematicamente, pode-se definir a rigidez como:

$$S_c = \frac{dM}{d\phi_c} \quad 2.3$$

A Figura 5 ilustra o aspecto típico de curvas momento-rotação de uma ligação. O comportamento da ligação é caracterizado pela não linearidade quando submetida a momentos fletores, porém apresenta um determinado padrão no comportamento, permitindo a definição de certas propriedades importantes: a rigidez inicial ($S_{c,ini}$), a rigidez secante, rigidez tangente e o momento último ou capacidade de momento (M_u). Para pequenas deformações, a rigidez da ligação pode ser estimada pela tangente inicial da curva *momento x rotação*.

Ao incrementar o carregamento, o momento fletor absorvido pela ligação aumenta, enquanto que a rigidez tangente diminui. Na fase final do carregamento, a curva momento-rotação tende a um comportamento assintótico conhecido como momento último, M_u , também conhecida como capacidade de momento da ligação.

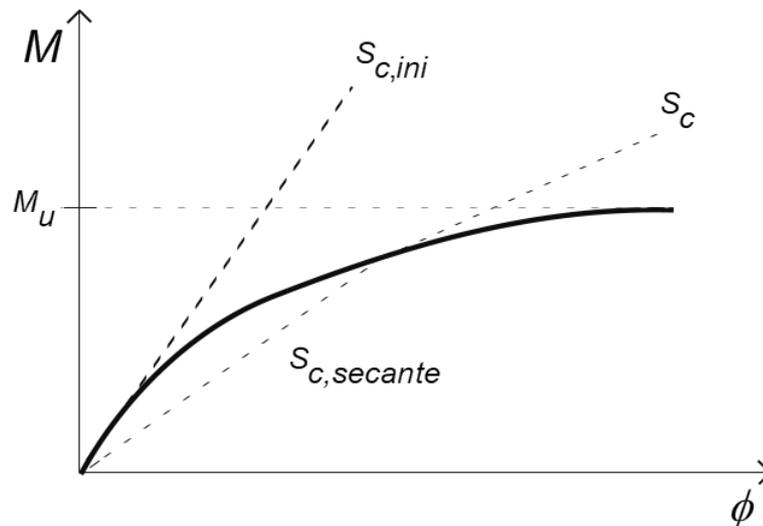


Figura 5: Rigidez inicial, secante, tangente e capacidade de momento de uma ligação semirrígida.

2.2. Modelo numérico de ligação semirrígida adotado

A ligação semirrígida pode ser modelada como um elemento de mola localizado no ponto de interseção entre viga e coluna. Esse modelo de ligação se acomoda bem aos momentos fletores absorvidos pela ligação, desconsiderando os demais efeitos (axial e translacional). O elemento de ligação utilizado para o presente trabalho é baseado no modelo proposto por Del Savio (2004), que propôs um elemento de mola para simular uma ligação semirrígida que se acomodasse a qualquer tipo de carregamento sem a necessidade de discretização da carga. O desenvolvimento do modelo foi motivado pelo elemento de ligação apresentado por Chan e Chui (2000) em seu livro, o qual não representa de forma satisfatória o comportamento quando submetido a cargas distribuídas.

A Figura 6 e a Figura 7 ilustram respectivamente o elemento de mola rotacional para simulação de uma ligação semirrígida e o elemento híbrido idealizado por Chan e Chui (2000). O modelo apresentado por Del Savio (2004) demonstrou bons resultados quando comparado com a literatura, com uma representação adequada para todos os tipos de carregamento sem a necessidade da discretização da carga, ao contrário do elemento híbrido.

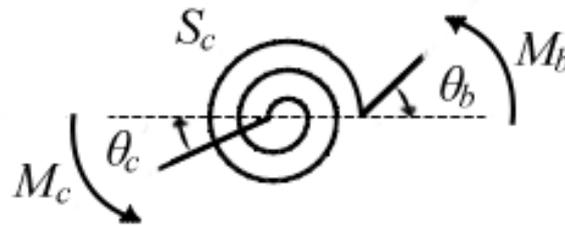


Figura 6: Elemento de mola para representação de uma ligação (adaptado de Chan e Chui, 2000).

O elemento de mola para simular a ligação semirrígida entre uma viga-coluna permite modelar a rotação relativa entre os elementos. Esse elemento de ligação de comprimento nulo é inserido na interseção entre vigas e colunas, simulando a ligação. Uma de suas extremidades está conectada a um elemento de viga e a outra extremidade está conectada a um nó do modelo estrutural que se conecta a outros elementos. Conforme é detalhado na Seção 4.5 do Capítulo 4, é adicionado um nó fictício na extremidade do elemento de barra, que é o nó comum ao elemento de ligação. Os graus de liberdade associados ao elemento de ligação representam a rotação de cada um de seus nós.

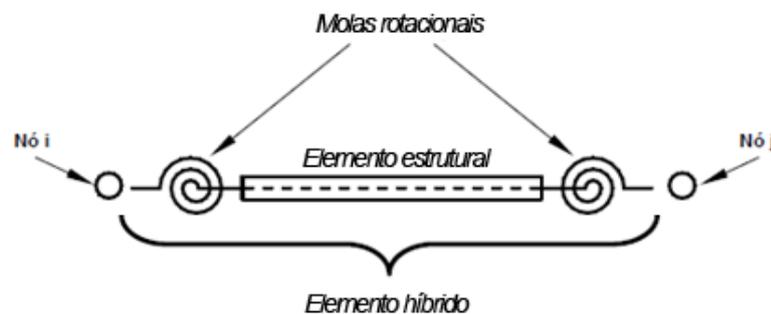


Figura 7: Elemento híbrido proposto por Chan e Chui (2000).

Para simplificar as próximas relações, considere θ_c e θ_b (Figura 6) como as rotações dos nós do elemento de ligação. Essas rotações poderiam ser, respectivamente, as rotações da conexão e da viga. Portanto, o elemento de ligação rotacional permite inserir o efeito da flexibilidade de ligações semirrígidas no modelo estrutural. Enquanto que um dos lados do elemento de ligação está conectado ao nó fictício do elemento de viga, a outra extremidade está conectada ao nó global.

A equação a seguir indica o equilíbrio dos momentos na ligação:

$$M_c + M_b = 0 \quad 2.5$$

Com M_c sendo o momento na ligação no nó global e M_b o momento na ligação no nó fictício no elemento de barra. A rotação relativa ϕ_c é definida como a diferença entre os ângulos de rotação da ligação, ou seja, a diferença da rotação em relação ao lado conectado ao nó global (θ_c) e do nó fictício conectado ao elemento de barra (θ_b).

A rotação relativa ϕ_c pode ser obtida pela relação:

$$\phi_c = \theta_c - \theta_b \quad 2.6$$

E, portanto, o momento na ligação no nó global M_c é igual a:

$$M_c = S_c(\theta_c - \theta_b) \quad 2.7$$

Obedecendo o equilíbrio de momentos apresentado na Eq. 2.5 e respeitando a relação obtida na Eq. 2.7, define-se que o M_b no elemento é igual a:

$$M_b = -M_c = S_c(\theta_b - \theta_c) \quad 2.8$$

A Figura 8 ilustra um típico elemento finito com uma ligação em cada uma de suas extremidades, garantindo o efeito da flexibilidade das ligações semirrígidas no comportamento global da estrutura, enquanto que a Figura 9 ilustra sua configuração deformada. Vale ressaltar que, na presente implementação, os elementos de ligação nas extremidades de uma barra não precisam ter a mesma rigidez.

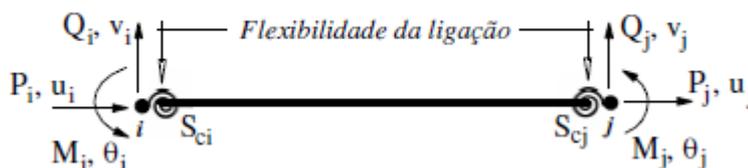


Figura 8: Elemento finito considerando efeito da ligação semirrígida (Silva, 2009).

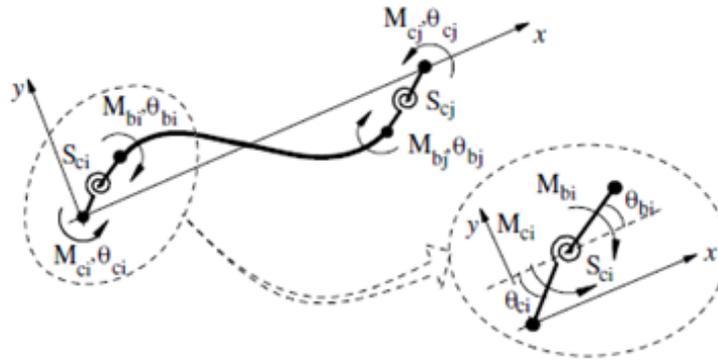


Figura 9: Configuração deformada do elemento finito com ligações semirrígidas (Silva, 2009).

Estabelecendo uma relação incremental entre os momentos com as rotações relativas para as conexões em cada um dos nós, tem-se que:

$$\Delta M_{ci} = S_{ci}(\Delta\theta_{ci} - \Delta\theta_{bi}) \quad 2.10$$

$$\Delta M_{cj} = S_{cj}(\Delta\theta_{cj} - \Delta\theta_{bj}) \quad 2.11$$

$$\Delta M_{bi} = -\Delta M_{ci} = S_{ci}(\Delta\theta_{bi} - \Delta\theta_{ci}) \quad 2.12$$

$$\Delta M_{bj} = -\Delta M_{cj} = S_{cj}(\Delta\theta_{bj} - \Delta\theta_{cj}) \quad 2.13$$

Sendo que i e j representam cada uma das extremidades do elemento de barra. Escrevendo as relações das Eq. 2.10 a 2.13 em uma forma matricial, que representam as matrizes de rigidez dos elementos de ligação de cada uma das extremidades:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{bi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & -S_{ci} \\ -S_{ci} & S_{ci} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{bi} \end{Bmatrix} \quad 2.14$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{cj} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{cj} & -S_{cj} \\ -S_{cj} & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{cj} \\ \Delta\theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad 2.15$$

Para o presente trabalho, a presença dos elementos de ligação não é incorporada na formulação do elemento de barra, sendo seu efeito adicionado de forma independente na matriz de rigidez global da estrutura. Em outras palavras, cada elemento de ligação apresenta sua própria matriz de rigidez, e sua rigidez é somada aos graus de liberdade do modelo estrutural com os quais o elemento de

ligação está relacionado. Vale ressaltar que cada elemento de ligação gera um nó fictício no modelo estrutural. A Seção 4.5 detalha os procedimentos utilizados para incorporar os elementos de ligação em um modelo de pórtico.

O elemento de ligação foi anteriormente implementado por Del Savio (2004), sendo revisitado e adotado na implementação deste trabalho por conta dos bons resultados apresentados. O elemento de ligação de mola rotacional foi proposto a fim de solucionar os problemas enfrentados pelo elemento híbrido proposto por Chan e Chui (2000).

O elemento híbrido apresentado por Chan e Chui (2000) foi formulado condensando a rigidez da ligação semirrígida em um elemento finito de viga. Essa característica dificulta a consideração da não linearidade física da ligação semirrígida, uma vez que a sua rigidez está embutida na própria formulação do elemento de barra finito. Tal dificuldade também pode ser estendida na consideração dos efeitos axiais e cisalhantes, sendo somente considerada a rigidez rotacional da ligação dentro da formulação do elemento híbrido. Em seu trabalho, Del Savio (2000) ainda ilustra a dificuldade do elemento híbrido em representar o comportamento da ligação semirrígida condensando no elemento quando submetida a cargas distribuídas, sendo necessária a discretização da carga para aproximação do resultado. Outra dificuldade encontrada na condensação da rigidez no elemento de barra é obter a configuração deformada da ligação semirrígida a partir da configuração deformada do elemento de barra.

Portanto, o elemento de ligação semirrígida adotado implica na independência da rigidez da ligação com a do elemento de barra. Essa independência facilita a consideração da não linearidade física da ligação semirrígida na rigidez, além do futuro acoplamento das rijezas axiais e transversais. A independência entre elemento de barra e o elemento de ligação também permite a representação do comportamento da ligação para qualquer tipo de carregamento e a obtenção da configuração deformada de forma independente do elemento de barra a qual está inserida.

Dentro do ambiente de análise FTOOL, a rigidez rotacional do elemento de ligação pode ser inserida segundo dois comportamentos: linear ou não linear. No caso de um comportamento linear, o valor da rigidez tangente da ligação é inserido um valor único que será constante ao longo de toda a análise (seja ela linear elástica ou não linear geométrica). Enquanto que para uma ligação semirrígida não linear, o comportamento é definido pela inserção dos pares de pontos da curva momento-rotação da ligação em forma de tabela. Para este último caso de definição, existem três casos importantes: ligação semirrígida não linear em uma

análise linear elástica, análise não linear geométrica sem considerar a não linearidade física da ligação, e por fim uma análise não linear geométrica considerando a não linearidade física da ligação.

Embora o presente trabalho tenha como escopo somente a consideração dos momentos fletores no comportamento das ligações, a matriz de rigidez do elemento de ligação a ser implementado leva em consideração as demais componentes de rigidez, permitindo que trabalhos futuros insiram tais efeitos de forma direta e independente, e posteriormente, adicionadas à matriz de rigidez global do modelo em seus respectivos graus de liberdade. A última seção deste capítulo descreve uma proposta de Del Savio (2004) para uma ligação semirrígida que considera efeitos axiais, transversais e de flexão.

2.3. Classificação dos modelos matemáticos de ligação semirrígida

A busca de métodos e soluções matemáticos/analíticos para a representação do comportamento das ligações semirrígidas é muito comum e presente na literatura. Esse grupo de funções têm como objetivo ajustar o comportamento numérico de uma determinada ligação com o seu comportamento real, obtido experimentalmente e catalogado em banco de dados. Existem tanto modelos lineares para a representação do seu comportamento, como os modelos não lineares, os quais são mais comumente utilizados. No campo dos modelos lineares (Arbabi, 1982; Kawashima e Fujimoto, 1984; Chan, 1994), apenas um parâmetro é necessário para representar o comportamento da ligação, sendo necessário somente informar a rigidez inicial da ligação, a qual relaciona que o momento fletor é diretamente proporcional a rotação relativa na ligação, simplificando a análise e o comportamento. Porém, pela alta não linearidade do comportamento da ligação semirrígida, tal simplificação não representa de forma adequada o seu comportamento, sendo mais utilizada em análises de pequenos deslocamentos e rotação. Logo, a necessidade e a busca pelo desenvolvimento de modelos não lineares para a representação mais precisam desse grupo de ligação vem crescendo na literatura ao longo do tempo. Tais modelos, em geral, são caracterizados por sua complexidade de representação, sendo necessário muitos parâmetros de entrada para um bom ajuste com a curva característica da ligação

Um dos modelos não lineares mais comuns é o modelo multilinear. Como o próprio nome sugere, esse grupo de métodos parte da constituição do

comportamento da ligação pela série de segmentos lineares interligados, ajustando-se a curva desejada a partir dos pontos considerados. Alguns exemplos comuns desse grupo de métodos são o modelo bilinear (Sivakumaran, 1988; Youssef-Agha e Aktan, 1989) e o modelo trilinear (Stelmack et al. 1986; Gerstle, 1988). Uma das desvantagens dessa metodologia é a descontinuidade nos pontos informados. De acordo com Toma e Chen (1994), o modelo polinomial (Frye e Morris, 1975) é o mais popular encontrado na literatura. Esse método busca a aproximação do comportamento da ligação com a curva experimental através de um modelo polinomial, o qual é dependente da tipologia da ligação, abrangendo suas características geométricas a partir dos parâmetros fornecidos na função.

Um problema desse método é a dependência da função para as determinadas tipologias, sendo restringidos a perfis. Outro problema em sua utilização é de poder apresentar derivadas negativas, que fisicamente representaria uma rigidez negativa para ligação em determinado ponto, o que é impossível e numericamente instável. A partir dessas implicações, Jones *et al.* (1980) propuseram um modelo para contornar a rigidez negativa, resultando em curvas suaves e contínuas. Esse método se baseia na utilização de uma B-spline cúbica, que implica na divisão da curva experimental em diversos segmentos, ajustados por polinômios cúbicos. O problema dessa abordagem, que torna a sua utilização escassa na literatura, se deve ao fato de serem necessários muitos parâmetros para a sua representação, elevando a complexidade de sua implementação.

Existem também os modelos baseados em funções potenciais, os quais partem da premissa de resultar em modelagens do comportamento sem resultar em derivadas negativas, com uma curva suave e fisicamente possível. Tais modelos são comuns, uma vez que necessitam de poucos parâmetros para definição do comportamento, estando restringidos a determinadas tipologias. Nesse grupo de métodos, existem os modelos com dois parâmetros, introduzidos por Batho e Lash (1936) e Krishnamurthy *et al.* (1979). Colson (1983), os modelos de três parâmetros por Kishi e Chen (1987) e Kishi et al (1993) e os modelos de quatro parâmetros propostos por Richard e Abbott (1975) e Ang e Morris (1984). Além dos modelos de aproximação baseados em funções potências, existem outros modelos bem comuns na literatura. Entre eles, tem-se os modelos exponenciais (Lui e Chen, 1986, 1988; Kishi e Chen, 1986; Yee e Melchers, 1986; Wu e Chen, 1990).

A seguir são ilustrados alguns desses modelos enunciados, descrevendo somente os modelos utilizados dentro da implementação e validação realizados neste trabalho.

2.3.1. Modelo linear

O modelo linear é o mais simples de definição, sendo necessário somente um parâmetro para estabelecer uma relação entre o momento com a rotação de uma ligação. Em outras palavras, o parâmetro de entrada é a rigidez inicial da ligação, garantindo uma relação diretamente proporcional, como descrito na Eq. 2.16:

$$M = S_{c,ini} \phi_c \quad (2.16)$$

Onde $S_{c,ini}$ determina o valor da rigidez inicial, e ϕ_c a rotação relativa da ligação. É comum encontrar em alguns trabalhos esse valor sendo expresso através de uma função que relaciona a rigidez da viga com a ligação, através de um fator chamado *end-fixing*. O fator *end-fixing*, também conhecido como fator de rigidez, γ , determina a flexibilidade da ligação entre as vigas e colunas. O coeficiente pode apresentar valores que variam de 0, no caso de ligações rotuladas, a 1, para ligações totalmente rígidas. A Eq. 2.17 ilustra o valor da rigidez da ligação considerando a rigidez a flexão da viga e o fator de rigidez.

$$S_{ini} = \frac{\gamma}{1 - \gamma} \frac{3EI}{L} \quad (2.17)$$

Sendo EI e L a rigidez à flexão e o comprimento efetivo da viga, respectivamente. No contexto das ligações semirrígidas, L representa o comprimento do elemento estrutural finito, a qual apresenta pelo menos uma ligação semirrígida em uma de suas extremidades, sendo que essa apresenta comprimento nulo.

Esse modelo de descrição do comportamento momento-rotação da ligação estabelece que seu comportamento se mantém constante ao longo de todo o processo de análise. É um modelo largamente utilizado nos estágios iniciais de desenvolvimento de métodos de análise de ligações semirrígidas (Silva, 2009). Embora o método apresente uma grande simplicidade de implementação e

descrição do movimento, não representa de forma adequada o real comportamento de uma ligação semirrígida, a qual naturalmente é descrita por um comportamento altamente não linear. Dessa forma, sua utilização limita-se em casos os quais existam pequenas deformações e rotações.

Neste trabalho, o modelo linear para ligações semirrígidas é adotado como opção, com alternativa para considerar o modelo multilinear conforme descrito na Seção 2.4.3 e no Capítulo 4.

2.3.2. Modelo exponencial

O modelo exponencial foi proposto Lui e Chen (1986; 1988), e tem como base a elaboração de uma relação matemática através uma função exponencial que define a curva momento-rotação de uma determinada ligação pela seguinte expressão:

$$M = M_0 + \sum_{m=1}^n C_m \left[1 - \exp\left(\frac{-|\phi_c|}{2m\alpha}\right) \right] + R_{kf} |\phi_c| \quad (2.18)$$

Onde M é o valor do momento na ligação, ϕ_c determina a rotação relativa, M_0 o momento inicial, R_{kf} é a rigidez devido ao encruamento da ligação, α determina um valor de escala, enquanto que n é o número de termos considerados no ajuste, e C_m , para $m = 1, 2, \dots, n$, são os coeficientes de ajuste da curva. Todos esses parâmetros devem ser definidos e considerados no cálculo para obter a curva momento-rotação de uma determinada ligação, sendo que quanto maior o valor de n , maior será a precisão do comportamento. Vale ressaltar que esses parâmetros são obtidos de análises experimentais e são características de uma determinada tipologia.

Sendo que a rigidez tangente da ligação pode ser obtida através da derivação da expressão pela rotação, como:

$$S_c = \frac{M}{d\theta_c} \Big|_{|\theta_c|=|\theta_c|} = \sum_{m=1}^n \frac{C_m}{2m\alpha} \exp\left(\frac{-|\theta_c|}{2m\alpha}\right) + R_{kf} \quad (2.19)$$

Na Tabela 1 são apresentados os valores dos parâmetros do modelo exponencial para quatro ligações que foram utilizadas na validação deste trabalho, sendo essas: ligação com cantoneira de alma simples (A), cantoneira de topo e

assento (B), chapa de topo (C) e com chapa de topo estendida (D). Os valores foram fornecidos por Lui e Chen (1986) por meio de ensaios experimentais.

As Figura 10 e Figura 11 ilustram respectivamente as curvas momento-rotação e rigidez-rotação para cada uma das ligações semirrígidas utilizadas nas análises deste trabalho. Ambos gráficos foram gerados no ambiente de desenvolvimento MATLAB. Foram criados *scripts* no MATLAB com base no modelo exponencial apresentando, utilizando os parâmetros da Tabela 1 para gerar os gráficos.

Além disso, o *script* foi desenvolvido para permitir exportar o pares de pontos da curva *momento x rotação* calculada em arquivos na extensão *.txt*, para que assim fossem importados diretamente no software FTOOL. Tal algoritmo criado permitiu a elaboração de curvas com um grau elevado de pontos, acomodando bem o comportamento da ligação na análise com a curva característica, segundo o modelo exponencial da Eq. 2.18. A importação de dados permite a inserção de um grande número de valores de uma só vez, os quais cada par de dados é informado por linha.

Tabela 1: Valores dos parâmetros fornecidos por Lui e Chen (1986).

Parâmetro	Cantoneira de alma simples (A)	Cantoneira de topo e assento (B)	Chapa de topo (C)	Chapa de topo estendida
M_0 (kN.m)	0.0	0.0	0.0	0.0
R_{kf} (kN.m/rad)	5.322	48.774	108.925	46.542
A	0.00051167	0.00031425	0.00031783	0.00067083
C_1	-4.892	-38.997	-28.287	-76.631
C_2	137.140	591.419	573.180	306.008
C_3	-661.841	-3023.7	-3433.984	-2414.494
C_4	1465.397	6996.021	8511.301	8876.428
C_5	-1510.926	-7356.895	-9362.567	-11269.108
C_6	590.0	2881.791	3832.899	4863.093
S_c	5440.592	10758.303	12340.198	34799.330

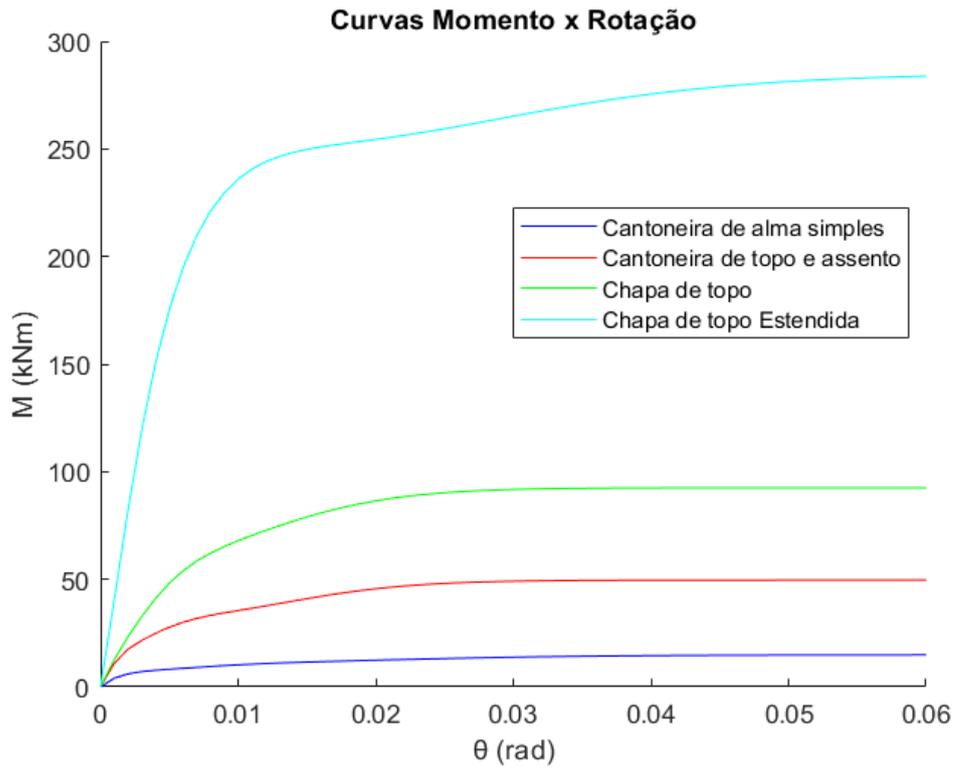


Figura 10: Curvas momento x rotação para as ligações consideradas na análise.

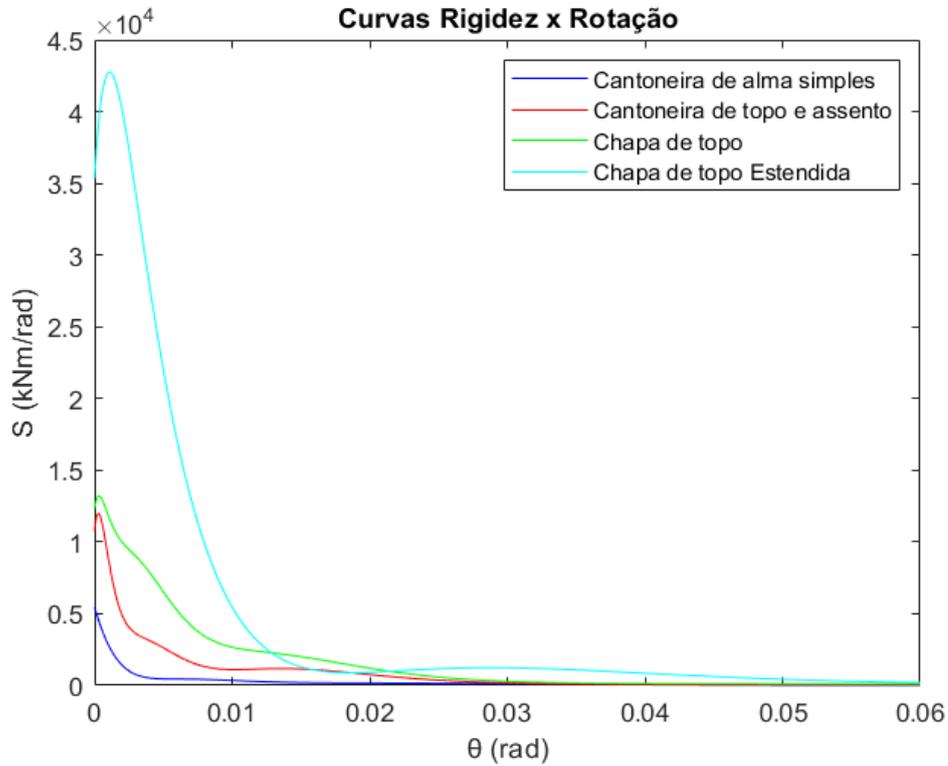


Figura 11: Curvas rigidez x rotação para as ligações consideradas na análise.

O modelo exponencial proposto por Lui e Chen (1986, 1988) apresenta uma boa modelagem do comportamento não linear da ligação, embora sejam necessários muitos parâmetros de entrada para manter um bom ajuste na curva. Porém, caso a ligação apresente uma declividade abrupta repentina na curva momento-rotação, esse modelo proposto não consegue representar o efeito de forma satisfatória, restringindo a sua utilização nesses casos. Para contornar esse problema, Kishi e Chen (1986) modificaram este modelo de forma a ser possível ajustar o comportamento no caso apresentado. Esse modelo é chamado de modelo exponencial modificado, que não será descrito por não fazer parte do escopo deste trabalho.

2.3.3. Modelo multilinear

Este modelo contorna o problema da necessidade de uma expressão matemática para representar o comportamento de uma dada ligação semirrígida. No caso, é utilizada a curva momento-rotação obtida experimentalmente de forma direta, em que a curva é subdividida em diversos intervalos lineares, e cada ponto é fornecido para ajustar o comportamento da ligação à curva experimental. Logo, serão fornecidos n pares de pontos (M, ϕ_c) , como ilustrado na Figura 12, e, através de uma interpolação linear, a rigidez da ligação pode ser obtida para cada segmento de reta fornecido.

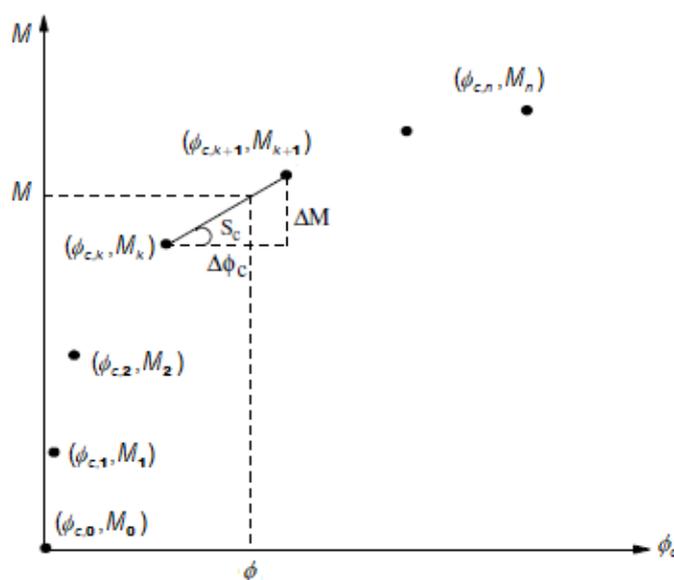


Figura 12: Modelo multilinear para ajuste do comportamento.

Nesse caso, quanto mais discretizada a curva, ou seja, quanto maior o número n de pontos fornecidos da curva experimental, melhor será o ajuste do comportamento com os dados experimentais. Para esse modelo, a rigidez da ligação pode ser calculada através da expressão:

$$S_c = \frac{\Delta M}{\Delta \phi_c} = \frac{M_{k+1} - M_k}{\phi_{c,k+1} - \phi_{c,k}} \quad (2.20)$$

Onde M_{k+1} e M_k , e $\phi_{c,k+1}$ e $\phi_{c,k}$ representam os limites superiores e inferiores dos intervalos para o momento M e a rotação ϕ_c , respectivamente.

O modelo multilinear foi o modelo utilizado para representar a rigidez e o comportamento não linear da ligação semirrígida no FTOOL. Os pontos das curvas *momento x rotação relativa* da ligação semirrígida é inserida aos pares em uma tabela, e em cada iteração de solução não linear, a rigidez da ligação é calculada em relação à rotação relativa obtida na iteração corrente. A interface gráfica desenvolvida no FTOOL para especificação das propriedades de ligações semirrígidas e a atribuição ao elemento de barra de um modelo estrutural são descritas no Capítulo 4.

2.4. Elemento de ligação proposto por Del Savio (2004)

Del Savio (2004) propôs um modelo de ligação semirrígida que considera todos os efeitos de rizezas (axial, translacional e rotacional), apresentado na Figura 13. Nessa proposição, é acoplado a mola rotacional (que consegue acomodar a rotação de forma adequada) mais duas molas de rigidez S_A e S_T , que indicam a rizeza axial e transversal respectivamente. A adição das novas componentes de mola permite representar as demais deformações sofridas por esse tipo de ligação.

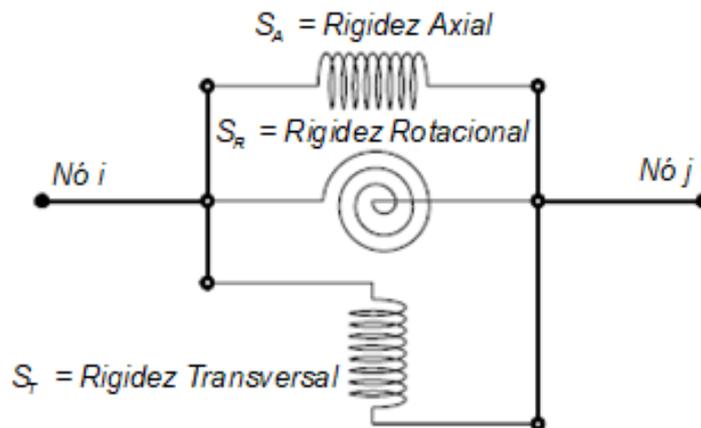


Figura 13: Modelo de ligação com todas rizezas (Del Savio, 2004).

A matriz de rigidez (bidimensional) do elemento de ligação se resume em uma matriz de rigidez que contenha as rizezas axiais, transversais e rotacionais do elemento. Logo, a matriz de rigidez característica para o modelo de ligação proposto é:

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ Q_i \\ M_i \\ P_j \\ Q_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_A & 0 & 0 & -S_A & 0 & 0 \\ 0 & S_T & 0 & 0 & -S_T & 0 \\ 0 & 0 & S_R & 0 & 0 & -S_R \\ -S_A & 0 & 0 & S_A & 0 & 0 \\ 0 & -S_T & 0 & 0 & S_T & 0 \\ 0 & 0 & -S_R & 0 & 0 & S_R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad 2.16$$

Com u , v e θ representando, respectivamente, os deslocamentos axiais, transversais e rotacionais para cada nó. E P , Q e M indicam os esforços normais, cisalhantes e o momento fletor para cada uma das extremidades i e j , respectivamente.

Vale ressaltar que embora atualmente o FTOOL apresente somente a possibilidade de análises de elementos bidimensionais, o módulo de análise FRAMOOOP foi adaptado para conter a matriz de rigidez de ligação representada por uma matriz de dimensão 12×12 . Tal implementação é motivada por permitir que futuramente o elemento de ligação proposto, além de considerar todos os efeitos de rigidez, ainda possa ser facilmente adaptado para análises de pórticos espaciais, a qual a matriz de rigidez do elemento acomoda os 6 graus de liberdade para cada uma de suas extremidades (3 rotações e 3 deslocamentos).

Ainda, Del Savio e colaboradores (2007, 2010) também propuseram um modelo de ligações semirrígidas que considera, através do Método de Componentes do Eurocode (2005), uma interação entre os efeitos axiais e de

flexão. Esse método define curvas *momento x rotação* de uma ligação que dependem do esforço axial na ligação. Essas curvas são limitadas por um limite superior de resistência à compressão e por um limite inferior de resistência à tração. A metodologia proposta define para esses limites curvas multilíneas com três segmentos e indica procedimentos simples para interpolar qualquer curva entre os limites de acordo com o esforço axial corrente na ligação. Esse modelo também está sendo considerado como uma futura implementação no FTOOL.

3. Métodos numéricos para solução não linear

Neste capítulo são apresentadas as principais considerações realizadas acerca da metodologia adotada para a solução não linear. Tal metodologia possui como base o grupo de métodos numéricos de solução não linear geométrica apresentadas por Rangel (2019), o quais foram adaptados para conter a influência da não linearidade física das ligações semirrígidas na solução.

Na seção 3.2 é realizada uma breve contextualização sobre a metodologia de solução incremental-iterativa, assim como a abordagem adotada para a solução.

A seção 3.3 apresenta uma contextualização da fase preditora e da fase corretora, comuns aos métodos de solução incremental-iterativa. É também descrito, com poucos detalhes, o método de solução incremental-iterativo utilizado para as análises do presente trabalho.

A metodologia e adaptação realizada no processo de solução não linear para contemplar a influência do comportamento não linear físico das ligações semirrígidas são descritas na seção 3.4.

Por fim, na seção 3.5, é ilustrada um sumário dos métodos de solução não linear, em um fluxograma adaptado do trabalho de Rangel (2019), já englobando as novas etapas de solução com a consideração das ligações semirrígidas não lineares.

3.1. Metodologia de solução não linear

No contexto da análise linear, as formulações são estabelecidas de maneira a simplificar o comportamento estrutural, sob a hipótese de pequenos deslocamentos e rotações, quando comparadas com as dimensões da estrutura. Nesse cenário de análise, também conhecida como análise de primeira ordem, o equilíbrio é imposto na configuração inicial (indeformada) do modelo, sendo somente considerados os termos lineares das equações cinemáticas. Se, além de pequenos deslocamentos, o material tem um comportamento linear, a estrutura tem um comportamento linear elástico. Nesse caso, a matriz de rigidez é constante para todo o processo de cálculo.

Quando as deformações são relativamente grandes, não é mais possível escrever as equações de equilíbrio na configuração indeformada. Nesse caso, a estrutura tem um comportamento não linear. E esta é chamada não linearidade geométrica. Já a não linearidade física é identificada pelas relações constitutivas não lineares do material ou pelo comportamento não linear de ligações semirrígidas.

No contexto de análises não lineares, métodos numéricos se tornam necessários para aproximar as soluções do comportamento real, resolvidos por um sistema de equações realizados de forma incremental. A matriz de rigidez, nesse caso chamada de matriz de rigidez tangente, recebe esse nome por aproximar linearmente o comportamento da estrutura para o atual passo incremental de solução.

Para a obtenção da resposta não linear de uma estrutura sob a ação de carregamentos externos, a solução é dividida em uma série de passos que se baseiam em um ponto de equilíbrio conhecido, seguindo o comportamento em pequenos incrementos de cargas lineares até aproximar a solução não linear. A abordagem incremental permite que pontos críticos sejam detectados durante a análise, os quais são impossíveis de serem identificados em um único passo incremental. A análise das trajetórias de equilíbrio e o acompanhamento da rigidez da estrutura são essenciais para a identificação da condição de estabilidade de um determinado sistema. A resposta estrutural pode apresentar um comportamento muito complexo, em que a instabilidade pode estar associada a limites de cargas e pontos de bifurcação.

Por conta da não linearidade da solução, as forças internas $q(u)$, representadas por uma função de deslocamento, não estão em equilíbrio com as forças externas p (Eq. 3.1), sendo o equilíbrio estabelecido em sua configuração deformada. Segundo Felippa (2017), o desbalanceamento do equilíbrio pode ser expresso a partir da força residual total r , conforme a Eq. 3.2:

$$q(u) \neq p \quad (3.1)$$

$$r = p - q(u) \quad (3.2)$$

Onde p pode ser escrito como uma função de um fator de incremento de carga λ , seguindo a relação descrita abaixo.

$$p(\lambda) = \lambda \bar{p} \quad (3.3)$$

Sendo que \bar{p} define um vetor de forças aplicadas de referência, representada por uma porção do vetor de forças externas p .

O objetivo dos métodos não lineares é a obtenção dos resultados dentro de um limite tolerável de precisão, a qual é aferida a partir dos resíduos obtida em cada passo incremental de solução. É possível a consideração de um processo iterativo, cuja motivação reside em zerar as forças residuais em decorrências da linearização nas etapas de solução. Essa metodologia parte da divisão dos passos incrementais em diversos cálculos menores, chamados de iteração.

Em vista das vantagens na consideração da análise não linear na representação real e entendimento do comportamento estrutural, Rangel (2019) implementou um grupo de métodos incremental-iterativo para a solução da não linearidade geométrica de estruturas, baseado na pesquisa realizada por Leon *et al.* (2011). Conforme mencionado, a metodologia de Rangel (2019) foi estendida neste trabalho para também considerar um comportamento não linear físico de ligações semirrígidas rotacionais, isto é, que consideram uma relação não linear *momento x rotação relativa*.

3.1.1. Soluções incrementais

Esta categoria se baseia na solução de equações não lineares discretizando o comportamento estrutural em um processo incremental de carga, aproximando a solução não linear em uma linear em cada passo. Essa linearização resulta em um resíduo em respeito ao comportamento real da estrutura, a qual, dependendo do grau de não linearidade da estrutura analisada, pode apresentar diferenças consideráveis e, por consequência, o afastamento da precisão na descrição da resposta. Em alguns casos, a diminuição do incremento de carga pode permitir uma diminuição no resíduo, embora aumente o custo de processamento, sem sequer as vezes justificar o pequeno ganho em precisão.

A solução de equilíbrio apresentada pela Eq. 3.1 é obtida de forma incremental, dado um incremento de carga a cada passo de análise. Em cada passo de solução, o deslocamento e as forças externas são calculados a partir da última configuração de equilíbrio obtida, referente ao passo anterior de incremento ($i - 1$):

$$u_i = u_{i-1} + \Delta u_i \quad (3.4)$$

$$p_i = p_{i-1} + \Delta p_i \quad (3.5)$$

Onde Δu_i representa o valor do deslocamento incremental, obtido pela linearização das equações de solução.

Desse modo, métodos puramente incrementais são recomendados em situações nas quais o grau de não linearidade da estrutura é suficiente pequeno para garantir um bom ajuste ao comportamento, uma vez que essa categoria de método tende a se distanciar da trajetória de equilíbrio, como ilustra a Figura 14. Embora sua implementação implique em uma simplicidade e eficiência computacional, são restritos a casos particulares, e, portanto, normalmente métodos incrementais com correções iterativas são utilizados.

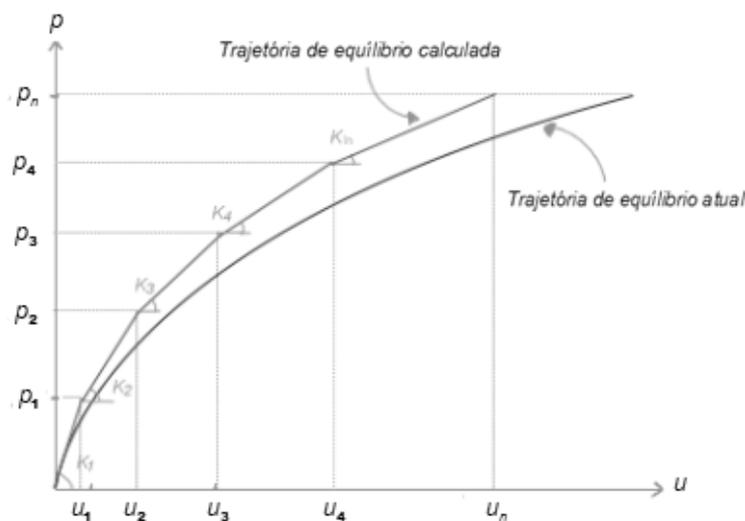


Figura 14: Ajuste do comportamento não linear em métodos incrementais.

3.1.2. Soluções incremental iterativas

O processo de correção iterativa é uma solução utilizada para zerar as forças residuais em que processos puramente incrementais não são capazes. Cada passo incremental é dividido em pequenos cálculos de incrementos iterativos de cargas, chamados de iteração. Nesse processo, um ponto de equilíbrio já conhecido é utilizado como base para os passos iterativos até que um critério de convergência pré-estabelecido seja satisfeito e um novo ponto de equilíbrio seja atingido.

Os passos iterativos são ilustrados pelo superescrito j , e, assim como nos métodos puramente incrementais, os deslocamentos e as cargas externas são calculados em cada iteração:

$$\Delta u_i^j = \Delta u_i^{j-1} + \delta u_i^j \quad (3.6)$$

$$\Delta p_i^j = \Delta p_i^{j-1} + \delta p_i^j \quad (3.7)$$

A partir das relações determinadas acima, e utilizando a equação obtida para o cálculo das forças residuais, pode-se determinar o sistema não linear para a iteração j do passo incremental i .

$$K_i^{j-1} \delta u_i^j = \delta p_i^j + r_i^{j-1} \quad (3.8)$$

Onde K_i^{j-1} é a matriz de rigidez tangente da estrutura, calculada normalmente no início de cada iteração.

A solução dos métodos incremental-iterativos implementados por Rangel (2019) são baseados em incrementos de cargas e/ou deslocamentos em cada um dos passos de análise para a obtenção do novo ponto de convergência. Nesse sentido, pode-se definir um incremento do fator de carga externo $\delta \lambda_i^j$ aplicado na iteração corrente, que é usado para definir o valor incremental de carga externa aplica na iteração:

$$\delta p_i^j = \delta \lambda_i^j \bar{p} \quad (3.9)$$

Uma nova expressão para o sistema não linear é obtida pela substituição dessa relação na Eq. 3.8.

$$K_i^{j-1} \delta u_i^j = \delta \lambda_i^j \bar{p} + r_i^{j-1} \quad (3.10)$$

Onde \bar{p} ilustra o vetor de cargas de referência. Tais relações resultam em uma solução não linear com $N + 1$ incógnitas para N equações. Dentre as incógnitas, totalizam N deslocamentos δu_i^j e um fator de carga $\delta \lambda_i^j$. Uma solução apresentada por Yang & Kuo (1994), determina o uso de uma equação de

restrição para determinar o valor do incremento de carga para cada passo incremental-iterativo, que será brevemente descrito na próxima subseção.

O processo iterativo precisa da imposição de uma condição para finalizar o ciclo. Essa condição imposta baseia-se nas forças residuais r , as quais são comparadas com as forças externas de referência \bar{p} no final de cada ciclo. A convergência é atingida quando a razão entre normas dessas componentes se torna menor que uma tolerância pré-definida pelo usuário, como ilustra a Eq. 3.11 abaixo:

$$\frac{\|r_i^j\|}{\|\bar{p}\|} \leq \varepsilon \quad (3.11)$$

O primeiro procedimento no ciclo iterativo de solução é o cálculo da matriz de rigidez tangente a partir dos deslocamentos e do vetor de forças internas obtidos no passo anterior. O cálculo da matriz de rigidez tangente pode ser realizado segundo duas abordagens implementadas por Rangel (2019): o método de iteração de Newton-Raphson modificado e o Newton-Raphson convencional. No caso do método de iteração modificado, a matriz de rigidez tangente utilizada durante o ciclo de iteração é a mesma obtida na fase preditora de solução, mantida constante ao longo do processo iterativo de cada passo incremental. Já no caso convencional, a matriz de rigidez tangente é analisada segundo os deslocamentos obtidos na última iteração realizada.

3.1.3. Sistema não linear atualizado

Para o sistema de $N + 1$ incógnitas com N equações, Yang & Kuo (1994) sugerem a utilização de uma nova relação ao sistema não linear de solução, ilustrada na Eq. 3.12:

$$A_i^j \cdot \delta u_i^j + B_i^j \delta \lambda_i^j = C_i^j \quad (3.12)$$

Ao combinar a Eq. 3.10 com a Eq. 3.12, é obtido um novo sistema de $N + 1$ equações e incógnitas, representado pela relação:

$$\begin{bmatrix} K_i^{j-1} & -\bar{p} \\ (A_i^j)^T & B_i^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_i^j \\ \delta \lambda_i^j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_i^{j-1} \\ C_i^j \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

O novo sistema matricial resultante não é mais simétrico, o que computacionalmente representa um grande custo para sua solução em termos de eficiência. Batoz & Dhatt (1979) apresentam uma técnica de decomposição desse sistema matricial, dividindo o vetor de deslocamento em duas porções, representa por uma combinação linear dada por:

$$\delta u_i^j = \delta \lambda_i^j \delta \bar{u}_i^j + \delta \bar{\bar{u}}_i^j \quad (3.14)$$

Onde $\delta \bar{u}_i^j$ representa o deslocamento tangente, enquanto que $\delta \bar{\bar{u}}_i^j$ representa o deslocamento residual.

Essa decomposição permite o resgate à simetria do sistema, contornando possíveis problemas computacionais. Logo, pode-se definir o novo sistema não linear, a partir da Eq. 3.14.

$$\begin{cases} K_i^{j-1} \delta \bar{u}_i^j = \bar{p} \\ K_i^{j-1} \delta \bar{\bar{u}}_i^j = r_i^{j-1} \end{cases} \quad (3.15)$$

Por fim, é necessário resolver a equação de restrição inserida ao sistema de solução não lineares para obter o equilíbrio de $N + 1$ equações e incógnitas. Ao substituir a relação linear decomposta na Eq. 3.14 na Eq. 3.12, obtém-se a seguinte relação para determinar o fator de carga a partir da equação de restrição:

$$\delta \lambda_i^j = \frac{C_i^j - A_i^j \delta \bar{\bar{u}}_i^j}{B_i^j + A_i^j \delta \bar{u}_i^j} \quad (3.16)$$

Essa relação permite não somente o ajustamento dos deslocamentos ao longo do processo incremental e iterativo, mas também o ajuste de carga. Cada método de solução não linear implementado por Rangel (2019), seja ele puramente incremental ou com processos iterativos de correção, apresentam suas singularidades na obtenção e determinação do incremento de carga. Mais detalhes sobre a determinação dos incrementos e desenvolvimentos estão descritos no trabalho de Rangel (2019).

3.2. Métodos de solução incremental-iterativos

Os métodos de solução não linear incremental-iterativos são divididos em duas fases de solução: a fase preditora e a fase corretora.

A fase preditora ocorre sempre no início de cada passo incremental, com o objetivo de calcular a solução prevista em uma análise linear única a partir da matriz de rigidez tangente (K_i^0) obtida através dos resultados anteriores (u_{i-1} e $q(u_{i-1})$). Nesta fase, também é calculado o incremento do fator de carga preditor. No primeiro passo incremental da análise ($i = 1$), o incremento do fator de carga será igual ao valor de incremento informado pelo usuário, enquanto que nos demais passos ($i > 1$) o valor calculado depende da equação de restrição, característica de cada método de solução não linear empregado.

O valor do incremento de carga informado pelo usuário possui um papel fundamental na convergência da solução, e, desta forma, a definição equivocada desse parâmetro pode ocasionar em problemas de convergência da análise, e em até mesmo em problemas de performance computacional para valores muito pequenos. Logo, uma alternativa implementada por Rangel (2019) e disponível no FTOOL, é o ajuste automático do incremento do fator carga. Essa opção permite o algoritmo de automaticamente ajustar o incremento preditor a partir do grau de não linearidade do problema, retornando maiores incrementos quando a solução apresenta o comportamento mais linear, e menores incrementos quando a resposta apresenta maior grau de não linearidade.

Já a fase corretora tem como objetivo eliminar as forças residuais resultantes da fase preditora a partir de um ciclo de correções iterativas do fator de carga e deslocamentos nodais. Todo processo da análise não linear, incluindo a fase preditora e a fase corretora, é detalhado no fluxograma apresentado na Seção 3.5 no final do deste capítulo.

Nesta seção é apresentado brevemente o Método de Controle de Carga (MCC) para solução não linear incremental-iterativo implementado por Rangel (2019). Este método foi adotado porque atende os objetivos do trabalho, que foca no comportamento não linear de ligações semirrígidas e no comportamento não linear geométrico em regime pré crítico. Outros métodos de acompanhamento de trajetória de equilíbrio de uma estrutura com comportamento não linear, inclusive em regime pós crítico, são detalhados no trabalho de Rangel (2019).

3.2.1. Método de Controle de Carga (MCC)

No método MCC, a carga externa é calculada na fase preditora e então mantida constante ao longo de todo o ciclo iterativo. Em outras palavras, a carga aplicada é mantida constante ao longo de toda etapa incremental corrente. Dessa forma, o MCC busca eliminar as forças residuais apenas nos deslocamentos, sem o ajuste da carga entre etapas incrementais. Logo, é definido que:

$$\delta\lambda_i^j = \begin{cases} \text{valor predito} & (j = 1) \\ 0 & (j = 2) \end{cases} \quad (3.17)$$

As constantes de restrição são obtidas a partir das Eq. 3.17 e Eq. 3.16, e seus valores são apresentados nas Eq. 3.18 a Eq. 3.20:

$$A_i^j = 0 \quad (3.18)$$

$$B_i^j = 1 \quad (3.19)$$

$$C_i^j = \begin{cases} \Delta\lambda & (j = 1) \\ 0 & (j = 2) \end{cases} \quad (3.20)$$

Onde $\Delta\lambda$ representa o valor do incremento de carga fornecido.

A Figura 15 ilustra o comportamento do incremento do fator de carga em uma etapa incremental, o qual é mantido constante ao longo de todo ciclo.

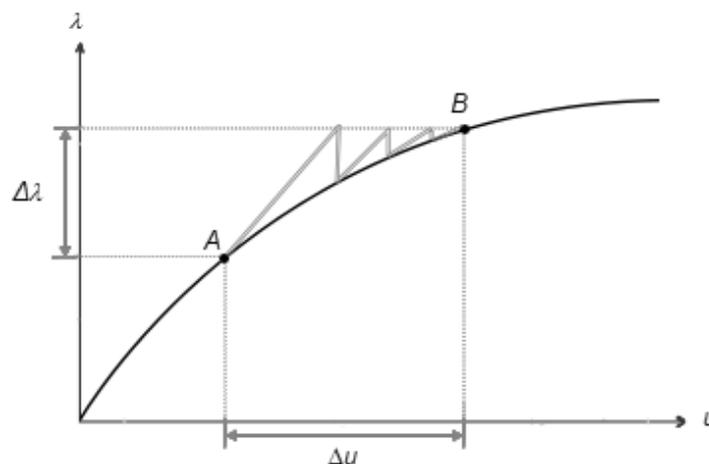


Figura 15: Comportamento da solução para o Método de Controle de Carga.

A desvantagem desse método reside no fato de não acomodar situações que apresentem limites de carga. O motivo se deve por conta de a carga ser mantida constante ao longo de todo o ciclo iterativo, e, dessa forma, o vetor de forças não consegue representar o limite de carga. Logo, o MCC é recomendado em situações em que a análise se restrinja ao cenário anterior aos pontos críticos de estabilidade. Logo, o MCC é recomendado em situações em que a análise se restrinja ao cenário anterior aos pontos críticos de estabilidade, que é o caso das análises presentes neste trabalho.

3.3. Adaptação para não linearidade física da ligação semirrígida

No caso das análises lineares elásticas, a matriz de rigidez global é constante ao longo de todo o processo de análise, à qual as matrizes de rigidez das ligações semirrígidas são adicionadas aos graus de liberdade correspondentes. No caso de uma análise não linear física para comportamento não linear das ligações, a matriz de rigidez tangente é montada segundo o mesmo processo do caso linear, porém os valores das rigidezes das ligações são atualizados a cada passo incremental. Durante a definição dos parâmetros de solução, foi inserida uma nova opção para usuário na interface gráfica do FTOOL para determinar se será ou não considerada a não linearidade física do modelo.

Em uma análise não linear, foi criado um campo de checagem no FTOOL para considerar ou não a não linearidade física da ligação semirrígida. Caso a não linearidade da ligação não seja considerada na análise, seu comportamento será considerado como linear. Nesse cenário, duas situações são possíveis: uma ligação semirrígida linear e uma ligação semirrígida não linear. No caso da ligação linear, a rigidez definida pelo usuário será a mesma em todos os passos incrementais para a montagem da matriz de rigidez tangente. Já no caso de uma ligação semirrígida não linear, o comportamento da ligação será constante em todas as etapas de solução incremental, sendo a sua rigidez constante e igual à inclinação do primeiro segmento de reta definido pelo usuário, como ilustrado na Figura 16 e calculada através da equação a seguir:

$$S_{c,ini} = \frac{\Delta M_{ini}}{\Delta \phi_{c,ini}} = \frac{M_1 - M_0}{\phi_{c,1} - \phi_{c,0}} \quad (3.21)$$

Por outro lado, caso a opção para considerar o efeito da não linearidade das ligações esteja selecionada, a matriz de rigidez global tangente é montada em cada passo incremental-iterativo. Nesse caso, a rigidez considerada para a ligação é calculada com base na inclinação do segmento da curva multilinear *momento x rotação* para a rotação relativa ϕ_{rel} corrente na ligação.

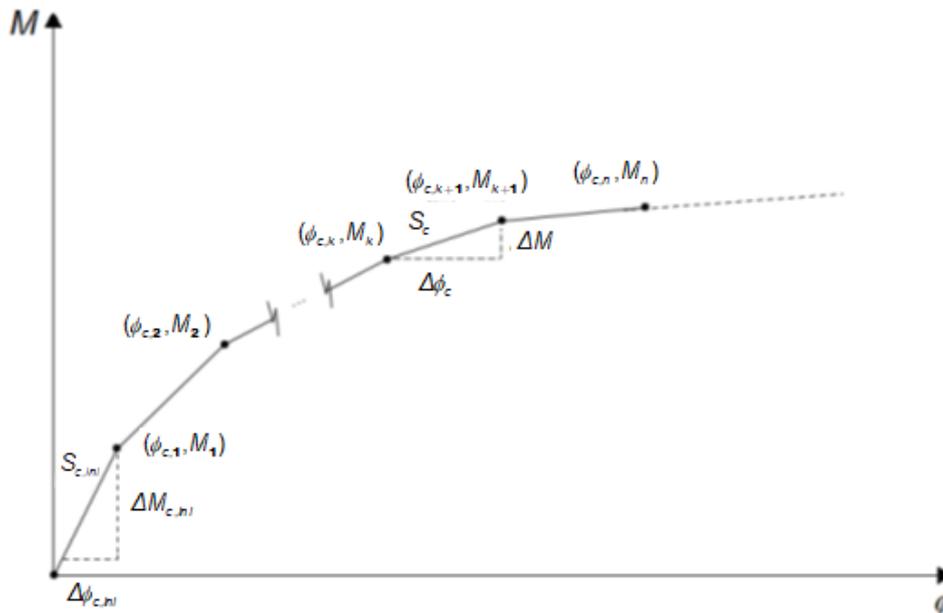


Figura 16: Método multilinear para obtenção da rigidez da ligação.

Nesse cenário, a rotação relativa entre os nós aos quais a ligação está acoplada é passado como parâmetro para obter a rigidez no passo de análise. A partir desse parâmetro duas condições são possíveis: a rotação relativa se encontra dentro de um intervalo entre dois pontos da curva *momento x rotação* da ligação ou se encontra em um ponto além do último ponto informado. A rigidez da ligação é calculada como a inclinação de cada intervalo como ilustra a relação abaixo:

$$\begin{cases} S_{c,i}^j = \frac{M_{k+1} - M_k}{\phi_{c,k+1} - \phi_{c,k}} & \phi_{c,k} \leq \phi_{c,rel} < \phi_{c,k+1} \\ S_{c,i}^j = \frac{M_n - M_{n-1}}{\phi_{c,n} - \phi_{c,n-1}} & \phi_{c,rel} \geq \phi_{c,n} \end{cases} \quad (3.22)$$

Sendo que n ($0 \leq k \leq n$) é definido como o ponto inicial do intervalo em que $\phi_{c,rel}$ se encontra, e n o último ponto da curva *momento x rotação* da ligação.

Nesse procedimento a matriz de rigidez natural tangente da ligação semirrígida é montada a partir da Eq. 2.16, e posteriormente extrapolada para

obter a matriz de rigidez tangente da conexão semirrígida. Essa matriz de ligação possui dimensão 12×12 de um elemento tridimensional de mola, já considerado para conter os efeitos das demais rigidezes (axial e translacional), além do aproveitamento para um futuro cenário de análise com pórticos espaciais. No caso da análise bidimensional, somente os graus de liberdade de um modelo plano são considerados.

O momento interno na ligação é obtido de forma semelhante, e o intervalo considerado na curva multilinear segue as condições apresentadas na Eq. 3.22. Nesse caso, seu valor é obtido pela interpolação linear do segmento de reta considerado, como ilustra a equação a seguir:

$$m = (1 - \mu) \cdot M_k + \mu \cdot M_{k+1} \quad (3.23)$$

Em que m representa o momento interno na ligação semirrígida, e μ é calculado a partir da relação:

$$\mu = \frac{\phi_{c,rel} - \phi_{c,k}}{\phi_{c,k+1} - \phi_{c,k}} \quad (3.24)$$

Quando $\phi_{rel} \geq \phi_{c,k}$ o valor do momento fletor na ligação é calculado através da Eq. 3.23 com $k = n - 1$, isto é, extrapolando os valores do último segmento da curva *momento x rotação*.

3.4. Sumário dos métodos de solução

Rangel (2019) apresentou um fluxograma contendo os procedimentos de métodos incrementais-iterativos para solução dos sistemas de equações de equilíbrio para análises de estruturas com não linearidade geométrica. O fluxograma foi modificado, conforme ilustrado na Figura 17, para considerar análise com não linearidade física, que neste trabalho é devida à não linearidade das ligações semirrígidas. Para tanto, foi adicionada uma verificação para análise com grandes deslocamentos. No caso em que esta opção não estiver selecionada, a geometria do modelo não é atualizada e apenas não linearidade física de ligações semirrígidas é considerada. Conforme descrito na seção anterior, a não linearidade física das ligações semirrígidas é considerada nas

etapas deste fluxograma em que se calcula a matriz de rigidez global tangente e o vetor das forças internas.

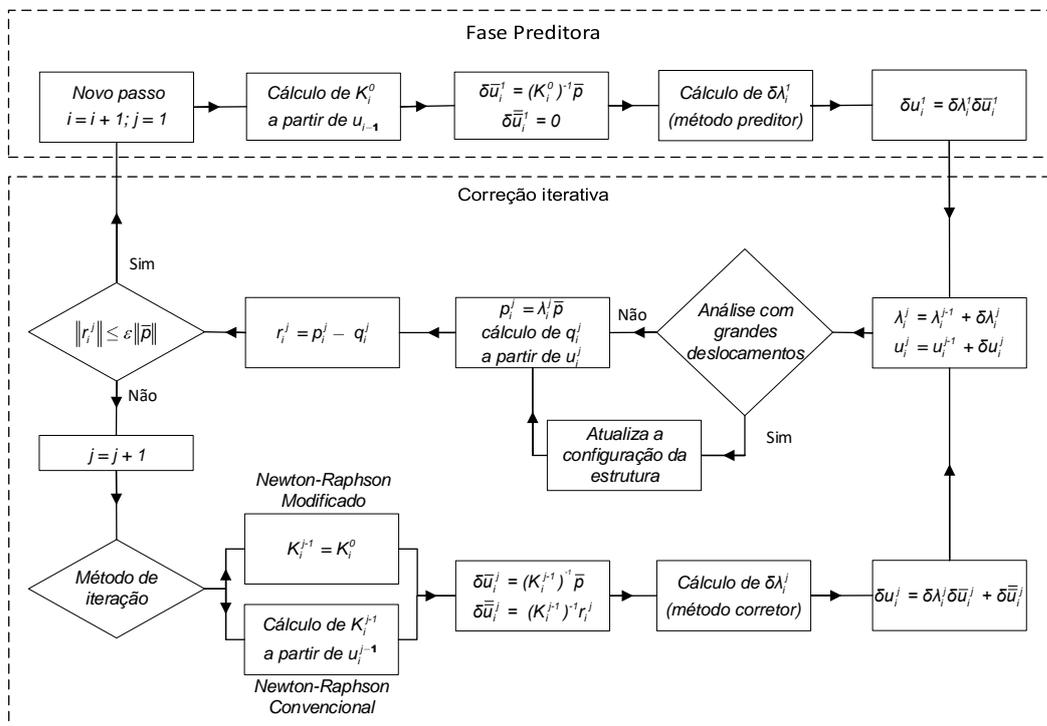


Figura 17: Fluxograma para solução não linear (Rangel, 2019 Adaptado).

O fluxograma apresentado por Rangel (2019) e adaptado nesse trabalho, é iniciado na fase predictor, na qual o método de solução selecionado dita o processo para o cálculo do incremento de carga predito. Essa fase é iniciada pelo cálculo da matriz de rigidez tangente da estrutura a partir dos deslocamentos obtidos no incremento anterior (última configuração em equilíbrio conhecida).

Como dito, a construção da matriz de rigidez tangente da estrutura considera a adição da influência das ligações semirrígidas no comportamento global da estrutura. Para isso, é feita uma verificação se a análise considera ou não a não linearidade física das ligações semirrígidas. Novamente, caso não seja considerada a não linearidade física, a rigidez da ligação sempre será a mesma em todas as etapas incrementais, caracterizada pela inclinação do primeiro segmento da curva *momento x rotação* ou a rigidez rotacional no caso de ligações lineares. No caso de uma análise que considera a não linearidade da ligação, a matriz de rigidez da ligação é atualizada em cada iteração considerando a rotação relativa como parâmetro para o cálculo. Essa montagem é realizada em um processo independente do cálculo da matriz de rigidez dos elementos de barra, que foi adicionado a essa etapa.

A partir da matriz de rigidez tangente, já considerando a influência das ligações semirrígidas, são calculados os vetores incrementais de deslocamento tangente ($\delta\bar{u}$) e deslocamento residual ($\delta\bar{\bar{u}}$). Ainda na fase preditora, o vetor incremental de deslocamento residual $\delta\bar{\bar{u}}$ é igual a zero, para $j = 1$, uma vez que parte da última configuração de equilíbrio obtida, na qual as forças residuais teoricamente foram anuladas. A partir dos vetores incrementais de deslocamentos é calculado o incremento do fator de carga predita ($\delta\lambda_i^1$), por meio de um processo de cálculo característico de cada método de solução incremental-iterativo, mais detalhados no trabalho de Rangel (2019). A última etapa da fase preditora consiste no cálculo do vetor incremental de deslocamentos (δu), realizado a partir do incremento do fator de carga predita ($\delta\lambda_i^1$) e do vetor incremental de deslocamento tangente ($\delta\bar{u}$).

O processo iterativo de correção inicia com o cálculo do fator de carga e vetor deslocamentos para o passo iterativo corrente, a partir do fator de carga e vetor de deslocamentos do passo anterior e os respectivos incrementos obtidos. Vale ressaltar que o incremento de carga λ_i^0 é o incremento do fator de carga obtido no último passo iterativo do passo incremental anterior ($i - 1$).

Na próxima etapa é realizada a checagem se a análise considera ou não grandes deslocamentos, a partir da qual resulta em uma bifurcação no processo de solução. Essa checagem foi adicionada ao fluxograma para considerar ou não a não linearidade geométrica da estrutura. Caso a análise considere a não linearidade geométrica da estrutura, é realizada uma atualização na configuração geométrica global da estrutura antes do cálculo das forças externas e internas. Nesse processo, o comprimento/ângulo dos elementos e a matriz de rotação são atualizados para conter a nova configuração deformada da estrutura. Após isso, o processo segue o fluxo normal, o qual é realizado o cálculo das forças externas a partir do fator de carga e as forças internas a partir dos deslocamentos.

Com os vetores de forças externas e internas calculadas para o passo incremental-iterativo atual, é possível realizar o cálculo do vetor de forças residuais. Após o cálculo, é realizada a verificação da convergência da solução. Nessa condição, a razão do vetor de forças residuais com o vetor de forças de referências externas aplicadas deve apresentar um valor menor que a tolerância definida pelo usuário para que o ciclo iterativo termine e uma nova etapa incremental se inicie, realizando novamente o processo descrito. Caso a convergência não seja atingida, um novo passo iterativo é iniciado até que a condição seja alcançada.

Na sequência, é identificado qual o método de iteração informado pelo usuário na parametrização da solução não linear. A partir do método identificado, a matriz de rigidez tangente do passo iterativo anterior é calculada. No caso do Newton-Raphson convencional, a matriz de rigidez é montada a partir do vetor de deslocamentos da iteração anterior, enquanto que o Newton-Raphson modificado utiliza a matriz de rigidez obtida no início do passo incremental atual. Vale novamente destacar que a montagem da matriz de rigidez tangente considera a influência das ligações semirrígidas, montadas de forma independente como mencionado anteriormente.

O fluxo segue o padrão detalhado na fase preditora, na qual os vetores de deslocamento tangente e residual são calculados a partir da matriz de rigidez tangente. Porém, nesse caso os deslocamentos residuais ($\delta\bar{u}$) não podem mais serem considerados nulos, uma vez que o critério de convergência não foi atingido. A partir desses vetores, o incremento do fator de carga iterativo é calculado a partir do método corretivo de solução, característico de cada método de solução incremental-iterativo. Na última etapa é calculado o vetor incremental de deslocamentos, considerando os vetores de deslocamento tangente e residual, o qual será utilizado para obter o novo fator de carga e reiniciado o ciclo de iteração. O processo é realizado em *loop* até que o critério de convergência seja atingido e uma nova etapa incremental seja iniciada.

Vale destacar que o método de solução escolhido não influencia no procedimento da construção da matriz de rigidez tangente da ligação semirrígida, obtido diretamente pelos deslocamentos/rotações obtidas no passo anterior para determinar o valor de sua rigidez, e posteriormente ter sua influência somada à matriz de rigidez tangente global em uma etapa independente adicionado no processo de solução não linear.

A alteração realizada no fluxo de solução não linear para conter a não linearidade das ligações semirrígidas foi mínima. A facilidade de sua implementação deve-se ao paradigma de orientação a objetos seguido pelo solver do FTOOL, sendo necessário somente criar um elemento finito para a ligação semirrígida por meio de herança. O elemento finito para a ligação semirrígida apresenta sua própria implementação para obtenção da matriz de rigidez e o cálculo das forças internas na ligação. A implementação e criação da classe responsável pelo elemento está descrito na Seção 4.3.2.

O nível de abstração do código permite que nas etapas da montagem da matriz de rigidez tangente global e do cálculo das forças internas de todos os elementos finitos do modelo sejam percorridos, e suas contribuições sejam

adicionadas nos respectivos graus de liberdades aos quais estão associados. A única alteração no fluxograma apresentado na Figura 17 foi a adição de uma opção para a não atualização da configuração geométrica da estrutura para grandes deslocamentos.

4. Implementação Computacional

Baseado na metodologia apresentada nos Capítulos 2 e 3, foram realizadas modificações na interface, no código fonte e no módulo de análise (FRAMOOOP) do programa FTOOL, a fim de considerar ligações semirrígidas tanto para análises lineares elásticas quanto para análises não lineares. Para a análise não linear, os métodos de solução não lineares incrementais e incrementais-iterativos implementados por Rangel (2019) foram adaptados para conter os efeitos da não linearidade física das ligações semirrígidas na construção da matriz de rigidez tangente e do vetor das forças internas.

Uma aplicação computacional de análise deve apresentar um sistema robusto para lidar com os algoritmos do programa e com os dados do modelo. Nesse contexto, algumas medidas, como a eficiência/complexidade do processamento de dados e processos e armazenamento de memória são essenciais para elaborar uma estrutura bem definida para lidar com todas as informações contidas nos processos de pré processamento, análise e pós processamento. Além do código ser construído buscando a reprodutibilidade, a qual permite organização, manutenção e modificações de forma mais clara e direta.

Em respeito a interface gráfica com o usuário, o software deve ser constituído de componentes e funções claras e consistentes, permitindo que o usuário interaja com o sistema a partir de padrões concisos e amigáveis. É importante também apresentar uma interface adaptativa, caracterizada por informar o usuário, por meio de *feedbacks*, o que ocorre ao longo de todo o processo de análise estrutural.

Na Seção 4.2, é realizada uma breve introdução do módulo de análise (*solver*) do software FTOOL, intitulado de FRAMOOOP, responsável todo processo de cálculo numérico.

Já na Seção 4.3, o programa FTOOL é contextualizado em maiores detalhes, atentando-se para a estrutura de dados e os paradigmas de programação utilizados para sua implementação.

Na Seção 4.4, são apontadas e descritas as adaptações necessárias para considerar ligações semirrígidas na análise estrutural no FTOOL, dividida em três

subseções, agrupando as implementações realizadas na estrutura de dados do FTOOL, na estrutura de dados do FRAMOOOP e na adaptação da interface gráfica.

4.1. Solver FRAMOOOP

O módulo de análise propriamente dito em um programa gráfico interativo para análise de estrutura é conhecido como *solver*, o qual é responsável por conter todos os algoritmos e métodos para análise. A atual versão do FTOOL utiliza a biblioteca FRAMOOOP, que é uma versão simplificada do FEMOOOP (Finite Element Method Object Oriented Program) (Martha e Parente, 2002), o qual foi modificado para realizar análises de pórticos estruturais. O FRAMOOOP pode ser definido como uma biblioteca externa, eliminando a necessidade do FTOOL de lidar com a parte do processamento, estando sujeito somente em lidar com o pré-processamento e com o pós-processamento. Essa estratégia adotada ajuda em futuras modificações ou implementações de forma independente em ambos ambientes.

O FRAMOOOP adota um paradigma de programação orientado a objetos - *Object Oriented Programming* (OOP). Esse paradigma de programação apresenta diversas vantagens, uma vez que torna o código mais organizado, permitindo modularização e reutilização de classes definidas, herança, polimorfismo e encapsulação.

Rangel (2019) adaptou o FRAMOOOP para também realizar análises de estruturas com não linearidade geométrica, implementando um grupo de métodos incrementais e incremental-iterativos parametrizados pelo usuário, como descrito no Capítulo 3. Essa implementação permitiu um grande aproveitamento das metodologias para conter a não linearidade física das ligações semirrígidas.

Na Seção 4.4.2 são apresentados, de forma concisa, as classes (no contexto de OOP) adaptadas ou adicionadas no módulo FRAMOOOP, atentando-se no conceito do que foi realizado sem expressar o código. O objetivo é mostrar essas classes de uma forma geral, desde a criação de novos módulos no código para conter as ligações semirrígidas, até a lógica para a construção da matriz de rigidez tangente do modelo estrutural, contendo os efeitos da rigidez das ligações semirrígidas em cada etapa incremental iterativa, e construção do vetor das forças internas, contendo informações dos momentos resistentes internos das ligações.

4.2. Programa FTOOL

O FTOOL (Two-dimensional Frame Analysis Tool Program) foi criado em 1991 a partir de um projeto do Instituto Tecgraf de Desenvolvimento de Software Técnico-Científico da PUC-Rio (Tecgraf/PUC-Rio). O FTOOL utiliza uma biblioteca de modelagem chamada HED (*Half-Edge Data Structure*) (Cavalcanti *et al.*, 1991), responsável por gerenciar as subdivisões planares para representação interna de dados. O software consiste de um programa gráfico-interativo para a análise de modelos estruturais, os quais podem ser manipulados através do mouse e teclado.

O programa tem como principal objetivo trazer em uma única aplicação todas as ferramentas possíveis para a criação e manipulação de um modelo estrutural (pré-processamento), a análise numérica (processamento) e a visualização e manipulação dos resultados graficamente (pós-processamento), permitindo e motivando o aluno de engenharia entender a teoria da análise estrutural mostrando o comportamento da estrutura na prática e de forma didática.

A parte gráfica do FTOOL foi remodelada no período de 1997 e 1998, utilizando o sistema gráfico IUP (Levy, 1996) e o sistema gráfico CD, ambos desenvolvidos pelo Tecgraf/PUC-Rio. Esta interface gráfica possibilita que o programa seja executado tanto no ambiente Windows quanto no ambiente Unix-X-Windows. Ao longo dos anos várias versões e modificações surgiram de forma a aprimorar a ferramenta.

Desde o seu surgimento, o FTOOL comprovou ser uma ferramenta valiosa para o ensino da engenharia estrutural, sendo largamente utilizado ao redor do mundo, em diversos cursos da área em diversas universidades brasileiras (PUC-Rio, EPUSP, UERJ, UNICAMP, UFOP) e estrangeiras (BUCKNELL, CORNELL, Universidade de Alberta).

A estrutura do FTOOL foi desenvolvida de forma eficiente, permitindo de forma eficiente e clara a manipulação de todas as etapas integradas em um único programa, sendo um aspecto fundamental na qualidade do ensino do comportamento estrutural sob determinadas situações.

Essa estrutura permite a detecção de inconsistências na definição e criação do modelo em todas as etapas, além de possibilitar o registro das relações entre as entidades do modelo, ou seja, uma forma eficiente de estabelecer operações geométricas, as quais incluem a detecção automática de interseções no modelo. A estrutura do programa se encontra altamente baseada na representação

topológica completa de uma subdivisão planar, proporcionada pela biblioteca HED, baseada na teoria da modelagem de sólidos de Mantyla (1987) e descrita nas referências de Carvalho *et al.* (1990) e Cavalcanti *et al.* (1991).

A nova versão do FTOOL implementada nesse trabalho é responsável por incorporar o efeito não linear físico das ligações semirrígidas em estruturas metálicas. Nesse contexto, essas ligações são simuladas inserindo um elemento de mola rotacional, podendo apresentar um comportamento linear ou não linear físico. No caso de um comportamento linear, o usuário informa o valor da rigidez da mola rotacional, enquanto que uma conexão não-linear é necessário informar os pontos do gráfico *momento x rotação* em forma de tabela. Foi necessário criar novos módulos no código fonte do FTOOL para considerar ligações semirrígidas, e adaptações foram feitas no modelo estrutural para a análise, apresentados na Seção 4.4.1.

4.3. Implementações realizadas

Esta seção é dividida em três, agrupando as implementações realizadas em cada um dos ambientes: FTOOL, FRAMOOOP e interface com usuário. Cada subseção é construída de forma sucinta, sem expressar o código, atentando-se somente a lógica de construção para conter a influência das ligações semirrígidas tanto em análises lineares elásticas quanto em análises não lineares físicas.

4.3.1. Implementações no FTOOL

Nesta seção, são apresentadas as classes criadas e modificadas para conter as funcionalidades da nova versão do FTOOL, que apresenta a estrutura de dados para conter todas as entidades criadas para o modelo estrutural, além de todas as relações.

A Tabela 2 ilustra o nome dos arquivos criados e uma breve descrição de cada um, posteriormente é realizar a descrição de cada um dos arquivos. A implementação realizada no código fonte do FTOOL, de forma geral, limitou-se na criação de classes para conter as novas estruturas adicionadas (ligações semirrígidas) e suas propriedades e relações, em um nível de otimização no armazenamento e liberação de memória, além das definições das funções *callbacks* (ligadas diretamente a nova interface gráfica também criada).

Tabela 2: Classes do FTOOL criados/modificados.

Classe	Descrição
<i>Srcn</i> (<i>semi rigid connection</i>)	Classe responsável pela criação e definição da ligação semirrígida e suas propriedades na interface gráfica do FTOOL
<i>Srcnpa</i> (<i>semi rigid connection parameters</i>)	Classe responsável pela criação e manipulação dos parâmetros das conexões semirrígidas e suas estruturas.
<i>Anl</i> (<i>analysis</i>)	Classe que contém a API para o módulo de análise. Responsável por gerenciar os dados estruturais de análise enviados diretamente pela API do FRAMOOOP.

4.3.1.1. Classe *Srcn*

Nesta classe são definidas os métodos e procedimentos ligados a interface gráfica do FTOOL, no contexto da criação e definição das conexões semirrígidas. Ela estabelece a relação entre os componentes gráficos com funções definidas nesta classe, chamadas de *call-backs*, cobrindo todos os procedimentos desde a criação da ligação, definição dos valores e comportamento, até a aplicação das ligações criadas nos elementos selecionados. Além de também realizar o controle/*feedback* dos estados dos componentes gráficos na tela, definidos por certas condições impostas, como por exemplo, desabilitar a definição de um dos comportamentos da ligação (linear ou não linear) quando outro estiver sendo definido. Esta classe também é responsável pela associação de ligações semirrígidas a um ou aos dois nós de um elemento de barra no modelo estrutural, conforme definido pelo usuário através da interface gráfica do FTOOL.

4.3.1.2. Classe *Srcnpa*

Esta classe é responsável pela criação das conexões semirrígidas e a definição de suas propriedades e estruturas. De forma direta, a entidade criada dentro do contexto do FTOOL contém as propriedades características do

elemento de ligação definido pelo usuário, seja ela linear ou não, e é aplicada e associada a um elemento no modelo estrutural. No caso de uma ligação definida com o comportamento não linear, o elemento de ligação é associado também com outra estrutura de curva *momento x rotação* criada, a qual contém as propriedades da curva, assim como os pares de pontos informados pelo usuário.

Logo, esta classe é responsável pela estrutura de dados que irá conter todas as informações, métodos e procedimentos os quais dizem respeito a definição e manutenção de todas as entidades de ligações semirrígidas criadas dentro de um determinado contexto de análise. Resumidamente, é nesta classe que os dados que serão utilizados para a análises estão contidos, os quais são passados para o módulo de processamento no FRAMOOOP.

4.3.1.3. Classe *Anl*

Esta classe representa o módulo que contém todos os parâmetros pertinentes a análise estrutural, e é responsável por enviar, via memória, os dados de análise para a API do FRAMOOOP. Foram necessárias algumas adaptações nesta classe para conter a influência das ligações semirrígidas no cálculo estrutural, considerando a nova estrutura de dados para conter a entidade.

A classe foi modificada para totalizar e preparar os dados para todos os elementos de ligação criados para a análise. Nessa montagem, os elementos de ligação são criados em conjunto com suas propriedades, que consideram a rigidez informada pelo usuário no caso de uma ligação linear, ou o identificador da curva *momento x rotação* para uma ligação não linear. A estratégia de considerar o identificador da curva permite a consulta, no módulo de análise, de seus valores em cada passo incremental-iterativo, que pode resultar em diferentes valores de rigidez para o elemento. Além disso, a classe também é responsável por passar para o módulo de análise a informação sobre a associação dos elementos de ligação com os nós nas extremidades das barras.

É também necessário a contagem e consideração dos nós fictícios gerados pela ligação (um por elemento) na análise, além do acréscimo dos graus de liberdade referentes a esses nós. Uma vez que os demais efeitos (axial e cisalhante) foram desconsiderados para esta implementação, somente um grau de liberdade é adicionado por nó fictício, referente à rotação. Vale novamente ressaltar que toda a implementação foi realizada de forma a permitir que futuramente a adição dos demais efeitos não quebrem a lógica de construção da

estrutura de dados, podendo ser reaproveitada e facilmente modificada para conter os novos comportamentos.

4.3.2. Implementações no FRAMOOOP

Nesta seção são apresentadas de forma direta e simplificada as criações e modificações necessárias nas classes da biblioteca FRAMOOOP para conter os elementos de ligação semirrígida. Foi necessário a construção de uma estrutura de dados para o processamento da análise, a qual permite que, em cada passo incremental-iterativo, a matriz de rigidez tangente da ligação seja montada e somada à matriz de rigidez global da estrutura, assim como o vetor das forças internas da ligação seja somada ao vetor das forças internas globais.

A Tabela 3 ilustra as classes alteradas ou criadas para conter as novas modificações necessárias. Em seguida cada ponto é descrito de forma mais clara.

Tabela 3: Classes do FRAMOOOP criados/modificados.

Classe	Descrição
<i>AlgGNL</i> (<i>Algorithm Generic Non Linear</i>)	Classe adapta que gerencia todo o processo incremental-iterativo de uma análise não linear do FRAMOOOP
<i>Elsrcn</i> (<i>semi rigid connection</i>)	Sub-classe da classe <i>Elc</i> (Element class) criada e responsável por conter os métodos e procedimentos de um elemento semirrígido.
<i>Gbldefs</i> (<i>global definitions</i>)	Classe adaptada que tem como objetivo conter as definições globais de estruturais do FRAMOOOP,
<i>Gblvar</i> (<i>global variables</i>)	Classe adaptada que tem como objetivo conter as variáveis globais do FRAMOOOP,

4.3.2.1. Classe AlgGNL

Classe adaptada para conter a influência da não linearidade física das ligações semirrígidas na análise não linear. Esta classe representa o núcleo de todo o processo descrito no fluxograma apresentado na Figura 17. Esta é responsável por conter todos os parâmetros pertinentes a análise não linear, desde a consideração ou não de grandes deslocamentos e a não linearidade física da ligação semirrígida, até os parâmetros definidos pelo usuário conforme é mostrado na Figura 20.

A classe também é encarregada de controlar o ciclo incremental-iterativo de solução e a chamada de métodos pertinentes ao processo, como: requisição da matriz de rigidez tangente de cada elemento estrutural e de ligação semirrígida, montagem da matriz de rigidez tangente global e checagem da convergência da solução.

4.3.2.2. Sub-classe *Elcsrcn*

Sub-classe criada com o objetivo de conter todos os dados e métodos referentes ao elemento de ligação semirrígida. Dentre as funções destinadas a essa classe, destinam-se a criação do elemento de ligação, a alocação e liberação de memória, a montagem da matriz de rigidez do elemento, a qual depende do tipo de análise adotado pelo usuário, e o cálculo do vetor das forças internas do elemento, que no caso só considera momentos.

Para a montagem da matriz de rigidez do elemento de ligação, é considerada uma matriz de dimensão 12×12 . A elaboração dessa matriz permite futuramente o aproveitamento do código para englobar elementos tridimensionais, resultando em deslocamentos e rotações nas 3 dimensões.

Em uma análise linear, a matriz de rigidez é constante para toda a análise, sendo preenchido os campos da matriz com o valor fornecido pelo usuário na interface do FTOOL e passados via memória pela API do FRAMOOOP. Além disso, é possível em uma análise não linear geométrica considerar uma ligação semirrígida com comportamento linear. Neste caso a matriz de rigidez do elemento de ligação é “requisitada” em cada etapa incremental-iterativa para ser somada à matriz de rigidez global do modelo estrutural, sendo que a matriz da

ligação é a mesma em cada passo. O vetor das forças internas da ligação também é calculado com base na matriz de rigidez constante.

Por outro lado, uma ligação semirrígida com comportamento não linear em uma análise linear elástica é tratada com comportamento linear considerando a inclinação do primeiro intervalo da curva *momento x rotação* à qual o elemento de ligação está associado como a rigidez constante para o processo de cálculo, como definido e ilustrado no Capítulo 3.

Por último, o comportamento adotado para uma ligação semirrígida não linear em uma análise que considera a não linearidade física da ligação, em cada um dos passos incrementais-iterativos, a matriz de rigidez tangente e o vetor de forças internas do elemento de ligação são calculados em função da rotação relativa da iteração corrente. A rotação relativa é utilizada para determinar o segmento correspondente da curva multilinear *momento x rotação* associada ao elemento. Após determinado, é calculada a inclinação da curva corrente e por fim montada a matriz de rigidez da iteração, e então somado o seu efeito à matriz de rigidez tangente global. Um procedimento análogo é adotado para o vetor das forças internas. A determinação do segmento da curva na iteração corrente a partir de um valor de rotação relativa foi implementada de forma a contornar o problema de um ponto que está além do último ponto informado para a curva à qual a ligação está associada. Nesse caso, é considerado que o último segmento de curva se prolonga indefinidamente.

4.3.2.3. Classe *Gbldefs*

Esta classe é responsável em conter as definições globais utilizadas dentro de todo o processamento da análise no ambiente FRAMOOOP. Resumidamente, é nesta classe que são definidas as estruturas e informações globais que englobam a estrutura de dados passadas pelo FTOOL para o cálculo. Nesse contexto, foi necessário a criação de duas novas estruturas para conter a influências das ligações semirrígidas, o *SpringCrv* e o *SRConn*.

A estrutura *SpringCrv* é responsável por englobar as propriedades da curva a qual determinada ligação semirrígida está associada, como os pares de pontos e o identificador, que permite que seja possível associar uma determinada ligação com a respectiva curva, e o cálculo da rigidez e as forças internas para cada passo incremental-iterativo. Já a estrutura *SRConn*, define um determinado elemento de ligação semirrígida, englobando a estrutura de dados montada no ambiente de

pré-processamento do FTOOL, contendo todas as informações pertinentes ao cálculo. Essa estrutura contém por exemplo, a matriz de rigidez do elemento montada de acordo com o tipo de análise (linear ou não), além de outras propriedades de relação topológica, como a qual elemento está conectada e o nó associado.

4.3.2.4. Classe *Gblvar*

Nesta classe são definidas as variáveis globais comuns em toda a análise no ambiente FRAMOOOP. Foi necessário inserir as variáveis globais referentes ao número total de curvas momento x rotação inseridas e o número total de elementos de ligação semirrígidas. Além disso, também são definidos o vetor que contém todas as estruturas tanto para as curvas (*SpringCrv*) quanto para os elementos de ligação (*SRCConn*).

4.3.3. Modificações na interface gráfica

Algumas modificações e adições foram realizadas na interface gráfica do FTOOL para conter a nova aplicação da ferramenta. Todos os elementos gráficos confeccionados (diálogos, botões, textos, etc.) seguiram a filosofia já adotada pelo software, o qual se baseia em elementos e funções do IUP (Levy, 1996).

O IUP é um sistema desenvolvido para a criação de interfaces gráficas com o usuário. Ele disponibiliza uma API (*Application Programming Interface*) fundamentada em três linguagens de programação: C, Lua e LED. O IUP permite que o software seja executado em diferentes ambientes sem que ocorra uma modificação ou inconsistência na interface, tornando-o uma ferramenta poderosa e portátil. Foi desenvolvido no Tecgraf/PUC-Rio e é caracterizado por apresentar um alto desempenho, uma vez que utiliza o sistema de interfaces do sistema nativo e disponibiliza uma API simples e de fácil aprendizado.

Todos os elementos de interface foram escritos em LED, que é definida como uma linguagem de descrição de diálogos, com sintaxe simples para criação de diálogos estáticos, a qual apresenta como principais características:

- Simplicidade e alta velocidade de aprendizado por conta de sua API.
- Alto desempenho, por conta do uso de interfaces do sistema nativo.
- Disponível em diversas plataformas.

A linguagem LED suporta tanto *layouts* abstratos quanto concretos. Para definir um *layout* concreto, é necessário definir a geometria exata da posição de cada componente. De outro lado, o *layout* abstrato é definido através de posições relativas entre os componentes.

Os arquivos são gerados externamente seguindo o protocolo de criação LED, que são enviados em conjunto com o executável da aplicação. Além disso, existe a alternativa de utilizar um programa (*LEDC*) para gerar um módulo em C a partir de um arquivo LED para evitar o envio dos arquivos LED junto ao executável. A fim de conter as novas ferramentas implementadas, os arquivos LED da aplicação foram modificados para gerar uma nova interface. Além disso, novos ícones e figuras foram criados para essa nova versão do software FTOOL.

A Figura 18 (Dias et al., 2020) ilustra a nova interface do programa, já incluindo a definição das ligações semirrígidas. Foi necessária a criação de um novo elemento no menu superior para conter o contexto das ligações semirrígidas (*Semi-rigid Connections*), como destacado. O ícone desse menu simboliza uma mola rotacional, e, quando selecionado, aciona a abertura do submenu lateral direito para a definição ou manutenção das propriedades dos elementos de ligação inseridos dentro da atual análise.

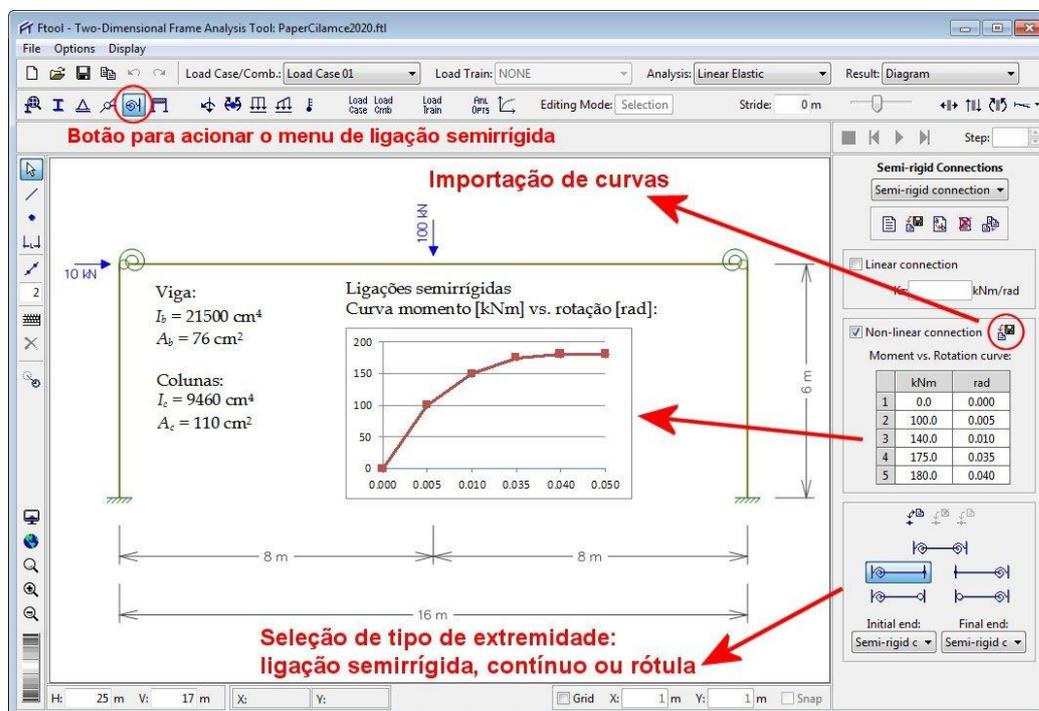


Figura 18: Nova interface do FTOOL para a criação da ligação semirrígida (Dias et al., 2020).

Durante a criação de uma nova ligação, inicialmente é necessário informar um *label* único, que servirá como identificador da ligação ao longo de todas as etapas de processamento. Após isso, determinamos qual o seu comportamento, podendo ser linear ou não. E por fim, a configuração a qual a ligação será inserida no elemento finito estrutural. No caso de edição, é necessário somente selecionar a ligação pelo seu identificador na lista de elementos criados, e alterar os valores diretamente.

Na definição do comportamento da ligação, como *default*, o comportamento da ligação é linear, sendo necessário somente um parâmetro para definir o seu comportamento, que é exatamente a constante de rigidez que relaciona o momento com a rotação da ligação em todo processo de cálculo. Esse campo aceita somente valores positivos, podendo ser zero (simulando uma rótula) e valores necessariamente grandes (simulando uma ligação rígida).

Caso o comportamento apresente caráter não linear, é disponibilizada uma tabela para a inserção dos pares pontos da curva *momento x rotação* característica da ligação semirrígida. Atualmente, somente curvas multilineares podem ser utilizadas. A Figura 18 ilustra a inserção de um grupo de pares de pontos, simulando uma curva *momento x rotação* qualquer, indicada na imagem. Algumas precauções ao definir os pontos devem ser tomadas, uma vez que o programa está condicionado a não permitir inserção de pontos que representem um declínio no comportamento da ligação. É possível ainda importar os pares de pontos de um arquivo externo para a tabela, respeitando as restrições de definições de cada ponto, em um grupo de pontos, onde cada par é informado por linha. A matriz de rigidez tangente da ligação e o vetor de forças internas são determinadas a partir da rotação relativa entre as extremidades da ligação semirrígida.

O último passo é a associação das ligações nos membros estruturais dos modelos. Nessa subseção existem duas listas tipo *drop-down* para atribuição das ligações semirrígidas aos elementos de barra selecionados, simbolizando a ligação no primeiro e segundo nó, que são habilitadas ou desabilitadas dependendo da configuração que se deseja utilizar. Quando habilitado, a lista irá trazer todas as ligações semirrígidas criadas, permitindo que o usuário selecione qual ligação deseja adicionar para o determinado nó do elemento estrutural selecionado.

As ligações semirrígidas podem ser atribuídas em ambas ou somente uma das extremidades do elemento de barra. Para este último caso, a outra extremidade do elemento pode ser contínua ou rotulada. Dentre as configurações

possíveis para definição, é possível: ligações semirrígidas em ambos os nós; ligação no primeiro nó e fixo no segundo; ligação no primeiro nó e rotulado no segundo; fixo no primeiro nó e ligação no segundo; e rotulado no primeiro nó e ligação no segundo. Com os membros do modelo selecionados e definida a configuração e ligações a serem utilizadas, as relações são estabelecidas ao confirmar a aplicação.

Ainda foi necessária a criação da representação gráfica da ligação semirrígida no modelo para facilitar a sua visualização e manipulação durante todas as etapas de processamento. A Figura 19 ilustra a ligação já definida em um modelo criado, na qual as ligações seguem o padrão e aparecem como molas rotacionais nos nós que estão definidas em cada elemento finito estrutural.

O padrão utilizado para as ligações lineares determina que o elemento gráfico de mola rotacional acompanha o valor da rigidez da ligação definido, enquanto que as molas com comportamento não-linear estão acompanhadas com o *label* estabelecido quando foram criadas. Para acompanhar ou editar os pontos da curva *momento x rotação*, é necessário apenas selecionar a ligação na lista do submenu *Semi-rigid Connections*.

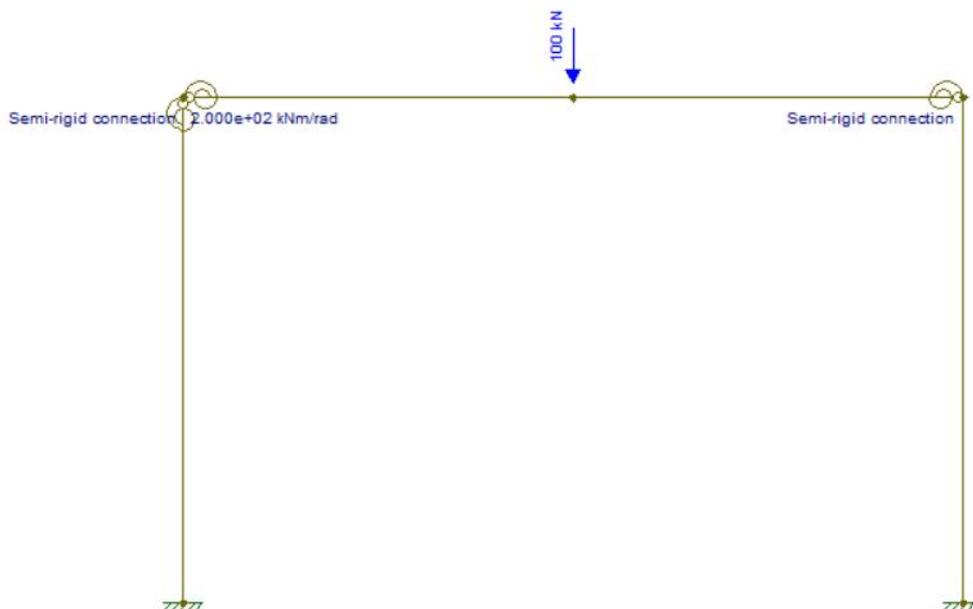


Figura 19: Representação gráfica das ligações semirrígidas em um modelo no FTOOL.

A Figura 20 representa o submenu de parametrização para a análise não linear. Foi necessária uma adaptação para conter um novo campo de *checagem*, declarando a consideração ou não da não linearidade física da ligação semirrígida. Vale novamente ressaltar que a matriz de rigidez

tangente sempre será construída com a influência da ligação, porém os valores só serão ajustados conforme a curva momento x rotação da ligação somente caso a *checagem* esteja habilitada, caso contrário, a rigidez da ligação é considerada constante e representada pela inclinação do primeiro segmento de reta da curva informada.

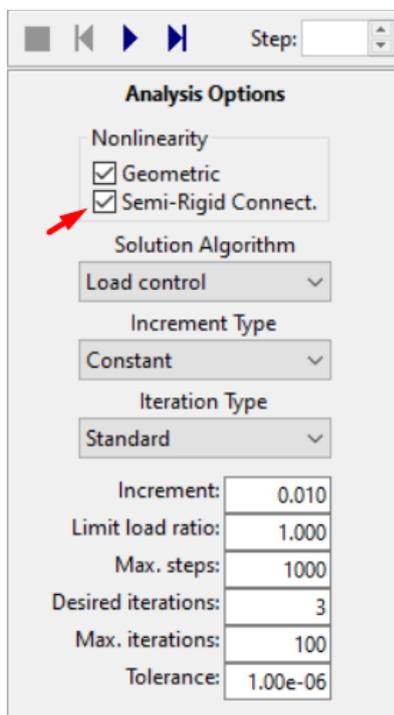


Figura 20: Parâmetros de inserção do usuário para análise não linear no FTOOL.

As demais parametrizações seguem o comportamento anterior definido no trabalho de Rangel (2019), o qual é selecionado o algoritmo de solução, o tipo de incremento e iteração. É recomendando que o usuário apresente breve conhecimento do método e valores de entrada para a escolha da metodologia de solução, a qual garante a convergência e eficiência de processamento.

4.4. Incorporação do elemento de ligação semirrígida no modelo global

Conforme descrito na Seção 2.3 do Capítulo 2, neste trabalho a ligação semirrígida é modelada como um elemento finito rotacional isolado. Na estrutura de classes OOP do FRAMOOOP, foi adicionada uma subclasse (*Elcsrcn*) à classe

de elementos finitos. Dentro do conceito de polimorfismo da programação orientada a objetos, a incorporação dessa classe teve um impacto mínimo na organização do FRAMOOOP. As subclasses existentes no programa para outros tipos de elementos finitos não sofreram nenhuma alteração. Além disso, os algoritmos globais para montagem da matriz de rigidez global ou do vetor das forças internas não precisaram ser modificados. Esta seção descreve os procedimentos adotados para incorporar a ligação semirrígida como um elemento finito isolado e para numerar graus de liberdade de um modelo estrutural com ligações semirrígidas no FRAMOOOP de maneira a tratar genericamente os elementos finitos associados às ligações e os elementos de barra convencionais.

Em geral, as ligações semirrígidas são tratadas como elementos finitos isolados. A alternativa mais comum, como a de Chan e Chui (2000), incorpora as propriedades de rigidez da ligação a um elemento de barra convencional e condensa os graus de liberdade interiores ao conjunto de barra e ligações semirrígidas, gerando um elemento de barra especial que contém as ligações semirrígidas internamente. Essa alternativa tem diversas desvantagens. Por exemplo, é necessário criar elementos de diferentes tipos para tratar as diversas configurações de extremidade de barra: duas extremidades com ligação semirrígida, extremidade inicial com ligação e extremidade final sem ligação, extremidade inicial com ligação e extremidade final articulada, e assim por diante. Além disso, é necessário informar para esse elemento de barra especial, além das propriedades do material e seção transversal da barra, as propriedades lineares ou não lineares das ligações semirrígidas.

Por outro lado, a implementação computacional de uma ligação semirrígida como um elemento finito isolado em um *solver* de análise de estrutura é muito simples. Os procedimentos adotados são explicados na sequência com auxílio do exemplo de um pórtico simples com duas ligações semirrígidas mostrado na Figura 21. Para cada ligação semirrígida é criado transparentemente um nó fictício. Um elemento de barra com uma ligação semirrígida fica conectado na extremidade correspondente a um nó fictício.

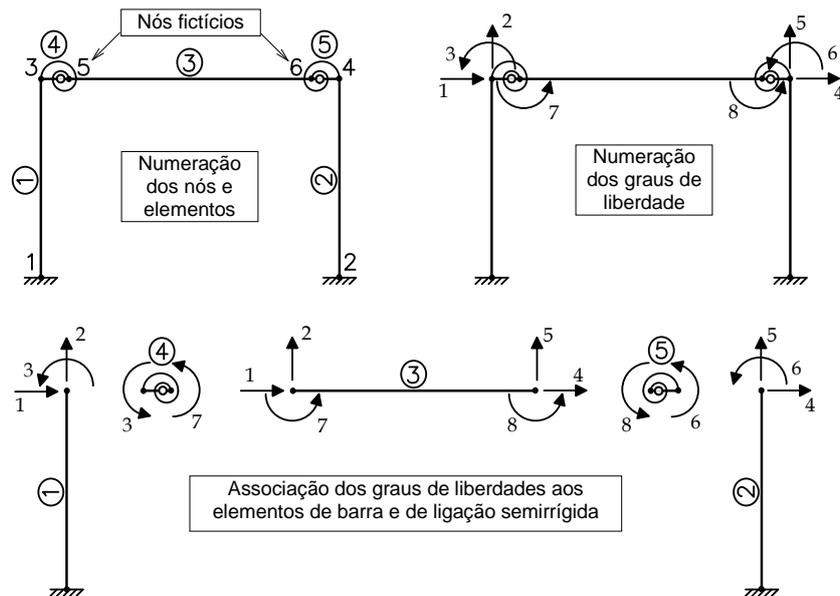


Figura 21: Exemplo de um pórtico com ligações semirrígidas e numeração dos graus de liberdade.

Os nós fictícios são criados pelo FTOOL na preparação dos dados que são passados ao FRAMOOOP. Cada nó fictício tem as mesmas coordenadas do nó na extremidade correspondente da barra com ligação semirrígida. Esses nós só existem no contexto da análise estrutural no FRAMOOOP. Após cada análise, os resultados de rotações dos nós fictícios são armazenados nas extremidades correspondentes do membro (barra) no FTOOL.

No exemplo da Figura 21, as numerações de nós (reais e fictícios), de elementos de barras e de elementos de ligação semirrígida estão indicadas. A numeração de elementos tem um círculo para diferenciar da numeração dos nós. Observa-se que dois nós fictícios (5 e 6) foram criados, um para cada ligação semirrígida.

Os dados preparados no FTOOL e passados para análise no FRAMOOOP têm informações sobre os graus de liberdade de cada nó do modelo. Por exemplo, a informação sobre os apoios em engaste (todos os graus de liberdade fixos) dos nós 1 e 2 são informadas e, por isso, não existem graus de liberdade livres associados a esses nós. Também é informada a associação de graus de liberdade dos nós fictícios com os correspondentes nós reais. Nesse caso, os graus de liberdade translacionais de um nó fictício e do nó real correspondente estão associados, isto é, têm a mesma numeração. Por outro lado, os pares de nós fictícios e reais têm graus de liberdade rotacionais distintos.

No FRAMOOOP, a numeração dos graus de liberdade dos nós de um modelo são armazenadas em uma matriz com o nome $[ID]$. A Figura 22 mostra a matriz $[ID]$ para o pórtico da Figura 21.

$$[ID] = \begin{array}{c} \text{Nó:} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Desloc. } X \\ \text{Desloc. } Y \\ \text{Rotação } Z \end{array}$$

Figura 22: Matriz $[ID]$ com a numeração dos graus de liberdade dos nós do pórtico da Figura 21.

Observa-se na Figura 22 que os nós 1 e 2 com engaste têm graus de liberdade nulos. Observa-se também que o nó fictício 5 tem os mesmos graus de liberdade translacionais do nó 3, enquanto a esses dois nós têm graus de liberdade rotacionais diferentes. Observações análogas podem ser feitas para os nós 6 e 4.

Consistentemente com a numeração dos graus de liberdade dos nós do modelo, a Figura 21 indica os graus de liberdade associados às extremidades dos elementos de barra e dos elementos de ligação semirrígida. Para a barra 3 com ligações semirrígidas, os graus de liberdade translacionais correspondem aos mesmos graus de liberdade dos nós reais 3 e 4, enquanto os graus de liberdade rotacionais correspondem aos graus de liberdade dos nós fictícios 5 e 6.

Os procedimentos adotados para a numeração dos graus de liberdade de um modelo estrutural possibilitam que algoritmos clássicos e consagrados para montagem de matriz de rigidez global, de vetor das forças externas e de vetor das forças internas sejam utilizados. A estratégia adotada para modelar ligações semirrígidas rotacionais como elementos finitos isolados se mostrou muito simples de ser implementada e eficiente. Por exemplo, a matriz de rigidez de uma ligação semirrígida (mostrada na Seção 2.3) é simplesmente adicionada na matriz de rigidez global nas posições correspondentes de seus graus de liberdade.

Também deve ser observado que a rigidez e os esforços internos de uma ligação semirrígida com não linearidade física são tratadas de forma independente dos elementos de barra, como mostrado no capítulo anterior. Isso também é uma grande vantagem dessa metodologia.

Finalmente, observa-se que a consideração de elementos finitos isolados para ligações semirrígidas em três dimensões é direta. De fato, no FRAMOOOP a classe *Elcsrcn* já considera ligações tridimensionais. Outra vantagem é a

possibilidade de futuras extensões para considerar ligações semirrígidas com comportamento axial, cortante e de torção. A implementação da classe *Elcsrcln* no FRAMOOOP já está preparada para essas extensões.

5. Exemplos Numéricos

Nesse capítulo alguns problemas numéricos são analisados, divididos em duas grandes seções, agrupadas em análises lineares elásticas e análises não-lineares. O objetivo principal é validar, com base em investigações realizadas na literatura, as formulações apresentadas no presente trabalho e implementadas no software FTOOL. Dentro das validações, reside a ratificação do modelo proposto por Del Savio (2004), revisitado neste trabalho e utilizado como base em trabalhos recentes, tal como o apresentado por Marques *et al* (2019).

Na seção 5.2 são descritos alguns estudos de casos encontrados na literatura com soluções numéricas lineares. Primeiramente é apresentado o estudo realizado por Chan e Chui (2000), o qual consta de um pórtico simples com ligações semirrígidas inseridas nas bases e nas conexões entre vigas e colunas. Em seguida, o pórtico apresentado no estudo realizado por Steenhuis *et al* (1994) e o sistema Vierendeel proposto no trabalho de Del Savio *et al.* (2005).

Na seção 5.3 são consideradas as análises não lineares. Inicialmente é realizado um estudo sobre o trabalho apresentado por Mondkar e Powell (1977), o qual considera uma ligação semirrígida com comportamento linear em uma análise não linear geométrica. Posteriormente, são validadas as ligações com comportamento não linear, tal como o modelo de dois andares proposto por Chan e Chui (2000), considerando diferentes tipologias para a análise. O pórtico de Keulen *et al.* (2003), de Nguyen e Kim (2016), Stelmack *et al.* (1986) também são estudados. É também analisado o modelo de calibração de Vogel (1985), segundo diferentes tipologias de ligações semirrígidas. Também foi realizada uma análise dos modos de flambagem de um pórtico simples, considerando a flexibilidade das ligações semirrígidas. Por fim foi considerado um caso de estudo utilizado na tese de Menezes (1990), utilizando as ligações semirrígidas como rótulas plásticas em uma análise limite de uma viga hiperestática.

Os casos de estudo apresentados neste capítulo têm como foco a análise da influência do comportamento das ligações semirrígidas em respeito a estrutura global. Além disso, os exemplos demonstram a eficácia da consideração da não linearidade física das ligações contempladas dentro do grupo de métodos de soluções implementados por Rangel (2019).

5.1. Exemplos em análises lineares

Nesta subseção são apresentados trabalhos encontrados na literatura que propõem cenários aos quais as estruturas estão submetidas diferentes carregamentos, e ligações semirrígidas com o comportamento linear, ou seja, conexões cujo comportamento pode ser representado por uma constante de rigidez.

Esse contexto é ideal para avaliar a implementação realizada no presente trabalho, a partir do modelo de mola rotacional, capaz de acomodar as rotações e momentos que influenciam a ligação durante o estado de carregamento.

5.1.1. Pórtico simples - Chan e Chui (2000)

Esse exemplo é baseado em um caso de estudo presente no trabalho de Chan e Chui (2000), o qual propõe um pórtico simples com 16 metros de comprimento e 6 metros de altura. A estrutura está submetida a uma carga de $100kN$ no ponto central da viga e uma carga de $10kN$ no ponto do topo da primeira coluna, como ilustrado na Figura 23. Ligações semirrígidas são inseridas nas conexões entre vigas e colunas, e nas bases de cada uma das colunas, como ilustra a Figura 24, com o modelo idealizado e já criado dentro do ambiente de análise do FTOOL.

A partir do modelo proposto para a análise, quatro casos de estudo foram elaborados por Chan e Chui (2000) com o objetivo de analisar a influência das ligações em respeito ao comportamento global da estrutura. A configuração é mantida em todos os casos de análise, diferenciando-se somente pelos valores utilizados na representação da rigidez das ligações, sendo que K_v e K_c representam, respectivamente, os valores das rizezas da viga e da coluna.

Pode-se idealizar a conexão com a viga-coluna como sendo rígida (no caso de uma conexão soldada), rotulada (como exemplo uma ligação com cantoneira simples de alma) ou semirrígida (como por exemplo uma ligação de topo e assento). Porém, para simplificar a análise, a rigidez da ligação será relacionada diretamente com as propriedades físicas e geométricas da viga ou coluna. Para o caso de ligações rígidas, o qual implicam em uma rigidez infinita, foi adotado um valor numérico suficientemente alto para a simulação. Já o caso de uma ligação rotulada, é informada um elemento de ligação com rigidez constante nula.

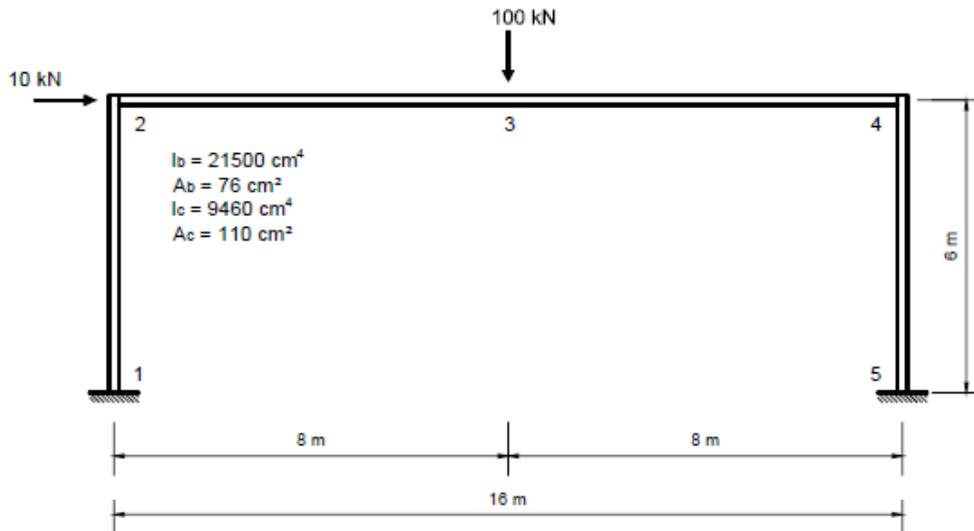


Figura 23: Pórtico simples (Chan e Chui, 2000) – modelo proposto para análise linear.

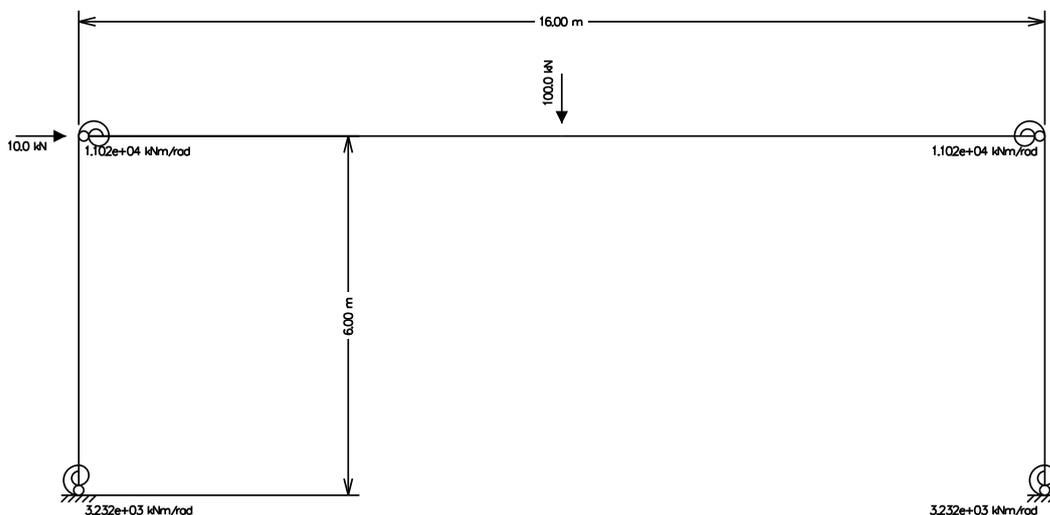


Figura 24: Pórtico simples (Chan e Chui, 2000) – modelo proposto modelado no FTOOL para análise linear.

A Tabela 4 ilustra os quatro casos de análise elaborados por Chan e Chui (2000). Em cada um dos casos considerados, é informado o valor da constante de rigidez e a ligação semirrígida associada.

A Figura 25 ilustra as configurações e momentos obtidos por Chan e Chui (2000) em cada um dos casos analisados. Além disso, nas Tabela 5 a 8, são apresentados os valores obtidos no estudo de Chan e Chui (2000), permitindo a comparação com os valores obtidos na presente implementação, e aos fornecidos por Del Savio (2004).

Tabela 4: Casos hipotéticos para análise do pórtico simples

Caso	K_v	K_c
1	∞	∞
2	0	∞
3	$4EI_v/L_v$	∞
4	$4EI_v/L_v$	EI_c/L_c

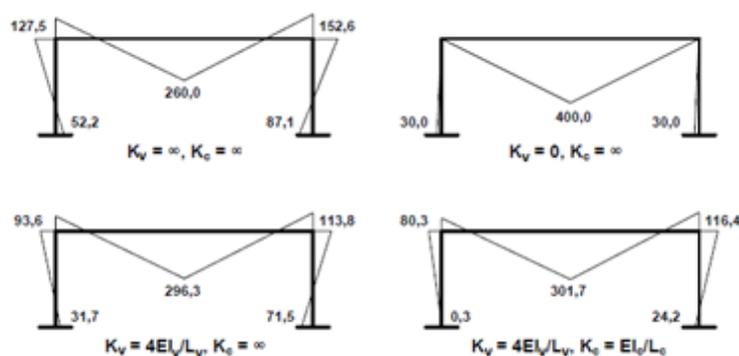


Figura 25: Pórtico simples - resultados apresentados por Chan e Chui (2000).

Tabela 5: Valores obtidos para o caso 1

Caso	$K_b = \infty ; K_c = \infty$			
Nó	Teórico	Chan e Chui (2000)	Del Savio (2004)	Ftool
1	52.2	51.11	52.22	52.2
2	127.5	125.17	127.49	127.49
3	260.0	258.55	259.97	259.96
4	152.6	150.3	152.58	152.58
5	87.1	85.97	87.13	87.14

Tabela 6: Valores obtidos para o caso 2

Caso	$K_b = 0 ; K_c = \infty$			
Nó	Teórico	Chan e Chui (2000)	Del Savio (2004)	Ftool
1	30	30.04	30.04	30.04
2	0	0	0	0
3	400	398.36	400	400
4	0	0	0	0
5	30	29.96	29.96	29.96

Tabela 7: Valores obtidos para o caso 3

Caso		$K_b = 4EI_b/L_b ; K_c = \infty$		
Nó	Teórico	Chan e Chui	Del Savio	Ftool
1	31.7	31.45	31.67	31.68
2	93.6	93.41	93.65	93.65
3	296.3	295.84	296.28	296.28
4	113.8	113.41	113.6	113.8
5	71.5	71.45	71.53	71.53

Tabela 8: Valores obtidos para o caso 4

Caso		$K_b = 4EI_b/L_b ; K_c = EI_c/L_c$		
Nó	Teórico	Chan e Chui	Del Savio	Ftool
1	0.3	0.3	0.32	0.32
2	80.3	80.08	80.25	80.25
3	301.7	301.19	301.67	301.67
4	116.4	116.01	116.41	116.41
5	24.2	24.06	24.16	24.16

Em todos os casos de estudo apresentados, os valores obtidos estão bem próximos ou iguais aos valores teóricos, assim como os apresentados por Del Savio (2004), o que determina a eficácia do elemento de ligação implementado. Além disso, é nítido afirmar que os valores apresentados, mesmo que bem próximos, acomodam melhor a influência dos efeitos das ligações semirrígidas do que os apresentados por Chan e Chui (2000).

5.1.2. Pórtico simples - Steenhuis *et al.* (1994) e Brito (2001)

Nesta subseção é apresentado o estudo realizado no trabalho de Steenhuis *et al.* (1994), o qual apresenta resultados experimentais do comportamento da ligação semirrígida estudada. Os valores são também comparados aos fornecidos por Del Savio (2004) e os encontrados no trabalho de Brito (2001), o qual propôs um modelo simplificado para simular as ligações semirrígidas em uma análise computacional no software ANSYS, a partir de uma mola translacional ligando os elementos de viga e coluna simulando a rotação na conexão.

A análise tem como objetivo ilustrar as deformações e forças internas considerando o efeito das ligações semirrígidas em uma estrutura não contraventada. O pórtico é composto por vigas e colunas de perfil IPE360, o qual possui um comprimento total de 6 metros e 4 metros de altura. A estrutura está ainda submetida a uma carga distribuída uniforme de 40 kN na viga superior e uma carga pontual horizontal de 25 kN no ponto superior da primeira coluna.

O exemplo também ilustra o caso de ligações semirrígidas que possuem o comportamento *momento x rotação* definido por uma constante de rigidez. Foram realizadas quatro análises, a cada uma é definida por um valor de rigidez diferente. As análises adotaram uma rigidez secante, que é representada como metade da rigidez tangente. As rigidezes tangentes analisadas foram: 35 kNm/rad, 60 kNm/rad, 130 kNm/rad e um valor numérico essencialmente grande para ilustrar o caso de uma ligação rígida.

Para o exemplo em questão, o modelo foi criado no FTOOL (Figura 26) e a viga foi discretizada em dois elementos finitos, enquanto que as colunas são representadas por apenas um elemento finito. Os resultados obtidos na análise, e nos demais trabalhos mencionados, estão descritos nas Tabela 9 a Tabela 11, seguidos de alguns comentários acerca dos valores.

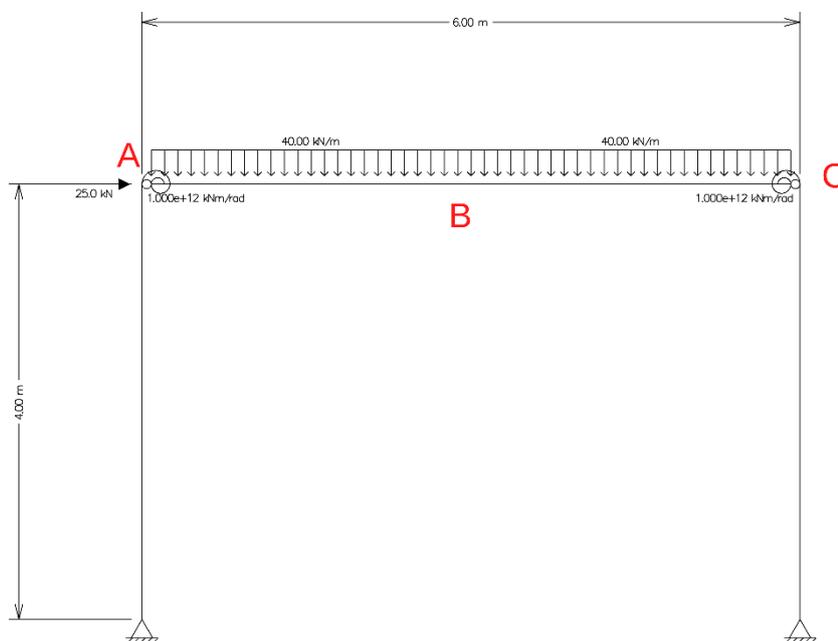


Figura 26: Pórtico simples (Steenhuis *et al.* (1994) - modelo criado no ambiente FTOOL.

Tabela 9: Momento fletor no Nó A em cada caso.

Nó A							
Caso	Steenhuis <i>et al.</i> (1994)	Brito (2001)	Del Savio (2004)	FTOOL	Brito (2001)	Del Savio (2004)	FTOOL
35	6.7	7.02	7.63	7.63	4.78%	13.88%	13.88%
60	15.7	16.96	16.02	16.02	8.03%	2.04%	2.04%
130	24.2	27.03	24.17	24.17	11.69%	0.12%	0.12%
∞	33	N/A	32.95	32.95	N/A	0.15%	0.15%

Tabela 10: Momento fletor no Nó B em cada caso.

Nó B							
Caso	Steenhuis <i>et al.</i> (1994)	Brito (2001)	Del Savio (2004)	FTOOL	Brito (2001)	Del Savio (2004)	FTOOL
35	123,2	126,15	122,37	122,37	2,39%	0,67%	0,67%
60	114,2	116,21	113,97	113,97	1,76%	0,20%	0,20%
130	105,7	106,14	105,83	105,83	0,42%	0,12%	0,12%
∞	96,9	0	97,05	97,05	N/A	0,15%	0,15%

Tabela 11: Momento fletor no Nó C em cada caso.

Nó C							
Caso	Steenhuis <i>et al.</i> (1994)	Brito (2001)	Del Savio (2004)	FTOOL	Brito (2001)	Del Savio (2004)	FTOOL
35	106,7	107,02	107,63	107,63	0,30%	0,87%	0,87%
60	115,7	116,96	116,03	116,03	1,09%	0,29%	0,29%
130	124,2	127,03	124,17	124,17	2,28%	0,02%	0,02%
∞	133	0	132,95	132,95	N/A	0,04%	0,04%

Novamente, os resultados demonstram a convergência com os resultados apresentados no trabalho de Del Savio (2004), iguais em todos os casos de análise. Além disso, estão bem próximos aos valores experimentais fornecidos por Steenhuis (1994) e melhores que os resultados de Brito (2001).

A mesma análise pode ser estendida para os deslocamentos horizontais, ilustrados na Tabela 12 e o erro percentual relativo aos valores fornecidos por Steenhuis *et al.* (1994) na Tabela 13.

Tabela 12: Deslocamentos horizontais do pavimento.

Caso	Deslocamentos (mm)							
	Steenhuis <i>et al.</i> (1994)		Brito (2001)		Del Savio (2004)		FTOOL	
	Dh	dv	dh	dv	dh	dv	dh	dv
35	25.40	12,00	22.26	11.04	25.53	12.79	25.53	12.79
60	20.30	10,80	17.45	9.90	20.78	11.65	20.78	11.65
130	16.60	9,70	13.84	8.74	17.19	10.55	17.19	10.55
∞	13.60	8.80	N/A	N/A	14.12	9.37	14.12	9.37

Tabela 13: Erro percentual em relação a Steenhuis *et al.* (1994).

Caso	Erro (%)							
	Steenhuis <i>et al.</i> (1994)		Brito (2001)		Del Savio (2004)		FTOOL	
	Dh	dv	dh	dv	dh	dv	dh	dv
35	0.00%	0.00%	12.36%	8.00%	0.51%	6.58%	0.51%	6.58%
60	0.00%	0.00%	14.04%	8.33%	2.36%	7.87%	2.36%	7.87%
130	0.00%	0.00%	16.63%	9.90%	3.55%	8.76%	3.55%	8.76%
∞	0.00%	0.00%	N/A	N/A	3.82%	6.48%	3.82%	6.48%

5.1.3. Vigas de Vierendeel - Del Savio *et al.* (2005)

O caso de estudo foi proposto em um trabalho realizado por Del Savio *et al.* (2005), e se resume na análise de vigas de Vierendeel considerando o efeito das ligações semirrígidas em algumas hipóteses de estudo, as quais consideram diferentes configurações de valores de rigidez para as ligações.

A viga de Vierendeel apresenta uma alternativa em relação a outros sistemas de vigas, como maiores resistências a flexão e compressão, eliminando a necessidade de vigas diagonais. Dentre os casos de análise elaborados por Del Savio *et al.* (2005), as ligações foram simuladas como perfeitamente rígidas, informando um valor numérico suficiente grande de rigidez, idealmente rotuladas, com rigidez nula, e o comportamento intermediário de ligações semirrígidas. Para esse exemplo de estudo, Del Savio *et al.* (2005) fez uso da versão FTOOL/SRC (Del Savio, 2004), utilizando o elemento de ligação revisitado e proposto na implementação deste trabalho.

A Figura 27 ilustra o modelo utilizado na análise, o qual consiste de uma estrutura com 12 metros de comprimento, divididos em 4 vãos de 3 metros cada, e uma altura de 1 metro. As vigas estão submetidas a 4 diferentes cargas pontuais de 10 kN (P_1), 20 kN (P_2), 30 kN (P_3) e 35 kN (P_4) que estão respectivamente aplicadas aos nós 8, 9, 4 e 3. O motivo dessa configuração escolhida por Del Savio *et al.* (2005) foi de gerar um efeito não linear geométrico na estrutura, além de sobrecarregar o elemento 12, o qual será o principal alvo da análise.

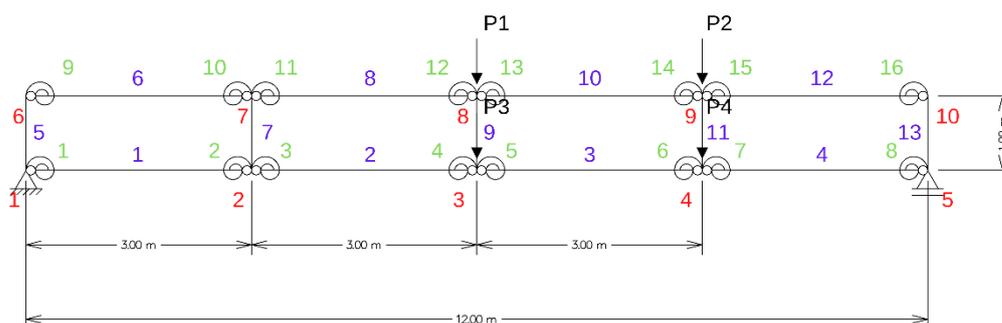


Figura 27: Vigas de Viendeel (Del Savio *et al.*, 2005) - modelo de análise no ambiente FTOOL.

Na Tabela 14 apresenta as propriedades geométricas estabelecidas para o exemplo, na qual as colunas utilizam o perfil IPE240 enquanto que as vigas utilizam o perfil HEB240.

Tabela 14: Valores utilizados para as seções em cada membros.

Membro	Seção	d	b (mm)	t_w (mm)	t_f (mm)	A (mm ²)	I (mm ⁴)
1	IPE240	240	120	6	10	3.70E+03	3.70E+07
2	IPE240	240	120	6	10	3.70E+03	3.70E+07
3	IPE240	240	120	6	10	3.70E+03	3.70E+07
4	IPE240	240	120	6	10	3.70E+03	3.70E+07
5	HEB240	240	240	10	17	1.00E+04	1.10E+08
6	IPE240	240	120	6	10	3.70E+03	3.70E+07
7	HEB240	240	240	10	17	1.00E+04	1.10E+08
8	IPE240	240	120	6	10	3.70E+03	3.70E+07
9	HEB240	240	240	10	17	1.00E+04	1.10E+08
10	IPE240	240	120	6	10	3.70E+03	3.70E+07
11	HEB240	240	240	10	17	1.00E+04	1.10E+08
12	IPE240	240	120	6	10	3.70E+03	3.70E+07
13	HEB240	240	240	10	17	1.00E+04	1.10E+08

A partir desse modelo, foram criados 5 cenários os quais estabelecem os casos de estudo. Cada um desses casos constitui uma configuração de valores de rijezas.

1. Todas as ligações apresentam um comportamento rígido, e um valor numericamente grande foi considerado para simbolizar a rigidez ($1.0e+12$ kNm/rad)
2. Configuração rotulada mantendo a consistência.
3. Uma combinação do primeiro com o segundo caso, no qual as ligações rotuladas do segundo caso foram substituídas por ligações semirrígidas como rigidez constante de 6000 kNm/rad.
4. Uma combinação do primeiro com o segundo caso, no qual as ligações rígidas foram substituídas por ligações semirrígidas com rigidez constante de 6000 kNm/rad.
5. Todas as ligações foram consideradas semirrígidas com rigidez constante de 6000 kNm/rad.

Tabela 15 são apresentados os valores de rigidez utilizados em cada uma das ligações, de acordo com a configuração apresentada pela Figura 27. Já as colunas intitulam cada um dos casos de estudo realizado.

Tabela 15: Valores de cada ligação em cada caso de análise proposto por Del Savio et al. (2005).

Ligação	Rígido	Rotulado	Semirrígido (parcial)	Semirrígido (rotulado)	Semirrígido
1	1.00E+12	0	6.00E+03	0	6.00E+03
2	1.00E+12	0	6.00E+03	0	6.00E+03
3	1.00E+12	0	6.00E+03	0	6.00E+03
4	1.00E+12	1.00E+12	1.00E+12	6.00E+03	6.00E+03
5	1.00E+12	1.00E+12	1.00E+12	6.00E+03	6.00E+03
6	1.00E+12	0	6.00E+03	0	6.00E+03
7	1.00E+12	0	6.00E+03	0	6.00E+03
8	1.00E+12	0	6.00E+03	0	6.00E+03
9	1.00E+12	0	6.00E+03	0	6.00E+03
10	1.00E+12	1.00E+12	1.00E+12	6.00E+03	6.00E+03
11	1.00E+12	0	6.00E+03	0	6.00E+03
12	1.00E+12	0	6.00E+03	0	6.00E+03
13	1.00E+12	0	6.00E+03	0	6.00E+03
14	1.00E+12	0	6.00E+03	0	6.00E+03
15	1.00E+12	1.00E+12	1.00E+12	6.00E+03	6.00E+03
16	1.00E+12	0	6.00E+03	0	6.00E+03

Já na Tabela 16 são informados os valores obtidos para os deslocamentos do nó 3 em cada um dos casos de análise, enquanto que a Tabela 17 contém os valores das forças internas presentes no elemento 12 estressado pela configuração utilizada. Em seguida são realizadas breves considerações em respeito aos resultados obtidos comparados com os fornecidos pelo trabalho de Del Savio *et al.* (2005).

Tabela 16: Deslocamentos/rotações comparados com Del Savio *et al.* (2005).

Autor	Deslocamento /Rotação	Rígido	Rotulado	Semirrígido (parcial)	Semirrígido (rotulado)	Semirrígido
Del Savio et al. (2005)	dx (mm)	0.7939	0.4132	0.7301	0.4132	0.8084
	dy (mm)	-18.72	-92.4	-33.3	-198.5	-45.15
	rz (rad)	-0.0003	-0.001	-0.0004	-0.001	-0.0003
FTOOL	dx (mm)	0.7933	0.4131	0.7291	0.4131	0.808
	dy (mm)	-18.6	-92.65	-33.14	-197.7	-45.04
	rz (rad)	-0.0003	-0.001	-0.0004	-0.001	-0.0003

Tabela 17: Cargas internas comparados com Del Savio (2005).

	Forças Interna	Rígido	Rotulado	Semirrígido (parcial)	Semirrígido (Rotulado)	Semirrígido
Del Savio et al. (2005)	N9	-86.8	0	-72	0	-88.2
	N10	-86.8	0	-72	0	-88.2
	Q9	-30	-60	-38.1	-60	-30
	Q10	-30	-60	-38.1	-60	-30
	M9	46.6	180	74.3	180	45.9
	M10	-43.4	0	-40.1	0	-44.1
FTOOL	N9	-86.8	0	-71.8	0	-88.2
	N10	-86.8	0	-71.8	0	-88.2
	Q9	-30	-60	-38.2	-60	-30
	Q10	-30	-60	-38.2	-60	-30
	M9	46.6	180	74.5	180	45.9
	M10	-43.4	0	-40.1	0	-44.1

* N e Q representam as cargas axiais e cisalhantes respectivamente (kN) enquanto que M os momentos fletores (kN.m).

Como esperado, uma vez que em ambas as análises consideram o mesmo elemento de ligação, os valores obtidos são praticamente os mesmos,

evidenciados tanto pelos deslocamentos medidos quanto pelas forças internas, novamente ratificando a boa convergência em análises lineares.

5.2. Análise não-linear e de modos de flambagem

Nesta seção são apresentados alguns estudos de casos que consideram as ligações semirrígidas em análises não lineares. Esses são encontrados em trabalhos presentes na literatura. É realizada também uma análise dos modos de flambagem de um pórtico com ligações semirrígidas, a partir da implementação realizada no FTOOL/FRAMOOOP por Rangel e Martha (2020).

O objetivo acerca dos estudos apresentados é a validação da representação do comportamento não linear físico das ligações semirrígidas para o elemento de ligação proposto na presente implementação. Além disso, os resultados apresentados nessa sessão garantem a eficiência e convergência dos métodos implementados por Rangel (2019), tão como as modificações realizadas para considerar a adição da não linearidade física das ligações na solução incremental-iterativa.

Inicialmente é apresentado o caso de uma análise não linear geométrica, considerando uma ligação semirrígida linear, presente no trabalho de Mondkar e Powell (1977). Em seguida são apresentados os demais casos considerando tanto a não linearidade geométrica quanto a não linearidade física da ligação semirrígida, como nos trabalhos Chan e Chui (2000), Keulen et al. (2003), Nguyen e Kim (2016), Stelmack et al. (1986), e o pórtico de calibração proposto por Vogel (1985). Também foi realizada uma análise qualitativa do comportamento estrutural considerando os modos de flambagem e a influência das ligações (comportamento linear), e por fim, a análise limite de uma viga hiperestática proposta por Menezes (1990), a qual as ligações semirrígidas foram inseridas de forma a simularem o comportamento de rótulas plásticas formadas nas seções transversais da viga.

Vale ressaltar que em todos os casos de análise não linear, o Método do Controle de Carga foi utilizado, com incremento constante e iteração padrão. A tolerância considerada foi de 1×10^{-5} e o incremento era controlado ao longo do processo de análise não linear, sendo refinado quando necessário até a convergência da solução.

5.2.1. Viga com ligações lineares - Mondkar e Powell (1977)

Esse caso de estudo representa uma viga com suas extremidades engastadas, na qual a conexão com o engaste é representada por uma ligação semirrígida com comportamento linear elástico. Nesse estudo é considerada na análise, os efeitos secundários em uma análise não linear geométrica. O objetivo nesse exemplo de estudo, é de validar a consideração do comportamento linear de uma determinada ligação em uma análise não linear, a qual a matriz de rigidez tangente é construída a partir de um comportamento constate da ligação em cada etapa de solução.

A Figura 28 ilustra o modelo estrutural investigado por Mondkar e Powell (1977). O elemento estrutural apresenta um módulo de elasticidade igual a 207 GPa, com um comprimento total de 0,508 m, sob uma carga pontual no centro do vão. A viga possui uma seção transversal retangular, com dimensões iguais a 2.54 cm e 0.3175 cm de comprimento e altura respectivamente. Em cada uma das extremidades é inserida uma ligação semirrígida com o mesmo valor de rigidez.

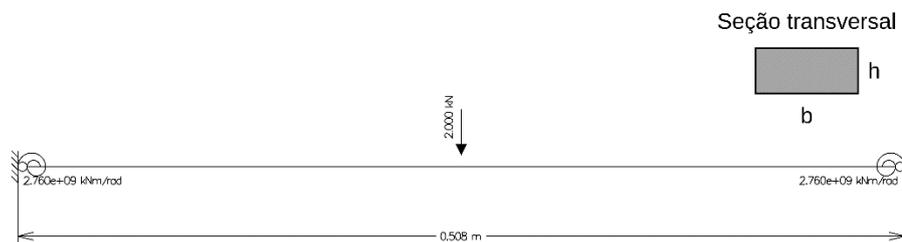


Figura 28: Viga com ligações lineares (Mondkar e Powell, 1977) - elemento proposto para análise.

O modelo foi discretizado em 10 elementos para a análise. A análise foi realizada considerando os efeitos de segunda ordem, para dois casos distintos de rigidez de ligação: uma considerando um valor elevado para a rigidez da ligação ($10^{10}E/L$), simulando uma ligação rígida, e outro caso para um valor de rigidez igual a $10 E/L$. Em ambas as análises o elemento foi considerado com o comportamento linear e as rizezas inseridas diretamente.

A carga P aplicada no modelo foi variada de 0 a 2 kN e medidos os valores dos deslocamentos da flecha no vão central. Os resultados obtidos foram comparados em forma gráfica com os fornecidos por Chui e Chan (1996), como ilustra a Figura 29.

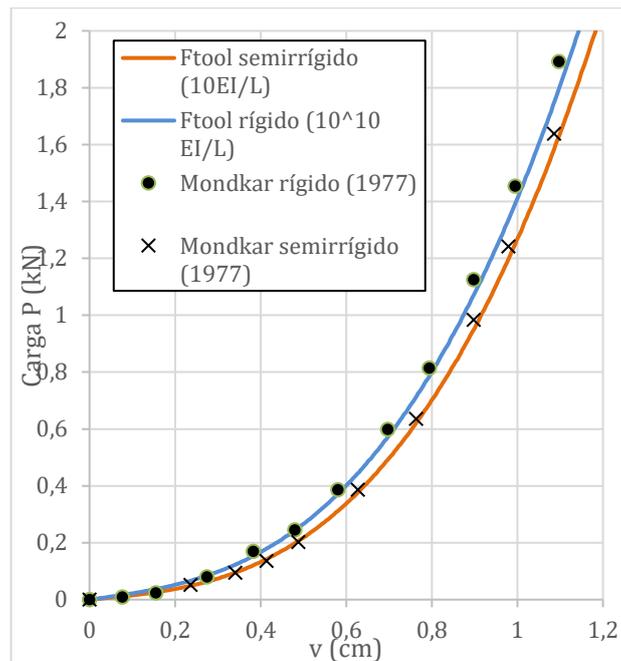


Figura 29: Viga com ligações semirrígidas (Mondkar ,1977) - curva carga-flecha.

A partir da análise do gráfico apresentado, é possível concluir que em ambos os casos os valores demonstraram boa precisão, resolvendo o problema proposto de forma satisfatória.

5.2.2. Pórtico de dois andares - Chan e Chui (2000)

Este exemplo é baseado em um estudo experimental considerado por Chan e Chui (2000), e trata-se de um pórtico de dois andares com ligações semirrígidas com comportamento não linear. Foram realizados dois casos de estudos diferentes, em que em cada um é considerada uma condição de apoio diferente: engastado e rotulado

A estrutura possui comprimento de 6.1 m e uma altura total de 7.32 m, dividido em dois pavimentos com 3.66 m de altura cada. Foram considerados os perfis W360x72 e W310x143 para as vigas e colunas respectivamente, com um módulo de elasticidade igual a 200 GPa. As imperfeições são introduzidas por meio de forças horizontais de módulo pequeno no topo de cada coluna. A Figura 30 ilustra o modelo para a análise em cada caso, adotando apoios engastados e rotulados respectivamente.

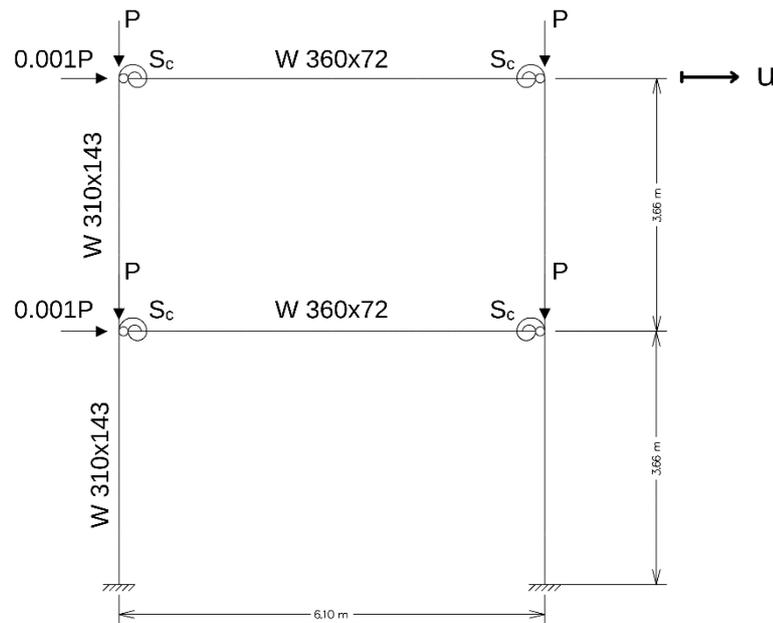


Figura 30: Pórtico de dois andares (Chan e Chui, 2000) - elementos para o caso em análise.

Para representar o comportamento não linear das ligações semirrígidas, foram utilizados os parâmetros fornecidos por Lui e Chen (1986), presentes na Tabela 1. Foi criado um *script* no MATLAB para gerar um arquivo externo .txt contendo os pares de pontos da curva *momento x rotação* (Figura 10), que foram importados diretamente no FTOOL para a tabela da ligação sem restrição para o volume de dados de entrada.

A Figura 31 e a Figura 32 ilustram os resultados obtidos na análise não linear geométrica, a qual relacionam o deslocamento u (cm) do topo da estrutura com a carga P aplicada, para os casos engastados e rotulado respectivamente. Os resultados são comparados diretamente com os apresentados por Chan e Chui (2000) para todos os casos de ligação semirrígida e o caso de uma ligação totalmente rígida.

A Tabela 18 e a Tabela 19 apresentam os valores obtidos para as cargas críticas em cada uma das ligações utilizadas na análise para o caso de suportes fixos e rotulados respectivamente. Os valores ainda são comparados com os fornecidos por Chen *et al.* (1996). É novamente observado bons resultados quando analisados os casos.

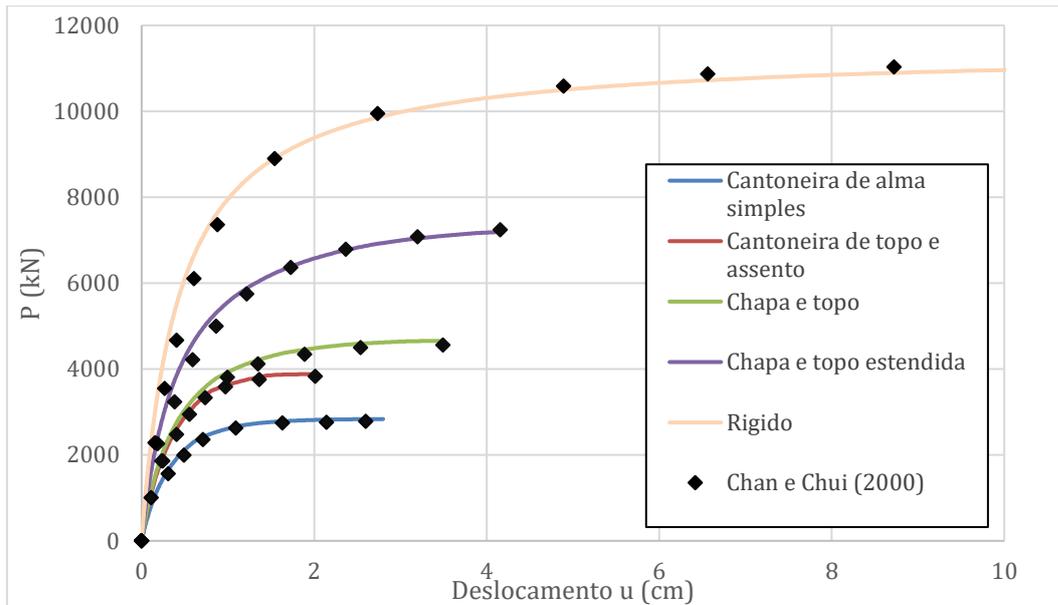


Figura 31: Pórtico de dois andares (rígido) (Chan e Chui ,2000) - curva carga-deslocamento u.

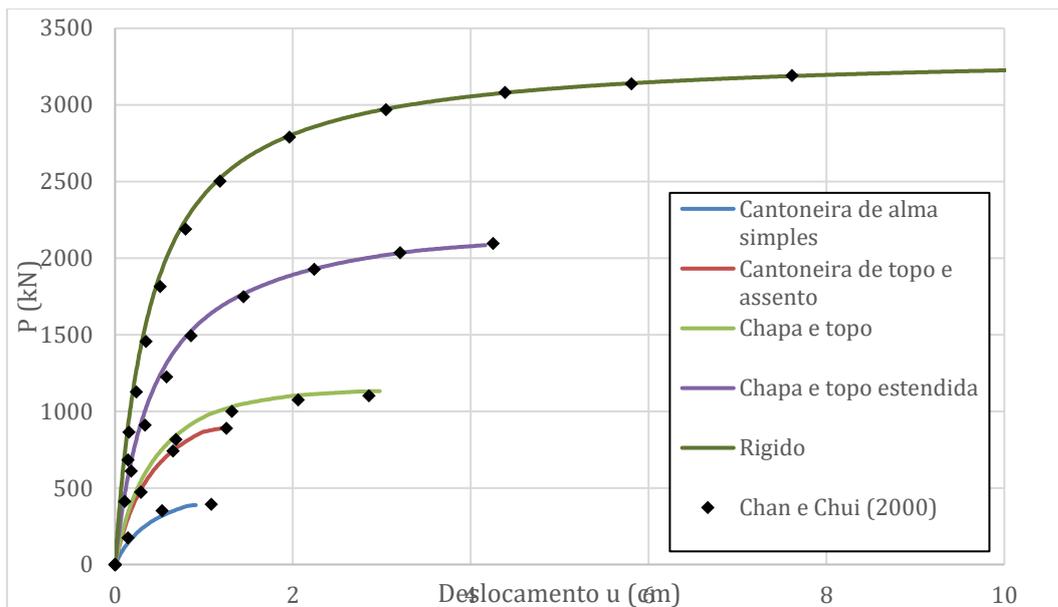


Figura 32: Pórtico de dois andares (rotulado) (Chan e Chui ,2000) - curva carga-deslocamento u.

Diretamente através da análise dos gráficos acima, é possível identificar que o tipo de apoio é fundamental para o comportamento da estrutura. Sendo que a consideração de ligações mais flexíveis, reduzem consideravelmente a carga crítica da estrutura, e o caso contrário para ligações mais rígidas, que elevam a carga crítica suportada pela estrutura.

É possível também verificar a boa acomodação dos valores apresentados na análise com os fornecidos por Chan e Chui (2000), apresentando uma

convergência satisfatória para todos os tipos de ligação em todos os casos de análise considerados.

Tabela 18: Cargas críticas comparadas com Chan e Chui (2000) – Suporte fixo

Cargas Críticas			
Ligação	Chen et al. (1996)	Chan e Chui (2000)	FTOOL
A	2802.4	2838.000	2836.448
B	3825.5	3892.200	3885.367
C	4581.7	4617.300	4655.580
D	7228.4	7330.700	7191.716
Rígida	11254.0	11387.500	11370.000

Tabela 19: Cargas críticas comparadas com Chan e Chui (2000) – Suporte rotulado

Cargas Críticas			
Ligação	Chen et al. (1996)	Chan e Chui (2000)	FTOOL
A	400.3	395.900	388.000
B	911.9	907.400	896.586
C	1076.5	1107.600	1132.253
D	2112.9	2121.800	2120.321
Rígida	3225.0	3318.400	3360.954

5.2.3. Pórtico semirrígido simples – Keulen *et al.* (2003)

Nessa seção é apresentado um pórtico simples com ligações semirrígidas com comportamento não linear físico, um caso de estudo feito por Keulen *et al.* (2003) e também analisado no trabalho de Del Savio (2004). O objetivo é validar a implementação com as referências apresentadas por Keulen *et al.* (2003) e o acerto quando comparados aos valores apresentados por Del Savio (2004), o qual implementou o mesmo modelo de ligação utilizado. O caso de estudo é caracterizado pelo uso de curvas momento-rotação completas e também pela aproximação bi linear do comportamento.

O pórtico (Figura 33) apresenta 3.6 metros de altura e 7.2 metros de comprimento. Para a definição da estrutura, foi utilizado o perfil IPE360 para as vigas, e o perfil HEA260 para as colunas. As curvas que representam o comportamento das ligações semirrígidas estão representadas na Figura 34. A

ligação inserida na conexão entre vigas e colunas é representada por um comportamento característico de uma ligação com placa de extremidade ajustada aparafusada (flush endplate), como ilustrado na Figura 35.

A estrutura está submetida a cargas externas verticais pontuais F e w , sendo o módulo da carga w é igual a um sexto da carga F . A estrutura está ainda submetida a uma carga horizontal αF , que representa o carregamento imposto pela ação do vento no pórtico, além de impor as imperfeições características na análise dos efeitos de segunda ordem.

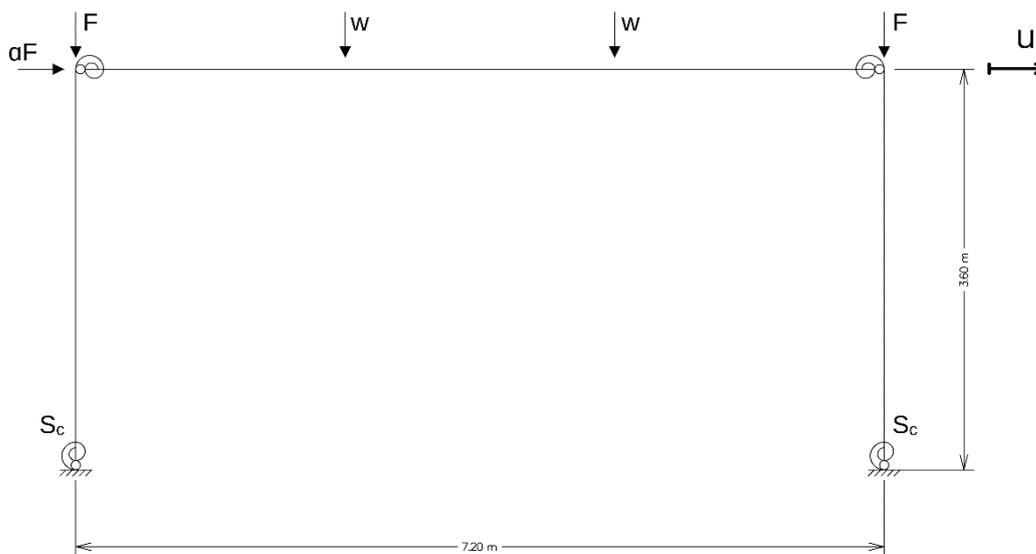


Figura 33: Pórtico semirrígido simples (Keulen et al., 2003) - modelo para conter as cargas de análise.

Nas Figura 36 até Figura 40 são apresentados os gráficos que comparam os valores obtidos no trabalho de Keulen *et al.* (2003), os apresentados por Del Savio (2004) e a referência teórica com os obtidos pelo FTOOL. Os casos apresentados referenciam a valores definidos para α , divididos em 5 casos de estudo: 0.1, 0.15, 0.2, 0.3 e 0.5. Os valores de referência foram obtidos utilizando o software ANSYS.

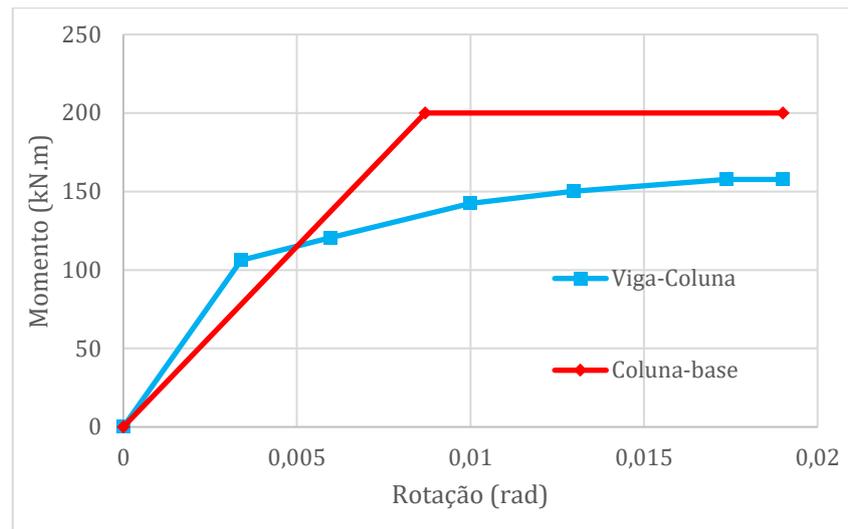


Figura 34: Pontos utilizados para ligações não lineares para o pórtico simples (Keulen et al., 2003).

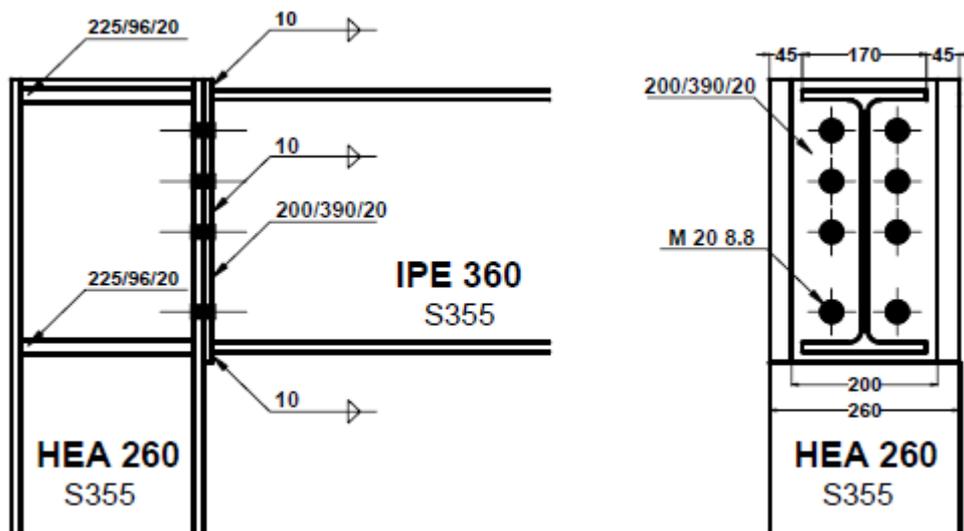


Figura 35: Modelo de ligação utilizado na análise (Keulen et al, 2003).

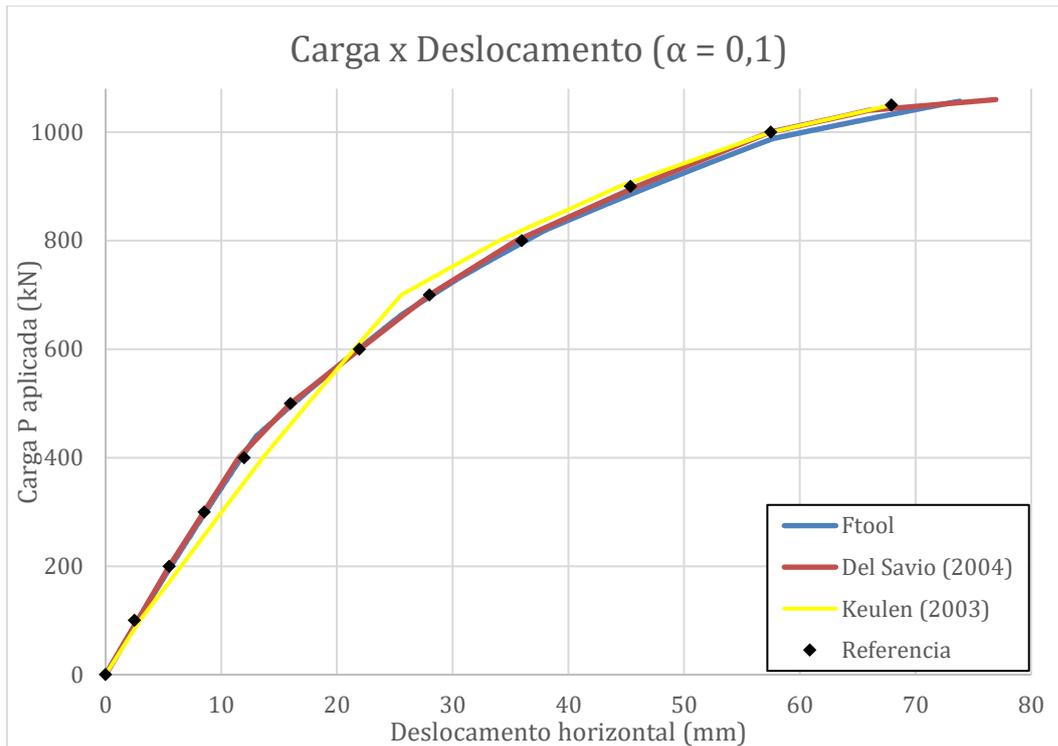


Figura 36: Pórtico semirrígido simples (Keulen et al., 2003) ($\alpha = 0.10$) - curva carga-deslocamento u.

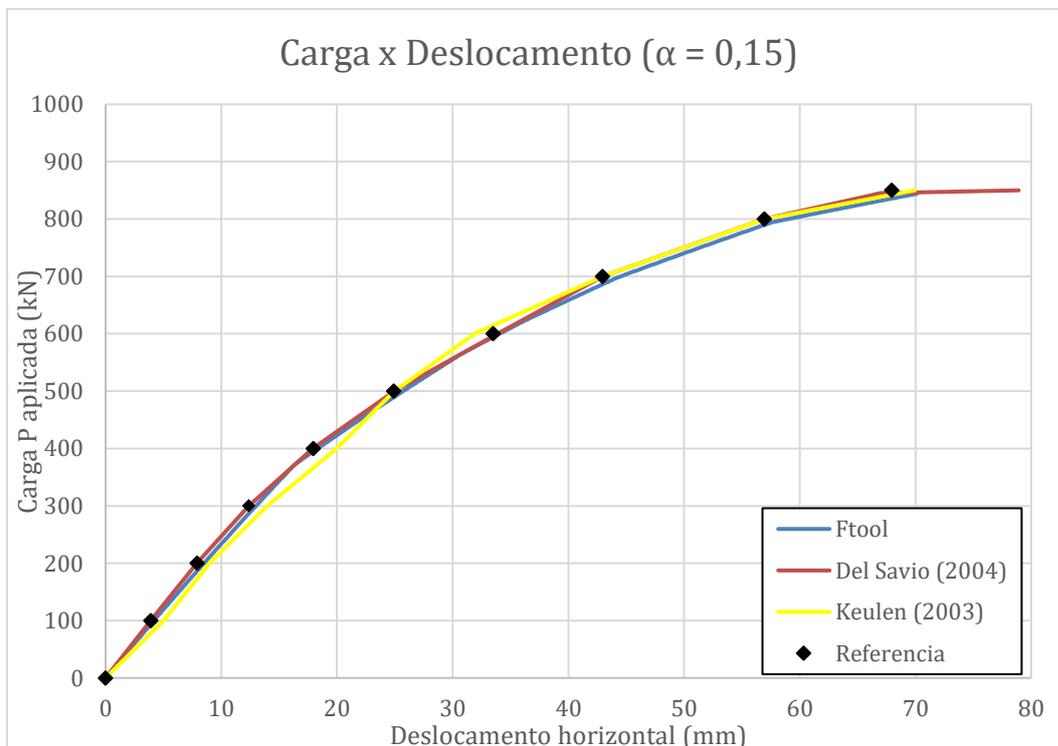


Figura 37: Pórtico semirrígido simples (Keulen et al., 2003) ($\alpha = 0.15$) - curva carga-deslocamento u.

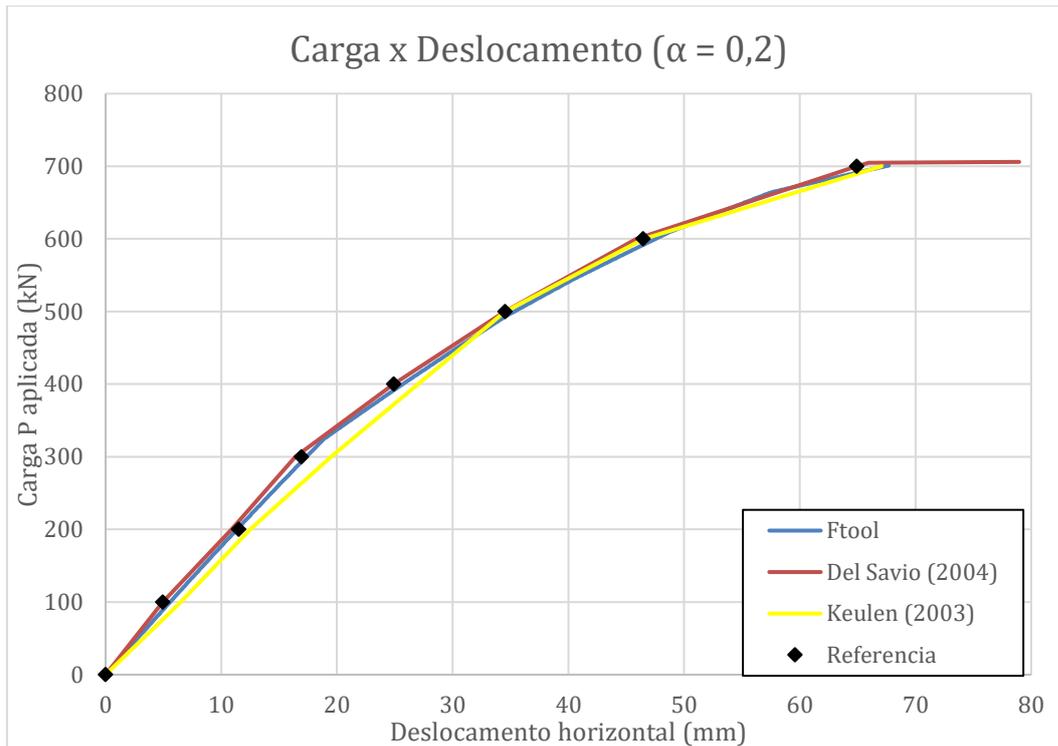


Figura 38: Pórtico semirrígido simples (Keulen et al., 2003) ($\alpha = 0.20$) - curva carga-deslocamento u.

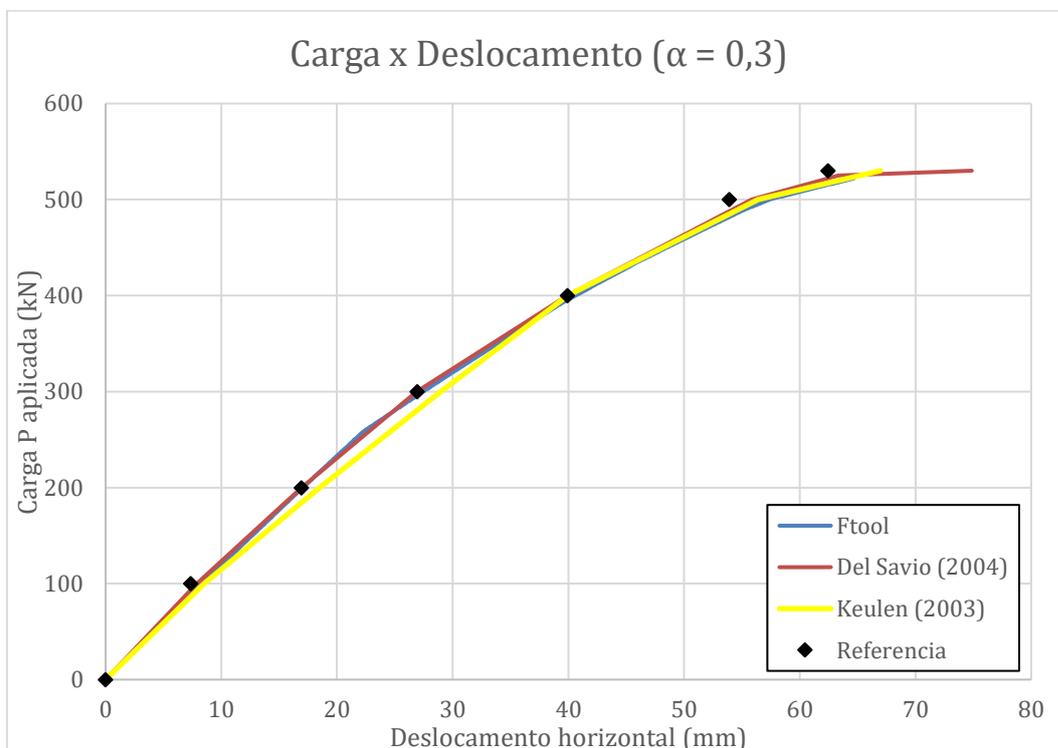


Figura 39: Pórtico semirrígido simples (Keulen et al., 2003) ($\alpha = 0.30$) - curva carga-deslocamento u.

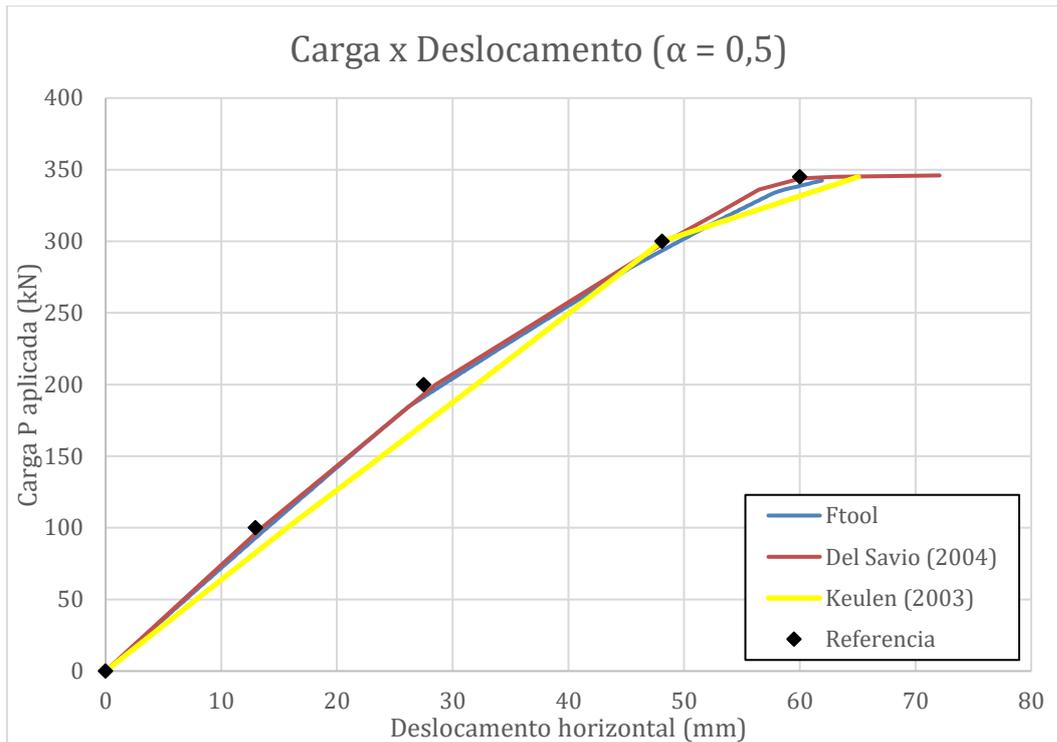


Figura 40: Pórtico semirrígido simples (Keulen et al., 2003) ($\alpha = 0.50$) - curva carga-deslocamento u.

Em todos os casos de análise (α igual a 0.1, 0.15, 0.2, 0.30 e 0.5), é possível perceber uma boa equivalência dos valores com os apresentados pela referência, e também de acordo com a implementação realizada anteriormente por Del Savio (2004) em análise não lineares. Essa boa aproximação e sintonia de valores, atesta a eficiência das formulações e implementação computacional.

5.2.4. Pórtico de dois andares - Stelmack *et al.* (1986)

O caso de estudo foi proposto por Stelmack *et al.* (1986), e por apresentar os resultados experimentais, é um exemplo muito utilizado em diversos trabalhos (Nguyen e Kim, 2014; Saritas e Koseoglu, 2015; LEMES, 2018). O pórtico refere-se a um material de aço A36 com ligações semirrígidas entre as vigas e colunas. Todos os elementos dos modelos foram construídos utilizando perfil W5x16. Cargas fixas de 10.68 kN estão presentes na viga do primeiro pavimento da estrutura, igualmente espaçadas. Na lateral dos pórticos foram aplicadas duas cargas incrementais, de valor $2P$ e P para o primeiro e segundo pavimento, respectivamente.

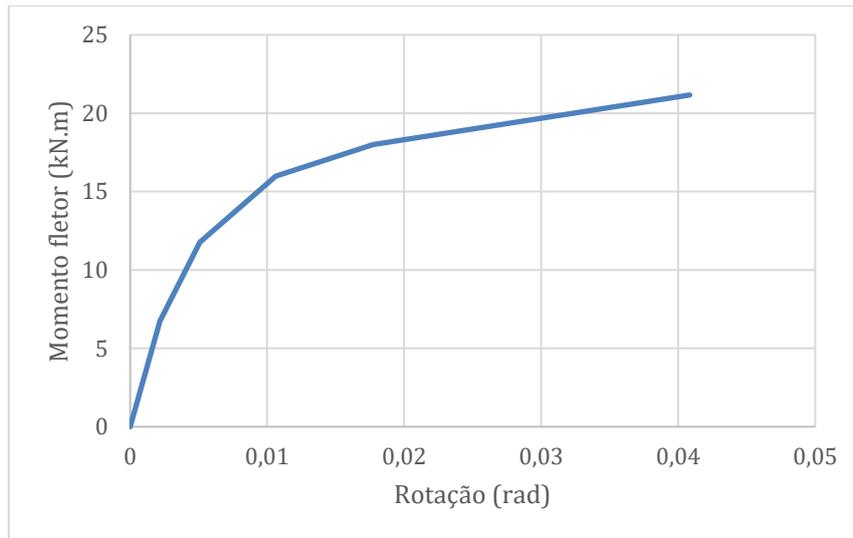


Figura 42: Pontos da curva $M \times \theta_c$ utilizados para modelar comportamento da ligação para o pórtico de dois andares.

A Figura 43 ilustra os resultados obtidos comparando com o resultado experimental fornecido por Stelmack *et al.* (1986) e os fornecidos no trabalho de Lemes (2018). Nessa plotagem é relacionado a carga P aplicada em cada incremento com o deslocamento horizontal do segundo pavimento da estrutura.

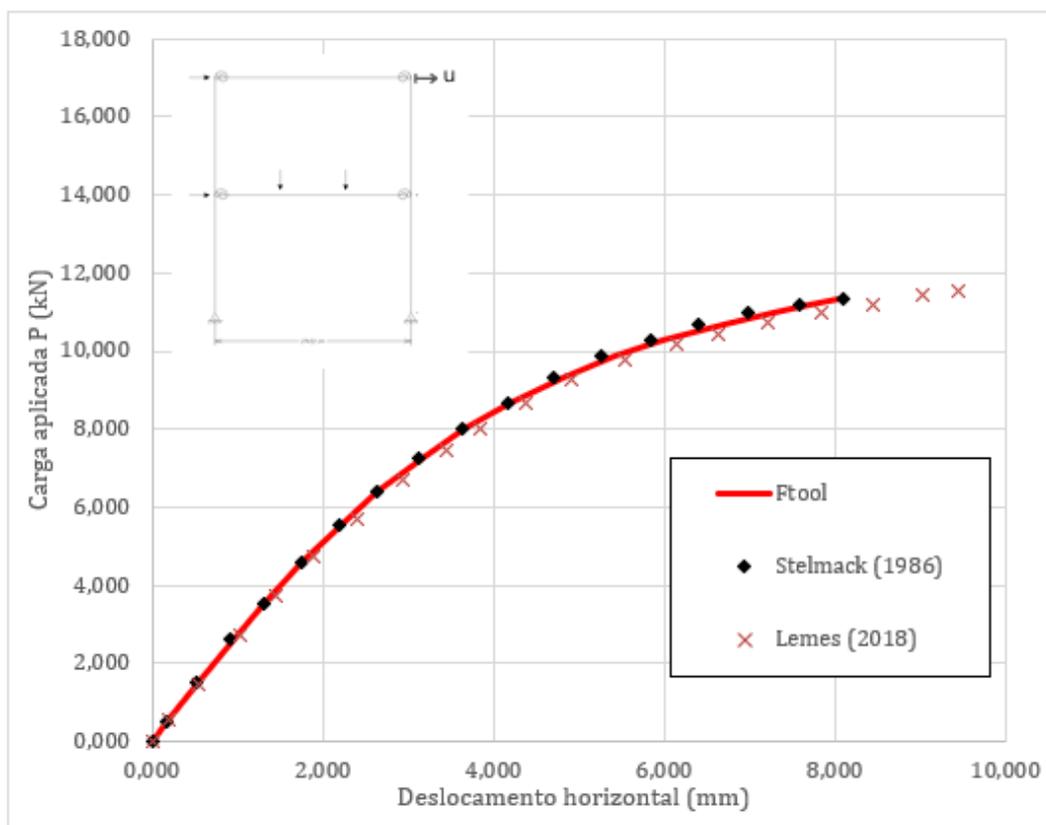


Figura 43: Pórtico de dois andares (Stelmack et al., 1986) - curva carga-deslocamento u .

Os resultados obtidos nessa seção mantiveram uma grande concordância com os valores experimentais fornecidos por Stelmack *et al.* (1986), garantindo a satisfação da implementação para o caso modelado. Os valores também apresentam uma ótima convergência quando comparados com os dados de Lemes (2018).

5.2.5. Pórtico de seis andares – Vogel (1985)

O pórtico de seis pavimentos com ligações semirrígidas proposto por Vogel é muito utilizado na literatura para servir como calibração das formulações e metodologias implementadas, utilizado em um contexto que considera os efeitos de segunda ordem e a não linearidade física da ligação.

A Figura 44 ilustra o pórtico proposto para análise, com 22.5 m de altura, divididos igualmente em 6 pavimentos, com 6 metros de vão e valor de elasticidade igual a 205 GPa. A

Tabela 20 apresenta os perfis e as dimensões utilizadas para a definição do modelo. Foram considerados os mesmos quatro tipos de ligações descritos no exemplo 5.3.2, o qual o comportamento momento-rotação está bem descrito na Figura 10. Os valores novamente foram recuperados de um arquivo .txt gerado pelo código externo no MATLAB seguindo a formulação exponencial e parâmetros fornecidos por Lui e Chen (1986).

Tabela 20: Perfis utilizados no modelo de Vogel (1985).

Perfil	d (mm)	d (mm)	t _w (mm)	t _f (mm)	k (mm)	A (mm)	I _x (mm)	I _y (mm)	Z _x (mm)
IPE240	240	120	6.2	9.8	15	39.1	3892	284	367
IPE300	300	150	7.1	9.8	15	53.8	8356	604	628
IPE330	330	160	7.5	10.7	18	62.6	11770	788	804
IPE360	360	170	8	11.5	18	72.7	16270	1043	1019
IPE400	400	180	8.6	12.7	21	84.5	23130	1318	1307
HEB160	160	160	8	13.5	15	54.3	2492	889	354
HEB200	200	200	9	15	18	78.1	5692	2003	643
HEB220	220	220	9.5	16	18	91	8091	2843	827
HEB240	240	240	10	17	21	106	11260	3923	1053
HEB260	260	260	10	17.5	24	118	14920	5135	1283

A estrutura está submetida a carregamentos distribuídos uniformemente nas vigas e cargas horizontais pontuais nas primeiras colunas, simulando o efeito do vento. O modelo foi discretizado segundo a Figura 44, na qual as vigas foram

divididas em 4 elementos finitos, enquanto que as colunas estão discretizadas em somente um elemento finito.

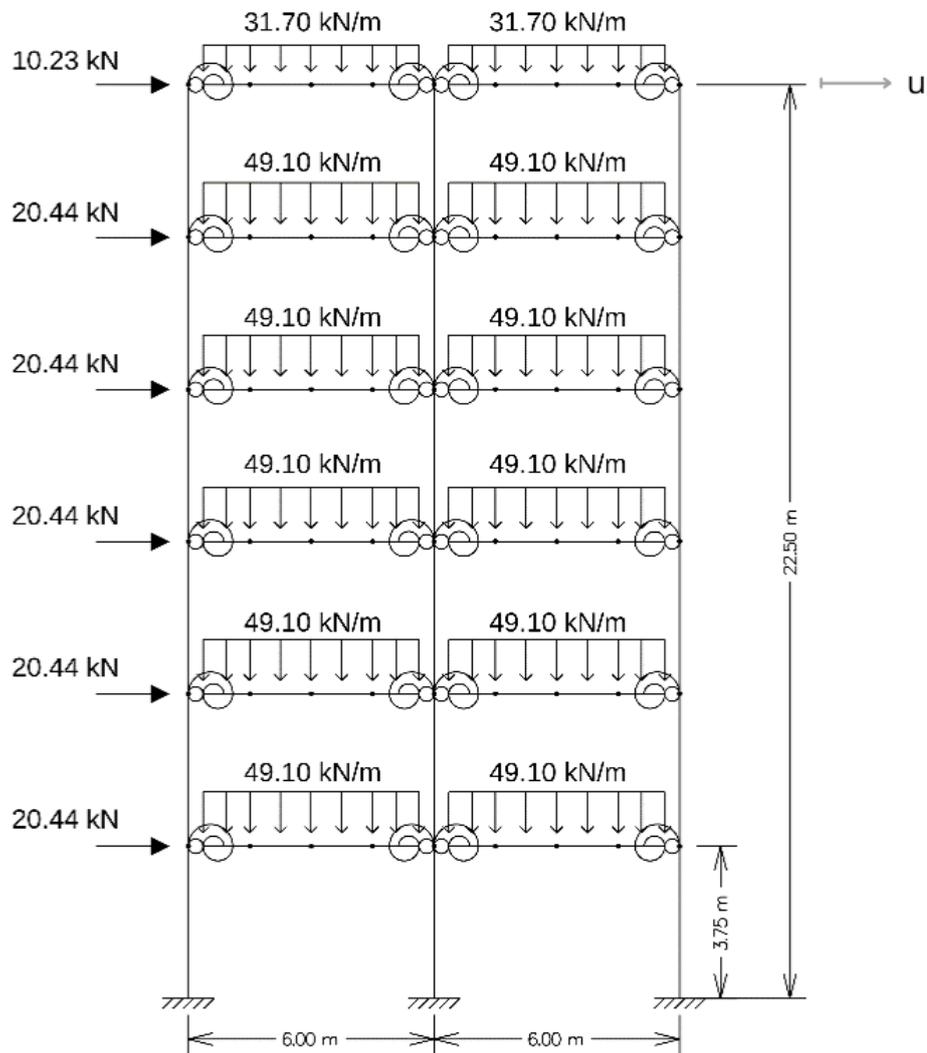


Figura 44: Pórtico de seis andares (Vogel, 1985) - modelo estrutural de calibração.

As ligações semirrígidas são inseridas em cada uma das extremidades das vigas com o comportamento idealizado para o caso atual, as demais conexões são tratadas como ligações rígidas. A Figura 45 representa as curvas que relacionam o fator de carga para cada caso incremental relacionado com o deslocamento horizontal do último pavimento para cada um dos casos de estudo na legenda. Em cada caso, os valores ainda são comparados diretamente com os obtidos por Chan e Chui (2000).

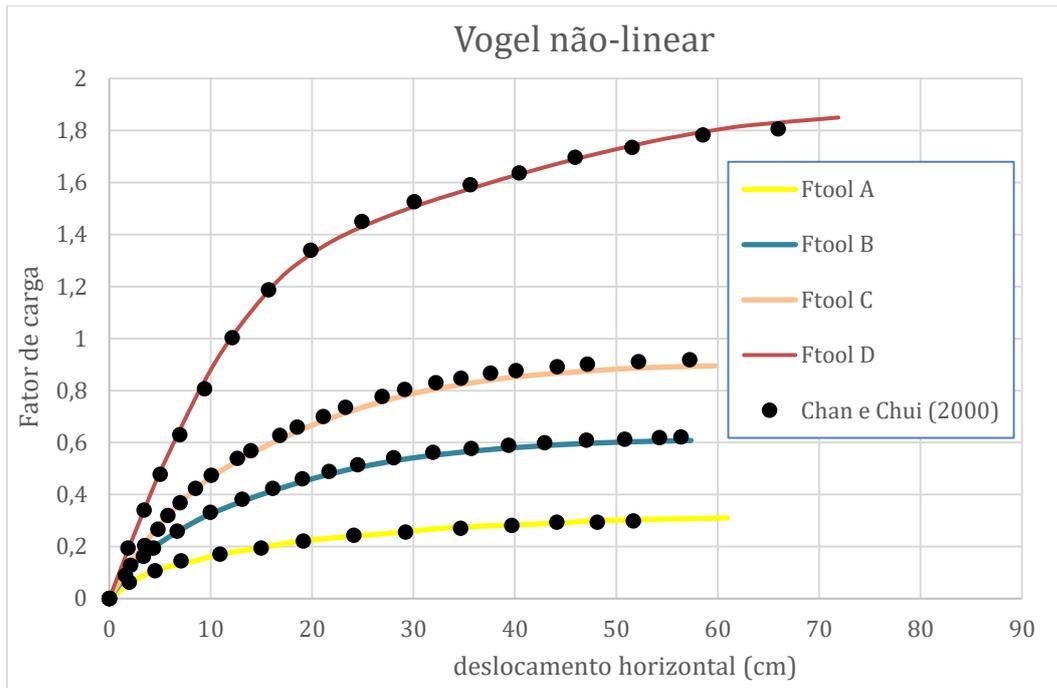


Figura 45: Pórtico de seis andares (Vogel, 1985) - curva fator de carga-deslocamento u .

Como ilustrado no gráfico acima, os resultados quando comparados aos fornecidos por Chan e Chui (2000), apresentam boa consistência e ajustamento, garantindo uma boa representação do comportamento não linear físico para o modelo de mola rotacional proposto. Além da assertividade e boa precisão dos resultados na adaptação do método de análise não linear para conter a influência do comportamento das ligações.

5.2.6. Análise dos modos de flambagem com ligações semirrígidas

É também realizada uma análise qualitativa quanto aos modos de flambagem considerando as ligações semirrígidas. Para a análise de modos de flambagem, como o problema é linearizado, um comportamento linear das ligações semirrígidas é sempre adotado. Para a análise foi considerado um pórtico com 16 metros de comprimento e 6 metros de altura, constituído de um material com 200 GPa de módulo de elasticidade.

O presente estudo consiste em utilizar a ferramenta de análise para cálculo dos modos de flambagem da estrutura. Nesse caso, são informados quantos modos devem ser considerados para o cálculo, os quais são demonstrados graficamente junto ao valor da carga crítica ligado ao modo. O objetivo é

considerar ligações semirrígidas nas conexões entre vigas e colunas, considerando um valor de rigidez linear tal que a influência possa ser visualizada nos modos de flambagem.

A Figura 46 abaixo ilustra a estrutura modelada para a análise. Foram inseridas ligações semirrígidas nas conexões entre vigas e colunas, com uma rigidez linear igual à 200 kNm/rad para simular a influência dentre os 6 modos de flambagem selecionados para o cálculo. Foi inserida uma carga vertical de 100 kN no centro do vão e outra carga horizontal de 10 kN para indicar os efeitos desestabilizadores na estrutura.

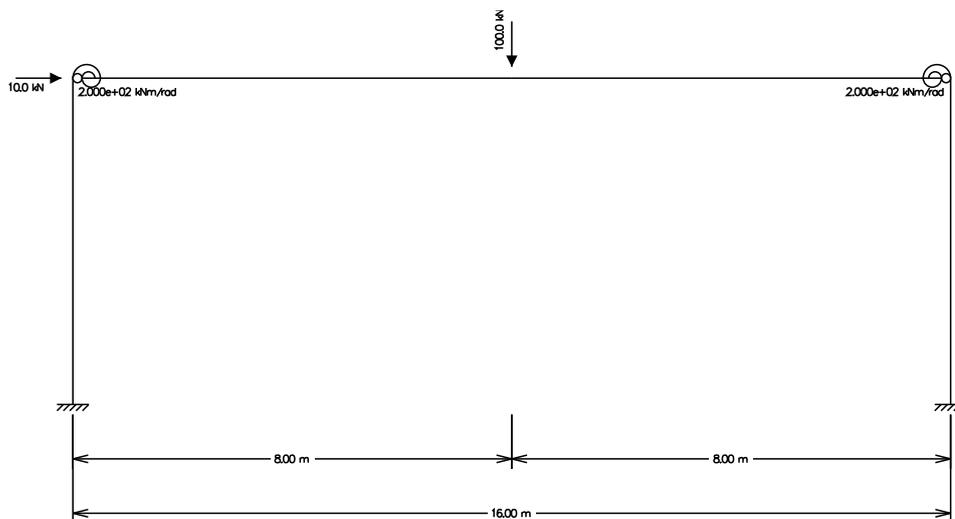


Figura 46: Modelo estrutural considerado na análise de modos de flambagem.

As Figura 47 a Figura 52 abaixo ilustram os 6 modos de flambagem, resultados da análise realizada. Em seguida a Tabela 21 indica os fatores de carga crítica relacionados a cada um dos modos apresentados.

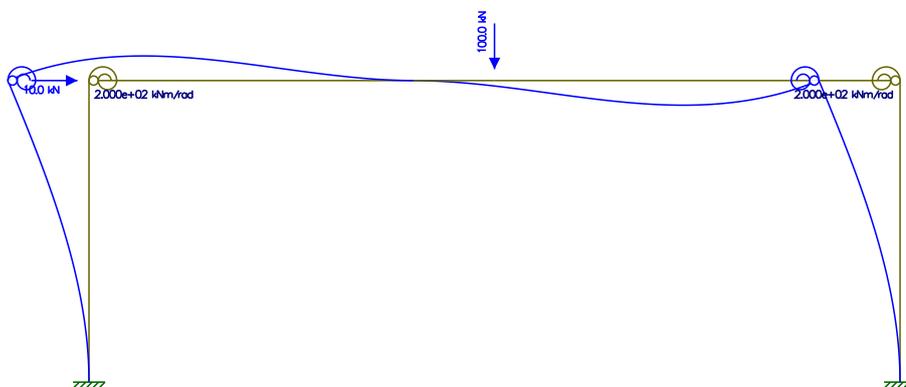


Figura 47: Modo 1 de flambagem da estrutura

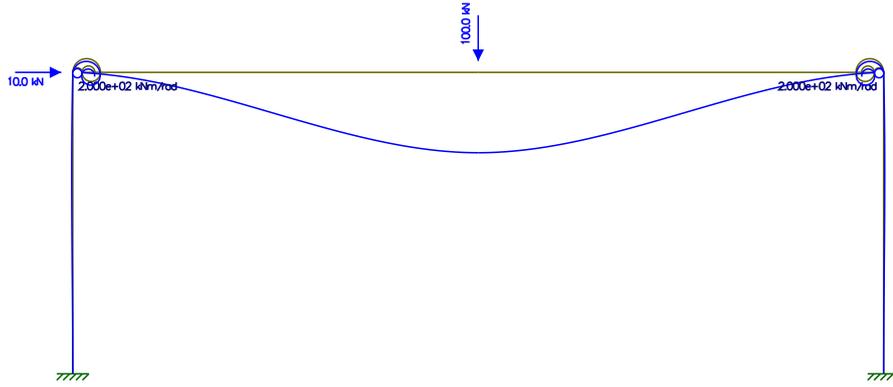


Figura 48: Modo 2 de flambagem da estrutura.

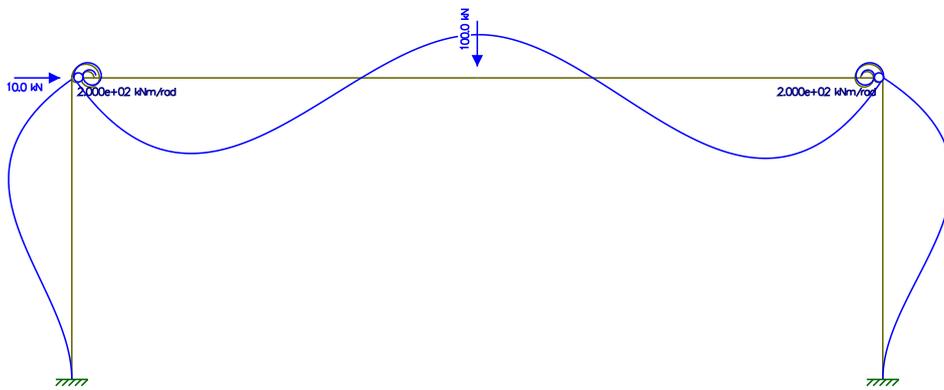


Figura 49: Modo 3 de flambagem da estrutura.

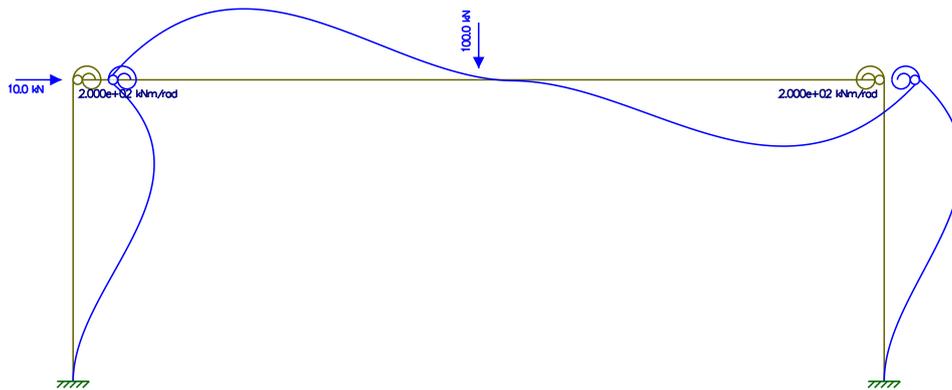


Figura 50: Modo 4 de flambagem da estrutura.

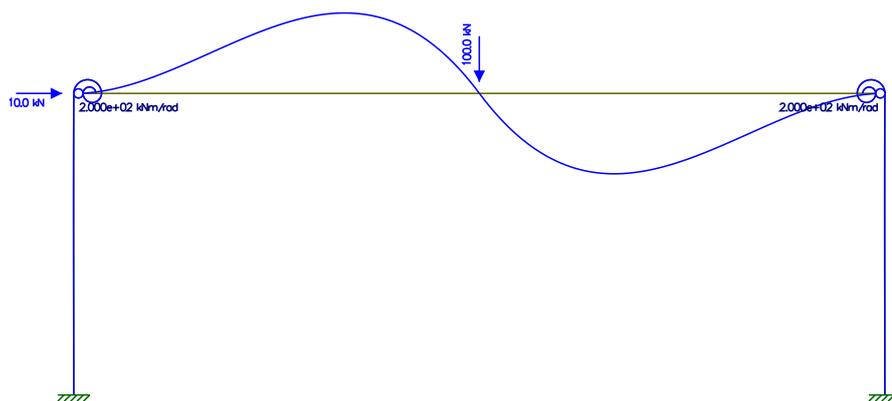


Figura 51: Modo 5 de flambagem da estrutura.

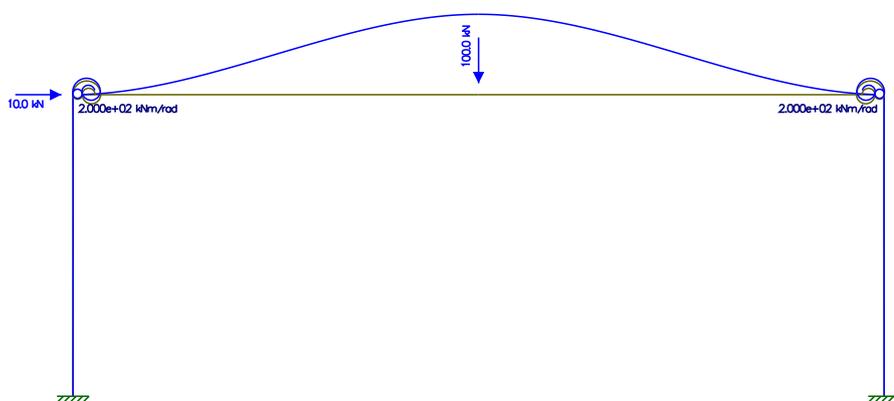


Figura 52: Modo 6 de flambagem da estrutura.

Tabela 21: Fatores de carga crítica para cada modo de flambagem.

Modo	Fator de carga crítica
1	2.75E+01
2	2.54E+02
3	3.21E+02
4	3.42E+02
5	1.20E+03
6	3.22E+03

A análise qualitativa dos modos de flambagem calculados ilustra a contribuição da flexibilidade das ligações semirrígidas no comportamento da estrutura. Além disso, observa-se a vantagem em se considerar um elemento finito isolado para as ligações. Esse efeito pode ser evidenciado pela perda da perpendicularidade dos elementos estruturais de viga e coluna, apresentando uma

rotação relativa, em resposta da flexibilidade imposta pela rigidez de entrada da ligação semirrígida, influenciando diretamente o comportamento global da estrutura.

A mesma influência pode ser vista no caso da viga de Vierendeel apresentada por Del Savio (2005) na seção 5.2.3 no estudo linear. Em uma análise qualitativa dos 3 primeiros modos de flambagem, é possível verificar o mesmo efeito analisado acima, com a influência flexibilidade da ligação semirrígida, a qual permite um certo grau de rotação entre os membros conectados. Para esse exemplo, todas as conexões entre vigas e colunas foram consideradas como semirrígidas, com uma rigidez linear igual a 300 kNm/rad.

As Figura 53 a Figura 55 ilustram a configuração das vigas para cada modo de flambagem, evidenciando a rotação relativa entre os elementos estruturais.

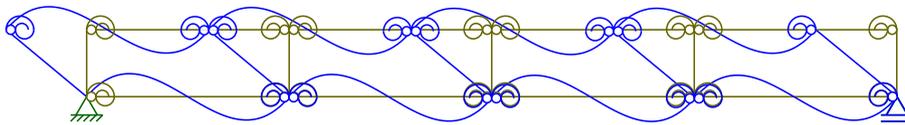


Figura 53: Modo 1 de flambagem para a viga de Vierendeel.

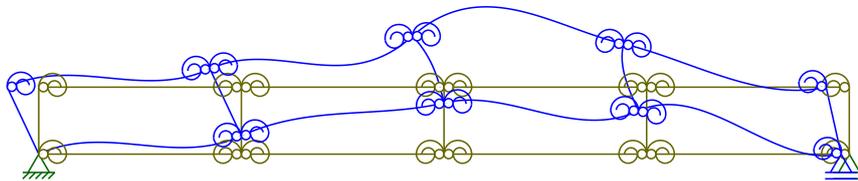


Figura 54: Modo 2 de flambagem para a viga de Vierendeel.

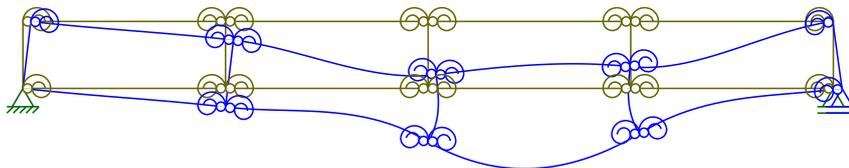


Figura 55: Modo 3 de flambagem para a viga de Vierendeel.

5.2.7. Análise limite de vigas hiperestáticas com formação de rótulas plásticas

Neste exemplo foi considerado um caso de estudo apresentado na dissertação de mestrado de Menezes (1990), o qual apresentou uma análise limite de uma viga hiperestática com a formação de rótulas plásticas. O objetivo deste estudo é a inserção de elementos de ligação semirrígidas nos pontos aos quais são formadas as rótulas plásticas, de modo a simular uma análise limite através de uma análise não linear física. Além disso, também é apresentada uma metodologia para a criação da curva *momento x rotação* baseada na plastificação da seção transversal da viga.

A Figura 56 apresenta a viga hiperestática apresentada por Menezes (1990) e utilizada na análise. A viga está engastada em uma extremidade e com um apoio de 1º gênero na outra. A viga apresenta 3 metros de comprimento, e um seção transversal retangular com 0.2 metros de altura (h) e 0.06 metros de comprimento (b). A viga apresenta um módulo de elasticidade (E) igual a 200 GPa, com tensão limite de plastificação (σ_p) igual a 250 Mpa e um comprimento característico da rótula plástica (l_p) igual a 0.1 metros. O comprimento característico da rótula plástica é um valor empírico que é proposto para obter a rotação relativa de uma ligação semirrígida a partir da curvatura da viga na seção correspondente. Dessa maneira é possível determinar os pontos da curva *momento x rotação relativa* a qual introduzem à ligação semirrígida o efeito da plastificação da seção transversal.

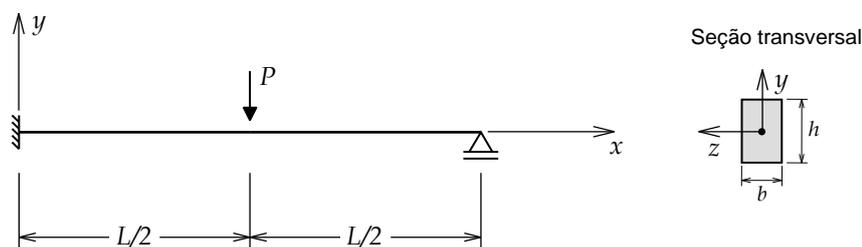


Figura 56: Viga hiperestática de seção transversal retangular.

O valor do momento limite elástico (M_e) e o momento limite plástico (M_p) podem ser obtidos pelas equações a seguir, assim como a expressão da carga limite de colapso (P_{lim}), deduzida no trabalho de Menezes (1990).

$$M_p = \frac{bh^2}{4} \sigma_p \quad (5.1)$$

$$M_p = \frac{bh^2}{6} \sigma_p \quad (5.2)$$

$$P_{lim} = \frac{3bh^2}{2L} \sigma_p \quad (5.3)$$

Um comportamento elasto-plástico perfeito é adotado para o material, tal como indica a Figura 57, que mostra a relação entre tensão normal e deformação normal.

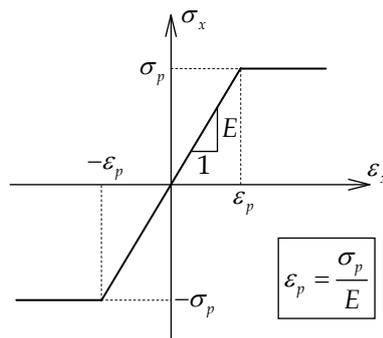


Figura 57: Relação entre tensão e deformação normal em um comportamento elasto-plástico perfeito.

A partir das expressões é definido que $M_p = 150$ kNm e $P_{lim} = 300$ kN. A Figura 58 ilustra os diagramas de momentos fletores característicos da viga hiperestática do exemplo apresentados no trabalho de Menezes (1990), tanto para o regime elástico-linear quanto para o regime plástico.

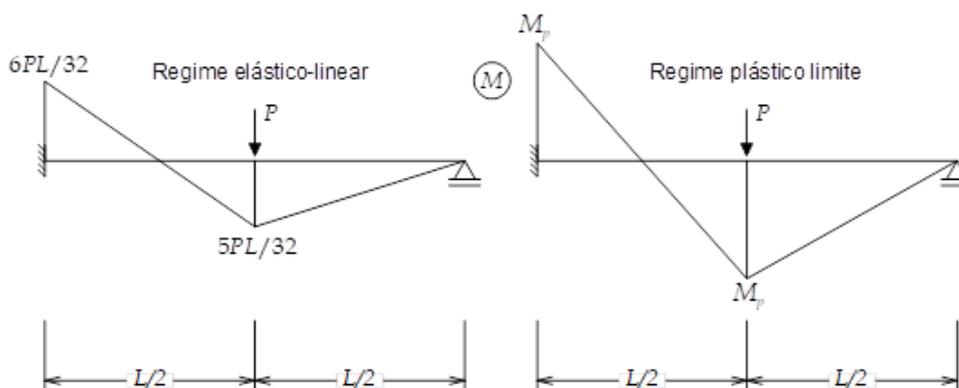


Figura 58: Diagramas de momento para o caso analisado.

A evolução da plastificação de uma seção transversal ocorre em três fases distintas: o regime elástico, o regime de transição e o regime plástico. A evolução da plastificação para uma seção retangular é mostrada na Figura 59.

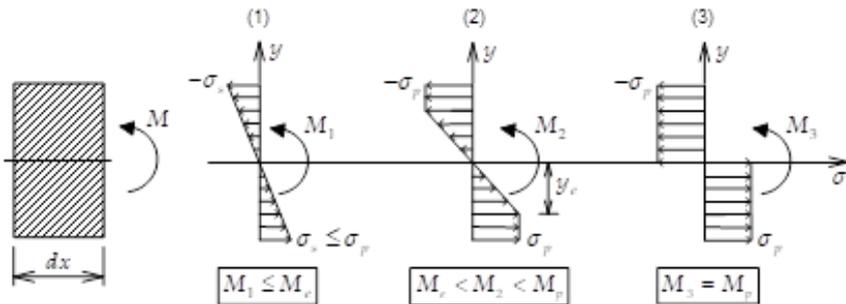


Figura 59: Evolução da plastificação da seção transversal.

A fase 1 ocorre quando o momento fletor na seção é menor ou igual à M_e , resultando em uma relação linear ao longo da seção transversal. A fase 2 representa um regime de transição, em que o momento fletor na seção se encontra entre M_e e M_p , a qual parte da seção já está em regime plástico enquanto outra parte ainda se encontra no regime elástico. Por fim a última fase representa o regime plástico, com a plastificação total da seção.

A Figura 60 apresenta as relações entre a curvatura da seção da viga ($1/\rho$), em que ρ é o raio de curvatura, com a deformação normal (ε_x) em uma fibra na posição y . Vale ressaltar que a seção permanece plana ao longo da deformação, o que possibilita relacionar a curvatura com a deformação axial da fibra, que é expressa por:

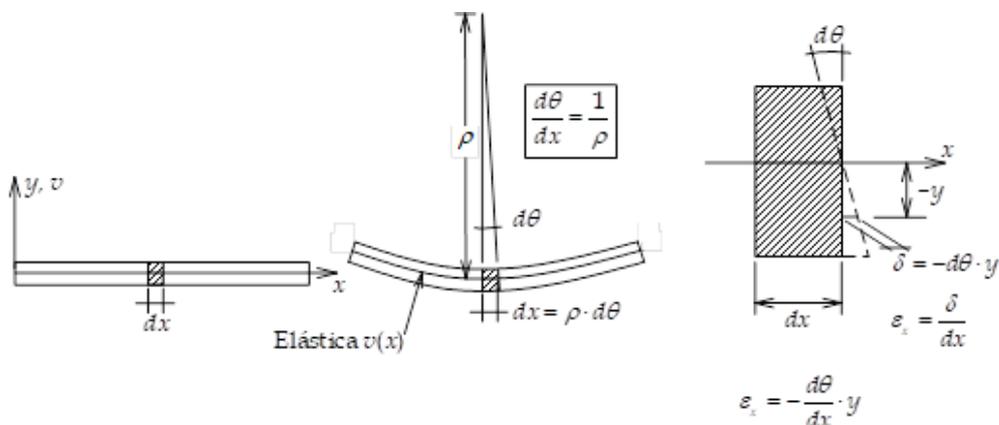


Figura 60: Relação curvatura x deformação normal da seção,

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} \quad (5.4)$$

Considerando uma seção retangular, como mostrado na Figura 61, é possível definir uma fibra de comprimento b e área dA , com uma distância $-y$ do centro de geométrico da seção, e então as seguintes relações podem ser definidas:

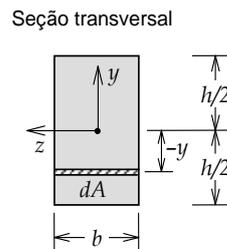


Figura 61: Representação da seção retangular.

$$dA = b \cdot dy \quad (5.5)$$

$$M = \int_A \sigma_x(-y)dA = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x b(-y)dy \quad (5.6)$$

Para esse tipo de seção, as relações entre o momento e curvatura para cada fase foram deduzidas baseadas a partir do equilíbrio entre tensões normais σ_x e momento fletor na seção transversal, em uma lei constitutiva elasto-plástica perfeita para o material e na relação entre deformação normal em uma fibra e a curvatura à flexão ($1/\rho$).

Logo, a partir da relação obtida na Eq. 5.6, para seções retangulares, é possível obter as expressões para os momentos para as fases 1, 2 e 3. As Eq. 5.7 até 5.9 apresentam as expressões para cada uma das fases apresentadas na Figura 59, a partir da Eq. 5.6.

$$M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} E\varepsilon_x b(-y)dy = \int_{-h/2}^{h/2} E\left(-\frac{y}{\rho}\right)b(-y)dy \quad (5.7)$$

$$M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} E\left(-\frac{y}{\rho}\right)b(-y)dy + \sigma_p\left(\frac{h}{2} - y_e\right)\left(\frac{h}{2} + y_e\right) \quad (5.8)$$

$$M_3 = M_p \quad (5.9)$$

A Eq. 5.7 apresenta o momento na seção na fase 1, que apresenta linearidade da relação da tensão normal com a distância do centro geométrico y . A tensão normal pode ser obtida diretamente pela lei constitutiva:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (5.10)$$

Em que a deformação normal (ε_x) é dada pela Eq. 5.4. Para a fase 2, a expressão do momento (Eq. 5.8) apresenta a soma de duas porções: uma porção elástica e outra porção em plastificação. A porção em plastificação pode ser obtida relacionando a área da seção no regime de plastificação com o braço de alavanca, que está em função da posição da fibra limite elástico (y_e). Por fim, na fase 3 a seção já está totalmente plastificada, e, portanto, o momento é constante e igual a M_p .

A Figura 62 apresenta o comportamento característico de uma seção retangular ao longo da plastificação, relacionando o momento fletor com a curvatura da seção, a partir da resolução das integrais apresentadas. A imagem divide o comportamento em relação as três fases demonstradas na Figura 59.

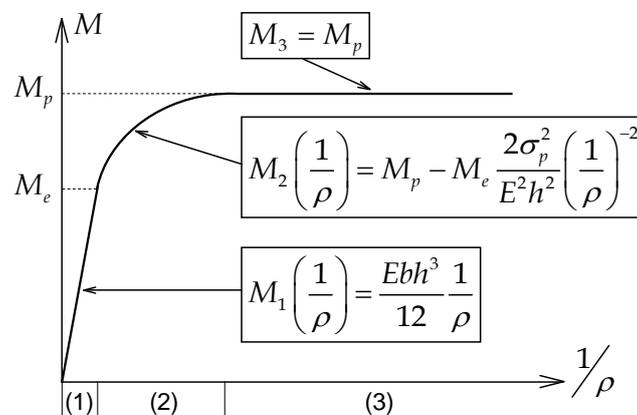


Figura 62: Curva momento x curvatura de uma seção ao longo da plastificação.

No presente estudo foi elaborada uma metodologia para a criação da curva *momento x rotação relativa* para as ligações semirrígidas a partir da plastificação da seção transversal da viga. Tal metodologia baseia-se em um parâmetro empírico de comprimento de rótula plástica (l_p). A Figura 63 mostra o esquema de viga proposto para o caso de estudo, em que as ligações de comprimento característico l_p simulam as rotulas plásticas formadas a partir da carga imposta ao longo da análise.

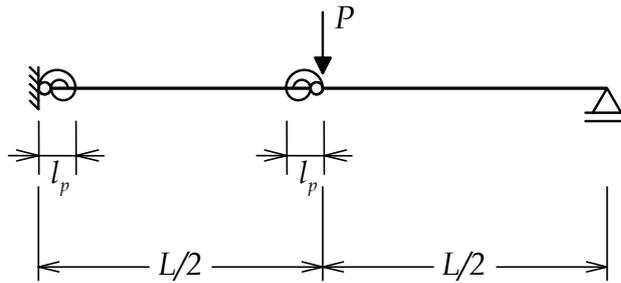


Figura 63: Esquema adotado para a viga do caso de estudo com ligações semirrígidas como rótulas plásticas.

Para converter curvatura em rotação relativa da ligação, as seguintes simplificações foram adotadas:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\rho} \quad (5.11)$$

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{\Delta\theta}{l_p} \quad (5.12)$$

Substituindo nas expressões que descrevem o comportamento da seção ilustradas na Figura 62, é obtida a curva *momento x rotação relativa* para a ligações semirrígidas, e as seguintes relações expressas na Figura 64:

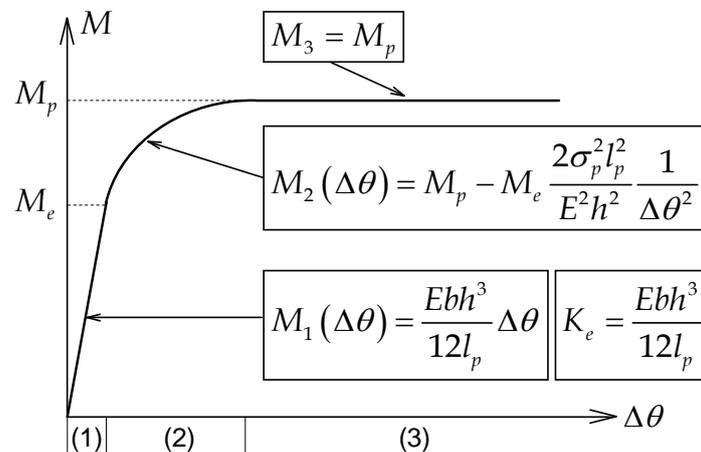


Figura 64: Curva momento x rotação para ligações semirrígidas como rótulas plásticas.

A partir das relações obtidas, foi possível determinar a curva *momento x rotação* da ligação que simular uma rótula plástica. Para esta análise, foram criadas duas ligações semirrígidas com comportamento multilíneares. Uma com o comportamento linear até atingir o momento de plastificação (comportamento elasto-plástico) e outra com o comportamento obtido a partir das relações

apresentadas anteriormente (comportamento plástico). A Figura 65 apresenta o comportamento de cada uma das ligações e os pontos inseridos no FTOOL para a criação. A rigidez elástica K_e das duas curvas são iguais, tais como indicado na Figura 65 (veja expressão na Figura 64).

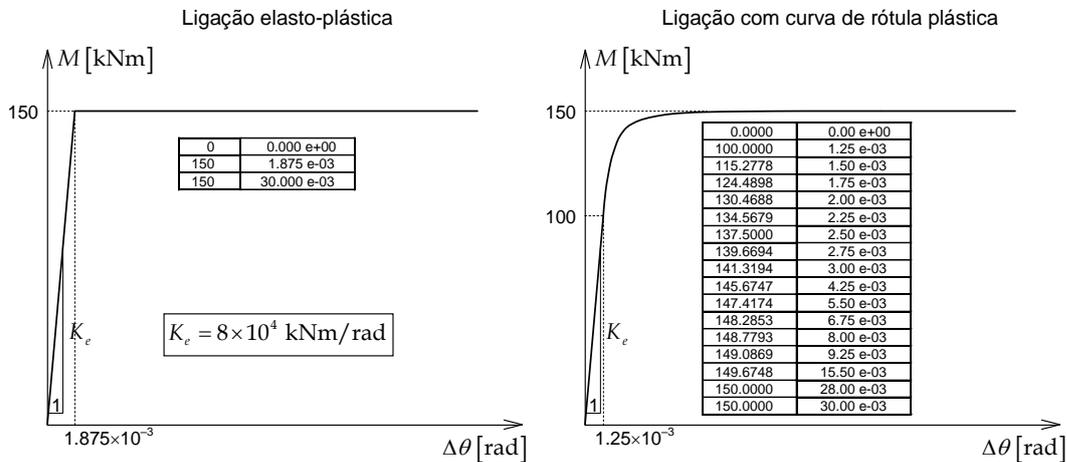


Figura 65: Comportamento das ligações semirrígidas adotadas para a análise.

A Figura 66 ilustra o diagrama de momentos em uma análise puramente linear elástica para a carga de colapso, sem a consideração do efeito das ligações semirrígidas como rótulas plásticas. É possível observar que o momento na extremidade engastada supera o valor do M_p , estando em desacordo com o limite de plastificação para a seção transversal. Tal exemplo serve de modelo e motivação para a consideração do efeito da plastificação da seção a partir das ligações semirrígidas.

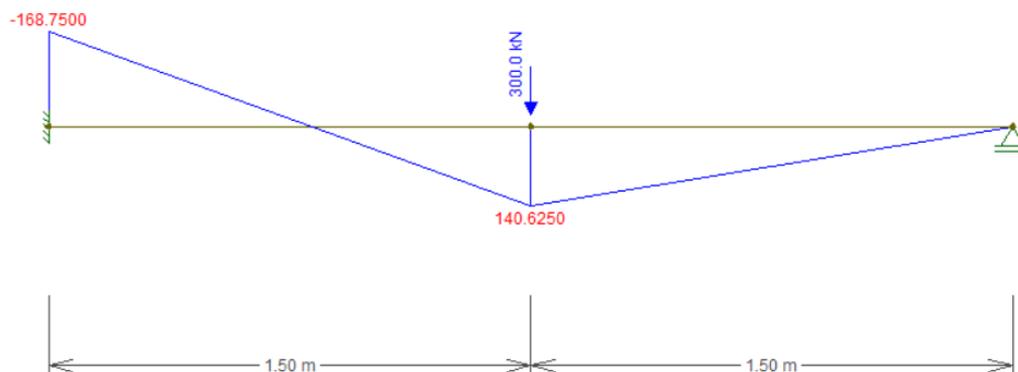


Figura 66: Diagrama de momento para uma análise linear-elástica.

A Figura 67 ilustra os modelos e o diagrama de momento para cada um dos casos analisados (ligação elasto-plástica e ligação plástica) para uma análise não linear física no último passo da análise quando o modelo atinge a instabilidade. Como esperado, em ambos os casos o momento nas rótulas plásticas se limita ao M_p , diferente da análise linear-elástica, adequando-se a ligação semirrígidas ao comportamento das rótulas plásticas formadas na seção.

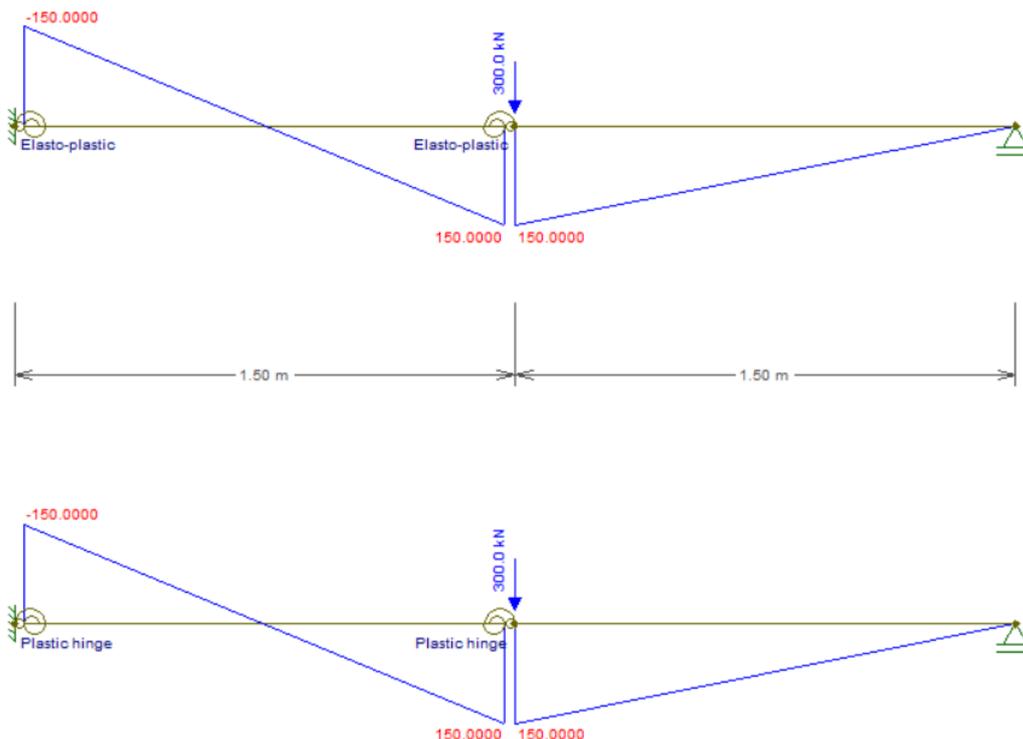


Figura 67: Diagrama de momento de ambos casos analisados.

Também era esperado que ambos os casos resultassem na mesma situação limite, a qual, segundo Menezes (1990), é independente da trajetória do comportamento informado. Porém, ao longo da trajetória, o comportamento estrutural é diferente para cada um dos casos analisados, evidenciados pelo método iterativo de análise, a qual permite o acompanhamento do comportamento estrutural para cada etapa de solução não linear. De forma a evidenciar tal efeito, foram realizadas algumas análises dentro do ambiente de plotagem do FTOOL, ilustrando a diferença de comportamento ao longo da análise.

Na Figura 68 é representado o a curva *deslocamento x fator de carga* no nó central da viga. O fator de carga com valor 1 nesta análise corresponde à carga de colapso. É possível observar que, apesar de os diagramas de momentos fletores no limite da análise serem iguais para ambos os casos de ligação semirrígida, a evolução do deslocamento no ponto central da viga é diferente para

os dois casos. O deslocamento para a carga de colapso no caso da ligação elasto-plástica é menor do que para a ligação de rótula plástica, indicando que no segundo caso o modelo apresenta uma maior deformação plástica. Observe que, neste caso, o gráfico do deslocamento central apresenta uma assíntota horizontal próximo à situação de colapso. Além disso, ainda é possível perceber que o comportamento do deslocamento durante a fase 1 (linear-elástica) é o mesmo para os dois tipos de ligação. Tal igualdade existe até o ponto em que M_e é atingido na ligação de rótula plástica e a plastificação começa a ocorrer, desvinculando o comportamento de cada um dos casos analisados. Também é observado que a curva de deslocamento para a ligação elasto-plástica apresenta dois trechos lineares. O primeiro trecho, mais rígido, corresponde às duas ligações (no engaste e central) no regime linear. O segundo trecho, menos rígido, ocorre depois que a ligação no engaste se plastifica.

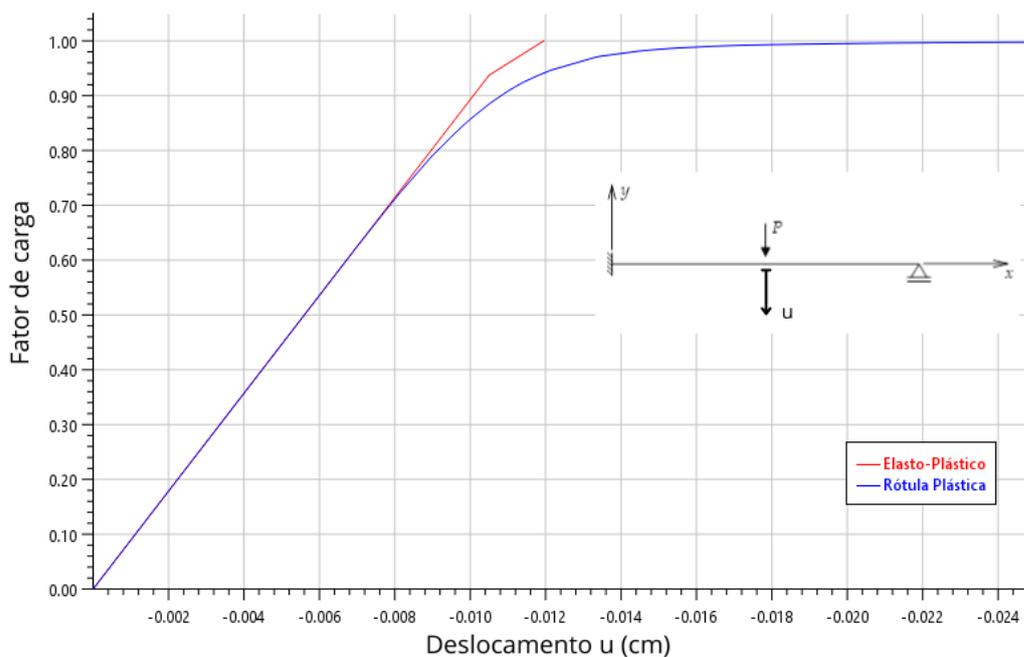


Figura 68: Gráfico deslocamento x fator de carga do nó central.

Já na Figura 69 são mostrados gráficos do momento fletor negativo (extremidade engastada) e positivo (centro da viga) para cada um dos casos em função do fator de carga.

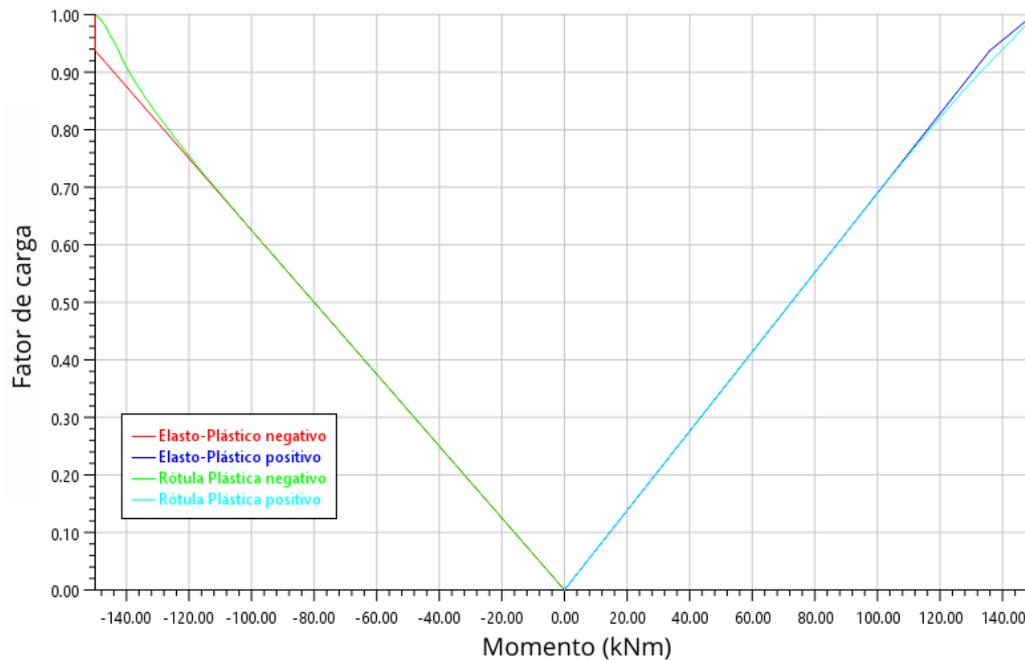


Figura 69: Gráfico momento x fator de carga nas rótulas plásticas.

Novamente é possível observar o mesmo comportamento durante a fase elástica para a ligação semirrígida com rótula plástica e para a ligação semirrígida elasto-plástica. O comportamento após o limite elástico se torna diferente para cada um dos casos, porém atingindo o mesmo ponto quando a carga limite é atingida.

Como para o gráfico do deslocamento central, os gráficos de momentos para a ligação elasto-plástica apresentam dois trechos retos. Observa-se que no engaste a primeira ligação a atingir o limite plástico é a ligação elasto-plástica. Por outro lado, a plastificação da ligação semirrígida central ocorre primeiro para a ligação de rótula plástica. Embora a primeira plastificação total de uma ligação ocorra em posições diferentes da viga para os dois tipos de ligação, os diagramas finais de momentos fletores são iguais para os dois tipos e para a mesma carga de colapso.

A consideração das ligações semirrígidas e a metodologia proposta para a criação da curva *momento x rotação* apresentou o resultado esperado, de forma a simular as rótulas plásticas a partir do elemento de mola rotacional implementado neste trabalho. A adição de tal efeito permite, portanto, uma representação mais fiel ao comportamento estrutural real do que quando realizada somente uma análise linear elástica.

A metodologia apresentada para obtenção da curva *momento x rotação relativa* de uma ligação semirrígida para simular a formação de uma rótula plástica

foi feita para uma seção transversal retangular. Entretanto, essa metodologia pode ser estendida para outros tipos de seções transversais.

6. Conclusão

6.1. Considerações finais

Os bons resultados previamente apresentados por Del Savio (2004), o qual implementou o mesmo modelo de ligação realizado neste trabalho, e pela descontinuidade de sua versão desenvolvida, constituem uma das principais motivações deste desenvolvimento. O modelo de mola rotacional é capaz de adequar as rotações resultantes na ligação ao longo da análise, além da independência na formulação dos elementos finitos. Essa independência possibilita futuros trabalhos, com o acoplamento das demais rizejas de uma ligação semirrígida.

No caso de uma análise linear, foi garantido que a influência da rigidez constante da ligação semirrígida fosse somada ao nó correspondente na matriz de rigidez global do modelo estrutural e ao nó fictício criado transparentemente para cada ligação semirrígida. Em todos os estudos de casos realizados dentro do contexto linear, os resultados foram bem precisos e próximos aos encontrados na literatura, além de apresentaram convergência com os valores apresentados em alguns estudos realizados por Del Savio (2004), como esperado.

No contexto das análises não lineares, os grupos de soluções não lineares geométricas implementadas por Rangel (2019) foram adaptadas também para conter a não linearidade das ligações semirrígidas. Tal adaptação se resume em um novo passo acrescentado no esquema de solução não linear incremental ou incremental-iterativa, como ilustra o fluxograma da Figura 17. A montagem da matriz de rigidez tangente no passo corrente passa a considerar a contribuição das ligações semirrígidas, as quais, a partir da rotação relativa, obtida na última configuração de referência, possibilita o cálculo da rigidez equivalente na curva *momento x rotação* de entrada pelo usuário. De maneira análoga, o vetor das forças internas global também recebe a contribuição dos momentos internos dos elementos de ligação, que também são calculados a partir da rotação relativa na ligação.

Para a validação das implementações realizadas e a análise da precisão computacional da metodologia adotada, tanto para as análises lineares quanto não lineares, foram utilizados exemplos consagrados na literatura e presentes em diversos trabalhos com tais propósitos. Os resultados obtidos e comparados estão descritos em um grupo de estudos no Capítulo 5, assim como um breve comentário em cada análise.

A análise linear realizada na Seção 5.2.1, proposta por Chan e Chui (2000), e também considerada no trabalho de Del Savio (2004), gerou resultados com erros relativos praticamente nulos quando comparados ao fornecidos pela literatura, além de convergirem totalmente com os apresentados por Del Savio (2004), como já esperado por se tratar do mesmo modelo de ligação.

O exemplo da Seção 5.2.2, proposto por Steenhuis *et al.* (1994) e também analisado por Brito (2001), apresentaram resultados que convergiram bem com os obtidos por Steenhuis *et al.* (1994), e ainda melhores que os apresentados por Brito (2001), se tratando dos momentos fletores nos nós da estrutura. O mesmo efeito pode ser visto ao considerarmos a análise dos deslocamentos, novamente atestando bons resultados.

Um trabalho presente na literatura e proposto por *Del Savio et al.* (2005), o qual utilizou o FTOOL SRC (Del Savio, 2004), foi analisado na Seção 5.2.3. Este exemplo foi considerado para validar o modelo de ligação proposto no trabalho, também implementado por Del Savio (2004), além de permitir visualizar o comportamento das ligações semirrígidas para quando os valores fornecidos são nulos, simulando uma ligação rotulada, ou valores suficientemente grandes para simular uma ligação rígida. Em todos os casos considerados na análise, os resultados são praticamente idênticos com os apresentados por Del Savio *et al.* (2005), firmando o modelo implementado.

A Seção 5.3.1 apresenta o primeiro caso de análises considerando os efeitos de segunda ordem. Para essa primeira análise, foi considerado um exemplo na literatura que trata uma análise de segunda ordem considerando ligações semirrígidas com um comportamento linear (Mondkar e Powell, 1977), comparando com os valores obtidos na análise de Chan e Chui (2000). Essa seção é importante uma vez que valida o comportamento linear da ligação em análise não lineares. Embora a implementação do comportamento linear das ligações já tenha sido devidamente validada nos casos anteriores, em nível de código e implementação computacional, o tratamento do comportamento linear das juntas semirrígidas é diferente nesse caso de análise, a qual a matriz de rigidez tangente é montada a cada incremento de carga, sendo que a contribuição

da ligação é constante em todo o processo. No caso em questão, as flechas no centro da viga para cada incremento de carga central foram satisfatórias, se adequando bem a curva, tanto para uma análise de ligação semirrígida quando para uma simulação de junta perfeitamente rígida, validando o comportamento linear das ligações em uma análise refinada de segunda ordem.

Para o exemplo 5.3.2, foi considerado um pórtico de 2 andares proposto por Chan e Chui (2000). Nesse exemplo, foram realizados diversos casos de análises e então comparados com os valores da literatura. Diversas tipologias de ligações semirrígidas foram consideradas, sendo que o comportamento representado pela curva *momento x rotação*, foram calculados externamente seguindo o modelo exponencial e parâmetros fornecidos por Lui e Chen (1986). Além da ótima convergência dos valores apresentados comparados com os de Chan e Chui (2000) para os diferentes tipos de ligação, ainda foram comparadas as cargas limites para cada caso analisado, que apresentaram pequenas diferenças com os resultados da literatura.

O caso 5.3.3 apresenta um pórtico de análise não linear proposto por Keulen *et al.* (2003) e também analisado por Del Savio (2004). Nesse exemplo, o objetivo foi de assegurar a boa convergência com os resultados de referência literária, além de comparar os resultados apresentados por Del Savio (2004), considerando o mesmo modelo de elemento de ligação. O comportamento da ligação foi inserido através dos pares de pontos da curva *momento x rotação* fornecidos, e realizados diversos casos na análise, considerando diferentes fatores de carga para simular a ação do efeito e garantir os efeitos de segunda ordem na estrutura. Novamente, os valores se ajustaram bem com as curvas teóricas, além se aproximarem bem dos resultados apresentados por Del Savio (2004), explicado pelo método de solução não linear escolhido e suas parametrizações.

Outro excelente exemplo foi abordado na Seção 5.3.4, de um trabalho de Stelmack *et al.* (1986), que apresenta valores experimentais de um pórtico de dois andares, também analisado no trabalho de Lemes (2018). O comportamento da ligação também foi obtido experimentalmente e fornecido em forma de gráfico, inseridos na análise e apresentando bons resultados, praticamente idênticos aos experimentais e ainda melhores que os fornecidos por Lemes (2018).

Na Seção 5.3.5, foi considerado o pórtico de Vogel (1985), ideal para calibração das formulações. Nesse caso de estudo, além da análise não linear, foram novamente utilizadas as curvas obtidas externamente, seguindo a formulação exponencial de Lui e Chen (1996). Em todos os casos de análise, os resultados se ajustaram ao fornecidos por Chan e Chui (2000), ratificando a boa

modelagem do comportamento não linear da estrutura. Além de novamente representar a influência da flexibilidade da ligação semirrígida na carga limite que a estrutura é capaz de suportar.

Na Seção 5.3.6, foram realizadas análises qualitativas quanto ao estudo dos modos de flambagem de duas estruturas com ligações semirrígidas. O objetivo foi observar a influência da flexibilidade das ligações em relação ao comportamento estrutural em relação a flambagem da estrutura. Tanto o pórtico simples, quanto as vigas de Vierendeel aproveitado do estudo realizado por Del Savio (2005). Em ambos os casos, os modos de flambagem evidenciam a flexibilidade da modelagem da ligação, a qual ilustra a rotação relativa entre os elementos estruturais ao qual a ligação está inserida.

Por fim, na Seção 5.3.7 foi realizado o estudo de caso de um exemplo considerado na dissertação de Menezes (1990), o qual o elemento de mola rotacional foi inserido de modo a simular o comportamento de formação de rótulas plásticas em uma viga hiperestática. Tanto a metodologia adotada para a criação da curva *momento x rotação* da ligação semirrígida, quanto os resultados foram muito satisfatórios, uma vez que permitiram representar de forma adequada uma análise limite através de uma análise não linear física. Os resultados mostram convergência no ponto limite, tanto considerando uma ligação semirrígida com comportamento elasto-plástico quanto uma com comportamento de rótula plástica, e demonstram que independem da trajetória de equilíbrio de solução. Ainda foi possível analisar a diferença do comportamento em cada um dos casos de estudos a partir do ambiente de plotagem do FTOOL.

De maneira geral, os exemplos demonstraram a eficiência do elemento de ligação proposto, tanto para a análise linear quanto para análise não linear, além da implementação computacional. Já os algoritmos de solução implementados por Rangel (2019), adaptados para conter também a não linearidade física das ligações semirrígidas, contiveram o comportamento de forma esperada e eficiente. A escolha dos métodos de solução numérica foi possível por conta do conhecimento prévio do comportamento estrutural, buscando em cada um dos casos de análise não linear, estimar o melhor método de solução em conjunto com os parâmetros de entrada.

Além das implementações computacionais que dizem respeito diretamente as soluções, deve-se destacar as mudanças gráficas realizadas utilizando a biblioteca IUP (Levy, 1996). A facilidade da implementação e a ótima performance ao considerar elementos nativos do programa, foram essenciais para a construção de uma interface simples e amigável ao usuário. A criação do novo menu para

criação de ligações semirrígidas conseguiu reunir todos componentes necessários para a sua criação e definição no modelo, seguindo o padrão já adotado no software, com fácil entendimento e adaptativo ao usuário.

É transcrito graficamente de forma clara ao usuário a definição de uma ligação com comportamento linear ou não linear. Esta última definição, facilitada pela possibilidade de importar os pares da curva *momento x rotação* de um arquivo externo, além da visualização clara do elemento no modelo, que pode ser manipulado em todas as etapas de processamento. A possibilidade do acompanhamento da estrutura deformada e de diagramas de esforços internos em cada etapa incremental-iterativa demonstra a influência das ligações semirrígidas na flexibilidade da estrutural global. Como visto nos casos de análise abordados, uma ligação com maior grau de flexibilidade resulta na diminuição da carga crítica suportada pela estrutura, enquanto que quanto mais rígida, maior a carga suportada.

De forma geral, a implementação das ligações semirrígidas contempla diversos níveis de análises com grande eficiência, desde análises mais simples como a análise linear-elástica, até análises mais complexas, como análises não lineares físico/geométricas, análises de modos de flambagem e análises limites com ligações semirrígidas como rótulas plásticas. Esta adição enriquece as análises disponíveis dentro do ambiente FTOOL, garantindo uma visão didática do comportamento estrutural sob o efeito da rigidez de ligações semirrígidas, e a sua influência na estabilidade estrutural. A facilidade de manipulação e visualização do modelo e resultados apresentados garantem ao FTOOL o caráter de ferramenta educacional para análise de estruturas.

6.2. Trabalhos futuros

A partir das implementações realizadas neste trabalho, para a análise linear e não linear de ligações semirrígidas de pórticos, sugere-se os seguintes trabalhos futuros no ambiente e análise do FTOOL:

- i. A modificação da estrutura de dados para conter os efeitos das rijezas axiais e cisalhantes. A implementação neste trabalho foi realizada de forma a permitir a adaptação fácil do acoplamento das demais rijezas;

- ii. Outros modelos para a descrição do comportamento não linear dos elementos de ligação, tais como os modelos analíticos, matemáticos e mistos, determinados pelo usuário na definição da ligação;
- iii. A implementação da análise dinâmica linear e não linear, considerando também pórticos com ligações semirrígidas;
- iv. Consideração da análise de pórticos espaciais. A implementação realizada neste trabalho também prevê essa possível adaptação, já criando a matriz de rigidez do elemento de ligação considerando os graus de liberdade de um elemento tridimensional.
- v. A consideração automática do elemento de mola para a representação da formação de rótulas plásticas nas fibras dos elementos estruturais.

7. Referências bibliográficas

AISC. Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Buildings, **American Institute of Steel Construction**, Chicago, IL, 1986.

AISC. Specification for Structural Steel Buildings: Allowable Stress Design and Plastic Design, 9th Ed., **American Institute of Steel Construction**, Chicago, IL, 1989.

AISC. *Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Buildings*. **American Institute of Steel Construction**, AISC, 2nd edn., Chicago, IL, 1994.

ALVARENGA, A. **As ligações semi-rígidas na análise avançada com zona plástica de portais planos de aço**. Tese de Doutorado em Construções Metálicas, 2010.

ANG, K. M.; MORRIS, G. Analysis of three-dimensional frames with flexible beam-column connections. **Canadian Journal of Civil Engineering**, v. 11, p. 245–254, 1984.

ARBABI, F. Drift of flexibly connected frames. **Computers & Structures**, v. 15, n. 2, p. 103–108, 1982.

BALDASSINO, N.; ZANDONINI, R. Response of End-Plate Joints under Combined Forces. In: **Structures Congress**, p. 1–10, 2009.

BATHO, C.; LASH, S. Further investigations on beam and stanchion connections. **Final Report, Steel Structures Research Committee, Department of scientific and Industrial Research, London**, v. 1936, p. 276–363, 1936.

BATOZ, J. L.; DHATT, G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 14, n. 8, p. 1262–1267, 1979.

BELL, W. G.; CHESSON, E.; MUNSE, W. **Static Tests of Standard Riveted and Bolted Beam-to-Column Connections**, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1958.

BERGAN, P. G.; HORRIGMOE, G.; BRAKELAND, B.; SOREIDE, T. H. Solution techniques for non-linear finite element problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 12, n. 11, p. 1677–1696, 1978.

BRITO, O. Desenvolvimento de Sistemas Estruturais Semi-Rígidos em Aço e Mistos para Edificações Residenciais Multi-Familiares. **Dissertação de Mestrado**, Departamento de Engenharia Civil (PUC-Rio), 2001.

BS5950. *Structural Use of Steelwork in Buildings. Part 1*. **British Standards Institution**, London, England, 1990.

CAMPOS JÚNIOR, R. Análise do Comportamento de Estruturas Reticuladas de Aço com Ligações Semi-Rígidas. **Dissertação de Mestrado**, Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 1990.

CARVALHO, P.; GATTASS, M.; MARTHA, L. **A software tool which allows interactive creation of planar subdivisions and applications to educational-programs**. p. 201-207, 1990.

CAVALCANTI, P. R.; CARVALHO, P. C. P.; MARTHA, L. F. Criação e manutenção de subdivisões planares. **IV Simpósio Brasileiro de Computação Gráfica e Processamento de Imagens**, p. 13–24, 1991.

CHAN, S. Vibration and modal-analysis of steel frames with semirigid connections. **Engineering structures**, v. 16, n. 1, p. 25–31, 1994.

CHAN, S. L.; CHUI, P.-T. **Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections**. Elsevier, 2000.

CHEN, W. F.; GOTO, Y.; LIEW, J. R. **Stability design of semi-rigid frames**. John Wiley & Sons, 1996.

CHEN, W. F.; LUI, E. M. **Stability design of steel frames**. Boca Raton: CRC Press, 1991.

COLSON, A. Connections Incidence on the Inelastic Behaviour of Steel Structures. **Euromech Colloquium 174**, 1983.

DABAON, M.; EL-BOGHDADI, M.; KHAROOB, O. Experimental and numerical model for space steel and composite semi-rigid joints. **Journal of constructional steel research**, v. 65, n. 8–9, p. 1864–1875, 2009.

DE BACK, J.; ZOETEMEYER, P. **High Strength Bolted Beam to Column Connections-the Computation of Bolts, T-stub Flanges and Columnflanges**. Delft University of Technology, 1972.

DE LIMA, L. R. O.; VELLASCO, P. C. G. D. S.; DE ANDRADE, S. A. L.; DA SILVA, J. G. S.; VELLASCO, M. M. B. R. Neural networks assessment of beam-to-column joints. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 27, n. 3, p. 314–324, 2005.

DEL SAVIO, A. A. Modelagem Computacional de Estruturas de Aço com Ligações Semi-Rígidas. **Dissertação de Mestrado**, Departamento de Engenharia Civil (PUC-Rio), 2004.

DEL SAVIO, A. A.; MARTHA, L. F.; DE ANDRADE, S. A. L.; DA SILVA, J. G. S.; DE LIMA, L. R. O. **Structural modeling of vierendeel beams with semi-rigid joints**. Proceedings of the XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Brazil, 2005.

DEL SAVIO, A. A.; NETHERCOT, D. A.; VELLASCO, P. C. G. D. S.; ANDRADE, S. A. L.; MARTHA, L. F. A component method model for semi-rigid end-plate beam-to-column joints including the axial versus bending moment interaction. In: **5TH International conference of advances in steel structures, ICASS**, 2007.

DEL SAVIO, A. A.; NETHERCOT, D. A.; VELLASCO, P. C. G. D. S.; DE LIMA, L. R. O.; DE ANDRADE, S. A. L.; MARTHA, L. F. An assessment of beam-to-column endplate and baseplate joints including the axial-moment interaction. **Advanced steel construction**, v. 6, n. 1, p. 548–566, 2010.

DIAS, C. L.; RAFAEL, R. L.; MARTHA, L.F. “Nonlinear analysis in FTOOL with semi-rigid connections: a partial development”, **Proceedings of the XLI Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**, ABMEC/UNILA, Foz do Iguaçu, PR, Online, Nov. 2020, ISSN 2675-6269, pp. 7880-1-7880-7, 2020.

DOUTY, R. T.; MCGUIRE, W. High Strength Bolted Moment Connections. **Journal of the Structural Division**, v. 91, n. 2, p. 101–128, 1965.

Eurocode 3. *Design of Steel Structures*, vol. 1, **Eurocode edited draft**, 1990.

Eurocode 3. *Design of Steel Structures. Part I: General rules and rules for buildings*. **Comite European de Normalisation (CEN) Brussels**, Belgium, 1992.

FELIPPA, C. A. **Nonlinear Finite Element Methods**. Class notes, Department of Aerospace Engineering Sciences, University of Colorado, Boulder, 2004.

FRYE, M. J.; MORRIS, G. A. Analysis of Flexibly Connected Steel Frames. **Canadian Journal of Civil Engineering**, v. 2, n. 3, p. 280–291, 1975.

FU, F.; LAM, D.; YE, J. Moment resistance and rotation capacity of semi-rigid composite connections with precast hollowcore slabs. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 66, n. 3, p. 452–461, 2010.

GALVÃO, A. Formulações não-lineares de elementos finitos para análise. **Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). Ouro Preto**, p. 241, 2000.

GERSTLE, K. H. Effect of connections on frames. **Journal of constructional steel research**, v. 10, p. 241–267, 1988.

JENNINGS ALAN. Frame Analysis including Change of Geometry. **Journal of the Structural Division**, v. 94, n. 3, p. 627–644, 1968.

JONES, S. W.; KIRBY, P. A.; NETHERCOT, D. A. Effect of semi-rigid connections on steel column strength. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 1, n. 1, p. 38–46, 1980.

KAWASHIMA, S.; FUJIMOTO, T. Vibration analysis of frames with semi-rigid connections. **Special Memorial Issue**, v. 19, n. 1, p. 85–92, 1984.

KEULEN, D. C.; NETHERCOT, D. A.; SNIJDER, H. H.; BAKKER, M. C. M. Frame analysis incorporating semi-rigid joint action: Applicability of the half initial Secant stiffness approach. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 59, n. 9, p. 1083–1100, 2003.

KISHI, N.; CHEN, W. F.; GOTO, Y.; MATSUOKA, G. G. Design aid of semi-rigid connections for frame analysis. **Engineering Journal**, v. 30, n. 3, p. 90–107, 1993.

KISHI, N.; CHEN, W. F. Steel Construction Data Bank Program, **Structural Engineering Report No. CE-STR-86**, School of Civil Engineering, Purdue University, West Lafayette, 1986.

KISHI, N.; MATSUOKA, K.; CHEN, W. F.; NOMACHI, S. Moment-Rotation Relation of Top- and Seat- Angle Connections, **Structural Engineering Report No. CE-STR-87-4**, School of Civil Engineering, Purdue University, West Lafayette, 1987.

KRISHNAMURTHY, N.; HUANG, H. T.; JEFFREY, P. K.; AVERY, L. K. Analytical $M-\theta$ Curves for End-Plate Connections. **Journal of the Structural Division**, v. 105, n. 1, p. 133–145, 1979.

LEMES, Í. J. M. Estudo numérico avançado de estruturas de aço, concreto e mistas. **Tese de Doutorado**, Departamento de Engenharia Civil – UFOP, 2018.

LEON, S. E.; PAULINO, G. H.; PEREIRA, A.; MENEZES, I. F. M.; LAGES, E. N. A Unified Library of Nonlinear Solution Schemes. **Applied Mechanics Reviews**, v. 64, n. 4, 20 ago. 2012.

LEVY, C. H.; DEFIGUEIREDO, L. H.; GATTASS, M.; LUCENA, C. J. P.; COWAN, D. D. IUP/LED: A portable user interface development tool. **Software-Practice & Experience**, v. 26, n. 7, p. 737–762, 1996.

LUI, E. M.; CHEN, W. F. Analysis and behaviour of flexibly-jointed frames. **Engineering Structures**, v. 8, n. 2, p. 107–118, 1986.

LUI, E. M.; CHEN, W. F. Behavior of braced and unbraced semi-rigid frames. **International Journal of Solids and Structures**, v. 24, n. 9, p. 893–913, 1988.

MALLETT R. H.; MARCAL P. V. Finite Element Analysis of Nonlinear Structures. **Journal of the Structural Division**, v. 94, n. 9, p. 2081–2106, 1968.

MÄNTYLÄ, M. An introduction to solid modeling. **Computer Science Press**, Inc., 1987.

MARQUES, Í. R.; LOPES, P. C.; RANGEL, R. L.; MARTHA, L. F. Implementação de conexão semirrígida em modelos reticulados no contexto da programação orientada a objetos. **XL CILAMCE–40th Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**, ABMEC/UFRN, Natal, RN, 2019.

MARTHA, L. F.; PARENTE JUNIOR, E. **An object-oriented framework for finite element programming**. World Congress on Computational Mechanics, 2002.

MARTIN, H. C. On the derivation of stiffness matrices for the analysis of large deflection and stability problems. **Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics**, 1965.

MENEZES, I. F. M. Análise limite de lajes em concreto armado. **Dissertação de Mestrado**, Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio, 2019.

MONDKAR, D. P.; POWELL, G. H. Finite element analysis of non-linear static and dynamic response. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 11, n. 3, p. 499–520, 1977.

NGUYEN, P. C.; KIM, S. E. An advanced analysis method for three-dimensional steel frames with semi-rigid connections. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 80, p. 23–32, 2014.

NGUYEN P. C.; KIM S. E. Advanced analysis for planar steel frames with semi-rigid connections using plastic-zone method. **Steel and Composite Structures**, v. 21, n. 5, p. 1121–1144, 2016.

NBR 8800. *Projeto e Execução de Estruturas em Aço de Edifícios*. ABNT, Rio de Janeiro, Brasil, 1986.

NBR 8800. *Projeto de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas de Aço e Concreto de Edifícios*. ABNT, Rio de Janeiro, Brasil, 2008.

PINHEIRO, L. Análises não-lineares de sistemas estruturais metálicos rotulados e semi-rígidos. **Dissertação de Mestrado**, Departamento de Engenharia Civil (UFOP), 2003.

RANGEL, R. L. Educational Tool for Structural Analysis of Plane Frame Models with Geometric Nonlinearity. **Dissertação de Mestrado**, Departamento de Engenharia Civil (PUC-Rio), 2019.

RANGEL, R. L.; MARTHA, L. F., Ftool 5.0: Nonlinear, stability and natural vibration analyses, **Proceedings of the XLI Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**, ABMEC/UNILA, Foz do Iguaçu, PR, Online, Nov. 2020, ISSN 2675-6269, pp. 7805-1-7805-6, 2020.

RATHBUN J. C. Elastic Properties of Riveted Connections. **Transactions of the American Society of Civil Engineers**, v. 101, n. 1, p. 524–563, 1936.

RIBEIRO, L. F. L. Estudo do comportamento estrutural de ligações parafusadas viga-coluna com chapa de topo: análise teórico-experimental. **Tese de Doutorado**, Escola de Engenharia de São Carlos (USP), 1998.

RICHARD R. M.; ABBOTT B. J. Versatile Elastic-Plastic Stress-Strain Formula. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 101, n. 4, p. 511–515, 1975.

ROCHA, P. A. S. Análise inelástica de segunda ordem de estruturas metálicas com ligações semi-rígidas. **Dissertação de Mestrado**, Departamento de Engenharia Civil (UFOP), 2006.

SARITAS, A.; KOSEOGLU, A. Distributed inelasticity planar frame element with localized semi-rigid connections for nonlinear analysis of steel structures. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 96–97, p. 216–231, 2015.

SEKULOVIC, M.; SALATIC, R. Nonlinear analysis of frames with flexible connections. **Computers & Structures**, v. 79, n. 11, p. 1097–1107, 2001.

SHERBOURNE, A. The behaviour of a clamped circular plate in compression. **Aeronautical Quarterly**, v. 12, n. 1, p. 51–64, 1961.

SILVA, A. R. D. Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas. **Tese de Doutorado**, Departamento de Engenharia Civil (UFOP), 2009.

SILVA, J. L. Formulações corrotacionais 2D para análise geometricamente não linear de estruturas reticuladas. **Dissertação de Mestrado**, Departamento de Engenharia Civil (UFOP), 2016.

SIVAKUMARAN, K. S. Seismic response of multi-storey steel buildings with flexible connections. **Engineering Structures**, v. 10, n. 4, p. 239–248, 1988.

STEENHUIS, M.; GRESNIGT, N.; WEYNAND, K. Pre-design of semi-rigid joints in steel frames. **Proceedings of the Second State of the Art Workshop on Semi-Rigid Behaviour of Civil Engineering Structural Connections. Anais...1994.**

STELMACK, T.; MARLEY, M.; GERSTLE, K. Analysis and tests of flexibly connected steel frames. **Journal of Structural Engineering - ASCE**, v. 112, n. 7, p. 1573–1588, 1986.

TOMA, S.; CHEN, W. F. Calibration frames for second-order inelastic analysis in Japan. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 28, n. 1, p. 51–77, 1994.

- VOGEL, U. Calibrating frames. **Stahlbau**, v. 10, n. Oct, p. 295-301, 1985.
- WANG, J.; HAN, L.; UY, B. Behaviour of flush end plate joints to concrete-filled steel tubular columns. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 65, n. 4, p. 925–939, 2009.
- WANG, J. F.; HAN, L. H.; UY, B. Behaviour of flush end plate joints to concrete-filled steel tubular columns. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 65, n. 4, p. 925–939, 2009.
- WILLARD, A. C.; WILSON, W. M.; MOORE, H. F.; LICHTY, L. C. Tests to determine the rigidity of riveted joints of steel structures. **University of Illinois**, 1917.
- WU, F. H.; CHEN, W. F. A design model for semi-rigid connections. **Engineering Structures**, v. 12, n. 2, p. 88–97, 1990.
- YANG, Y. B.; KUO, S. R. Theory & analysis of nonlinear framed structures. **New York: Prentice Hall**, 1994.
- YEE Y. L.; MELCHERS R. E. Moment-Rotation Curves for Bolted Connections. **Journal of Structural Engineering**, v. 112, n. 3, p. 615–635, 1986.
- YOUNG, C. R.; JACKSON, K. B. The relative rigidity of welded and riveted connections. **Canadian Journal of Research**, v. 11, n. 1, p. 62–100, 1934.
- YOUSSEF-AGHA W.; AKTAN H. M.; OLOWOKERE O. D. Seismic Response of Low-Rise Steel Frames. **Journal of Structural Engineering**, v. 115, n. 3, p. 594–607, 1989.