

Anderson Pereira

**Otimização baseada em
confiabilidade: aplicação a treliças
espaciais**

TESE DE DOUTORADO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

**Programa de Pós-graduação
em Engenharia Civil**

Rio de Janeiro
Março de 2007



Anderson Pereira

**Otimização baseada em confiabilidade:
aplicação a treliças espaciais**

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Área de Concentração: Estruturas

Orientador : Prof. Luiz Fernando Martha
Co-Orientador: Prof. Luiz Eloy Vaz

Rio de Janeiro
Março de 2007

Anderson Pereira

**Otimização baseada em confiabilidade:
aplicação a treliças espaciais**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Luiz Fernando Martha

Orientador

Departamento de Engenharia Civil — PUC-Rio

Prof. Luiz Eloy Vaz

Co-Orientador

UFRJ

Prof. Paulo Batista Gonçalves

PUC-Rio

Prof. Raul Rosas e Silva

PUC-Rio

Prof. Luís Volnei Sudati Sagrilo

COPPE/UFRJ

Prof. José Herskovits Norman

COPPE/UFRJ

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 22 de Março de 2007

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Anderson Pereira

Graduou-se em Engenharia Civil na UDESC/Joinville (Universidade do Estado de Santa Catarina) em 2000. Fez curso de mestrado em Estruturas no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio pelo qual recebeu o título de mestre no ano de 2002. Interesses acadêmicos em áreas de pesquisa que envolvam otimização de estruturas, programação matemática, análise não-linear, análise de confiabilidade e elementos finitos.

Ficha Catalográfica

Pereira, Anderson

Otimização baseada em confiabilidade: aplicação a treliças espaciais / Anderson Pereira; orientador: Luiz Fernando Martha; co-orientador: Luiz Eloy Vaz. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil, 2007.

v., 145 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Civil – Tese. 2. Otimização. 3. Análise Não Linear. 4. Análise de Sensibilidade. 5. Análise de Confiabilidade. 6. Programação Matemática. 7. Otimização Baseada em Confiabilidade. I. Martha, Luiz Fernando. II. Vaz, Luiz Eloy. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. IV. Título.

CDD: 624

À Janaína por tudo.

Agradecimentos

Aos meus pais, pelo apoio e por todos os gestos de carinho e otimismo.

Aos meus orientadores Luiz Eloy Vaz e Luiz Fernando Martha pelo estímulo e parceria para a realização deste trabalho.

Ao amigo Ivan, do TeCGraf (Grupo de Tecnologia em Computação Gráfica), pelo apoio, pelas excelentes discussões e sugestões ao longo deste trabalho.

Ao grande amigo Sandoval, pelas sugestões, pelo apoio e pela amizade consolidada ao longo deste trabalho.

A todos os amigos e colegas da PUC-Rio, do TeCGraf, do vôlei de praia e do chope pelos momentos de descontração, essenciais para a realização deste trabalho.

A todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial Galvão, Ataliba, Saré, Joabson, Ramires, Maurício e Pasquetti.

Aos professores do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio, por todos os conhecimentos transmitidos durante a pós-graduação.

Aos funcionários da PUC-Rio e do TeCGraf, pela eficiência e amizade. Em especial à Ana Roxo, Rita, e Claudinei.

À minha esposa Janaína, pelo carinho, compreensão, paciência e constante apoio que fizeram possível a realização deste trabalho.

Ao CNPq, à PUC-Rio e ao TeCGraf, pelos auxílios concedidos.

Resumo

Pereira, Anderson; Martha, Luiz Fernando; Vaz, Luiz Eloy. **Otimização baseada em confiabilidade: aplicação a treliças espaciais**. Rio de Janeiro, 2007. 145p. Tese de Doutorado — Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

No projeto de estruturas de engenharia há, freqüentemente, incertezas associadas às propriedades dos materiais, às propriedades geométricas e aos carregamentos. A maneira mais comum e tradicional para se levar em conta estas incertezas é através da definição dos valores de projeto como o resultado do produto do valor característico das variáveis aleatórias por um fator parcial de segurança. Esta solução, no entanto, falha ao não permitir a quantificação da confiabilidade do projeto ótimo uma vez que um fator grande de segurança pode não significar uma confiabilidade mais alta. Para se considerar a natureza probabilística de quantidades como propriedades dos materiais, carregamentos, etc., tem-se que identificar e definir estas quantidades como variáveis aleatórias no modelo de análise. Desta maneira, a probabilidade de falha (ou a confiabilidade) de uma estrutura sujeita a uma restrição de desempenho na forma de uma função de estado limite pode, então, ser calculada e formulada como uma restrição num problema de otimização. Neste trabalho, restrições probabilísticas são incorporadas ao esquema tradicional de otimização estrutural. A formulação e os métodos numéricos para este processo, comumente chamado de otimização baseada em confiabilidade, são descritos. O objetivo principal é apresentar um sistema computacional capaz de resolver problemas de otimização de forma e de dimensões de treliças espaciais baseado em confiabilidade. Podem ser consideradas como variáveis, determinísticas ou aleatórias, as seções transversais, as coordenadas nodais, as propriedades dos materiais (módulo de elasticidade e tensão de escoamento) e os carregamentos. De maneira a tratar os problemas de instabilidade global são considerados os efeitos da não-linearidade geométrica no comportamento da estrutura e uma restrição formulada para uma função de estado limite associada à carga de colapso é incluída. Funções de estado limite referentes aos deslocamentos e às tensões também são consideradas. A flambagem global das barras é considerada por meio da carga crítica de Euler.

Palavras-chave

Otimização. Análise Não Linear. Análise de Sensibilidade. Análise de Confiabilidade. Programação Matemática. Otimização Baseada em Confiabilidade.

Abstract

Pereira, Anderson; Martha, Luiz Fernando; Vaz, Luiz Eloy. **Reliability based optimization: application to space trusses**. Rio de Janeiro, 2007. 145p. PhD Thesis — Department of Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Uncertainties associated with random variables, such as, the material proprieties and loads, are inherent to the design of structures. These uncertainties are traditionally taken into account in the project before the design by defining design values for the random variables. The design values of the random variables are obtained from statistical properties of the random variables and from partial safety factors. Once these values are defined the variables are treated as deterministic variables in the design process. This approach has been followed in the conventional design optimization and in many design codes such as the Brazilian code for the design of steel and concrete structures. This simple approach, however, does not allow an estimate of the structural reliability of the resulting project which may have a low (unsafe structure) or a very high (expensive structure) reliability. To overcome this problem a reliability analysis must be incorporated into the traditional design optimization. Design optimization, incorporating reliability analyses, has been denoted Reliability-Based Design Optimization (RBDO). In RBDO, the constraints are defined in terms of the probabilities of failure associated with some prescribed failure functions and therefore, it requires, as in the reliability analysis, the definition of the random variables and information about their statistical properties. In this work, RBDO is applied to the shape and sizing optimization of spatial trusses considering geometric nonlinearities. The constraints considered in the RBDO problem are related to the following failure mechanisms: to the global collapse (limit load), to local buckling and yield stress and to serviceability conditions (displacement bounds). The algorithms used for solving the optimization problem and for performing the reliability analysis are described.

Keywords

Optimization. Nonlinear Analysis. Sensitivity Analysis. Reliability Analysis. Mathematical Programming. Reliability Based Design Optimization.

Sumário

Lista de Símbolos, Siglas e Abreviaturas	14
1 Introdução	20
1.1 Considerações Iniciais e Objetivos	20
1.2 Escopo do Trabalho	22
1.3 Revisão Bibliográfica	24
2 Análise Não-Linear Geométrica	27
2.1 Comentários Iniciais	27
2.2 Comportamento Não-Linear, Análise e Projeto	27
2.2.1 Fontes de Não-Linearidade	28
2.3 Formulação para a Análise Não-Linear Geométrica de Estruturas Reticuladas	29
2.3.1 Descrição do Problema	29
2.3.2 Princípio dos Deslocamentos Virtuais	30
2.3.3 Montagem das Equações da Estrutura	32
2.4 Aplicação a Elementos de Treliça Espacial	32
2.4.1 Medida de Deformação	33
2.4.2 Medida de Tensão	34
2.4.3 Vetor de Forças Internas	34
2.4.4 Matriz de Rigidez	34
2.5 Estratégias de Solução para Problemas Não-Lineares	35
2.5.1 Análise Incremental-Iterativa	36
2.5.2 Incremento Automático de Carga	39
2.5.3 Estratégias de Iteração	41
2.5.4 Critérios de Convergência	43
2.6 Determinação dos Pontos Críticos	44
2.7 Exemplos de Análise Estrutural	45
2.7.1 Treliça Assimétrica em Forma de Arco	45
2.7.2 Treliça Espacial de 24 Elementos	46
3 Análise de Sensibilidade	50
3.1 Considerações Gerais	50
3.2 Método Analítico	51
3.2.1 Sensibilidade dos Deslocamentos Nodais	52
3.2.2 Sensibilidade da Carga Limite	53
3.2.3 Sensibilidade da Carga Crítica Linear	54
3.2.4 Sensibilidade das Deformações e Tensões	54
3.2.5 Sensibilidade do Vetor de Forças Internas	55
3.2.6 Sensibilidade do Vetor de Cargas Externas	55
3.2.7 Sensibilidade da Matriz de Rigidez Elástica	56
3.2.8 Sensibilidade da Matriz de Rigidez Geométrica	56
3.3 Método das Diferenças Finitas (MDF)	57
3.4 Exemplos de Análise de Sensibilidade	58

3.4.1	Treliça Espacial de 24 Elementos	58
4	Análise de Confiabilidade Estrutural	62
4.1	Modelagem das Incertezas	62
4.1.1	Distribuições de Probabilidades	63
4.1.2	Correlação Entre Variáveis Aleatórias	63
4.1.3	Função Conjunta de Probabilidades	64
4.2	Função de Performance	65
4.3	Métodos de Análise de Confiabilidade	66
4.3.1	Método Valor Médio (MV)	66
4.3.2	Métodos Baseados no Ponto de Projeto	67
4.3.3	Amostragem por Importância	70
4.4	Análise de Sensibilidade	72
4.5	Exemplos de Análise de Confiabilidade	73
4.5.1	Coluna com 45 barras	73
5	Otimização Considerando Incertezas	78
5.1	Otimização Determinística	78
5.2	Otimização Baseada em Confiabilidade	79
5.3	Método de Duplo Laço para RBDO	79
5.4	Linearizações da função de estado limite	81
5.5	Ponto Inicial nos Métodos de Busca pelo MPP	82
5.6	Análise de Sensibilidade em RBDO	82
5.7	Exemplos	83
5.7.1	Coluna Retangular Curta	84
5.7.2	Viga em Balanço	86
5.7.3	Coluna de Aço	88
5.8	Comentários Sobre os Exemplos	91
6	Otimização Baseada em Confiabilidade: Aplicação a Treliças Espaciais	93
6.1	Considerações Gerais	93
6.1.1	Consideração da Segurança nos Projetos	94
6.2	Metodologia de Otimização	96
6.3	Formulação do Problema de Otimização	97
6.3.1	Fatores de escala	98
6.3.2	Cálculo dos Gradientes	99
6.4	Implementação da Formulação	99
6.5	Exemplos	102
6.5.1	Treliça de 10 Barras	102
6.5.2	Treliça Espacial de 24 Elementos	107
7	Conclusões e Sugestões	112
7.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	114
	Referências Bibliográficas	116
A	Variáveis Randômicas	125
A.1	Valores Característicos de uma Variável Randômica	125
A.2	Distribuições de Probabilidades	126
A.2.1	Distribuição Normal ou Gaussiana	127

A.2.2	Distribuição Lognormal	127
A.2.3	Distribuição Uniforme	128
A.2.4	Distribuição Gamma	128
A.2.5	Distribuição Beta	129
A.2.6	Distribuição Gumbel	129
A.2.7	Distribuição Tipo I Mínimos	130
A.2.8	Distribuição Tipo II Máximos	130
A.2.9	Distribuição Tipo III Mínimos	131
A.2.10	Distribuição Weibull	131
B	Algoritmos de Otimização	132
B.1	Formulação do Problema	132
B.2	Condições de Ótimo	133
B.3	Forma Geral dos Algoritmos de Otimização	134
B.4	Método de Newton para Problemas de Otimização sem Restrição	135
B.5	Busca Linear	136
B.6	Programação Quadrática	136
B.7	Algoritmo de Han-Powell - Programação Quadrática Seqüencial	137
B.7.1	Etapas do Algoritmo Não-Linear Han-Powell (SQP)	139
B.8	Método dos Pontos Interiores	140
B.8.1	Etapas do Algoritmo de Pontos Interiores (IP)	142
B.9	Algoritmos de Otimização para Análise de Confiabilidade	144
B.9.1	Algoritmo (Hasofer–Lind–Rackwitz–Fiessler) HLRF	144
B.10	Implementação	145

Lista de figuras

2.1	Elemento de treliça.	33
2.2	Curva carga-deslocamento.	35
2.3	Solução incremental-iterativa: sistema com um grau de liberdade [25].	38
2.4	Variação do sinal do parâmetro de rigidez generalizado (GSP).	41
2.5	Pontos críticos de uma estrutura [58].	44
2.6	Treliça assimétrica em forma de arco.	45
2.7	Treliça assimétrica em forma de arco - resposta estrutural do deslocamento vertical dos nós 8 e 13.	46
2.8	Treliça espacial de 24 elementos.	48
2.9	Treliça espacial de 24 elementos - resposta estrutural para o carregamento P_1 .	48
2.10	Treliça espacial de 24 elementos - resposta estrutural para os carregamentos P_1 e P_2 .	49
3.1	Imprecisão da sensibilidade via diferenças finitas em problemas não-lineares [68].	58
3.2	Treliça espacial de 24 elementos - Efeito da perturbação relativa η na sensibilidade do deslocamento q_3^1 em relação a área A_1 .	59
3.3	Treliça espacial de 24 elementos - Sensibilidades dos deslocamentos através dos métodos analítico (DDM) e diferenças finitas.	60
3.4	Treliça espacial de 24 elementos - Deslocamento vertical do nó 1 e a sensibilidade em relação ao módulo de elasticidade.	61
4.1	Representação gráfica dos métodos FORM e SORM.	69
4.2	Representação gráfica dos métodos MCS e IS.	71
4.3	Coluna com 45 barras.	74
4.4	Coluna com 45 barras - curvas de equilíbrio.	75
5.1	Viga em balanço.	87
5.2	Coluna de aço - dependência de β sobre o custo máximo admissível da estrutura [42].	91
6.1	Situações encontradas na análise estrutural [58].	96
6.2	RBDO-Fluxograma [41].	100
6.3	Treliça de 10 barras.	102
6.4	Cantoneira de abas iguais - Relação entre a área da seção transversal e o momento mínimo de inércia.	103
6.5	Treliça de 10 barras - Projeto ótimo: (a) presente trabalho; (b) Stocki et. al [74].	105
6.6	Treliça de 10 barras - Restrições e função objetivo ao longo das iterações.	106
6.7	Treliça espacial de 24 elementos.	107
6.8	Treliça espacial de 24 elementos - Restrições e função objetivo ao longo das iterações.	110

6.9	Treliça espacial de 24 elementos - Variação do volume em função do tipo de distribuição e do c.o.v. $[X_{27}]$.	111
-----	--	-----

Lista de tabelas

2.1	Treliça assimétrica em forma de arco - valores de carga crítica e deslocamento vertical dos nós 8 e 13.	47
2.2	Treliça espacial de 24 elementos - coordenadas nodais.	47
2.3	Treliça espacial de 24 elementos - valores de carga crítica e deslocamento vertical do nó 1 relativo a este nível de carregamento.	48
2.4	Treliça espacial de 24 elementos - valores de carga crítica e deslocamento vertical do nó 1 relativo a este nível de carregamento.	49
3.1	Treliça espacial de 24 elementos - Sensibilidades dos deslocamentos através do método analítico.	59
3.2	Treliça espacial de 24 elementos - Sensibilidades da carga crítica obtidas via DDM.	61
4.1	Distribuições de probabilidades.	63
4.2	Coluna com 45 barras - Seções transversais e materiais das barras.	74
4.3	Variáveis aleatórias do problema da coluna com 45 barras.	75
4.4	Coluna com 45 barras - Resultados com 22 variáveis para a função de falha associada ao deslocamento.	76
4.5	Coluna com 45 barras - Resultados com 4 variáveis para a função de falha associada ao deslocamento.	76
4.6	Coluna com 45 barras - Resultados para a função de falha associada à carga crítica linearizada.	77
5.1	RIA vs. PMA (Youn & Choi [82]).	80
5.2	Não-linearidades das restrições probabilísticas (Youn & Choi [82]).	80
5.3	Valores usuais dos parâmetros dos algoritmos.	84
5.4	Variáveis aleatórias do problema coluna retangular curta.	84
5.5	Coluna retangular curta - Resultados.	86
5.6	Coluna retangular curta - Resultados para diferentes pontos de partida.	86
5.7	Coluna retangular curta - Comparação dos resultados.	87
5.8	Variáveis aleatórias do problema da viga em balanço.	87
5.9	Viga em balanço - Resultados.	88
5.10	Viga em balanço - Resultados para diferentes pontos de partida.	89
5.11	Viga em balanço - Comparação dos resultados.	89
5.12	Coluna de aço - Variáveis aleatórias.	89
5.13	Coluna de aço - resultados.	90
5.14	Coluna de aço - Comparação dos resultados.	91
6.1	Treliça com 10 barras - variáveis randômicas e de projeto.	104
6.2	Treliça espacial de 24 elementos - variáveis randômicas e de projeto.	109
6.3	Treliça espacial de 24 elementos - Resultados para diversos tipos de distribuição da variável X_{27} .	111
B.1	Divisão dos problemas de Programação Matemática.	134

Lista de Símbolos, Siglas e Abreviaturas

Caracteres latinos

\mathbf{a}_i	Gradiente das restrição c_i ; $\mathbf{a}_i = \nabla c_i(\mathbf{b})$
A	Área da seção transversal
A_i	Área da seção transversal do elemento i
\mathbf{A}	Matriz dos gradientes das restrições
b	Variável de projeto
b_0	Aproximação inicial da diagonal da Hessiana
b_i	Termos independentes das restrições
b_z, g_z	Parâmetros do algoritmo SQP
\mathbf{b}	Vetor de variáveis: aleatórias ou de projeto, vetor dos coeficientes das forças de massa
\mathbf{b}_0	Vetor inicial das variáveis de projeto
\mathbf{B}	Aproximação da Hessiana, matriz que relaciona deslocamentos e deformações
\mathbf{B}^0	Parcela constante da matriz \mathbf{B}
\mathbf{B}^{nl}	Parcela linear da matriz \mathbf{B}
$\bar{\mathbf{B}}$	Matriz que relaciona os incrementos de deslocamento e deformações; $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}^0 + \mathbf{B}^{nl}$
c	Parâmetro de penalidade
$c_i(\cdot)$	Restrição do problema de otimização
\mathbf{c}	Vetor das restrições
C	Confiabilidade; $C = 1 - P_f$
\mathbf{C}	Matriz diagonal contendo os valores das restrições, constante da equação de restrição (determinação do caminho de equilíbrio)
\mathbf{d}	Direção de busca
\mathbf{D}	Matriz constitutiva
Δl	Comprimento de arco da trajetória de equilíbrio
E	Módulo de elasticidade
$E(\cdot)$	Valor médio, média, ou valor esperado
$f(\cdot)$	Função objetivo
\mathbf{f}	Vetor de forças internas do elemento
f_X	Função densidade de probabilidade (PDF); $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$
\mathbf{F}	Vetor de forças internas
F_X	Função cumulativa de distribuição (CDF)
$g_i(b, \mathbf{q}(b))$	Restrição i no problema de otimização
\mathbf{g}	Gradiente da função objetivo; $\mathbf{g} = \nabla f(\cdot)$
$G(\mathbf{u}), g(\mathbf{x})$	Função de performance; a falha é caracterizada por $G(\mathbf{u}) < 0, g(\mathbf{x}) < 0$
\mathbf{h}	Vetor de variáveis de projeto; $\mathbf{h} = [h_1, h_2, \dots, h_n]^T$
H	Deslocamento generalizado

Caracteres latinos (continuação)

$H^{(\omega+1)}, k$	Constantes da equação de restrição (determinação do caminho de equilíbrio)
\mathbf{H}	Hessiana da função objetivo; $\mathbf{H} = \nabla^2 f(\cdot)$
$I(\mathbf{u})$	Função indicadora; $I(\mathbf{u}) = 1$ se $g(\mathbf{x}) \leq 0$ e $I(\mathbf{u}) = 0$ nos outros casos
$\mathbf{J}_{\mathbf{u}, \mathbf{x}}$	Jacobiano da transformação probabilística
k_a, k_e, k_f	Parâmetros do algoritmo de pontos interiores
\mathbf{K}^0	Matriz de rigidez elástica linear padrão
\mathbf{K}^σ	Matriz de rigidez geométrica (ou de tensões iniciais)
\mathbf{K}^{nl}	Matriz de rigidez de <i>deslocamentos iniciais</i>
L	Comprimento do elemento
$\mathcal{L}(\cdot)$	Função Lagrangeana
\mathbf{L}_o	Matriz triangular inferior da decomposição de Cholesky da matriz de correlação \mathbf{R}_o
n_r	Número de iterações para o reinício da aproximação da Hessiana
ncc	Número de casos de carregamento
nr	Número de restrições
nvp	Número de variáveis de projeto
N_d	Número de iterações desejadas para cada incremento
N_i	Função de forma
tN	Número de iterações que foram necessárias para convergir no passo de carga anterior
\mathbf{N}	Matriz das funções de forma
$p(t)$	Função unidimensional utilizada na busca linear
P	Carga concentrada
$P(\cdot)$	Função de probabilidade
P_f	Probabilidade de falha
\tilde{q}	Campo de deslocamentos
\mathbf{q}	Vetor de deslocamentos nodais
\mathbf{q}_g	Parcela de $\delta \mathbf{q}$ referente às forças de referência \mathbf{Q}_{ref}
\mathbf{q}_r	Parcela de $\delta \mathbf{q}$ referente às forças de residuais \mathbf{R}
\mathbf{q}_t	Vetor de deslocamentos tangenciais
\mathbf{Q}	Vetor de cargas externas
\mathbf{Q}_{ref}	Vetor de cargas externas de referência
r_i	Fatores de penalidades na busca linear
\mathbf{R}	Vetor resíduo nodal, matriz de correlação
\mathbf{R}_o	Matriz de correlação modificada
$\text{sign}(\cdot)$	Sinal da função: ± 1
t	Tamanho do passo a ser dado ao longo da direção de busca
t_i	Força de tração atuando na superfície Γ_t
tol_1	Tolerância para convergência do algoritmo SQP
tol_2	Tolerância para violação de restrições do algoritmo SQP
tol_3	Tolerância para convergência do algoritmo IP
\mathbf{T}	Transformação de \mathbf{U} para \mathbf{X}

Caracteres latinos (continuação)

u, v, w	Componentes do campo de deslocamentos
\mathbf{u}	Variáveis aleatórias normais padrão correlacionadas; $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$
$\mathbf{u}_{G(\mathbf{u})=0}^*$	Ponto mais provável de falha (MPP) na formulação RIA.
$\mathbf{u}_{\beta=\beta_t}^*$	MPP na formulação PMA.
V	Volume
dV	Elemento diferencial de volume
$\text{Var}(X)$	Variância de X ; $\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu_X^2$
\mathbf{v}	Autovetor associado com o autovalor nulo da matriz \mathbf{K} , modo de flambagem da estrutura
\mathbf{x}	Vetor de variáveis aleatórias; $\mathbf{x} = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$
X	Variável aleatória
z_1, z_2, z_3	Coordenadas cartesianas
z_i^j	Coordenada na direção i do nó j
\mathbf{z}	Variáveis aleatórias normais padrão não correlacionadas; $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$
\mathbf{W}^*	Hessiana da função Lagrangeana; $\mathbf{W}^* = \nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{b}^*)$
Y	Variável aleatória auxiliar; $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$

Caracteres gregos

α	Seqüência de valores utilizados na busca linear
α_i	Cosseno diretor com relação a variável u_i do vetor normal a superfície de falha no ponto de projeto e no espaço das variáveis reduzidas
β	Índice de confiabilidade; $\beta = -\Phi^{-1}(P_f)$
β_t	Índice de confiabilidade alvo
$\delta(\cdot)$	Correção iterativa, indicador variacional
$\Delta(\cdot)$	Perturbação finita, incremento
δ_X	Coefficiente de variação de X ; $\delta_X = \text{c.o.v.} = \frac{\sigma_x}{\mu_x}$
ϵ	Vetor das deformações
ϵ_{ij}	Deformações de Green-Lagrange
η	Parâmetros determinísticos
γ	Parâmetro de controle na busca linear
$\Gamma(x)$	Função Gamma
Γ_t	Superfície
λ	Fator de carga, parâmetro da distribuição Lognormal
Λ	Matriz diagonal para a qual $\Lambda_{ii} = \kappa_i$
μ	Média dos parâmetros randômicos \mathbf{x} ; $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]^T$
κ	Multiplicadores de Lagrange
μ_X	Média da variável aleatória X
$\nabla(\cdot)$	Operador gradiente
$\Phi(\cdot)$	Função de distribuição cumulativa normal padrão
ρ	Coefficiente de deflexão da direção de busca, massa específica, coeficiente de correlação

Caracteres gregos (continuação)

σ	Vetor das tensões
θ	Parâmetros das variáveis randômicas (média e desvio padrão)
φ	Função densidade de probabilidade normal padrão
φ_2	Função densidade de probabilidade bidimensional normal padrão
ξ	Parâmetro da distribuição Lognormal
ζ_1	Fator de convergência baseado em relações de força
ζ_2	Fator de convergência baseado em relações de deslocamentos
ζ	Tolerância ao resíduo requerida no processo de convergência
σ_X	Desvio padrão de X ; $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$
ρ_o	Coefficiente de correlação aproximado

Sobrescritos e Subscritos

$^t(\cdot)$	Função avaliada no instante t
$^{t+\Delta t}(\cdot)$	Função avaliada no instante $t + \Delta t$
$(\cdot)^{(\omega)}$	Função avaliada no iteração ω
$(\cdot)^*$	Função avaliada no ponto crítico ou no ponto ótimo
$(\cdot)^T$	Transposta do vetor ou matriz
$(\cdot)_{ij}$	Notação indicial
$(\cdot)^l$	Limite inferior da variável de projeto
$(\cdot)^u$	Limite superior da variável de projeto
$(\cdot)^{-1}, [\cdot]^{-1}$	Inversa de uma matriz

Siglas e Abreviaturas

AMV	Método Valor Médio Avançado (do inglês <i>Advanced Mean Value methods</i>)
ASM	Método Adjunto de Sensibilidade (do inglês <i>Adjoint System Method</i>)
CDF	Função Cumulativa de Distribuição (do inglês <i>Cumulative Distribution Function</i>)
DDM	Método da Diferenciação Direta (do inglês <i>Direct Differentiation Method</i>)
DDO	Otimização Determinística (do inglês <i>Deterministic Design Optimization</i>)
DEC	Departamento de Engenharia Civil
DEM	Departamento de Engenharia Mecânica
DLM	Método de Duplo Laço (do inglês <i>Double-loop RBDO methods</i>)

Siglas e Abreviaturas (continuação)

DSA	Análise de Sensibilidade (do inglês <i>Design Sensitivity Analysis</i>)
FEA	Análise de Elementos Finitos (do inglês <i>Finite element Analysis</i>)
FORM	Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (do inglês <i>First Order Reliability Method</i>)
GDCM	Método do Controle de Deslocamento Generalizado (do inglês <i>Generalized Displacement Control Method</i>)
GL	Deformações de Green-Lagrange
GSP	Parâmetro de Rigidez Geral (do inglês <i>General Stiffness Parameter</i>)
HLRF	Algoritmo de Hasofer–Lind–Rackwitz–Fiessler
IP	Algoritmo de Pontos Interiores (do inglês <i>Interior Point</i>)
IRA	Problema de Confiabilidade Inverso (do inglês <i>Inverse Reliability Analysis</i>)
IS	Amostragem por Pontos de Importância (do inglês <i>Importance Sampling</i>)
KKT	Karush–Kuhn–Tucker
LCP	Problema Linear Complementar
MCS	Simulação de Monte Carlo (do inglês <i>Monte Carlo Simulation</i>)
MDF	Método das Diferenças Finitas
MPP	Ponto Mais Provável de Falha (do inglês <i>Most Probable Point</i>)
MVFOSM	Método Valor Médio Primeira Ordem Segundo Momento (do inglês <i>Mean-Value-First-Order Second-Moment</i>)
MV	Método Valor Médio (do inglês <i>Mean Value method</i> , ou <i>MV-FOSM</i>)
NLPQLP	Algoritmo de Programação Quadrática Sequencial
OOP	Programação Orientada a Objetos (do inglês <i>Object Oriented Programming</i>)
OPT	Módulo de Otimização
PBDO	Otimização Baseada em Possibilidade (do inglês <i>Possibility-Based Design Optimization</i>)
PDF	Função Densidade de Probabilidade (do inglês <i>Probability Density Function</i>)
PK2	Tensões de Piola-Kirchhoff II
PMA	Formulação de Medida de Performance (do inglês <i>Performance Measure Approach</i>)
PM	Programação Matemática
PQ	Programação Quadrática
PSF	Fator de Suficiência Probabilística (do inglês <i>Probability Sufficiency Factor</i>)

Siglas e Abreviaturas (continuação)

RBDO	Otimização Baseada em Confiabilidade (do inglês <i>Reliability Based Design Optimization</i>)
RIA	Formulação do Índice de Confiabilidade (do inglês <i>Reliability Index Approach</i>)
RLA	Referencial Lagrangeano Atualizado
RLT	Referencial Lagrangeano Total
RSA	Aproximação por Superfície de Resposta (do inglês <i>Response Surface Approximation</i>)
SORM	Método de Confiabilidade de Segunda Ordem (do inglês <i>Second Order Reliability Method</i>)
SQP	Programação Quadrática Seqüencial (do inglês <i>Sequential Quadratic Programming</i>)
c.o.v	Coeficiente de Variação

1

Introdução

1.1

Considerações Iniciais e Objetivos

O desejo de se obter o projeto ideal, considerando aspectos relacionados com o consumo, desempenho ou eficiência, tais como quantidades mínimas de peso, volume ou massa, sempre foi um dos principais objetivos da engenharia estrutural. Ao longo das últimas décadas, a otimização estrutural vem se destacando dentro da engenharia. O crescente desenvolvimento dos microcomputadores aliado à automação dos procedimentos de análise viabilizaram a sua aplicação. Desta forma, as técnicas de otimização numérica se tornaram valiosas na busca pelo projeto ótimo.

Nos projetos de engenharia há, freqüentemente, incertezas associadas às propriedades dos materiais, às propriedades geométricas e aos carregamentos. A maneira mais comum e tradicional para se levar em conta estas incertezas é através da definição dos valores de projeto como o resultado do produto do valor característico das variáveis aleatórias por um fator parcial de segurança. Esta solução, no entanto, falha ao não permitir a quantificação da confiabilidade do projeto ótimo uma vez que um fator grande de segurança pode não significar uma confiabilidade mais alta.

Para se considerar a natureza probabilística de quantidades como propriedades dos materiais, carregamentos, etc., tem-se que identificar e definir estas quantidades como variáveis aleatórias no modelo de análise. Diversas técnicas de quantificação das incertezas e análise de confiabilidade estão hoje disponíveis, deste modo, é uma extensão natural a incorporação destas técnicas no processo de otimização.

A consideração das incertezas nos processos de otimização levou a diversas áreas de conhecimento, entre elas: o projeto robusto, onde se otimiza de maneira a reduzir-se a variabilidade da resposta do sistema; e a otimização baseada em confiabilidade (RBDO, do inglês *Reliability Based Design Optimization*), onde o foco é se otimizar uma função custo garantindo a confiabilidade. No presente trabalho somente problemas de RBDO serão abordados, onde se

referindo exclusivamente ao projeto ótimo onde a função custo (ou função objetivo) é minimizada e restrições de confiabilidade ao invés de restrições determinísticas são utilizadas.

RBDO deve ser considerada como um importante ingrediente no projeto de estruturas, entretanto quando envolve a análise da resposta de estruturas de grande porte, particularmente com comportamento não-linear, sérias limitações, geralmente relacionadas com a baixa eficiência computacional, podem aparecer. O processo RBDO envolve análise estrutural via elementos finitos (FEA, do inglês *Finite Element Analysis*), análise de sensibilidade (DSA, do inglês *Design Sensitivity Analysis*), confiabilidade estrutural e ainda otimização. A metodologia de solução comumente empregada é através de dois níveis, chamada de método de duplo laço (DLM, do inglês *Double-Loop RBDO Method*), onde no primeiro nível tem-se o problema de otimização propriamente dito e, no segundo, a avaliação das restrições de confiabilidade. Em ambos os níveis FEA e DSA são empregadas de maneira intensa, desta forma formulações eficientes e precisas para a avaliação da resposta estrutural e de suas sensibilidades são necessárias.

Em RBDO existem duas maneiras de se modelar o problema, na primeira e mais tradicional usam-se medidas diretas da confiabilidade, chamada de formulação do índice de confiabilidade (RIA, do inglês *Reliability Index Approach*). Na segunda, desenvolvida mais recentemente, modela-se através do problema inverso de confiabilidade (IRA, inglês *Inverse Reliability Analysis*), onde o nome vem do uso da inversa da função cumulativa de distribuição. Neste último a confiabilidade não é determinada diretamente, mas sim uma medida de performance da estrutura para um dado nível de probabilidade desejada [43, 76, 63].

Na avaliação da confiabilidade podem-se usar os métodos de simulação (ou técnicas de Monte Carlo), os métodos analíticos de primeira e segunda ordem (FORM/SORM), além de métodos mistos ou híbridos. Nos métodos de simulação são gerados eventos aleatórios para simular um experimento. Onde, para se ter uma precisão adequada, necessita-se de um grande número de simulações. Em RBDO, em particular neste trabalho, este método é impraticável devido ao tempo despendido em FEA para a avaliação das simulações. Em função disto os métodos de simulação são utilizados neste trabalho somente para validar os resultados obtidos pelos métodos (FORM/SORM).

Nos métodos analíticos FORM/SORM um dos passos fundamentais é a determinação do ponto de projeto, ou ponto mais provável de falha (MPP, do inglês *Most Probable Point*). Em alguns casos a determinação deste ponto não tem sucesso, o algoritmo falha ao tentar achar a solução, especialmente no

caso de probabilidades de falha muito pequenas. Desta forma, diversos autores modelaram o problema de RBDO através de uma medida de performance. Neste caso, ao invés de se determinar diretamente a confiabilidade verifica-se a função de medida de performance para um valor de confiabilidade desejado.

No processo de otimização, os algoritmos de programação quadrática sequencial (SQP) bem como os de pontos interiores (IP) são comumente empregados. Na análise de confiabilidade, os métodos de primeira e segunda ordem (FORM/SORM) são usados quando as sensibilidades estão disponíveis. Tanto a otimização estrutural quanto os algoritmos FORM/SORM necessitam dos gradientes da resposta estrutural (sensibilidade). A convergência destes processos é, portanto, fortemente influenciada pela qualidade das sensibilidades calculadas. A análise de sensibilidade de estruturas tem apresentado grandes progressos nos últimos anos e as equações básicas já são bem conhecidas [40, 29, 68].

A implementação de um sistema computacional, envolvendo as áreas de programação matemática, análise estrutural, análise de sensibilidade e análise de confiabilidade é um grande desafio, pois cada um destes temas isoladamente se constitui em uma área de conhecimento bastante vasta, tanto no aspecto teórico como computacional. Deste modo, o presente trabalho tem como objetivo principal desenvolver um sistema computacional para otimização de treliças espaciais baseada em confiabilidade. Para isto será adotado o paradigma de análise, projeto e programação orientada a objetos de maneira a criar um programa extensível e robusto.

Por fim, destaca-se que o presente trabalho é parte integrante de algumas linhas de pesquisa do DEC/PUC-Rio, em particular das linhas: *‘Aplicação de Técnicas de Otimização’*, *‘Instabilidade e Dinâmica das Estruturas’* e *‘Computação Gráfica Aplicada’*.

1.2

Escopo do Trabalho

Para facilitar o entendimento, este trabalho foi dividido em diversos capítulos, cujo conteúdo é apresentado a seguir.

Ainda neste capítulo, na seção 1.3, é feita uma pequena revisão bibliográfica onde uma atenção especial é dada aos trabalhos recentes sobre otimização baseada em confiabilidade.

No capítulo 2 estuda-se a análise não-linear geométrica estática de estruturas através do Método dos Elementos Finitos. A formulação utilizando o referencial Lagrangeano Total (RLT) para elementos de treliça espacial é discutida em detalhes. Os métodos de determinação do caminho de equilíbrio

de estruturas não-lineares são apresentados, assim como os métodos de determinação de pontos críticos. São apresentados exemplos numéricos que validam os procedimentos numéricos implementados.

No capítulo 3 é feita uma explanação sobre a análise de sensibilidade da resposta de um modelo de elementos finitos com comportamento geometricamente não-linear. São apresentados os conceitos básicos de análise de sensibilidade, dentre eles o método analítico, o método semi-analítico e o método das diferenças finitas. As avaliações dos gradientes dos deslocamentos, tensões e da carga crítica são apresentadas de maneira global e de maneira local (a nível do elemento). Alguns exemplos numéricos são apresentados com o objetivo de validar as implementações.

No capítulo 4 os conceitos gerais de análise de confiabilidade são apresentados. São revistos rapidamente os métodos de simulação de Monte Carlo e o de amostragem por pontos de importância. Porém, uma atenção maior é dada aos métodos analíticos de primeira e segunda ordem. A análise de sensibilidade da confiabilidade também é apresentada neste capítulo. Alguns exemplos de estruturas são avaliados e os resultados obtidos são comentados.

No capítulo 5 a formulação para problemas de otimização baseada em confiabilidade é apresentada. Uma discussão sobre os métodos de avaliação das restrições probabilísticas é apresentada de maneira a facilitar a escolha entre um e outro. Alguns procedimentos para acelerar o processo de RBDO são discutidos, dentre eles as linearizações da função de estado limite e a escolha de pontos iniciais para a avaliação das restrições probabilísticas. Alguns exemplos disponíveis na literatura são avaliados e comentados.

No capítulo 6 é apresentada a formulação do modelo de otimização a ser empregado. O modelo proposto inclui funções de estado limite associadas aos deslocamentos, às tensões e à carga crítica, podendo ser utilizado tanto para estruturas lineares quanto não-lineares. Também são apresentados os programas que fazem parte do sistema computacional para a otimização de forma e de dimensões e exemplos de estruturas treliçadas planas e espaciais otimizadas por este sistema.

No capítulo 7 são apresentadas as conclusões relativas ao emprego e implementações das diversas formulações e metodologias utilizadas nas análises numéricas envolvidas neste trabalho. Em seguida são apresentadas algumas sugestões para o desenvolvimento de pesquisas futuras.

No anexo A os principais conceitos sobre variáveis aleatórias são apresentados. Algumas funções de distribuição de probabilidades existentes na literatura também são apresentadas.

Finalmente, no anexo B são apresentados os conceitos gerais de pro-

gramação matemática e os algoritmos utilizados neste trabalho.

1.3

Revisão Bibliográfica

As áreas de estudo que compõem este trabalho podem ser divididas em análise estrutural, análise de sensibilidade, confiabilidade e otimização estrutural. Quanto às duas primeiras áreas, será apresentado nos capítulos correspondentes uma breve compilação da literatura sem grande aprofundamento, uma vez que são técnicas bastante conhecidas. Já em relação à confiabilidade e otimização estrutural, aqui incluindo a otimização baseada em confiabilidade, procurou-se abordar os principais trabalhos realizados a fim de situar o presente trabalho.

As técnicas de otimização vêm sendo largamente aplicadas a problemas de engenharia estrutural no DEC/PUC-Rio e diversos trabalhos vêm sendo publicados nesta área. O trabalho de Eboli [13] foi o precursor desta linha e traz uma descrição detalhada do algoritmo de Han-Powell de programação não-linear. Parente [58] estudou a otimização de forma de estruturas geometricamente não-lineares. Mais recentemente, o autor deste trabalho [59] estudou a otimização de dimensões de estruturas reticuladas planas considerando a não-linearidade geométrica e restrições na carga crítica.

A Análise de Confiabilidade Estrutural é um tema novo na PUC-Rio e poucos trabalhos foram publicados nesta área. No DEC, Müller [52] fez a otimização de estruturas reticuladas planas considerando incertezas. Nesse trabalho foi empregada uma análise estatística linear para a determinação da resposta estatística da estrutura e foi considerado um comportamento linear elástico com restrições em tensão e deslocamento. Ainda no DEC, Almeida [3], Figueiredo [23] e Sampaio [71] empregam a confiabilidade dependente do tempo para avaliar espectros de respostas com probabilidade uniforme em estruturas civis e mecânicas de usinas nucleares. No Departamento de Engenharia Mecânica (DEM), Carvajalino [8] fez a análise de confiabilidade de dutos corroídos empregando métodos de primeira ordem (FORM) e também simulação de Monte Carlo.

Em Imai & Frangopol [37] e Frangopol & Imai [24], é apresentada a análise de confiabilidade de estruturas geometricamente não lineares. Nesse trabalho são considerados elementos de treliça e pórtico planos. Os gradientes são calculados analiticamente.

Sagrilo [69] aplica a análise de confiabilidade a estruturas *offshore*, mais especificamente plataformas fixas (jaquetas) modeladas com elementos de treliça e pórtico espaciais. Neste trabalho dois critérios de falha são

adotados, um em relação ao deslocamento horizontal máximo no topo da estrutura e outro com relação a resistências em algumas juntas selecionadas. Em Hernández [35] a análise de confiabilidade é usada para calibração de fatores parciais de segurança.

Diversos trabalhos sobre RBDO, nas aplicações mais diversas, são encontrados na literatura. Nakib [54] compara a otimização determinística com a RBDO de pontes modeladas com elementos de treliça. São consideradas como variáveis aleatórias a tensão de escoamento e os carregamentos aplicados. Em Kleiber et. al. [41], é apresentada a otimização baseada em confiabilidade de treliças de maneira bastante similar ao proposto neste trabalho.

Em Yang & Gu [80] são discutidas técnicas de RBDO aproximadas e comparadas com o método usual de duplo loop. Em Allen & K. Maute [2] RBDO é aplicada em problemas aeroelásticos.

Diversos autores desenvolveram problemas usando medidas inversas de confiabilidade (ou performance), em especial Lee & Kwak [43], Tu et al. [76] e Qu & Haftka [63] descritos a seguir.

Lee & Kwak [43] usaram a formulação inversa em RBDO e mostraram que ela é preferível quando a probabilidade de falha é muito pequena em algumas regiões do espaço de projeto, fazendo com que o índice de confiabilidade tenda ao infinito. Mais recentemente, Tu et al. [76] denominaram esta formulação de medida de performance (PMA, do inglês *Performance Measure Approach*).

Qu & Haftka [63] modelaram o problema de RBDO através de uma medida de performance, neste caso chamado de fator de suficiência probabilística (PSF, do inglês *Probability Sufficiency Factor*). O PSF é uma medida de performance que permite se conhecer qual é a situação da estrutura em termos de segurança em relação ao nível de confiabilidade alvo. São explorados problemas de RBDO com múltiplos modos de falha através do método de Monte Carlo (MCS, do inglês *Monte Carlo Simulation*) e aproximação por superfície de resposta (RSA, do inglês *Response Surface Approximation*).

Choi & Youn [9] e Youn et al. [81] apresentam diferentes algoritmos para a avaliação das restrições probabilísticas formuladas via PMA. Os autores destacam os problemas de instabilidade na solução formulada via RIA e enfatizam que a formulação PMA é robusta e eficiente. Entretanto, alguns problemas formulados via PMA resolvidos com o algoritmo AMV¹ apresentam problemas, principalmente para funções de falha côncavas. Desta maneira os algoritmos CVM (do inglês *Conjugate Mean Value*) e o HVM (do inglês *Hybrid Mean Value*) são propostos a fim de garantir robustez e eficiência na avaliação

¹a nomenclatura adotada neste trabalho se confunde com utilizada no presente trabalho, onde, AMV significa uma linearização da função de estado limite.

das restrições probabilísticas formuladas via PMA.

Youn & Choi [82] investigaram as não-linearidades envolvidas em RBDO para as restrições probabilísticas formuladas como RIA e PMA. Diversos tipos de distribuição são estudados a fim de apresentar as não-linearidades envolvidas nas transformações probabilísticas. Como conclusão, os autores indicam que a formulação RIA depende muito mais da transformação probabilística que a formulação PMA. Desta forma, PMA trabalha com uma variedade maior de distribuições sem um acréscimo expressivo no número de avaliações da função de estado limite. Ainda, é apresentado que RIA falha na convergência para distribuições com limites (p. ex. Uniforme) e distribuições de extremos (p. ex. Gumbel).

Geralmente, a RBDO é cara computacionalmente, requerendo muito mais avaliações do que um problema DDO correspondente. Diante disto, várias técnicas numéricas tem sido propostas de maneira a se reduzir o esforço computacional [28]. No trabalho de Riha & et al. [65, 66] é proposto que quando a função de estado limite for cara computacionalmente, uma aproximação de Taylor de primeira ordem pode ser feita e o ponto mais provável de falha é obtido usando esta aproximação. Da mesma forma, Grandhi & Wang [28] usam uma aproximação não-linear adaptativa para a função de estado limite, chamada de TANA (*Two-point Adaptive Nonlinearity Approximation*). Em Eldred et al. [14, 15] e Eldred & Bichon [16] uma variedade de aproximações para a função de estado limite são apresentadas, complementando as supracitadas. Neste trabalho diversos exemplos simples são apresentados de maneira a comparar a eficiência de cada linearização.

Além das aproximações para a função de estado limite, outras técnicas podem ser usadas para se reduzir o custo computacional. Kleiber et al. [41] apresentam um sistema de RBDO interativo para treliças geometricamente não-lineares, que tem como objetivo superar as dificuldades de um sistema totalmente automático para estruturas de grande porte. Os autores controlam interativamente os parâmetros da análise estrutural e da análise de confiabilidade, adicionando ou removendo restrições ou alterando os *status* das variáveis.

2

Análise Não-Linear Geométrica

2.1

Comentários Iniciais

Este capítulo começa com uma breve discussão sobre o comportamento não linear, o objetivo da análise não linear, e o seu lugar na engenharia estrutural. As fontes de não linearidade mais importantes no projeto de estruturas reticuladas são listadas e a formulação do problema será definida, onde são apresentados os referenciais Lagrangeanos. Estratégias para a solução numérica de equações não lineares são mostradas, bem como as estratégias de incremento de carga, as estratégias de iteração e os critérios de convergência. O capítulo termina mostrando soluções clássicas existentes de alguns problemas encontrados na literatura.

2.2

Comportamento Não-Linear, Análise e Projeto

O objetivo da análise estrutural é determinar o comportamento da estrutura quando submetida a ações externas, ou seja, obter tensões, deformações e deslocamentos. Baseado nos resultados dessa análise, engenheiros estão aptos a verificar se o projeto proposto possui os requisitos de resistência e bom comportamento em serviço necessários para garantir o funcionamento e segurança da estrutura segundo critérios de projeto predefinidos. Nos capítulos seguintes será visto também que estas análises são empregadas para se verificar as restrições de projeto, no caso de problemas de otimização, e as funções de falha no caso de problemas de confiabilidade. Conseqüentemente, o processo de análise desempenha papel chave e deve ser o mais eficiente e preciso possível.

A maioria das estruturas de engenharia exibem um comportamento próximo ao linear elástico sob cargas de serviço. Existem exceções como arcos e edifícios altos, e estruturas sujeitas a um escoamento localizado prematuro ou fissuração, por exemplo, que, geralmente, apresentam um comportamento não-linear. Antes de alcançar o seu limite de resistência, quase todas essas estruturas vão apresentar uma resposta não-linear significativa. Por esta razão,

a maioria das normas modernas baseadas no modelo de resistência última têm incorporado certas medidas para a consideração da não-linearidade.

Outro fator que deve ser observado é a constante evolução no desenvolvimento de materiais de alta resistência, principalmente em áreas como engenharia aeroespacial, mecânica e também obras civis de grande porte, onde, se obtém estruturas muito esbeltas e conseqüentemente com um acentuado comportamento não linear.

Na análise não-linear tenta-se melhorar a simulação do comportamento de uma estrutura em alguns aspectos. O objetivo fundamental é se obter para fins de projeto uma previsão segura do comportamento do sistema. Como conseqüência, tem-se um aumento da complexidade do problema e conseqüente aumento do custo computacional.

Nas últimas décadas, vêm ganhando cada vez mais destaque os métodos e procedimentos de análise não-linear, em especial de sistemas estruturais reticulados, devido ao fato de oferecerem uma análise rápida e eficaz de muitas estruturas reais, sejam estas de edifícios, aeroespaciais ou *offshore*. Vários pesquisadores têm desenvolvido formulações ou proposições geometricamente não-lineares para elementos finitos com a finalidade de se examinar o comportamento não-linear de estruturas, entre elas as treliças planas e espaciais (Crisfield [11]; Yang & Kuo [79]).

Desde a década de 60 várias formulações geometricamente não-lineares foram introduzidas com soluções diretas e/ou incrementais (Galvão [25, 26]). Um amplo histórico da evolução das metodologias e estratégias de análise não-linear pode ser encontrado no trabalho de Rocha [67], que teve como objetivo principal o estudo e a implementação computacional de algumas estratégias de incremento de carga e de iteração encontradas na literatura para análise do equilíbrio e da estabilidade de sistemas estruturais esbeltos.

Além das referências supracitadas, merecem destaque, e serviram como base para o desenvolvimento deste trabalho, os trabalhos de Bathe [6], Cook et. al [10], Zienkiewicz [85], entre outros referenciados ao longo do texto.

2.2.1

Fontes de Não-Linearidade

O comportamento não-linear de uma estrutura, sob ação de um carregamento qualquer, pode ser classificado de acordo com seus efeitos. Dentre as várias fontes de não linearidade, destacam-se:

Não-linearidade Física. Decorre do fato do material não apresentar uma relação tensão-deformação linear (não segue a lei de Hooke), isto é, o comportamento do material não é elástico linear. Os efeitos não lineares

são descritos por formas mais complexas de equações constitutivas (matrizes constitutivas não-lineares e/ou equações constitutivas em termos de “taxas” ou “incrementos”). Pode-se ter também não linearidade física nas relações momento-rotação de conexões semi-rígidas ou flexíveis, ou de rótulas inelásticas oriundas de mecanismos de colapso localizados (flambagem, plastificação ou fissuração localizadas em componentes estruturais). O principal problema computacional na análise envolvendo não linearidade física é que as equações de equilíbrio devem ser escritas para a estrutura utilizando propriedades do material que dependem das deformações, as quais, a priori, não são conhecidas.

Não-Linearidade Geométrica. Uma estrutura pode ter um comportamento não-linear, ainda que constituída de um material que obedeça à lei de Hooke. Para valores relativamente grandes de deslocamentos, as deformações de um membro podem trazer como conseqüências, o aparecimento de esforços adicionais acompanhados de modificações na rigidez da estrutura (denominados de segunda ordem), sob um certo carregamento aplicado. A esse tipo de comportamento não-linear, dá-se o nome de não-linearidade geométrica. Neste caso os efeitos não lineares estão associados às equações de equilíbrio, que consideram a configuração deformada, e as relações deformação-deslocamento.

No presente trabalho será considerada somente a não-linearidade geométrica, enquanto a não linearidade física e problemas dependentes do tempo serão inteiramente excluídos.

2.3

Formulação para a Análise Não-Linear Geométrica de Estruturas Reticuladas

A formulação para a análise não-linear geométrica de estruturas tem seus fundamentos teóricos na teoria da elasticidade não-linear, que faz parte da mecânica dos sólidos. A não-linearidade geométrica aparece, na teoria da elasticidade tanto nas equações de equilíbrio, que são escritas utilizando-se as configurações deformadas do corpo, quanto nas relações deformação-deslocamento, que incluem termos não lineares nos deslocamentos e suas derivadas.

2.3.1

Descrição do Problema

Neste trabalho, um procedimento incremental-iterativo será utilizado para traçar o caminho de equilíbrio da estrutura ao longo do tempo.

Tendo-se por base um estado de equilíbrio conhecido, em uma configuração t , os procedimentos incrementais iterativos procuram determinar o

próximo estado de equilíbrio, em uma nova configuração $t + \Delta t$. As equações incrementais de equilíbrio são obtidas a partir de aproximações lineares para os incrementos de deslocamentos e deformações. Portanto, o equilíbrio em $t + \Delta t$ não é satisfeito exatamente e é necessário utilizar um procedimento iterativo em cada passo de carga. Estes procedimentos serão estudados posteriormente.

Existem duas formas de descrição do movimento de um ponto material p , a descrição Lagrangeana e a Euleriana [48]. Para a análise de estruturas a formulação Lagrangeana é mais natural, sendo aqui empregada. Na formulação Lagrangeana usa-se as coordenadas de pontos materiais referidas à estrutura indeformada (configuração 0) ou a uma estrutura de referência temporária (configuração t). No referencial Lagrangeano Total (RLT), todas as variáveis estáticas e cinemáticas no tempo $t + \Delta t$ são referidas à configuração inicial (indeformada) da estrutura. Por outro lado, no referencial Lagrangeano Atualizado (RLA), todas as variáveis estáticas e cinemáticas são referidas à última configuração de equilíbrio da estrutura.

Comumente, as formulações RLT e RLA têm sido usadas na análise incremental não-linear de estruturas. Quando desenvolvidas consistentemente, as duas formulações geram matrizes de rigidez global e vetor de forças idênticos [6]. Ao longo deste trabalho, o RLT será adotado pela simplicidade na aplicação das técnicas de sensibilidade [37], como será visto no capítulo seguinte.

2.3.2

Princípio dos Deslocamentos Virtuais

As deformações de Green-Lagrange ϵ_{ij} são calculadas, a partir do campo de deslocamentos \tilde{q} , através da expressão:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\tilde{q}_{i,j} + \tilde{q}_{j,i} + \tilde{q}_{k,i} \tilde{q}_{k,j}) \quad (2-1)$$

onde $\tilde{q}_{i,j}$ denota a derivada das componentes (u, v, w) do campo de deslocamentos em relação às coordenadas cartesianas (z_1, z_2, z_3) . É importante notar que estas coordenadas dizem respeito à configuração inicial da estrutura.

A expressão dos deslocamentos virtuais para corpos deformáveis é dado por:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_{\Gamma_t} t_i \delta \tilde{q}_i dV + \int_{\Omega} \rho b_i \delta \tilde{q}_i dV \quad (2-2)$$

onde ρb_i são as forças de massa atuando no corpo, t_i é a força de tração atuando na superfície Γ_t .

Com a discretização do campo de deslocamentos pelo método dos elementos finitos, os termos da equação (2-2) podem ser representados por produtos

de matrizes e vetores como segue:

$$\tilde{q}_i = N_{ip} q_p \quad (2-3)$$

Desta forma a discretização espacial da eq. (2-3) aplicada na eq. (2-2) tem como resultado:

$$\int_{\Omega} \sigma_p \underbrace{\bar{B}_{pq} \delta q_q}_{\delta \epsilon_p} dV = \int_{\Gamma_t} t_i N_{iq} \delta q_q dA + \int_{\Omega} \rho b_i N_{iq} \delta q_q dV \quad (2-4)$$

onde σ_p é o tensor de tensões em notação vetorial. Tomando-se um campo de deslocamentos virtuais arbitrários que satisfaça as restrições cinemáticas pode-se escrever a eq. (2-4) como segue:

$$\underbrace{\int_{\Omega} \sigma_p \bar{B}_{pq} dV}_{F_p} = \underbrace{\int_{\Gamma_t} t_i N_{iq} dA + \int_{\Omega} \rho b_i N_{iq} dV}_{Q_p} \quad (2-5)$$

onde F_p é o vetor de forças internas e Q_p é o vetor de forças externas. Matricialmente tem-se

$$\int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dA + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{b} dV \quad (2-6)$$

O vetor de forças internas F_p , conforme (2-5), depende implicitamente dos deslocamentos através do vetor de tensões σ_p e também da matriz \bar{B}_{pq} no caso de se considerar o comportamento não-linear geométrico.

Os métodos de solução de equações baseados em iterações de Newton-Raphson precisam, além dos vetores de forças internas e externas, da matriz de rigidez da estrutura. É importante ressaltar que a matriz de rigidez global e os vetores globais de forças internas e externas são montados somando-se as contribuições dos elementos (ver seção (2.3.3)). A matriz de rigidez tangente é determinada através da diferenciação do vetor de forças internas em relação aos deslocamentos nodais [85, 6, 11]. Desta forma, pode ser obtida através da definição da F_q a partir da equação (2-5), onde $F_p = \int_{\Omega} \sigma_p \bar{B}_{pq} dV$. Quando não se considera os efeitos da não linearidade geométrica, a tangente da força interna é a seguinte:

$$\begin{aligned} K_{qp}^0 = \frac{\partial F_p}{\partial q_p} &= \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_r}{\partial q_p} B_{rq}^0 dV \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \epsilon_s} \frac{\partial \epsilon_s}{\partial q_p} B_{rq}^0 dV \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \epsilon_s} B_{sp}^0 B_{rq}^0 dV \end{aligned} \quad (2-7)$$

No caso geral a matriz \bar{B} depende dos deslocamentos, desta forma:

$$\begin{aligned}
K_{qp} = \frac{\partial F_p}{\partial q_p} &= \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_r}{\partial q_p} \bar{B}_{rq} dV + \int_{\Omega} \sigma_r \frac{\bar{B}_{rq}}{q_p} dV \\
&= \int_{\Omega} \bar{B}_{rq} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \epsilon_s} \bar{B}_{sp} dV + \int_{\Omega} \sigma_r \frac{\bar{B}_{rq}}{q_p} dV \\
&= \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \epsilon_s} (B_{sp}^0 + B_{sp}^{nl}) (B_{rq}^0 + B_{rq}^{nl}) dV + \int_{\Omega} \sigma_r \frac{\bar{B}_{rq}}{q_p} dV \\
&= \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \epsilon_s} (B_{sp}^0 B_{rq}^0) dV \\
&\quad + \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \epsilon_s} (B_{sp}^0 B_{rq}^{nl} + B_{sp}^{nl} B_{rq}^0 + B_{sp}^{nl} + B_{rq}^{nl}) dV \\
&\quad + \int_{\Omega} \sigma_r \frac{\bar{B}_{rq}}{q_p} dV \\
&= K_{qp}^0 + K_{qp}^{nl} + K_{qp}^{\sigma}
\end{aligned} \tag{2-8}$$

Na equação 2-8, o termo K_{qp}^0 fornece a matriz de rigidez elástica linear padrão, enquanto que o termo K_{qp}^{nl} fornece a matriz de rigidez de *deslocamentos iniciais*. Por fim, o termos K_{qp}^{σ} fornece a matriz de rigidez geométrica (ou de tensões iniciais).

2.3.3

Montagem das Equações da Estrutura

Um ponto chave no método dos elementos finitos é a avaliação das integrais de volume para se obter a matriz de rigidez e o vetor de forças internas. O domínio do problema estudado é dividido em elementos conectados a nós. As integrais são calculadas para cada elemento e compostas da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} (\cdot) dV = \bigcup_{el} \int_{\Omega_{el}} (\cdot) dV \tag{2-9}$$

A integral a nível do elemento pode ser feita de várias maneiras. Para um pequeno grupo de elementos, como treliças e vigas, a mesma pode ser avaliada diretamente. Normalmente se usa um método de integração numérica para sua avaliação, por exemplo a quadratura de Gauss. Outra observação a respeito pode ser feita no caso da formulação isoparamétrica, onde as integrais do elemento são feitas num domínio paramétrico.

2.4

Aplicação a Elementos de Treliça Espacial

O elemento de treliça adotado é o esquematizado na figura (2.1). Trata-se de um segmento reto, limitado pelos nós i e j .

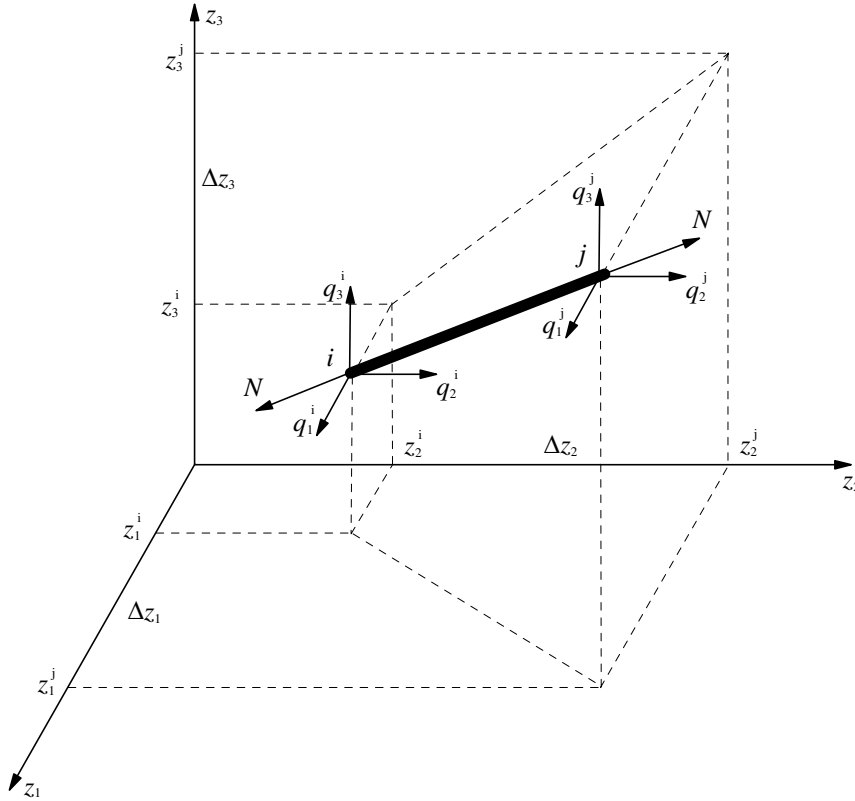


Figura 2.1: Elemento de treliça.

2.4.1 Medida de Deformação

Conforme visto na seção (2.3.2) na formulação Lagrangeana Total (RLT) as deformações de Green-Lagrange (GL) e as tensões de Piola-Kirchhoff II (PK2) são frequentemente usadas como medidas conjugadas na formulação da energia interna. A única deformação de Green-Lagrange (ϵ) é na direção axial e pode ser definida em função da mudança do comprimento do elemento da seguinte maneira:

$$\epsilon = \frac{t l^2 - {}^0 l^2}{2 {}^0 l^2} \quad (2-10)$$

onde ${}^0 l$ é o comprimento do elemento na configuração indeformada,

$$\begin{aligned} {}^0 l &= \sqrt{({}^0 z_1^j - {}^0 z_1^i)^2 + ({}^0 z_2^j - {}^0 z_2^i)^2 + ({}^0 z_3^j - {}^0 z_3^i)^2} \\ &= \sqrt{(\Delta z_1)^2 + (\Delta z_2)^2 + (\Delta z_3)^2} \end{aligned} \quad (2-11)$$

e ${}^t l$ é o comprimento do elemento na configuração deformada t ,

$$\begin{aligned} {}^t l &= \sqrt{({}^t z_1^j - {}^t z_1^i)^2 + ({}^t z_2^j - {}^t z_2^i)^2 + ({}^t z_3^j - {}^t z_3^i)^2} \\ &= \sqrt{({}^t \Delta z_1)^2 + ({}^t \Delta z_2)^2 + ({}^t \Delta z_3)^2} \\ &= \sqrt{(\Delta z_1 + \Delta q_1)^2 + (\Delta z_2 + \Delta q_2)^2 + (\Delta z_3 + \Delta q_3)^2} \end{aligned} \quad (2-12)$$

onde

$$\begin{aligned} {}^t z_k^i &= {}^0 z_k^i + {}^t q_k^i, & {}^t z_k^j &= {}^0 z_k^j + {}^t q_k^j & k &= 1, 2, 3 \\ \Delta q_k &= {}^t q_k^j - {}^t q_k^i, & \Delta z_k &= {}^0 z_k^j - {}^0 z_k^i & k &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2-13)$$

desta forma, pode-se re-escrever (2-10) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{0l^2} \left(\Delta z_1 \Delta q_1 + \Delta z_2 \Delta q_2 + \Delta z_3 \Delta q_3 + \frac{1}{2} (\Delta q_1^2 + \Delta q_2^2 + \Delta q_3^2) \right) \\ &= \frac{1}{0l^2} \begin{bmatrix} -\Delta z_1 & -\Delta z_2 & -\Delta z_3 & \Delta z_1 & \Delta z_2 & \Delta z_3 \end{bmatrix} {}^t \mathbf{q} \\ &\quad + \frac{1}{20l^2} \begin{bmatrix} -\Delta q_1 & -\Delta q_2 & -\Delta q_3 & \Delta q_1 & \Delta q_2 & \Delta q_3 \end{bmatrix} {}^t \mathbf{q} \\ &= \left(\mathbf{B}^0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}^{nl}({}^t \mathbf{q}) \right) {}^t \mathbf{q} \\ &= \mathbf{B}({}^t \mathbf{q}) {}^t \mathbf{q} \end{aligned} \quad (2-14)$$

A matriz $\bar{\mathbf{B}}$, que relaciona o incremento das deformações com o incremento dos deslocamentos nodais, $\delta\epsilon = \bar{\mathbf{B}}\delta^t \mathbf{q}$, é dada simplesmente por:

$$\bar{\mathbf{B}} = \frac{\partial \epsilon}{\partial {}^t \mathbf{q}} = \mathbf{B}^0 + \mathbf{B}^{nl}({}^t \mathbf{q}) \quad (2-15)$$

2.4.2

Medida de Tensão

A única tensão de Piola-Kirchhoff II é a axial (σ), a qual é relacionada com a deformação de Green-Lagrange através da equação:

$$\sigma = E\epsilon \quad (2-16)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material.

2.4.3

Vetor de Forças Internas

A partir do princípio dos deslocamentos virtuais, o vetor de forças internas para um elemento pode ser definido da seguinte forma:

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega_{el}} \bar{\mathbf{B}}^T \sigma dV = {}^0 A^0 l \sigma \bar{\mathbf{B}}^T \quad (2-17)$$

2.4.4

Matriz de Rigidez

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \int_{\Omega_{el}} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} dV + \int_{\Omega_{el}} \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial {}^t \mathbf{q}} \sigma dV \\ &= E^0 A^0 l \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{B}} + {}^0 A^0 l \sigma \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial {}^t \mathbf{q}} \end{aligned} \quad (2-18)$$

onde

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{\ell^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\ell^2} \mathbf{H} \quad (2-19)$$

2.5

Estratégias de Solução para Problemas Não-Lineares

No esquema tradicional do método de Newton-Raphson, o parâmetro de carga λ é mantido constante durante os ciclos iterativos, funcionando bem na parte ascendente do caminho de equilíbrio (trecho OA), figura (2.2), mas falha ao descrever esta curva após o primeiro ponto limite (ponto A), o que levaria a uma incorreta avaliação da capacidade pois o equilíbrio será atingido no ponto C.

Para se traçar a curva carga-deslocamento completa (trecho OABC), com possíveis passagens pelos pontos limites, é necessário que seja permitida a variação de λ a cada iteração.

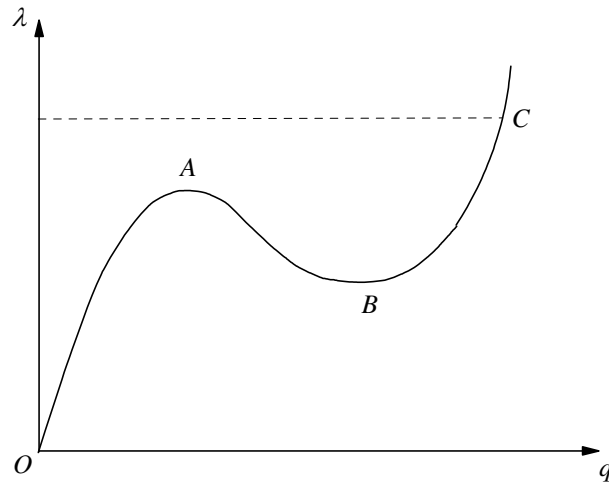


Figura 2.2: Curva carga-deslocamento.

Basicamente, as dificuldades para o traçado da curva completa se devem ao mau condicionamento da matriz de rigidez tangente nos pontos limites, onde ela é singular, e o algoritmo apresentará um erro de *over-flow* na fatorização da matriz. Felizmente esse não é um problema muito sério, pois é praticamente impossível chegar precisamente em um ponto crítico.

2.5.1

Análise Incremental-Iterativa

Considerando-se um instante de pseudo-tempo $t + \Delta t$, que representa as diferentes etapas de aplicação do carregamento e as correspondentes configurações de equilíbrio da estrutura, tem-se que o vetor de forças residuais ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(\omega)}$, $\omega = 0, 1, \dots$, computado após a ω -ésima iteração de Newton-Raphson é dado por:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(\omega)} = {}^{t+\Delta t}\lambda^{(\omega)} \mathbf{Q}_{ref} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(\omega)} = 0 \quad (2-20)$$

onde \mathbf{Q}_{ref} é o vetor de cargas externas de referência, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(\omega)}$ e ${}^{t+\Delta t}\lambda^{(\omega)}$ são, respectivamente, o vetor de forças internas no instante $t + \Delta t$ e o fator de carga no instante $t + \Delta t$ e iteração ω .

A fim de se obter o próximo ponto de equilíbrio ($\omega + 1$), as estratégias incrementais para o tratamento de efeitos não-lineares consideram que em torno de uma configuração deformada ${}^{t+\Delta t}\mathbf{q}$, o problema é localmente linear. Desta forma é feita uma expansão em série de Taylor da equação (2-20), sendo esta aproximada por termos lineares obtidos a partir do truncamento dos termos de ordem superior da série:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(\omega+1)} \cong {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(\omega)} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(\omega)}}{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{q}^{(\omega)}} \delta \mathbf{q}^{(\omega+1)} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(\omega)}}{\partial {}^{t+\Delta t}\lambda^{(\omega)}} \delta \lambda^{(\omega+1)} \cong 0 \quad (2-21)$$

Considerando que as cargas externas não sejam dependentes dos deslocamentos (sistema conservativo),

$$\frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(\omega)}}{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{q}} = - \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(\omega)}}{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{q}^{(\omega)}} = - {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(T)(\omega)} \quad (2-22)$$

sendo $\mathbf{K}^{(T)}$ a matriz de rigidez tangente, e

$$\frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(\omega)}}{\partial {}^{t+\Delta t}\lambda^{(\omega)}} = \mathbf{Q}_{ref} \quad (2-23)$$

Substituindo as equações (2-22) e (2-23) em (2-21) e reorganizando os termos se obtém a equação de equilíbrio

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(T)(\omega)} \delta \mathbf{q}^{(\omega+1)} = \mathbf{Q}_{ref} \delta \lambda^{(\omega+1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(\omega)} \quad (2-24)$$

onde $\delta \lambda^{(\omega+1)}$ e $\delta \mathbf{q}^{(\omega+1)}$ são as correções do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais, respectivamente, obtidas durante o processo iterativo. De (2-24) tem-se que os deslocamentos nodais iterativos ($\delta \mathbf{q}^{(\omega+1)}$) podem ser decompostos em duas parcelas:

$$\delta \mathbf{q}^{(\omega+1)} = \delta \mathbf{q}_g^{(\omega+1)} + \delta \lambda^{(\omega+1)} \delta \mathbf{q}_r^{(\omega+1)} \quad (2-25)$$

onde:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(T)(\omega)}\delta\mathbf{q}_g^{(\omega+1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(\omega)} \quad (2-26)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(T)(\omega)}\delta\mathbf{q}_r^{(\omega+1)} = \mathbf{Q}_{ref} \quad (2-27)$$

A correção do parâmetro de carga, $\delta\lambda^{(\omega+1)}$, única incógnita da equação (2-25), é determinada seguindo uma das estratégias de iteração fornecidas na seção 2.5.3. De maneira geral a seguinte equação de restrição deve ser respeitada a cada iteração:

$$\mathbf{C}^T\delta\mathbf{q}^{(\omega+1)} + k\delta\lambda^{(\omega+1)} = H^{(\omega+1)} \quad (2-28)$$

onde \mathbf{C} , $H^{(\omega+1)}$ e k são constantes a serem definidas. Em termos gerais, Yang & Kuo [79] propuseram a seguinte equação para avaliar o parâmetro de carga:

$$\delta\lambda^{(\omega+1)} = \frac{1}{\mathbf{C}^T\delta\mathbf{q}_r^{(\omega+1)} + k} \left(H^{(\omega+1)} - \mathbf{C}^T\delta\mathbf{q}_g^{(\omega+1)} \right) \quad (2-29)$$

Para se considerar esses métodos de iteração tem-se inicialmente que se supor que, para $\omega = 0$, $\Delta\lambda^0$ tenha um valor prescrito dado pelo usuário ou calculado automaticamente como será visto na seção 2.5.2.

Após a seleção de $\Delta\lambda^0$, determina-se o incremento inicial dos deslocamentos nodais $\Delta\mathbf{q}^0$. As aproximações $\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{q}^0$ caracterizam a chamada ***solução incremental predita***.

O primeiro passo para a obtenção da solução incremental inicial tangente ($\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{q}^0$) consiste na montagem, usando informações da última configuração de equilíbrio da estrutura, da matriz de rigidez tangente ${}^t\mathbf{K}^{(T)}$. Após a definição de ${}^t\mathbf{K}^{(T)}$, resolve-se o sistema de equações:

$${}^t\mathbf{K}^{(T)}\delta\mathbf{q}_t = \mathbf{Q}_{ref} \quad (2-30)$$

para se determinar os deslocamentos nodais tangente, $\delta\mathbf{q}_t$.

Com a definição de $\Delta\lambda^0$ e $\delta\mathbf{q}_t$ tem-se:

$$\Delta\mathbf{q}^0 = \Delta\lambda^0\delta\mathbf{q}_t \quad (2-31)$$

Nesse estágio o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais são atualizados, ou seja:

$${}^{t+\Delta t}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0 \quad (2-32)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{q} = {}^t\mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}^0 \quad (2-33)$$

onde ${}^t\lambda$ e ${}^t\mathbf{q}$ caracterizam o ponto de equilíbrio obtido no último passo de carga.

A figura (2.3) fornece um esquema de solução incremental-iterativa para sistemas com um grau de liberdade, onde os parâmetros de carga e o

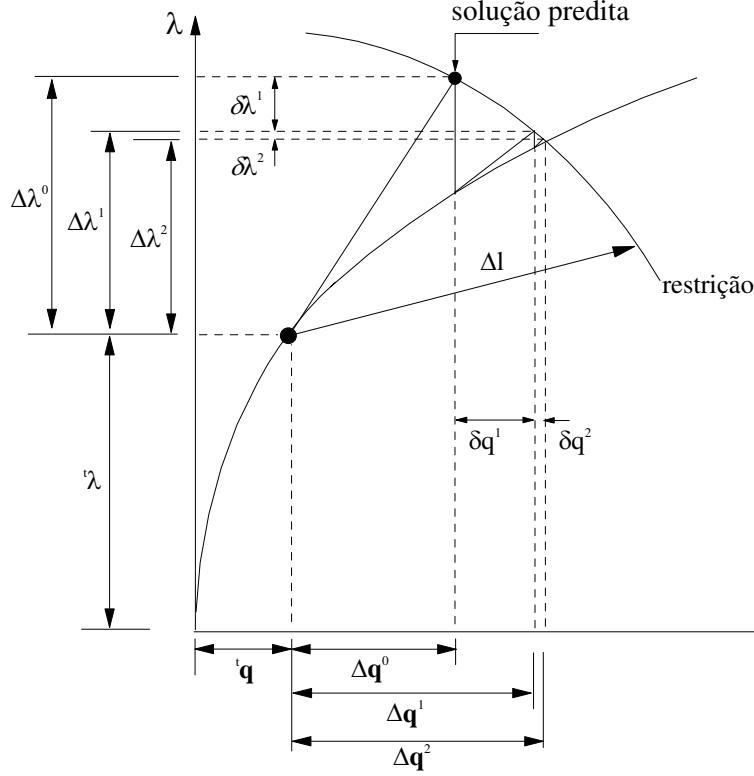


Figura 2.3: Solução incremental-iterativa: sistema com um grau de liberdade [25].

deslocamento são atualizados seguindo a restrição de comprimento de arco cilíndrico [11].

Com a obtenção da solução iterativa $(\delta\lambda^{(\omega+1)} \text{ e } \delta\mathbf{q}^{(\omega+1)})$ via (2-25)-(2-27), faz-se a atualização das variáveis incrementais do problema:

$$\Delta\lambda^{(\omega+1)} = \Delta\lambda^{(\omega)} + \delta\lambda^{(\omega+1)} \quad (2-34)$$

$$\Delta\mathbf{q}^{(\omega+1)} = \Delta\mathbf{q}^{(\omega)} + \delta\mathbf{q}^{(\omega+1)} \quad (2-35)$$

Para o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais tem-se que:

$$t+\Delta t \lambda^{(\omega+1)} = t\lambda + \Delta\lambda^{(\omega+1)} \quad (2-36)$$

$$t+\Delta t \mathbf{q}^{(\omega+1)} = t\mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}^{(\omega+1)} \quad (2-37)$$

Os procedimentos descritos nessa seção são repetidos até que um dado critério de convergência seja atendido (veja a seção 2.5.4).

2.5.2

Incremento Automático de Carga

A obtenção da solução incremental inicial tem como passo fundamental a definição do parâmetro de carga inicial $\Delta\lambda^0$. A seleção automática do tamanho do incremento desse parâmetro é importante, e deve refletir o grau de não-linearidade corrente do sistema estrutural em estudo. Em outras palavras, uma estratégia eficiente de incremento automático de carga deve satisfazer basicamente os seguintes requisitos: (i) produzir grandes incrementos quando a resposta da estrutura for aproximadamente linear; (ii) gerar pequenos incrementos quando a resposta da estrutura for fortemente não-linear; (iii) ser capaz de escolher o sinal correto para o incremento, introduzindo medidas capazes de detectar quando os pontos limites são ultrapassados.

A seguir são apresentadas algumas estratégias de incremento de carga que satisfazem esses requerimentos.

Incremento do Comprimento de Arco

Como proposto por Crisfield [11], o incremento do comprimento de arco a ser adotado como parâmetro de controle no passo de carga corrente pode ser definido como:

$$\Delta l = {}^t\Delta l \left(\frac{N_d}{{}^tN} \right)^{1/2} \quad (2-38)$$

onde ${}^t\Delta l$ e Δl representam os incrementos do comprimento de arco no passos de carga anterior (valor conhecido) e no passo de carga corrente (incógnita), respectivamente; N_d é o numero de iterações desejadas para o processo iterativo corrente, especificado pelo usuário, e tN é o numero de iterações que foram necessárias para convergir no passo de carga anterior.

Através da equação (2-38) e da condição de restrição escrita para a solução incremental inicial:

$$\Delta \mathbf{q}^{0T} \Delta \mathbf{q}^0 = \Delta l^2 \quad (2-39)$$

chega-se facilmente, usando-se (2-31) e (2-39), à expressão do incremento inicial do parâmetro de carga:

$$\Delta \lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{q}_t^T \delta \mathbf{q}_t}} \quad (2-40)$$

O critério utilizado para escolher o sinal correto na expressão (2-40) é o sugerido por Yang & Kuo [79], baseando-se no sinal do parâmetro GSP, que será apresentado na seção seguinte.

No programa desenvolvido nesse trabalho, o usuário deve especificar ${}^1\Delta\lambda^0$ como dado de entrada, sendo este valor usado em seguida para calcular ${}^1\Delta\mathbf{q}^0$

através de (2-31). Substituindo-se $\Delta \mathbf{q}^0$ na equação (2-39), chega-se a ${}^1\Delta l$. Para os passos de carga seguintes, calcula-se automaticamente Δl através de (2-38).

Incremento Baseado no Parâmetro GSP

Uma estratégia baseada na introdução de um parâmetro de rigidez generalizado foi adotada por Yang & Kuo [79] para limitar o incremento inicial do parâmetro de carga. O método de solução é denominado de estratégia de controle de deslocamento generalizado. Seguindo a sugestão de Yang & Shieh [78] para os valores de \mathbf{C} e k a serem usados na equação (2-29), ou seja:

$$\mathbf{C} = \Delta \lambda^0 {}^t\delta \mathbf{q}_r \quad \text{e} \quad k = 0 \quad (2-41)$$

e assim (2-29) pode ser reescrito como:

$$\delta \lambda^{(\omega+1)} = \frac{H^{(\omega+1)} - \Delta \lambda^0 {}^t\delta \mathbf{q}_r^T \delta \mathbf{q}_g^{(\omega+1)}}{\Delta \lambda^0 {}^t\delta \mathbf{q}_r^T \delta \mathbf{q}_r} \quad (2-42)$$

Para obtenção da solução predita $\Delta \lambda^0$, faz-se $\delta \mathbf{q}_g^{(\omega+1)} = 0$ e $\delta \lambda^{(\omega+1)} = \Delta \lambda^0$ na equação anterior, e dessa forma chega-se a:

$$\Delta \lambda^0 = \sqrt{\frac{H^0}{{}^t\delta \mathbf{q}_r^T \delta \mathbf{q}_r}} \quad (2-43)$$

onde o valor do parâmetro incremental H^0 é dado da seguinte forma:

$$H^0 = ({}^1\Delta \lambda^0)^2 {}^1\delta \mathbf{q}_r^T {}^1\delta \mathbf{q}_r \quad (2-44)$$

e dessa forma pode-se escrever $\Delta \lambda^0$ como sendo

$$\Delta \lambda^0 = \pm {}^1\Delta \lambda^0 \sqrt{\frac{{}^1\delta \mathbf{q}_r^T {}^1\delta \mathbf{q}_r}{{}^t\delta \mathbf{q}_r^T \delta \mathbf{q}_r}} \quad (2-45)$$

considerando-se o parâmetro de rigidez generalizado (GSP) do sistema como se segue:

$$\text{GSP} = \frac{{}^1\delta \mathbf{q}_r^T {}^1\delta \mathbf{q}_r}{{}^t\delta \mathbf{q}_r^T \delta \mathbf{q}_r} \quad (2-46)$$

Pode-se, portanto, reescrever (2-45) da seguinte forma:

$$\Delta \lambda^0 = \pm {}^1\Delta \lambda^0 \sqrt{|\text{GSP}|} \quad (2-47)$$

Observa-se que o sinal do incremento inicial de carga pode ser positivo ou negativo. A escolha do sinal correto é de suma importância na definição de seqüências de soluções (\mathbf{q}, λ) que permitam um avanço contínuo na resposta carga-deslocamento. De acordo com Yang & Kuo [79], o sinal do parâmetro de rigidez corrente depende exclusivamente dos vetores ${}^t\delta \mathbf{q}_r$ (passo de carga anterior) e $\delta \mathbf{q}_r$ (passo de carga corrente), conforme (2-46).

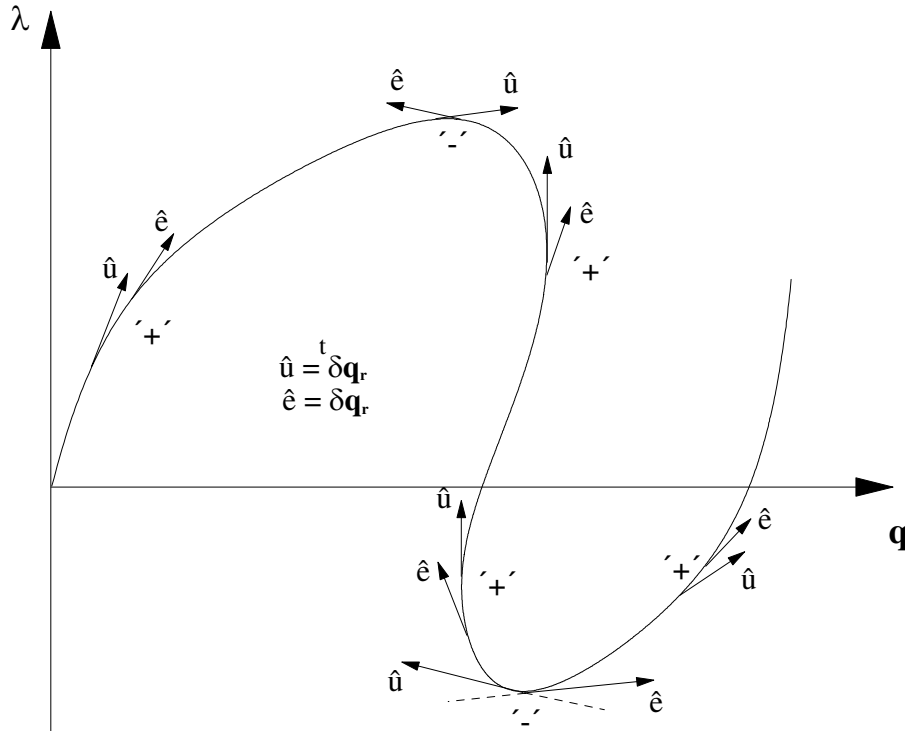


Figura 2.4: Variação do sinal do parâmetro de rigidez generalizado (GSP).

O GSP torna-se negativo somente para o passo imediatamente após o ponto limite, para os demais passos este permanecerá sempre positivo, o que pode ser visto na figura (2.4).

2.5.3 Estratégias de Iteração

A determinação do parâmetro de carga iterativo, $\delta\lambda^{(\omega+1)}$ é função de uma dada estratégia de iteração, ou equação de restrição imposta ao problema, que tem a função de otimizar a convergência do processo iterativo. A seguir são apresentadas duas estratégias bastante eficientes que serão utilizadas nos capítulos seguintes.

Carga Constante

Essa estratégia de iteração caracteriza o método tradicional de controle de carga constante, no qual o parâmetro de carga é mantido constante durante o ciclo iterativo. Para esse caso, tem-se que a equação de restrição se reduz à expressão trivial:

$$\delta\lambda^{(\omega+1)} = 0 \quad (2-48)$$

Dessa forma a equação (2-25) é reduzida aos deslocamentos fornecidos

pelo método convencional de Newton-Raphson.

Comprimento de Arco Cilíndrico

Segundo Crisfield [11], a cada iteração, a seguinte equação de restrição deve ser satisfeita:

$$\Delta \mathbf{q}^{(\omega+1)T} \Delta \mathbf{q}^{(\omega+1)} = \Delta l^2 \quad (2-49)$$

Substituindo (2-25) em (2-35) e o resultado desta operação em (2-49), chega-se a uma equação quadrática em $\delta \lambda^{(\omega+1)}$, a saber:

$$A \left(\delta \lambda^{(\omega+1)} \right)^2 + B \delta \lambda^{(\omega+1)} + C = 0 \quad (2-50)$$

onde, os coeficientes A , B e C têm a seguinte forma:

$$\begin{aligned} A &= \delta \mathbf{q}_r^{(\omega+1)T} \delta \mathbf{q}_r^{(\omega+1)} \\ B &= 2 \delta \mathbf{q}_r^{(\omega+1)T} \left(\Delta \mathbf{q}^{(\omega)} + \delta \mathbf{q}_g^{(\omega+1)} \right) \\ C &= \left(\Delta \mathbf{q}^{(\omega)} + \delta \mathbf{q}_g^{(\omega+1)} \right)^T \left(\Delta \mathbf{q}^{(\omega)} + \delta \mathbf{q}_g^{(\omega+1)} \right) - \Delta l^2 \end{aligned} \quad (2-51)$$

Com a resolução de (2-50), chega-se aos dois valores $\delta \lambda_1$ e $\delta \lambda_2$, de forma que se deve escolher entre as soluções:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{q}_1^{(\omega+1)} &= \Delta \mathbf{q}^{(\omega)} + \delta \mathbf{q}_g^{(\omega+1)} + \delta \lambda_1 \delta \mathbf{q}_r^{(\omega+1)} \\ \Delta \mathbf{q}_2^{(\omega+1)} &= \Delta \mathbf{q}^{(\omega)} + \delta \mathbf{q}_g^{(\omega+1)} + \delta \lambda_2 \delta \mathbf{q}_r^{(\omega+1)} \end{aligned} \quad (2-52)$$

aquela que mais se aproxima da solução incremental da iteração anterior, $\Delta \mathbf{q}^{(\omega)}$. Essa escolha deve prevenir um possível retorno, o que faria a solução regredir ao longo do caminho já calculado. Um procedimento utilizado, consiste em se achar o menor ângulo entre $\Delta \mathbf{q}^{(\omega+1)}$ e $\Delta \mathbf{q}^{(\omega)}$. Isto equivale a achar o máximo co-seno do ângulo:

$$\begin{aligned} \cos \theta_{1,2} &= \frac{\Delta \mathbf{q}^{(\omega)T} \Delta \mathbf{q}^{(\omega+1)}}{\Delta l^2} \\ &= \frac{\Delta \mathbf{q}^{(\omega)T} \left(\Delta \mathbf{q}^{(\omega)} + \delta \mathbf{q}_g^{(\omega+1)} \right)}{\Delta l^2} + \delta \lambda_{1,2} \frac{\Delta \mathbf{q}^{(\omega)T} \delta \mathbf{q}_r^{(\omega+1)}}{\Delta l^2} \end{aligned} \quad (2-53)$$

Como (2-50) é uma equação quadrática, ela poderá ter raízes imaginárias se $(B^2 - 4AC)$ for menor que zero. Essa situação pode existir quando o incremento inicial do parâmetro de carga for muito grande, ou se a estrutura exibir múltiplos caminhos de equilíbrio em torno de um ponto.

Iteração usando Deslocamento Generalizado

Conforme apresentado na seção 2.5.1, a equação (2-29) deveria ser considerada para o parâmetro de carga ao longo da solução não-linear. Res-

tando apenas a definição dos parâmetros \mathbf{C}^T , k e $H^{(\omega+1)}$. Na obtenção da solução incremental predita ($\omega = 0$), os referidos pesquisadores definiram que o parâmetro incremental H^0 (no caso, deslocamento generalizado) deveria ser obtido de acordo com a equação (2-44); durante o ciclo iterativo é assumido que esse parâmetro de deslocamento generalizado se mantenha constante, isto é: $H^{(\omega+1)} = 0$, para $\omega = 0$. Dessa forma pode-se reescrever (2-29) como:

$$\delta\lambda^{(\omega+1)} = -\frac{{}^t\delta\mathbf{q}_r^T \delta\mathbf{q}_g^{(\omega+1)}}{{}^t\delta\mathbf{q}_r^T \delta\mathbf{q}_r^{(\omega+1)}} \quad (2-54)$$

que é a expressão procurada para correção do parâmetro de carga no ciclo iterativo.

2.5.4

Critérios de Convergência

O processo iterativo descrito termina indicando uma nova posição de equilíbrio para a estrutura em análise quando um dos dois, ou os dois critérios de convergência apresentados abaixo forem atendidos:

1. o primeiro critério de convergência é baseado em relações de forças e é calculado no início da iteração corrente utilizando parâmetros da iteração anterior. Ele é definido como segue:

$$\zeta_1 = \frac{\|\mathbf{R}^{(w)}\|}{\|\Delta\lambda^{(w)}\mathbf{Q}_{ref}\|} \leq \zeta \quad (2-55)$$

onde $\|\mathbf{R}^{(w)}\|$ é igual à norma euclidiana do vetor das forças desequilibradas, que é calculada usando-se o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais da iteração anterior, $\|\Delta\lambda^{(w)}\mathbf{Q}_{ref}\|$ é a norma euclidiana do vetor de incremento de carregamento externo e ζ é um fator de tolerância fornecido pelo usuário do programa como dado de entrada.

2. o segundo critério de convergência obedece a relações de deslocamentos e é sempre verificado no final da iteração corrente. Ele é definido por:

$$\zeta_2 = \frac{\|\delta\mathbf{q}\|}{\|\Delta\mathbf{q}^{(\omega+1)}\|} \leq \zeta \quad (2-56)$$

onde $\|\delta\mathbf{q}\|$ é a norma euclidiana dos deslocamentos iterativos (residuais), $\|\Delta\mathbf{q}^{(\omega+1)}\|$ é a norma Euclidiana dos deslocamentos incrementais, que são obtidos após a correção do processo iterativo, e ζ segue a mesma definição do critério anterior.

3. o terceiro critério de convergência consiste em obedecer a ambas as relações (forças e deslocamentos) dadas em (2-55) e (2-56), assim este critério é verificado se:

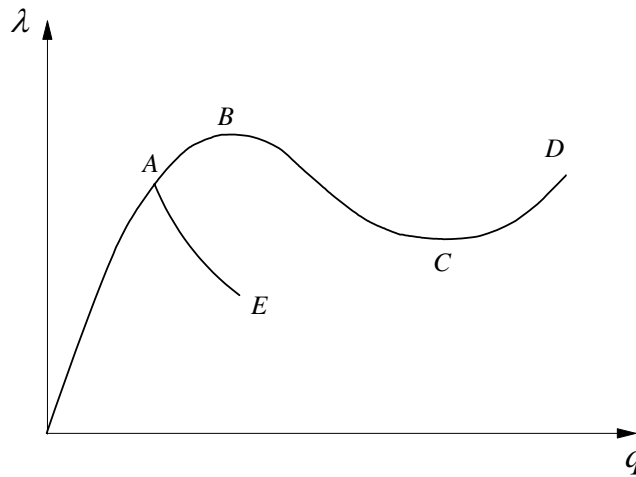


Figura 2.5: Pontos críticos de uma estrutura [58].

$$\zeta_1 \leq \zeta \quad \text{e} \quad \zeta_2 \leq \zeta \quad (2-57)$$

onde ζ , ζ_1 e ζ_2 são definidos nos itens anteriores.

2.6

Determinação dos Pontos Críticos

Os pontos críticos são aqueles em que um caminho de equilíbrio atinge um valor extremo ou aqueles onde diferentes caminhos de equilíbrio se encontram. Na figura (2.5) podem ser observados três pontos críticos (A, B e C), onde os pontos (B e C) são chamados de pontos limite e o ponto (A) ponto de bifurcação. No presente trabalho serão considerados somente pontos limite. Caso a estrutura apresente ponto de bifurcação, uma pequena imperfeição será considerada para se eliminar a bifurcação.

Matematicamente, um ponto de equilíbrio é um ponto crítico se a matriz de rigidez do modelo de elementos finitos for singular $\det \mathbf{K}^{(T)} = 0$. Além disso, sabe-se que o equilíbrio é estável quando todos os autovalores são positivos o que leva a $\det \mathbf{K}^{(T)} > 0$ e torna-se instável quando o menor autovalor se torna negativo e, portanto, $\det \mathbf{K}^{(T)} < 0$.

Conforme visto na seção acima, as estratégias de incremento automático de carga têm como objetivo gerar pequenos incrementos quando a resposta da estrutura for fortemente não-linear além de detectar pontos limites. A determinação dos pontos críticos se faz de forma aproximada, através do sinal do GSP, que controla os incrementos de carga, ou seja, a medida que o problema se aproxima de um ponto limite, os incrementos de carga dados

pela equação (2-47) se tornam muito pequenos, sendo tomado como ponto limite o valor imediatamente após a inversão de sinal do GSP.

2.7

Exemplos de Análise Estrutural

Nesta seção são apresentadas as soluções de alguns problemas estruturais encontrados freqüentemente na literatura em função da acentuada não-linearidade da relação carga-deslocamento. Pretende-se, assim, verificar a eficiência da formulação de elementos finitos não-linear aqui apresentada. Para tanto, serão abordados exemplos clássicos de problemas de equilíbrio e estabilidade que possuem resultados numéricos e/ou analíticos encontrados na literatura.

2.7.1

Treliça Assimétrica em Forma de Arco

A figura (2.6) mostra um sistema treliçado assimétrico em forma de arco. Este exemplo apresenta em sua trajetória pontos limites tanto de carga quanto de deslocamentos. Todos os dados referentes à geometria estão definidos na figura (2.6). A seção transversal tem área $A = 3$ e o material utilizado apresenta $E = 3 \times 10^6$. Este modelo foi estudado por Pinheiro et al. [61, 60], Powel & Simons [62], entre outros.

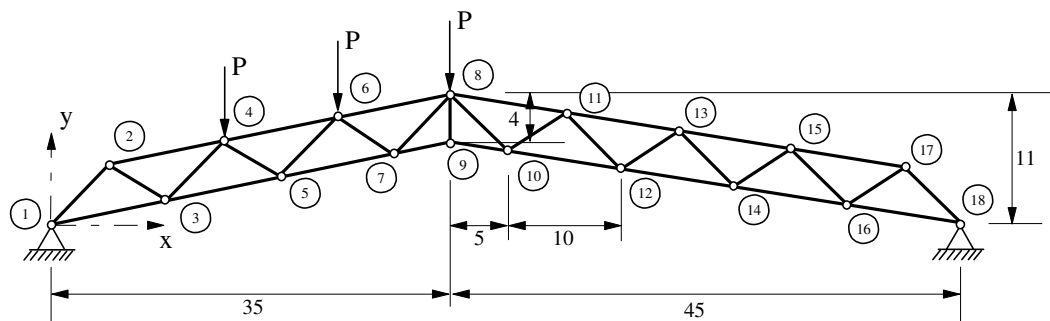


Figura 2.6: Treliça assimétrica em forma de arco.

O problema não linear foi resolvido através do método de Newton-Raphson padrão em conjunto com o método do deslocamento generalizado (GDCM). O valor inicial do incremento de carga foi de 3000 e a tolerância utilizada no processo iterativo foi de 10^{-5} . A estratégia foi escolhida em função da mesma ser utilizada neste trabalho como parâmetro para determinação da carga crítica.

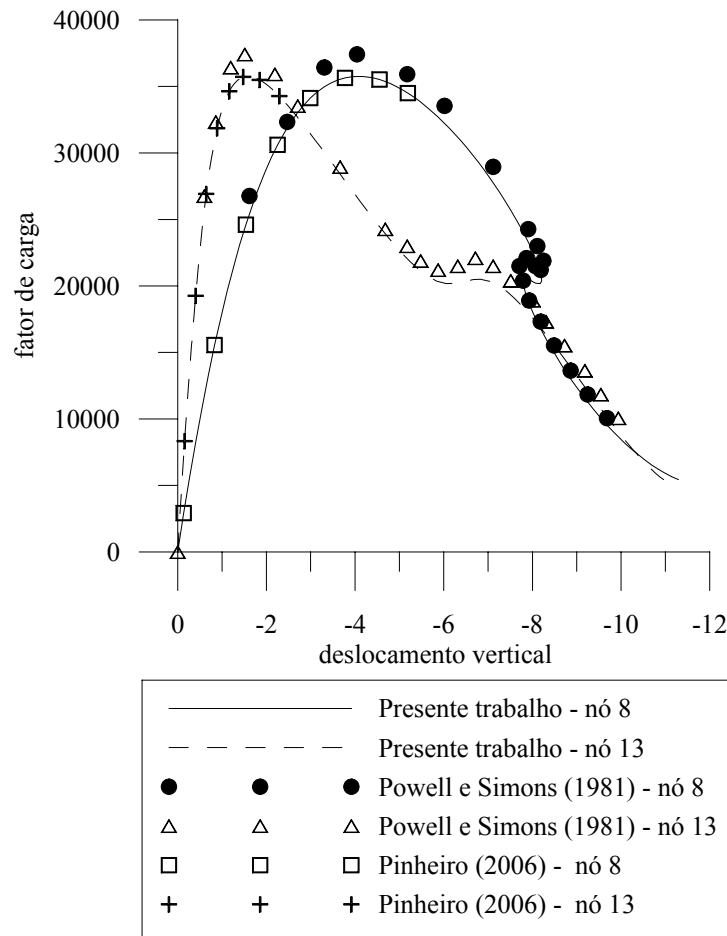


Figura 2.7: Treliça assimétrica em forma de arco - resposta estrutural do deslocamento vertical dos nós 8 e 13.

Os traçados da trajetória de equilíbrio para o deslocamento vertical dos nós 8 e 13 são apresentados na figura (2.7). Observa-se nesta figura uma perfeita concordância com o trabalho de Pinheiro et al. [61] e uma nítida diferença em relação ao trabalho de Powel & Simons [62], fato este devido aos diferentes referenciais utilizados na solução do problema. Em Powel & Simons [62] o referencial utilizado foi o Lagrangeano Atualizado, já no presente trabalho e no trabalho de Pinheiro et al. [61] foram utilizados o referencial total. Os valores do primeiro ponto limite de carga e os deslocamentos dos nós 8 e 13 são comparados na tabela (2.1).

2.7.2

Treliça Espacial de 24 Elementos

A treliça espacial formada por 24 elementos apresentada na figura (2.8) tem sido utilizada com frequência como exemplo para testar a eficiência de

	Powell & Simons RLA [62]	Pinheiro et. al RLT [61]	Presente trabalho RLT
λ_{cr}	37412.9	35760.3	35760.6
q_2^8	4.044	4.069	4.082
q_2^{13}	1.554	1.593	1.585

Tabela 2.1: Treliça assimétrica em forma de arco - valores de carga crítica e deslocamento vertical dos nós 8 e 13.

várias formulações, algoritmos propostos e implementações computacionais [79, 56, 60, 61]. É com essa finalidade que a mesma será analisada nesta seção. A estrutura possui, por hipótese, $E = 10^4$ e $A = 1$. As coordenadas nodais são apresentadas na tabela (2.2).

Nó	x	y	z
1	0.0	0.00	8.216
2	25.0	0.00	6.216
3	12.5	21.65	6.216
4	-12.5	21.65	6.216
5	-25.0	0.00	6.216
6	-12.5	-21.65	6.216
7	12.5	-21.65	6.216
8	43.3	-25.00	0.000
9	43.3	25.00	0.000
10	0.0	50.00	0.000
11	-43.3	25.00	0.000
12	-43.3	-25.00	0.000
13	0.0	-50.00	0.000

Tabela 2.2: Treliça espacial de 24 elementos - coordenadas nodais.

Inicialmente considera-se que apenas a carga P_1 está atuando na estrutura. O resultado da análise é apresentado na figura (2.9).

Uma variação deste exemplo em que além da carga concentrada P_1 atuando no centro da estrutura (nó 1), há a presença de outra carga nodal, P_2 , aplicada nos nós 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Este novo carregamento faz com que a trajetória de equilíbrio da estrutura passe a ter não apenas dois, mas três pontos limites de carga, conforme visto na figura (2.10).

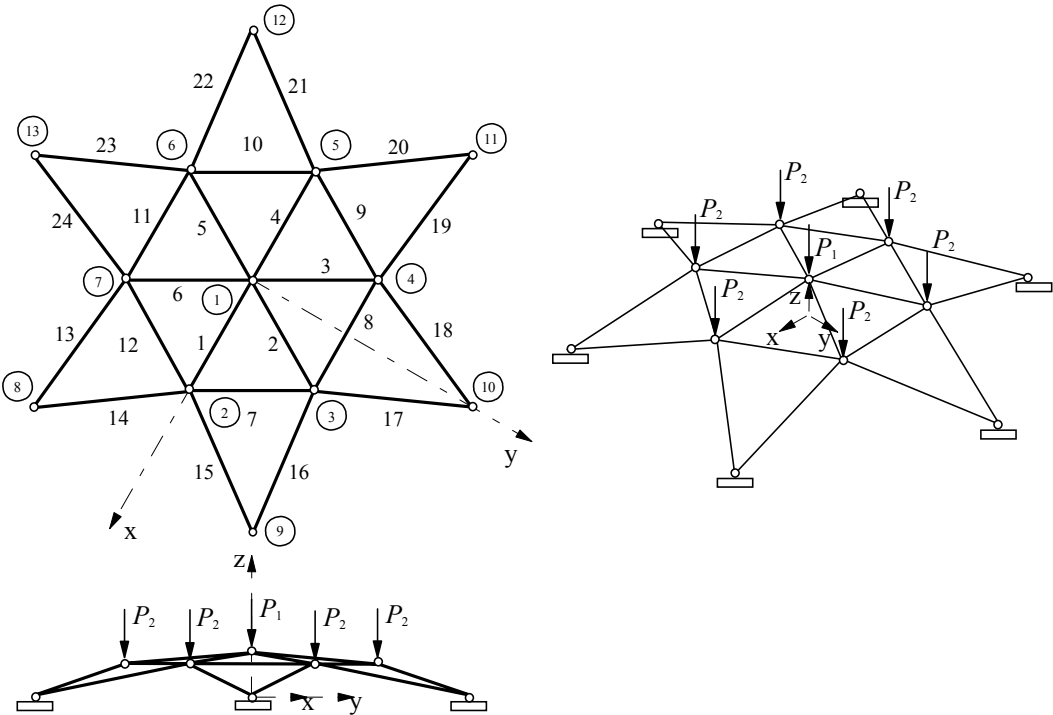


Figura 2.8: Treliça espacial de 24 elementos.

	Oñate & Matias [56]	Pinheiro et. al RLA [61]	Presente trabalho RLT
λ_{cr}	3.157	3.156	3.156
q_3^1	-0.761	-0.763	-0.769

Tabela 2.3: Treliça espacial de 24 elementos - valores de carga crítica e deslocamento vertical do nó 1 relativo a este nível de carregamento.

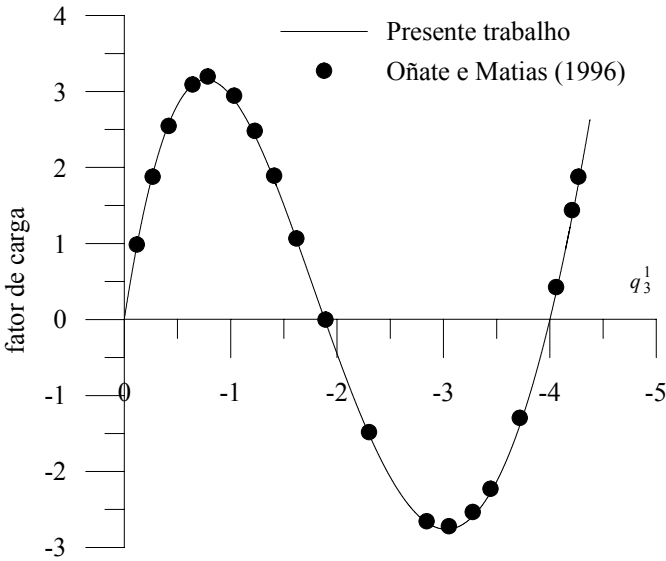


Figura 2.9: Treliça espacial de 24 elementos - resposta estrutural para o carregamento P_1 .

	Oñate & Matias [56]	Pinheiro et. al RLT [61]	Presente trabalho RLT
λ_{cr}	7.81	7.65	7.65
q_3^1	-0.882	-0.873	-0.875

Tabela 2.4: Treliça espacial de 24 elementos - valores de carga crítica e deslocamento vertical do nó 1 relativo a este nível de carregamento.

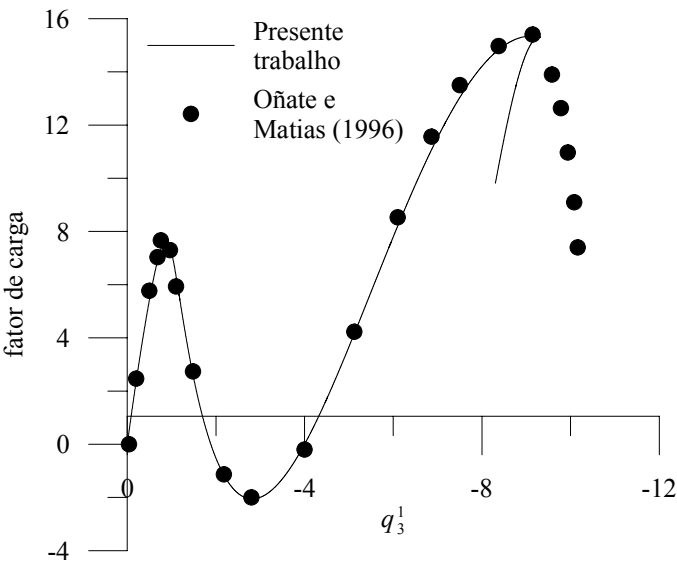


Figura 2.10: Treliça espacial de 24 elementos - resposta estrutural para os carregamentos P_1 e P_2 .

3

Análise de Sensibilidade

3.1

Considerações Gerais

A análise de sensibilidade se refere neste capítulo as derivadas das respostas da estrutura, obtidas através de uma análise via elementos finitos, em relação a um parâmetro do sistema. Sua determinação se faz necessária por uma série de razões, entre elas: como indicador da importância de uma determinada variável na resposta, guiando o projetista na tomada de decisões; na avaliação da direção de busca em problemas de otimização; e no método de confiabilidade de primeira ordem para a determinação do ponto de projeto.

A sensibilidade (ou gradiente) é a medida da variação da resposta devido à variação em um parâmetro do sistema. Neste trabalho, estes parâmetros podem ser propriedades dos materiais, seções transversais dos elementos, coordenadas nodais ou ainda cargas aplicadas no modelo. De forma geral, os gradientes da função objetivo e das restrições são calculados a partir dos gradientes das respostas da estrutura determinados na etapa de análise. Dependendo do problema, as respostas de interesse podem ser deslocamentos, tensões, frequências naturais e cargas críticas. Outra grandeza de interesse, muito utilizada como função objetivo, é o peso (volume) da estrutura.

A análise de sensibilidade desempenha um papel central no processo de otimização via programação matemática com algoritmos de primeira ordem pois é avaliada a cada passo do algoritmo. Em problemas de otimização baseada em confiabilidade, descritos no capítulo 5, o processo de otimização é feito através de um duplo laço (*loop*), onde o algoritmo de otimização é utilizado tanto no laço interno, na determinação das restrições de confiabilidade, quanto no externo, no problema de otimização em si. Desta forma, a avaliação eficiente e precisa é necessária.

Existem três abordagens principais para efetuar a análise de sensibilidade: o método analítico, o método das diferenças finitas e o método semi-analítico. A primeira, o método analítico, é eficiente e preciso, mas frequentemente limitado a casos particulares. A abordagem tem dificuldades ma-

temáticas quando funções não diferenciáveis estão envolvidas e resulta em expressões de difícil tratamento quando leis constitutivas complexas são consideradas, especialmente no caso de grandes deformações elastoplásticas. A segunda abordagem para avaliação da sensibilidade, o método das diferenças finitas, é simples e geral mas tem um custo computacional muito mais elevado. A terceira abordagem, o método semi-analítico, é um método computacionalmente atraente onde uma combinação dos métodos anteriores é utilizada.

O desenvolvimento das metodologias estão bem estabelecidas, tanto para problemas estáticos lineares quanto não lineares e podem ser encontradas em Kleiber et al. [40], Haftka e Gürdal [29], Arora [4] entre outros.

Neste capítulo, é apresentada uma revisão dos métodos de análise de sensibilidade para problemas lineares e não lineares. As sensibilidades dos deslocamentos, tensões e da carga limite são desenvolvidas analiticamente para o elemento de treliça. É apresentado também o método das diferenças finitas a fim de se validar as formulações analíticas. Por fim são analisados alguns exemplos para validar as implementações.

3.2

Método Analítico

O método analítico consiste na diferenciação direta das equações de equilíbrio lineares e não-lineares. Para facilitar o desenvolvimento das equações para o cálculo da sensibilidade, considera-se uma estrutura descrita por uma única variável b .

Supõe-se que se deseja determinar a sensibilidade de duas funções $g_1(b, \mathbf{q}(b))$ e $g_2(b, \mathbf{q}(b))$, que definem restrições no problema de otimização. Estas restrições dependem explicitamente das variáveis b e dos deslocamentos nodais \mathbf{q} , que, por sua vez, também dependem implicitamente das variáveis b .

Assim, tem-se

$$\frac{dg_i}{db} = \frac{\partial g_i}{\partial b} + \frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{db} \quad i = 1, 2 \quad (3-1)$$

O problema acima pode ser resolvido através de dois procedimentos: pelo método de diferenciação direta (DDM, do inglês *Direct Differentiation Method*) ou pelo método adjunto (ASM, do inglês *Adjoint System Method*). Para problemas dependentes da trajetória o ASM não é uma alternativa eficiente, segundo Rojas [68]. Por outro lado, para problemas independentes da trajetória, o uso de um ou outro método se dá em função da relação entre $(ncc \times nvp)$ e nr , onde ncc é o número de casos de carregamento, nvp é o número de variáveis de projeto e nr é o número de restrições. Se $(ncc \times nvp) > nr$, o ASM é mais vantajoso. Porém, se $(ncc \times nvp) < nr$, a vantagem favorece

o DDM. Detalhes adicionais podem ser encontrados em Kleiber et al. [40] e Rojas [68]. Neste trabalho optou-se apenas pelo uso do método DDM.

3.2.1

Sensibilidade dos Deslocamentos Nodais

O ponto de partida para a determinação da sensibilidade do vetor de deslocamentos é o sistema de equações de equilíbrio da estrutura discretizada, apresentado no capítulo (2). Por simplicidade, no texto a seguir, elimina-se o sobrescrito (ω) da notação, correspondente a iteração, uma vez que a sensibilidade será obtida após a convergência do processo iterativo. A equação (2-20) é então reescrita de maneira a mostrar a dependência sobre a variável de projeto b :

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}(b) = \mathbf{R}({}^{t+\Delta t}\mathbf{q}(b); b) = {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}(b) - \mathbf{F}({}^{t+\Delta t}\mathbf{q}(b); b) = 0 \quad (3-2)$$

lembrando que, ${}^{t+\Delta t}\lambda\mathbf{Q}_{ref} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}$. Derivando-se (3-2) em relação a variável de projeto b tem-se

$$\frac{d{}^{t+\Delta t}\mathbf{R}}{db} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}}{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{q}} \frac{d{}^{t+\Delta t}\mathbf{q}}{db} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}}{\partial b} = 0 \quad (3-3)$$

Usando a definição da matriz de rigidez tangente, eq. (2-22), a sensibilidade do vetor de deslocamentos nodais pode ser calculada através da expressão:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(T)} \frac{d{}^{t+\Delta t}\mathbf{q}}{db} &= \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}}{\partial b} \\ &= \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}}{\partial b} - \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}}{\partial b} \end{aligned} \quad (3-4)$$

A equação (3-4) é a equação básica para a solução da sensibilidade dos deslocamentos e algumas observações podem ser feitas ao seu respeito:

- A matriz do lado esquerdo da equação (3-4) é a mesma matriz de rigidez tangente obtida após a convergência para um ponto de equilíbrio. É interessante aqui se destacar que caso se use o método de Newton–Raphson modificado na obtenção do vetor de deslocamentos, então, esta matriz precisa ser atualizada antes de se calcular a sensibilidade dos deslocamentos.
- Na etapa de referência $t + \Delta t$, o lado direito da equação (3-4) é conhecido.
- A equação de sensibilidade em (3-4) é linear em $\frac{d{}^{t+\Delta t}\mathbf{q}}{db}$. Assim nenhuma iteração é necessária para resolvê-la.
- Para se determinar a sensibilidade no final de um dado incremento de carga, só é necessário se conhecer o valor do deslocamento total nesse

instante. Não é necessário se conhecer deslocamentos ou o valor das sensibilidades em instantes prévios.

3.2.2

Sensibilidade da Carga Limite

Para se calcular a sensibilidade da carga limite basta considerar o fator de carga λ como dependente implicitamente de b , ou seja, o vetor de carregamento externo fica definido como:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}(b) = {}^{t+\Delta t}\lambda(b)\mathbf{Q}_{ref}(b) \quad (3-5)$$

onde \mathbf{Q}_{ref} é um vetor de referência de magnitude arbitrária.

Derivando-se (3-5) em relação a b , tem-se:

$$\frac{d{}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}}{db} = \frac{d{}^{t+\Delta t}\lambda}{db}\mathbf{Q}_{ref} + {}^{t+\Delta t}\lambda\frac{d\mathbf{Q}_{ref}}{db} \quad (3-6)$$

Assim a equação (3-4) fica da seguinte forma

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(T)}\frac{d{}^{t+\Delta t}\mathbf{q}}{db} = \frac{d{}^{t+\Delta t}\lambda}{db}\mathbf{Q}_{ref} + {}^{t+\Delta t}\lambda\frac{d\mathbf{Q}_{ref}}{db} - \frac{\partial{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}}{\partial b} \quad (3-7)$$

No nível da carga crítica (${}^{t+\Delta t}\lambda = \lambda^*$), um asterisco é adicionado nos termos de (3-7) para identificar o ponto onde eles estão sendo avaliados. Então se escreve

$$\mathbf{K}^{(T)*}\frac{d\mathbf{q}^*}{db} = \frac{d\lambda^*}{db}\mathbf{Q}_{ref} + \lambda^*\frac{d\mathbf{Q}_{ref}}{db} - \frac{\partial\mathbf{F}^*}{\partial b} \quad (3-8)$$

A matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}^{(T)*}$ é singular e $\mathbf{K}^{(T)*}\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{K}^{(T)*} = 0$, onde \mathbf{v} é o autovetor associado com o autovalor nulo da matriz $\mathbf{K}^{(T)*}$ (ver seção (2.6)). Pré-multiplicando a equação anterior por \mathbf{v}^T , tem-se

$$\mathbf{v}^T\mathbf{K}^{(T)*}\frac{d\mathbf{q}^*}{db} = \mathbf{v}^T\frac{d\lambda^*}{db}\mathbf{Q}_{ref} + \mathbf{v}^T\lambda^*\frac{d\mathbf{Q}_{ref}}{db} - \mathbf{v}^T\frac{\partial\mathbf{F}^*}{\partial b} \quad (3-9)$$

Eliminando os termos nulos $\mathbf{K}^{(T)*}\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{K}^{(T)*} = 0$ e isolando o termo com $d\lambda^*/db$, tem-se

$$\mathbf{v}^T\frac{d\lambda^*}{db}\mathbf{Q}_{ref} = \mathbf{v}^T\frac{\partial\mathbf{F}^*}{\partial b} - \mathbf{v}^T\lambda^*\frac{d\mathbf{Q}_{ref}}{db} \quad (3-10)$$

Finalmente, tem-se a expressão para o cálculo da sensibilidade do ponto limite:

$$\frac{d\lambda^*}{db} = \frac{\mathbf{v}^T\left[\frac{\partial\mathbf{F}^*}{\partial b} - \lambda^*\frac{d\mathbf{Q}_{ref}}{db}\right]}{\mathbf{v}^T\mathbf{Q}_{ref}} \quad (3-11)$$

A equação (3-11) permite o cálculo da sensibilidade da carga crítica de maneira direta, uma vez que o vetor das pseudo-forças é conhecido no ponto crítico.

3.2.3

Sensibilidade da Carga Crítica Linear

A sensibilidade da carga crítica linear é obtida a partir do problema de autovalor generalizado:

$$[\mathbf{K}^0(b) + \lambda \mathbf{K}^\sigma(\sigma, b)] \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (3-12)$$

Resolvendo-se este problema obtém-se a carga crítica linear da estrutura λ_{cr} e o autovetor \mathbf{v} , que representa o modo de flambagem da estrutura. Substituindo-se $\lambda = \lambda_{cr}$ na equação acima e derivando-se em relação a variável b , obtém-se:

$$\left[\frac{d\mathbf{K}^0}{db} + \frac{d\lambda_{cr}}{db} \mathbf{K}^\sigma + \lambda_{cr} \frac{d\mathbf{K}^\sigma}{db} \right] \mathbf{v} + [\mathbf{K}^0 + \lambda_{cr} \mathbf{K}^\sigma] \frac{d\mathbf{v}}{db} = \mathbf{0} \quad (3-13)$$

Pré-multiplicando-se esta equação por \mathbf{v}^t , considerando a simetria das matrizes \mathbf{K}^0 e \mathbf{K}^σ , obtém-se a seguinte expressão:

$$\frac{d\lambda_{cr}}{db} = - \frac{\mathbf{v}^t \left[\frac{d\mathbf{K}^0}{db} + \lambda_{cr} \frac{d\mathbf{K}^\sigma}{db} \right] \mathbf{v}}{\mathbf{v}^t \mathbf{K}^\sigma \mathbf{v}} \quad (3-14)$$

Finalmente, impondo-se a condição de normalização

$$\mathbf{v}^t \mathbf{K}^\sigma \mathbf{v} = -1 \quad (3-15)$$

obtém-se a expressão para a sensibilidade:

$$\frac{d\lambda_{cr}}{db} = \mathbf{v}^t \left[\frac{d\mathbf{K}^0}{db} + \lambda_{cr} \frac{d\mathbf{K}^\sigma}{db} \right] \mathbf{v} \quad (3-16)$$

3.2.4

Sensibilidade das Deformações e Tensões

Após (3-4) ser resolvida para a sensibilidade dos deslocamentos, pode-se obter outras sensibilidades da resposta estrutural. Entre elas estão as sensibilidades das deformações e das tensões do material, apresentadas nesta seção.

A relação deformação-deslocamento, apresentada em (2-14) é aqui reescrita:

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\epsilon}({}^{t+\Delta t}\mathbf{q}(b), b) = \mathbf{B}({}^{t+\Delta t}\mathbf{q}(b), b) {}^{t+\Delta t}\mathbf{q}(b) \quad (3-17)$$

Diferenciando-se esta relação e lembrando que $\frac{\partial {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\epsilon}}{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{B}}$, conforme definido em (2-15), obtém-se a expressão:

$$\begin{aligned} \frac{d{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\epsilon}}{db} &= \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\epsilon}}{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{q}} \frac{d{}^{t+\Delta t}\mathbf{q}}{db} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\epsilon}}{\partial b} \\ &= \bar{\mathbf{B}} \frac{d{}^{t+\Delta t}\mathbf{q}}{db} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial b} {}^{t+\Delta t}\mathbf{q} \end{aligned} \quad (3-18)$$

que permite o cálculo da sensibilidade das deformações de um elemento a partir das sensibilidades dos deslocamentos nodais e da sensibilidade da matriz deformação–deslocamento.

A relação tensão–deformação apresentada em (2-16), é reescrita a seguir:

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\mathbf{q}(b), b) = \mathbf{D}(b)\boldsymbol{\epsilon}({}^{t+\Delta t}\mathbf{q}(b), b) \quad (3-19)$$

Diferenciando-se esta relação chega-se a expressão:

$$\begin{aligned} \frac{d{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}}{db} &= \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}}{\partial {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\epsilon}} \frac{d{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\epsilon}}{db} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}}{\partial b} \\ &= \mathbf{D} \frac{d{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\epsilon}}{db} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial b} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\epsilon} \end{aligned} \quad (3-20)$$

que possibilita o cálculo da sensibilidade das tensões do elemento.

3.2.5

Sensibilidade do Vetor de Forças Internas

No capítulo 2, o vetor das forças internas de um elemento foi definido pela seguinte equação:

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega_{el}} \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} V \quad (3-21)$$

Na resolução da equação (3-4) a derivada do vetor de forças internas é feita para os deslocamentos \mathbf{q} independentes de b . Deste forma, tem-se a seguinte expressão:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial b} \right|_{\mathbf{q} \neq \mathbf{q}(b)} = \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial b} \boldsymbol{\sigma} V + \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial b} V + \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} \frac{\partial V}{\partial b} \quad (3-22)$$

3.2.6

Sensibilidade do Vetor de Cargas Externas

Quando b representa um carregamento externo o termo $\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial b}$ do lado direito da equação (3-4) se torna não nulo. O carregamento externo aplicado pode ser dado, de maneira geral, como cargas distribuídas nos elementos ou como cargas nodais. No primeiro caso, a derivada é obtida derivando-se as equações:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}^s}{\partial b} = \int_{\Gamma_t} \frac{\partial t_i}{\partial b} N_{iq} dA \quad (3-23)$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{Q}^v}{\partial b} = \int_{\Omega} \rho \frac{\partial b_i}{\partial b} N_{iq} dV \quad (3-24)$$

Quanto aos carregamentos prescritos nos nós, pode-se definir um vetor h_p de parâmetros para quais se deseja obter a sensibilidade e uma matriz de constantes m_{qp} de forma que o vetor de forças externas seja dado da seguinte forma:

$$Q_p = m_{qp} h_p \quad (3-25)$$

A sensibilidade é então obtida através da seguinte expressão:

$$\frac{\partial Q_p}{\partial b} = m_{qp} \frac{\partial h_p}{\partial b} \quad (3-26)$$

onde $\frac{\partial h_p}{\partial b}$ é um vetor que contém todos os elementos iguais a zero com exceção de um com valor unitário.

3.2.7

Sensibilidade da Matriz de Rigidez Elástica

Na seção (3.2.3) foi apresentada a equação (3-16) para o cálculo da sensibilidade da carga crítica linear, onde é necessário a obtenção da sensibilidade das matrizes de rigidez elástica e rigidez geométrica.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{k}^0}{db} = & \frac{d\mathbf{B}^0}{db} E \mathbf{B}^0 V + \\ & \mathbf{B}^0 \frac{dE}{db} \mathbf{B}^0 V + \\ & \mathbf{B}^0 E \frac{d\mathbf{B}^0}{db} V + \\ & \mathbf{B}^0 E \mathbf{B}^0 \frac{dV}{db} \end{aligned} \quad (3-27)$$

lembrando que:

$$\frac{dV}{db} = \frac{dA}{db} L + A \frac{dL}{db} \quad (3-28)$$

Desta forma, tem-se a definição geral para a sensibilidade da matriz de rigidez elástica, onde os termos $\frac{dE}{db}$, $\frac{dA}{db}$, $\frac{dL}{db}$ e $\frac{d\mathbf{B}^0}{db}$ já foram definidos anteriormente.

3.2.8

Sensibilidade da Matriz de Rigidez Geométrica

A matriz de rigidez geométrica, obtida a partir da equação (2-18), é reescrita a seguir:

$$\mathbf{k}^\sigma = \frac{\sigma}{0l^2} \mathbf{H} V \quad (3-29)$$

A sensibilidade de \mathbf{k}^σ em relação a variável b é dada da seguinte forma:

$$\frac{d\mathbf{k}^\sigma}{db} = \frac{\partial \mathbf{k}^\sigma}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{db} + \left. \frac{\partial \mathbf{k}^\sigma}{\partial b} \right|_{\sigma \neq \sigma(b)} \quad (3-30)$$

onde

$$\frac{\partial \mathbf{k}^\sigma}{\partial \sigma} = \frac{1}{0l^2} \mathbf{H} V = \frac{1}{\sigma} \mathbf{k}^\sigma \quad (3-31)$$

e

$$\left. \frac{\partial \mathbf{k}^\sigma}{\partial b} \right|_{\sigma \neq \sigma(b)} = \sigma \left(-\frac{2}{0l^3} \mathbf{H} V \frac{dL}{db} + \frac{1}{0l^2} \mathbf{H} \frac{dV}{db} \right) \quad (3-32)$$

3.3

Método das Diferenças Finitas (MDF)

A mais simples técnica para cálculo da sensibilidade com respeito a variável de projeto é a aproximação por diferenças finitas. Esta técnica é geralmente cara computacionalmente, mas é de fácil implementação e por isto muito usada.

A mais simples aproximação por diferenças finitas é a de primeira ordem, chamada de diferença a frente. Seja a função $f(b)$, onde b é a variável de projeto. A aproximação de primeira ordem, $\Delta f / \Delta b$, para a derivada, df/db , é dada por:

$$\frac{\Delta f}{\Delta b} = \frac{f(b + \Delta b) - f(b)}{\Delta b} \quad (3-33)$$

onde Δb é uma perturbação absoluta, pequena o suficiente para produzir resultados satisfatórios. Geralmente essa perturbação é definida através da seguinte expressão:

$$\Delta b = \eta b \quad (3-34)$$

onde η é o valor da perturbação relativa.

A maior dificuldade no MDF é selecionar o valor da perturbação η , se for selecionada uma pequena perturbação, para reduzir o erro de truncamento (pois a derivada só é exata quando Δb tende a zero), pode-se ter um excessivo erro de arredondamento causado pela forma como os números reais são representados nos computadores. Perturbações relativas entre 10^{-4} a 10^{-8} geralmente levam a bons resultados, o suficiente para aplicações práticas.

Em problemas não-lineares, fontes adicionais de imprecisão existem. Estas estão vinculadas à natureza iterativa dos procedimentos de solução e aos resíduos associados [68]. A figura (3.1) mostra o comportamento de um deslocamento $q(b_k)$ como função de uma variável de projeto b_k . As linhas tracejadas limitam o máximo desvio permitido, como consequência da tolerância prescrita para o resíduo.

Tanto $q_1(b_k)$ quanto $q_2(b_k)$ são soluções aceitáveis, se encontrando dentro da faixa de tolerância aceitável. O mesmo vale para $q_1(b_k + \Delta b_k)$ e $q_2(b_k + \Delta b_k)$ relativos ao problema perturbado. Entretanto, derivadas totalmente diferentes são obtidas. Problemas como esse pioram a medida que se aumenta a faixa de tolerância e se diminui a magnitude das perturbações.

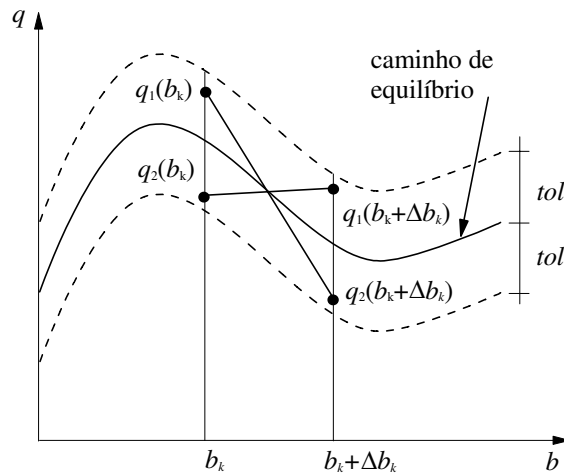


Figura 3.1: Imprecisão da sensibilidade via diferenças finitas em problemas não-lineares [68].

3.4

Exemplos de Análise de Sensibilidade

Nesta seção são apresentados exemplos de análise de sensibilidade de estruturas geometricamente não-lineares. Os exemplos tratam da sensibilidade dos deslocamentos nodais, tensões e da sensibilidade das cargas críticas das estruturas. Os objetivos são verificar a validade das expressões apresentadas neste capítulo, testar a implementação computacional e comparar a precisão dos métodos discutidos anteriormente.

3.4.1

Treliça Espacial de 24 Elementos

Neste exemplo é feita a análise de sensibilidade da treliça espacial, apresentada na figura (2.8), estudada na seção (2.7.2) do capítulo anterior. O estudo mostrou que a estrutura apresenta instabilidade por ponto limite depois de sofrer grandes deslocamentos.

Considerando-se como variável de projeto a área da seção transversal A_1 , analisa-se o efeito do tamanho da perturbação relativa η no gradiente do deslocamento vertical do nó 1 (q_3^1). Na figura (3.2) observa-se a variação do gradiente com o tamanho da perturbação relativa pelo Método das Diferenças Finitas (MDF). O gráfico mostra que perturbações variando de 10^{-4} a 10^{-10} representam a tendência dos resultados. Desta forma a perturbação de 10^{-5} será considerada de maneira a verificar a consistência das sensibilidades calculadas pelo Método Analítico apresentadas a seguir.

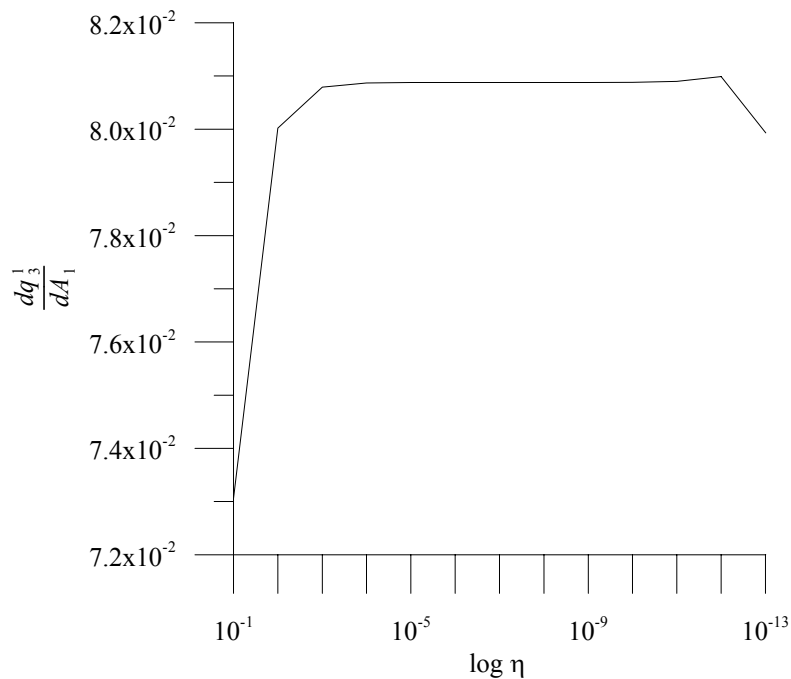


Figura 3.2: Treliça espacial de 24 elementos - Efeito da perturbação relativa η na sensibilidade do deslocamento q_3^1 em relação a área A_1 .

As sensibilidades são obtidas em relação ao módulo de elasticidade (E), à área da seção transversal (A_1), à coordenada z_3 do nó 1 (z_3^1) e ao carregamento nodal (P_1). O deslocamento vertical do nó 1 (q_3^1), centro do domo, e a sua sensibilidade calculada pelo Método Analítico, para diversos fatores de carga, são apresentados na tabela (3.1).

λ	q_3^1	$\frac{dq_3^1}{dE}$	$\frac{dq_3^1}{dA_1}$	$\frac{dq_3^1}{dz_3^1}$	$\frac{dq_3^1}{dP_1}$
0.10	-1.116×10^{-2}	1.126×10^{-6}	6.689×10^{-3}	1.175×10^{-2}	-1.126×10^{-1}
0.50	-5.802×10^{-2}	6.101×10^{-6}	3.610×10^{-2}	6.498×10^{-2}	-1.220×10^{-1}
1.00	-1.226×10^{-1}	1.374×10^{-5}	8.087×10^{-2}	1.505×10^{-1}	-1.374×10^{-1}
1.50	-1.965×10^{-1}	2.392×10^{-5}	1.399×10^{-1}	2.711×10^{-1}	-1.595×10^{-1}
2.00	-2.843×10^{-1}	3.904×10^{-5}	2.262×10^{-1}	4.607×10^{-1}	-1.952×10^{-1}
2.50	-3.974×10^{-1}	6.680×10^{-5}	3.819×10^{-1}	8.328×10^{-1}	-2.672×10^{-1}
3.00	-5.820×10^{-1}	1.738×10^{-4}	9.687×10^{-1}	2.387	-5.796×10^{-1}

Tabela 3.1: Treliça espacial de 24 elementos - Sensibilidades dos deslocamentos através do método analítico.

A consistência dos resultados apresentados na tabela (3.1) é verificada através da figura (3.3). Nestes gráficos as sensibilidades obtidas através do DDM são comparadas com as do MDF. Observa-se uma excelente concordância entre os valores apresentados.

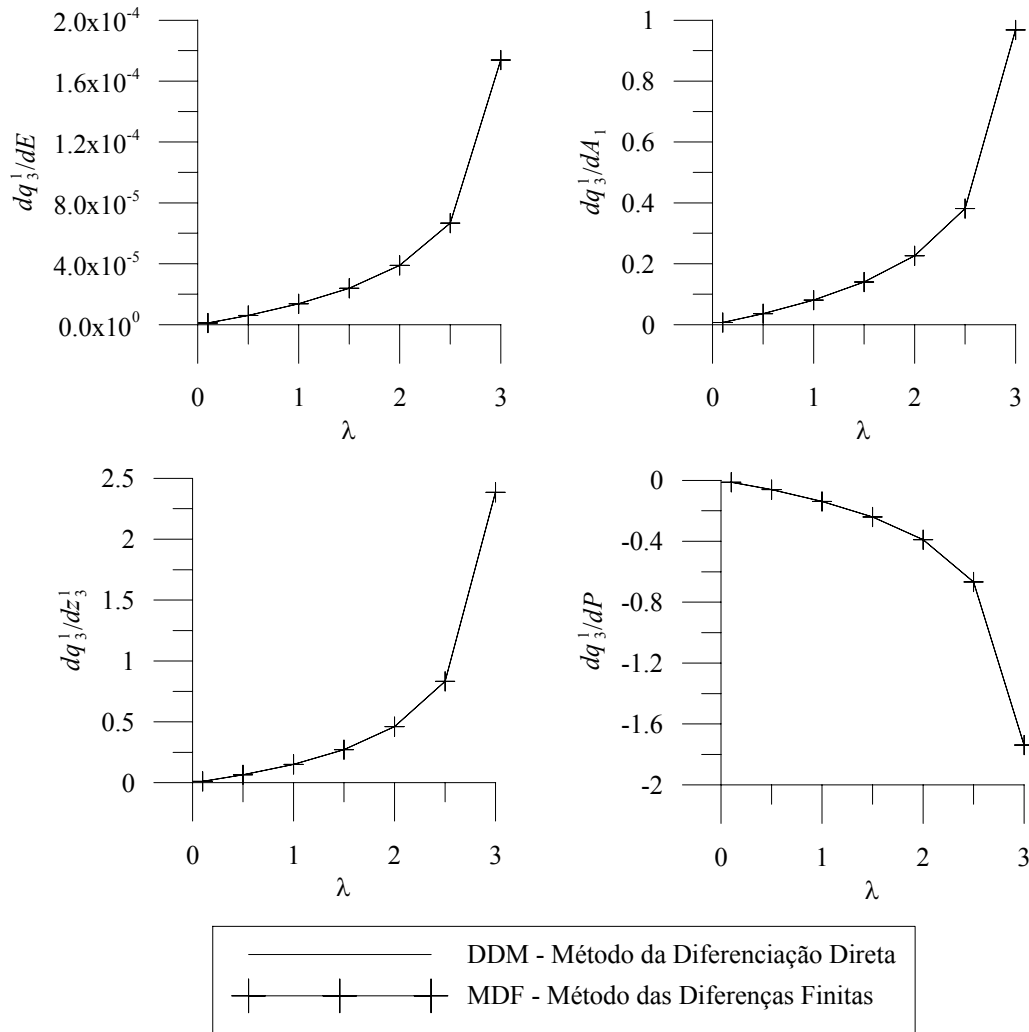


Figura 3.3: Treliça espacial de 24 elementos - Sensibilidades dos deslocamentos através dos métodos analítico (DDM) e diferenças finitas.

O deslocamento vertical do nó 1 e a sua sensibilidade em relação ao módulo de elasticidade é apresentada na figura (3.4) para o comportamento linear e não linear.

Neste exemplo, além da sensibilidade dos deslocamentos nodais, estuda-se também a sensibilidade da carga limite. Os procedimentos para a determinação do ponto limite foram apresentados na seção (2.6) onde o valor do incremento de carga inicial ($^1\Delta\lambda^0$) representa um papel fundamental na precisão dos resultados. Quanto menores forem os incrementos de carga maior será a precisão fazendo com que o autovalor tenda a zero, conforme apresentado na tabela (3.2).

A carga crítica e a sua sensibilidade calculada pelo Método Analítico são apresentadas na tabela (3.2). O MDF foi utilizado para verificar a consistência

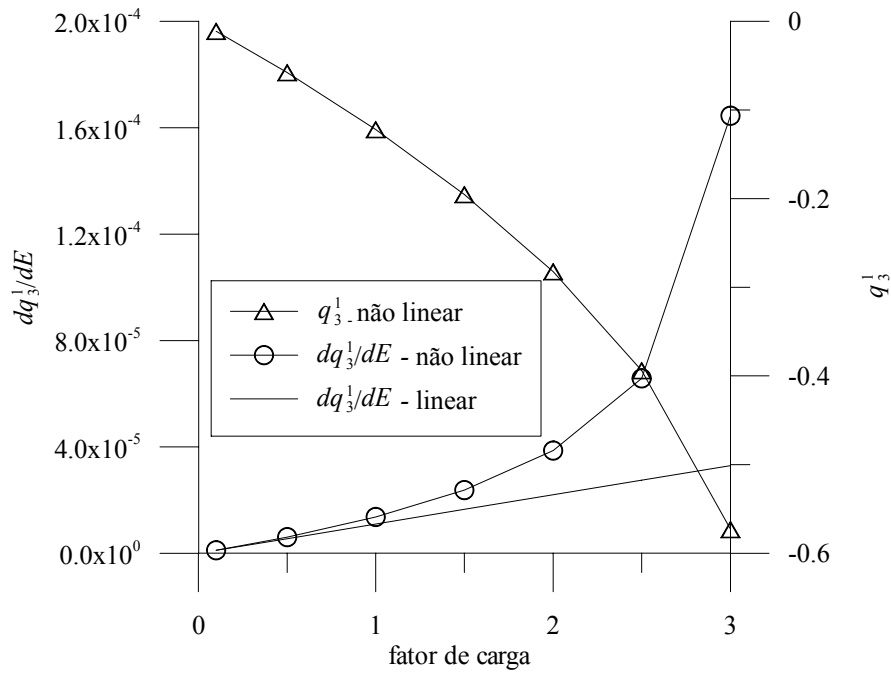


Figura 3.4: Treliça espacial de 24 elementos - Deslocamento vertical do nó 1 e a sensibilidade em relação ao módulo de elasticidade.

$^1\Delta\lambda^0$	passos	λ_{cr}	autovalor*	$\frac{d\lambda_{cr}}{dE}$	$\frac{d\lambda_{cr}}{dA_1}$	$\frac{d\lambda_{cr}}{dz_3^1}$
0.001	6985	3.156	1.631×10^{-3}	3.156×10^{-4}	1.701	4.833
0.010	697	3.156	1.683×10^{-2}	3.156×10^{-4}	1.701	4.838
0.020	348	3.156	3.507×10^{-2}	3.156×10^{-4}	1.700	4.845
0.050	139	3.155	1.148×10^{-1}	3.155×10^{-4}	1.697	4.875
* – menor autovalor da matriz de rigidez tangente no nível de carga λ_{cr} .						

Tabela 3.2: Treliça espacial de 24 elementos - Sensibilidades da carga crítica obtidas via DDM.

das sensibilidades calculadas pelo Método Analítico, obtendo-se os seguintes valores: $d\lambda_{cr}/dE = 3.157 \times 10^{-4}$, $d\lambda_{cr}/dA_1 = 1.701$, $d\lambda_{cr}/dz_3^1 = 4.832$. Resultados estes com excelente concordância com os obtidos através do DDM apresentados na tabela (3.2).

4

Análise de Confiabilidade Estrutural

Métodos de confiabilidade estrutural são empregados na engenharia para se obter a probabilidade de falha do modelo levando-se em consideração as incertezas. Entende-se aqui por falha quando a estrutura não atende os objetivos para os quais ela foi concebida. Tais falhas, podem trazer grandes prejuízos, tanto de ordem material quanto no que diz respeito a segurança humana. Na prática não existe nenhuma estrutura com probabilidade de falha zero, sempre existe o risco dela vir a falhar, porém, esse risco deve ser mantido em níveis aceitáveis de acordo com critérios de segurança e economia.

A confiabilidade de uma estrutura é definida como o complemento da probabilidade de falha, ou seja, $C = 1 - P_f$. Como geralmente P_f é pequena para estruturas, na ordem de 10^{-3} a 10^{-6} , resultando em confiabilidade de 0.99 a 0.999999, é comum usar P_f como medida de confiabilidade da estrutura [70].

Diversas falhas podem ser consideradas para o projeto de estruturas, quando num mesmo problema de confiabilidade estão envolvidas mais de uma função de falha, caracteriza-se um sistema. Na avaliação da falha do sistema decompõe-se o mesmo em componentes e a falha do sistema é definida como uma combinação das falhas dos componentes.

Neste capítulo, os procedimentos para a avaliação da confiabilidade de uma componente (uma função de performance) são apresentados.

4.1

Modelagem das Incertezas

A análise de confiabilidade exige a caracterização estatística dos parâmetros envolvidos no modelo. Nos projetos estruturais pode-se dizer que todos os parâmetros envolvidos são aleatórios, desde as coordenadas nodais até os carregamentos. O resultado obtido dependerá da qualidade dos dados estatísticos relacionados ao problema e da precisão do modelo matemático usado para a análise das funções de estado limite.

Na prática, a partir de dados coletados (ou observados) de um determinado fenômeno, determinam-se os parâmetros estatísticos da variável aleatória que representa o fenômeno em questão. Os vários resultados de um fenômeno

aleatório podem ser vistos como os resultados de uma função. A representação de um determinado fenômeno por uma função distribuição de probabilidades é algo que facilita bastante o tratamento da mesma, i.e., uma vez definida a distribuição e os respectivos parâmetros é fácil calcular os níveis de probabilidades associadas aos diversos eventos que envolvem tal fenômeno. Existem na literatura diversas funções já predefinidas que usualmente representam determinados fenômenos (ou variáveis), apresentadas na seção seguinte.

4.1.1

Distribuições de Probabilidades

Um variável randômica pode ser caracterizada pela sua função cumulativa de distribuição (CDF, do inglês *Cumulative Distribution Function*), F_X . A função densidade de probabilidade f_X , identificada por PDF (do inglês *Probability Density Function*) é definida como a primeira derivada de F_X [55]. Na literatura existem diversas funções, cada uma adequada a melhor representar um determinado fenômeno. Uma descrição mais detalhada sobre este assunto é apresentada no apêndice A.

Na tabela (4.1) são apresentadas as variáveis randômicas, juntamente com seus símbolos, que podem ser utilizadas neste trabalho.

Distribuição	Símbolo
Normal	N
Lognormal	LN
Exponential	Exp
Rayleigh	Ray
Uniform	U
Gamma	Gam
Beta	Bet
Tipo I Máximos / Gumbel	GU
Tipo I Mínimos	TImin
Tipo II Máximos	TIImax
Tipo III Mínimos / Weibull	WB

Tabela 4.1: Distribuições de probabilidades.

4.1.2

Correlação Entre Variáveis Aleatórias

As variáveis são ditas dependentes ou correlacionadas quando têm suas características alteradas com a presença de outra variável. A correlação estabelece uma dependência estatística entre as variáveis. Cada par de variáveis aleatórias, (X_i, X_j) , tem um coeficiente de correlação ρ_{ij} , onde: $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$. O caso especial de $\rho = 0$ indica nenhuma correlação, enquanto que $\rho_{ij} = \pm 1$ indica uma perfeita correlação linear e também uma dependência entre as

variáveis. Os coeficientes de correlação são armazenadas numa matriz simétrica designada matriz de correlação $\mathbf{R} = [\rho_{ij}]$.

4.1.3

Função Conjunta de Probabilidades

Em alguns métodos de análise de confiabilidade, entre eles o método FORM, uma das etapas principais é a busca pelo ponto de projeto. Isto será descrito na seção (4.3.2). Esta busca é feita no espaço normal padrão não correlacionado, desta maneira é necessário se transformar o vetor original de variáveis randômicas para este espaço. A escolha da função de probabilidade conjunta e a transformação para o espaço normal padrão serão apresentadas nesta seção. Tal problema é discutido em detalhes em Liu & Der Kiureghian [44]. Os autores propuseram dois modelos:

- *Modelo de Morgenstern*: limitado a pequenas correlações ($|\rho_{ij}| < 0.3$) e difícil de se tratar um grande número de variáveis aleatórias;
- *Modelo de Nataf*: é definido de maneira conveniente para qualquer número de variáveis aleatórias.

Devido a essas características somente o modelo de Nataf será utilizado. A partir da PDF marginal de z_i , o seguinte vetor \mathbf{z} é definido:

$$\Phi(z_i) = F_i(x_i) \Rightarrow z_i = \Phi^{-1}[F_i(x_i)] \quad (4-1)$$

onde $\Phi(x)$ é a função cumulativa de probabilidade padrão (Gaussiana).

Sendo \mathbf{z} um vetor normal padrão com uma matriz de correlação \mathbf{R}_o , sua PDF conjunta é dado por:

$$f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) = \varphi_n(\mathbf{z}, \mathbf{R}_o) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det \mathbf{R}_o}} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{R}_o^{-1} \mathbf{z} \right) \quad (4-2)$$

Usando transformação inversa (4-1), a PDF conjunta se reduz a:

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n) \frac{\varphi_n(\mathbf{z}, \mathbf{R}_o)}{\varphi(z_1) \dots \varphi(z_n)} \quad (4-3)$$

Para completar a definição, deve-se obter a matriz de correlação \mathbf{R}_o através da expressão abaixo:

$$\rho_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right) \left(\frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j} \right) \varphi_2(z_i, z_j, \rho_{o,ij}) dz_i dz_j \quad (4-4)$$

onde φ_2 é a função densidade de probabilidades bidimensional padrão:

$$\varphi_2(z_i, z_j, \rho) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z_i^2 - 2\rho z_i z_j + z_j^2}{1 - \rho^2} \right) \right] \quad (4-5)$$

Relações aproximadas para $\rho_{o,ij}(\rho_{ij})$ para um grande número de tipos de PDF são dadas em Der Kiureghian & Liu [39], Liu & Der Kiureghian [44] e Melchers [49].

Assumindo-se que o vetor de variáveis aleatórias \mathbf{x} tem uma PDF obtida através do modelo de Nataf, o vetor \mathbf{z} dado por (4-1) é Gaussiano com média zero e matriz de correlação $\mathbf{R}_o = \mathbf{L}_o \mathbf{L}_o^T$. A transformação probabilística para o espaço normal padrão pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{L}_o^{-1} \mathbf{z} \\ &= \mathbf{L}_o^{-1} \begin{bmatrix} \Phi^{-1}[F_1(x_1)] \\ \Phi^{-1}[F_2(x_2)] \\ \vdots \\ \Phi^{-1}[F_n(x_n)] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-6)$$

onde \mathbf{L}_o é a parte triangular inferior da decomposição de Cholesky da matriz de correlação \mathbf{R}_o . O Jacobiano da transformação (4-6) é apresentado abaixo:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{u},\mathbf{x}} = \mathbf{L}_o^{-1} \text{diag} \left[\frac{f(x_i)}{\varphi(z_i)} \right] \quad (4-7)$$

4.2

Função de Performance

A função de performance do sistema em estudo também é conhecida como *função de estado limite*, *função de falha* ou *margem de segurança* e é comumente denominada $g(\mathbf{x})$, onde \mathbf{x} é um vetor que inclui todas as variáveis aleatórias consideradas na análise [70].

Para a avaliação da segurança de uma estrutura, o interesse recai justamente na possibilidade de acontecerem falhas, ou seja, na probabilidade da função de falha assumir valores pertencentes ao domínio de falha [70]. O valor numérico da função de performance distingue o domínio de falha do domínio de segurança:

- $g(\mathbf{x}) > 0$: seguro
- $g(\mathbf{x}) = 0$: domínio limite (*superfície de falha*)
- $g(\mathbf{x}) \leq 0$: falha

No contexto de confiabilidade, não necessariamente a função de falha significa a ruptura da estrutura mas sim que certos limites foram alcançados ou excedidos. Alguns exemplos de função de falha podem ser apresentados:

- $g(\mathbf{x}) = q_a - q(\mathbf{x})$, a falha ocorre quando o deslocamento q em um determinado ponto excede o valor admissível q_a .

- $g(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) - \lambda_a$, a falha ocorre quando a carga crítica λ for inferior a λ_a (lembrando que $\lambda_a = 1.0$ corresponde à carga total aplicada).

No espaço normal padrão não correlacionado a função de performance é denotada por $G(\mathbf{u})$, desta forma pode-se escrever:

$$G(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = g(\mathbf{x}) \Leftrightarrow g(\mathbf{x}(\mathbf{u})) = G(\mathbf{u}) \quad (4-8)$$

4.3

Métodos de Análise de Confiabilidade

Sabendo-se que $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ representa a função densidade de probabilidades conjunta de todas as variáveis randômicas \mathbf{x} envolvidas na análise, a probabilidade de falha pode ser escrita como:

$$P_f(\mathbf{x}) = \int_{g(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4-9)$$

A avaliação da expressão (4-9) não é muito simples, uma vez que ela envolve a avaliação de uma integral n -dimensional num domínio complexo ($g(\mathbf{x}) \leq 0$), onde n é o número de variáveis aleatórias pertencentes a \mathbf{x} . Mesmo com o desenvolvimento de técnicas modernas de integração numérica e com computadores cada vez mais eficientes, na prática a avaliação da equação (4-9), por integração, tem se restringido a problemas com 5 a 6 variáveis aleatórias no máximo [70]. Devido a isto outros métodos para avaliar a probabilidade de falha foram desenvolvidos, como será visto mais adiante. Dentre os métodos estão incluídos os de primeira e segunda ordem, FORM e SORM respectivamente.

4.3.1

Método Valor Médio (MV)

Uma maneira conveniente de se representar a confiabilidade é através do índice de confiabilidade, β , que pode ser definido como $-\Phi^{-1}(P_f(\mathbf{x}))$, onde Φ é a função cumulativa normal. Uma das primeiras técnicas para se avaliar a confiabilidade foi o método de primeira ordem valor médio de segundo momento (MVFOSM, do inglês *Mean Value First Order Second Moment*). Este método baseia-se simplesmente na média e no desvio padrão das variáveis aleatórias e também no coeficiente de correlação entre elas (não considera o tipo de distribuição das variáveis).

O índice de confiabilidade, assumindo-se que $g(\mathbf{x})$ é normalmente distribuída e aproximada por Taylor de primeira ordem, é estimado da seguinte maneira:

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} = \frac{E[g(\mathbf{x})]}{\sqrt{\text{Var}[g(\mathbf{x})]}} \quad (4-10)$$

onde $E(g(\mathbf{x}))$ e $\text{Var}(g(\mathbf{x}))$ são, respectivamente, o valor esperado e a variância de $g(\mathbf{x})$ que podem ser aproximados como segue:

$$E[g] = \mu_g \approx g(\boldsymbol{\mu}) \quad (4-11)$$

$$\text{Var}[g] = \sigma_g^2 \approx \nabla g \Sigma \nabla g^T \quad (4-12)$$

onde Σ é a matriz de covariância das variáveis randômicas \mathbf{x} .

A probabilidade de falha é então aproximada como sendo $P_f = \Phi(-\beta)$. A avaliação da P_f é exata apenas para uma função linear de variáveis normais. Este método apresenta certas inconsistências. Uma delas é que para uma determinado problema que pode ter sua função de falha representada por duas funções de estado limite diferentes, porém equivalentes, os índices de confiabilidade obtidos para ambas podem ser diferentes [70], por exemplo $g(\mathbf{x}) = X_1 - X_2$ e $g(\mathbf{x}) = \ln(X_1/X_2)$. Este problema motivou o desenvolvimento de métodos que sejam invariantes, tais quais o FORM que é baseado na busca pelo ponto mais provável de falha.

4.3.2

Métodos Baseados no Ponto de Projeto

Alguns métodos de confiabilidade determinam um ponto de projeto (MPP), ou ponto mais provável de falha e fazem a integração em torno desse ponto. A busca pelo MPP é feita no espaço normal padrão não correlacionado de maneira a simplificar a integração. Desta forma é necessário se transformar o vetor de variáveis originais em um vetor de variáveis não correlacionadas. Qualquer conjunto de variáveis randômicas, \mathbf{x} , pode ser transformado para \mathbf{u} através dos procedimentos apresentados na seção (4.1.3).

Da relação (4-8) pode-se reescrever a probabilidade de falha como:

$$P_f = \int_{G(\mathbf{u}) \leq 0} \varphi(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \quad (4-13)$$

onde $\varphi(\mathbf{u})$ é a PDF normal padrão de \mathbf{u} , definida como:

$$\varphi(\mathbf{u}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2\right) \quad (4-14)$$

Uma característica importante desta PDF é o seu decaimento exponencialmente com o quadrado da norma $\|\mathbf{u}\|$. Desta forma os pontos mais significantes que contribuem na integral (4-13) são os mais próximos da origem do espaço normal padrão.

Após a determinação do MPP, a probabilidade de falha pode ser aproximada pelo método FORM, que é baseado numa linearização da função de

estado limite no MPP no espaço u . Esta linearização se faz através de um hiperplano tangente à superfície de falha no MPP dado pela seguinte equação:

$$h(\mathbf{u}) = -\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{u} + \beta = 0 \quad (4-15)$$

onde o vetor $\boldsymbol{\alpha}$ é definido como:

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{\nabla G}{\|\nabla G\|} \quad (4-16)$$

onde $\nabla G = \left[\frac{\partial G}{\partial u_1} \dots \frac{\partial G}{\partial u_n} \right]$, e o índice de confiabilidade (β) é obtido da seguinte forma:

$$\beta = \text{sign}[G(\mathbf{0})] \|\mathbf{u}^*\| \quad (4-17)$$

Desta forma a probabilidade é então aproximada no método FORM:

$$P_f \approx P_{f1} = \Phi(-\beta) \quad (4-18)$$

No método SORM a função de estado limite é tratada como uma hipersuperfície de segundo grau. Além do índice de confiabilidade necessita-se das curvaturas da função de estado limite. Existem várias aproximações quadráticas disponíveis para representar a forma da hipersuperfície, porém, a mais simples delas é a forma assintótica proposta por Breitung, citado por Sagrilo [70], onde o cálculo da probabilidade de falha é feito da seguinte forma:

$$P_f \approx P_{f2} = \Phi(-\beta) \prod_{l=1}^{n-1} (1 - \beta \kappa_l)^{-1/2} \quad (4-19)$$

onde κ_l são as curvaturas da função de estado limite e n o número de variáveis randômicas na análise.

O MPP, \mathbf{u}^* , se encontra sob a superfície de falha $G(\mathbf{u}) = 0$ na posição mais próxima da origem do espaço u e pode ser formulado como um problema de otimização restrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \|\mathbf{u}\| \\ &\text{sujeito a} && G(\mathbf{u}) = 0 \end{aligned} \quad (4-20)$$

Métodos para a solução do problema otimização (4-20) são apresentados na seção (4.3.2) a seguir.

A figura (4.1) ilustra os conceitos apresentados para os métodos FORM e SORM para duas variáveis randômicas X_1 e X_2 .

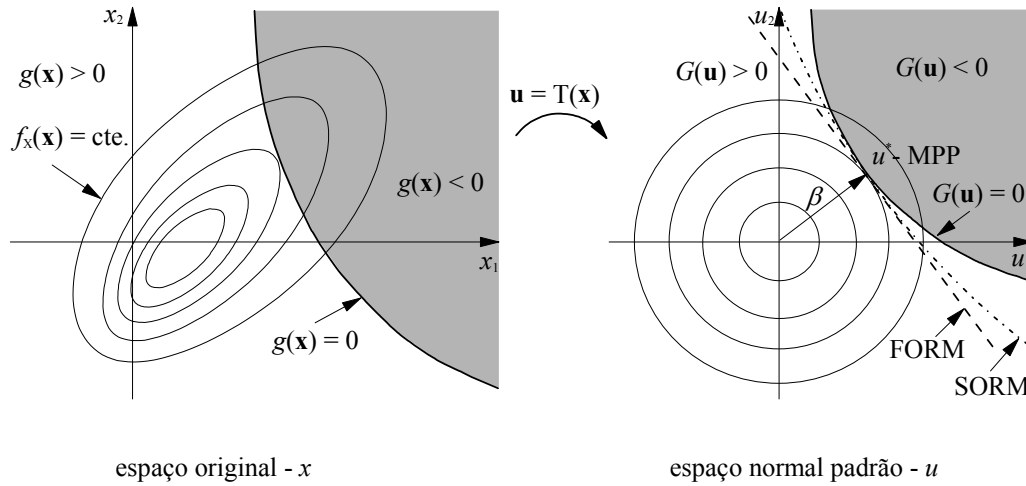


Figura 4.1: Representação gráfica dos métodos FORM e SORM.

Determinação do Ponto de Projeto

Conforme visto anteriormente, os métodos (FORM/SORM) requerem a determinação do *ponto de projeto*, que foi definido como o ponto sob a superfície de falha mais próximo da origem, no espaço normal padrão.

Na literatura técnica de otimização, p. ex., Bazaraa et al. [7], é comum se desenvolver algoritmos para problemas de otimização com restrições de desigualdade. O que difere do problema (4-20), onde a restrição é de igualdade. Por esta razão alguns dos algoritmos utilizados neste trabalho resolvem o problema equivalente a seguir:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \|\mathbf{u}\| \\ &\text{sujeito a} && G(\mathbf{u}) \leq 0 \end{aligned} \quad (4-21)$$

Quando a origem no espaço normal padrão está no domínio seguro, então os problemas (4-20) e (4-21) resultam em soluções equivalentes. Entretanto, quando a origem é no domínio de falha, isto é, quando $G(\|\mathbf{u}\| = 0) < 0$, então a solução do problema (4-21) é a origem e não o verdadeiro ponto de projeto do problema (4-20). Conseqüentemente, uma atenção maior deve ser tomada quando se resolver o problema (4-21).

No apêndice (B) os algoritmos de programação matemática utilizados na solução dos problemas (4-20) e (4-21) são apresentados, entre eles o tradicional HLRF (Hasofer–Lind–Rackwitz–Fiessler). Este método, originalmente proposto por Hasofer & Lind [30] para análise de confiabilidade de segundo-momento e depois estendido por Rackwitz & Fiessler [64] para incluir informação de distribuição, é atualmente o método mais usado para resolver o problema de otimização em confiabilidade estrutural.

4.3.3

Amostragem por Importância

Além dos métodos apresentados nas seções anteriores, a probabilidade de falha também pode ser obtida usando-se métodos de simulação, tais quais o método de Monte Carlo (MCS, do inglês *Monte Carlo Simulation*) e o de amostragem por pontos de importância (IS, do inglês *Importance Sampling*). Nestes métodos a idéia básica é se repetir diversas vezes um determinado fenômeno e observar os eventos de interesse que possam ocorrer. O grande inconveniente destes métodos é o elevado número de realizações necessárias para se obter a probabilidade de falha. Quando a simulação implica em uma resposta estrutural via elementos finitos este procedimento pode ser tornar computacionalmente caro. Isto inibe o uso destes métodos na maior parte dos problemas de confiabilidade estrutural, principalmente no caso de otimização baseada em confiabilidade onde as rotinas de avaliação da confiabilidade são chamadas exaustivamente. Apesar disto, estes métodos são largamente utilizados para aferir outros métodos.

Introduzindo-se a função indicadora $I(\mathbf{u})$ tal que $I(\mathbf{u}) = 1$ se $g(\mathbf{x}) \leq 0$ e $I(\mathbf{u}) = 0$ nos outros casos, pode-se reescrever a equação (4-9) da seguinte forma:

$$P_f = \int_{\Omega_{\mathbf{u}}} I(\mathbf{u}) \varphi(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \int_{\Omega_{\mathbf{u}}} \left(I(\mathbf{u}) \frac{\varphi(\mathbf{u})}{f(\mathbf{u})} \right) f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \quad (4-22)$$

onde $\Omega_{\mathbf{u}}$ denota todo o espaço normal padrão, $\varphi(\mathbf{u})$ é a PDF conjunta normal padrão e $f(\mathbf{u})$ é a PDF conjunta. Observa-se em (4-22) que a última integral é o valor esperado da variável randômica $I(\mathbf{u}) \frac{\varphi(\mathbf{u})}{f(\mathbf{u})}$ relativo a distribuição $f(\mathbf{u})$. O valor esperado pode ser obtido através da geração de realizações estatisticamente independentes da variável $I(\mathbf{u}) \frac{\varphi(\mathbf{u})}{f(\mathbf{u})}$ obtidas a partir de $f(\mathbf{u})$. A média destas realização é uma aproximação para a probabilidade de falha. No método de MCS $\varphi(\mathbf{u})$ é idêntica a $f(\mathbf{u})$, desta forma a distribuição é centrada na média. Uma vez que a falha tende a ocorrer nas regiões de extremidade da distribuição probabilística, isto implica que um grande número de amostras são necessárias para se obter boas estimativas da probabilidade de falha. Na análise via IS o centro da distribuição é deslocado para um ponto selecionado pelo usuário. A figura (4.2) ilustra os conceitos apresentados para os métodos MCS e IS para duas variáveis randômicas X_1 e X_2 .

O processo de solução da equação (4-22) se inicia com a geração de um vetor $\tilde{\mathbf{u}}$ de variáveis randômicas normais de média zero e desvio padrão unitário. Este vetor é então transformado de acordo com a relação $\mathbf{u} =$

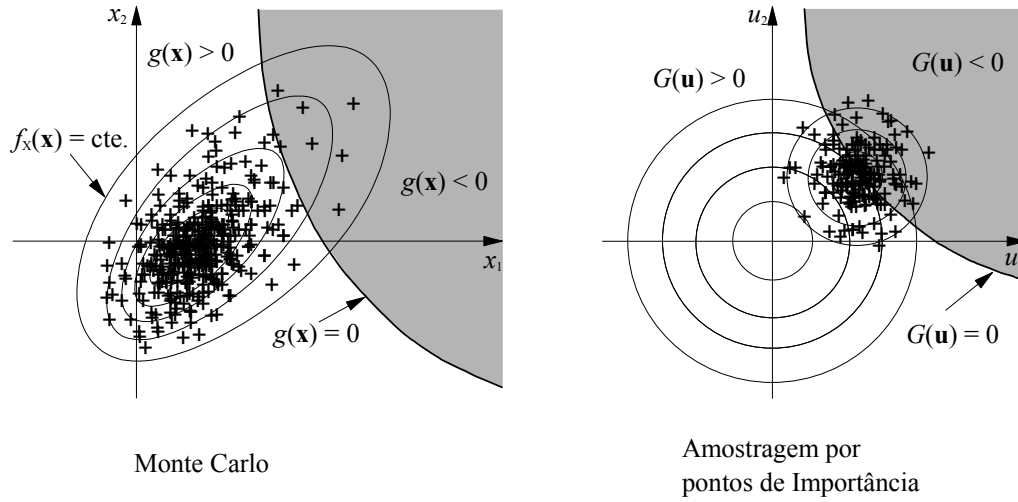


Figura 4.2: Representação gráfica dos métodos MCS e IS.

$\mathbf{u}_{centro} + \mathbf{L}\tilde{\mathbf{u}}$, onde \mathbf{u}_{centro} é o centro das distribuição e \mathbf{L} é a decomposição da matriz de covariância Σ ambos fornecidos pelo usuário. Para se tomar vantagem dos resultados obtidos pelo FORM, previamente calculados, o centro da distribuição é usualmente adotado como sendo o MPP, $\mathbf{u}_{centro} = \mathbf{u}_{G(\mathbf{u})=0}^*$. A matriz de covariância é geralmente definida como a identidade.

Com a definição de \mathbf{u} obtém-se \mathbf{x} através da transformação probabilística. Avalia-se então a função indicadora com base nos valores de $g(\mathbf{x})$. A variável $h(\mathbf{u})$, definida aqui como $I(\mathbf{u})\frac{\varphi(\mathbf{u})}{f(\mathbf{u})}$ é então avaliada a partir das seguintes expressões:

$$f(\mathbf{u}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det \Sigma}} \exp \left[-\frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{centro})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{centro}) \right] \quad (4-23)$$

$$\varphi(\mathbf{u}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp \left[-\frac{1}{2}\mathbf{u}^T \mathbf{u} \right] \quad (4-24)$$

A probabilidade de falha é estimada como:

$$P_f \approx P_{f,sim} = \bar{h} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(\mathbf{u}_i) \quad (4-25)$$

A variância de $P_{f,sim}$ é obtida através da expressão a seguir:

$$\text{Var} [P_{f,sim}] = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N^2} \text{Var} [h_i] = \frac{1}{N} \text{Var} [h] \quad (4-26)$$

onde $\text{Var} [h]$ é calculada pela seguinte expressão:

$$\text{Var} [h] \approx \frac{1}{N-1} \left[\sum_{i=1}^N h_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i \right)^2 \right] \quad (4-27)$$

Finalmente substituindo (4-27) em (4-26) resulta:

$$\text{Var} [P_{f, \text{sim}}] \approx \frac{1}{N(N-1)} \left[\sum_{i=1}^N h_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i \right)^2 \right] \quad (4-28)$$

O coeficiente de variação da estimativa da probabilidade de falha é calculado através da seguinte expressão:

$$\text{c.o.v.} [P_{f, \text{sim}}] = \frac{\sqrt{\text{Var} [P_{f, \text{sim}}]}}{P_{f, \text{sim}}} \quad (4-29)$$

Durante as simulações monitora-se o valor do coeficiente de variação, equação (4-29), e interrompe-se o processo caso o valor atenda a exigência do usuário ou o número máximo de simulações seja atingido.

4.4

Análise de Sensibilidade

Para se conhecer qual parâmetro do problema é o mais importante e o grau que o mesmo controla o projeto é necessário se estudar a influência de sua variação sobre o sistema, que pode ser realizada através de uma análise de sensibilidade [73, 31, 69]. No capítulo (3) estudou-se a avaliação da sensibilidade da resposta estrutural. Este estudo é puramente determinístico e traduz o comportamento mecânico do sistema. Nesta seção estuda-se a variação do índice de confiabilidade em relação as variáveis envolvidas no problema, caracterizando um estudo estatístico [73]. No presente trabalho, as sensibilidades da confiabilidade são calculadas apenas para os métodos baseados na busca pelo MPP.

Um dos resultados obtidos nos métodos baseados na busca pelo MPP é o vetor dos cossenos diretores, desta forma:

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial u_i} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*} = \alpha_i \quad i = 1, \dots, n. \quad (4-30)$$

que mede a variação do índice de confiabilidade com relação as variáveis aleatórias normais padrão (espaço reduzido). Quando as variáveis aleatórias são correlacionadas ou possuem distribuição diferente da normal, as transformações do espaço reduzido para o espaço físico pode amplificar (ou reduzir) a influência de certas variáveis. Desta forma, tem-se a seguinte expressão

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \left. \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \sum_{j=1}^n \alpha_j J_{ji} \left|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \right. \quad i = 1, \dots, n. \quad (4-31)$$

onde J_{ji} é o jacobiano da transformação $\mathbf{u} = T(\mathbf{x})$. A derivada de β em relação aos parâmetros da distribuição $\boldsymbol{\theta}$ é então definida como

$$\frac{\partial \beta}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{\partial T_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \quad i = 1, \dots, m_{\boldsymbol{\theta}}. \quad (4-32)$$

e para os parâmetros determinísticos $\boldsymbol{\eta}$ tem-se

$$\frac{\partial \beta}{\partial \eta_i} = \frac{1}{\|\nabla_u G(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})\|} \frac{\partial G(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_i} \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \quad i = 1, \dots, m_{\boldsymbol{\eta}}. \quad (4-33)$$

desta forma a sensibilidade da probabilidade de falha fica definida como:

$$\frac{\partial P_f}{\partial p_i} = -\varphi(-\beta) \frac{\partial \beta}{\partial p_i} \quad i = 1, \dots, m_{\boldsymbol{\theta}} + m_{\boldsymbol{\eta}}. \quad (4-34)$$

onde $\mathbf{p} = \{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}\}$. A transformação probabilística T , onde $\mathbf{u} = T(\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}))$ se dá em duas etapas

$$\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}) = \Phi^{-1}[F(\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}))] \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{L}_o^{-1}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}) \quad (4-35)$$

e a sua sensibilidade é avaliada da seguinte forma:

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\boldsymbol{\theta}} = \frac{d\mathbf{L}_o^{-1}(\boldsymbol{\theta})}{d\boldsymbol{\theta}}\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{L}_o^{-1}(\boldsymbol{\theta})\frac{d\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta})}{d\boldsymbol{\theta}} \quad (4-36)$$

onde a avaliação da derivada $\frac{d\mathbf{L}_o^{-1}(\boldsymbol{\theta})}{d\boldsymbol{\theta}}$ é obtida numericamente, já a parcela $\frac{d\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta})}{d\boldsymbol{\theta}}$, quando a relação entre \mathbf{z} e \mathbf{x} é explícita (como por exemplo para variáveis normais $Z = \frac{(X - \mu_X)}{\sigma_X}$) é obtida diretamente da relação, caso contrário ela é também avaliada numericamente.

4.5

Exemplos de Análise de Confiabilidade

Nesta seção são apresentadas as soluções de alguns problemas de confiabilidade encontrados freqüentemente na literatura. Pretende-se, assim, verificar a eficiência da formulação aqui apresentada.

4.5.1

Coluna com 45 barras

A análise de confiabilidade da coluna bidimensional mostrada na figura (4.3) é aqui apresentada. A estrutura está sujeita a dois carregamentos, o primeiro, P_1 aplicado horizontalmente no meio da coluna e o segundo, P_2 , aplicado verticalmente no topo.

O modelo é composto por 20 nós e 45 elementos de treliça, duas seções transversais, $A_1 = 159 \text{ mm}^2$ e $A_2 = 93,8 \text{ mm}^2$, e dois materiais, E_1 e E_2 , conforme apresentados na tabela (4.2).

As variáveis aleatórias do problema são os módulos de elasticidade E_1 e E_2 , as cargas nodais P_1 e P_2 e por fim, as coordenadas nodais, num total de

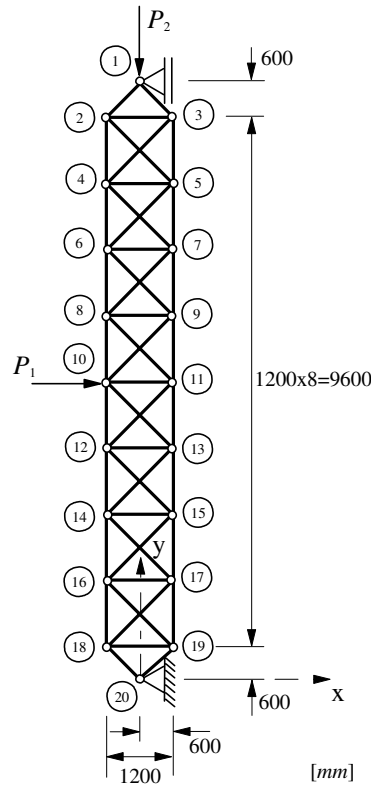


Figura 4.3: Coluna com 45 barras.

Barra	Área	Módulo de Elasticidade
Horizontal	A_2	E_2
Vertical	A_1	E_1
Inclinadas que não chegam no apoio	A_2	E_2
Inclinadas que chegam no apoio	A_1	E_1

Tabela 4.2: Coluna com 45 barras - Seções transversais e materiais das barras.

22 variáveis randômicas. As variáveis E_1 e E_2 são correlacionadas pelo valor de $\rho_{E_1 E_2} = 0.30$. A tabela (4.3) contém a descrição estatística das variáveis do modelo.

O critério de falha escolhido foi o deslocamento horizontal do nó 10 de maneira a se investigar a instabilidade da coluna. A função de falha é representada pela função abaixo:

$$g(q_1^{10}(\mathbf{x})) = 300.0 - q_1^{10}(\mathbf{x}) \quad (4-37)$$

onde 300.0 (mm) é o deslocamento máximo permitido, $q_1^{10}(\mathbf{x})$ é o deslocamento na direção horizontal do nó 10.

Tomando como ponto inicial a média, o algoritmo HLRF clássico falha na convergência uma vez que ele gera estruturas instáveis na busca pelo ponto de falha. A figura (4.4) mostra o comportamento do deslocamento horizontal do nó 10 em função do incremento de carga para o ponto médio e para o ponto de falha. Este comportamento é típico de colunas, neste caso a carga P_1

Variável	Dist.	μ/σ	Unidade
Módulo de Elasticidade (E_1)	LN	30000/2400	N/mm^2
Módulo de Elasticidade (E_2)	LN	30000/2400	N/mm^2
Carga nodal (P_1)	LN	20/2	N
Carga nodal (P_2)	LN	1500/150	N
Coordenada nodal ($X_i, i = 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19$)	N	600/12	mm
Coordenada nodal ($X_i, i = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18$)	N	-600/12	mm

Tabela 4.3: Variáveis aleatórias do problema da coluna com 45 barras.

elimina a bifurcação no caminho de equilíbrio, apesar disto o comportamento se assemelha a de uma coluna perfeita. Deve-se destacar aqui a necessidade de grandes deslocamentos para que haja um pequeno aumento na carga suportada pela coluna. Nestes tipos de estruturas a carga crítica linear fornece bons resultados uma vez que os deslocamentos pré-críticos são muito pequenos.

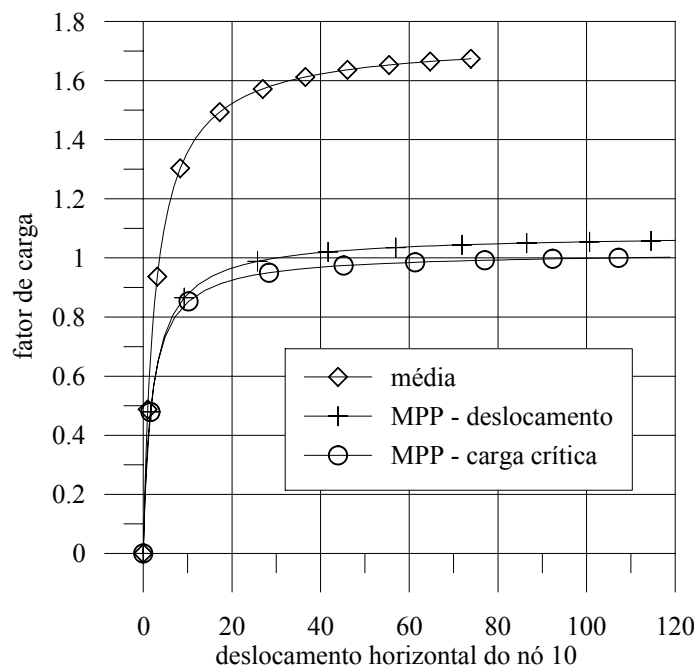


Figura 4.4: Coluna com 45 barras - curvas de equilíbrio.

Este modelo foi estudado por Liu & Kiureghian [45, 46] e Holm [36] e seus resultados são aqui comparados na tabela (4.4). Os resultados apresentados em Liu & Kiureghian [45, 46] concordam perfeitamente com os do presente trabalho, sendo que a maior diferença nas variáveis foi menor que 0.2%. Já em relação ao trabalho de Holm [36] a maior discrepância foi de 0.9%. Foram necessárias 13 chamadas a função de falha e 8 chamadas ao seu gradiente durante as 8 iterações. A probabilidade de falha da estrutura obtida foi de

5.547×10^{-5} , ou seja, $\beta = 3.8653$. Analisando a estrutura através do método de Monte Carlo por amostragem de importância (IS), considerando um c.o.v. desejado de 0.05 e uma região de amostragem de 1 unidade de desvio padrão, obteve-se um $\beta = 3.8455$, sendo necessário para isso um total de 1788 chamadas a função objetivo. Tomando o IS como referência o erro do método FORM é de apenas 0.5%.

Variáveis	Holm [36] ARSM	Liu et al. [45] FORM/HLRF mod.	Presente trabalho FORM/HLRF mod.
E_1	24508	24750	24725.8
E_2	27870	27740	27737.5
P_1	20.41	20.32	20.33
P_2	2002	2005	2008.8
β	-	-	3.865
P_f	-	-	5.5467×10^{-5}
NAF	25 – 30	26	21
β^{IS}	-	-	3.8455
P_f^{IS}	-	-	6.0149×10^{-5}

Tabela 4.4: Coluna com 45 barras - Resultados com 22 variáveis para a função de falha associada ao deslocamento.

Este problema também foi estudado por Sagrilo [69] e Barbosa [5] onde as coordenadas nodais foram consideradas como determinísticas. No trabalho de Sagrilo [69] foram utilizados os métodos FORM e SORM com os gradientes avaliados através de diferenças finitas. Estes resultados são apresentados na tabela (4.5).

	Sagrilo [69]	Presente trabalho
E_1	24771.	24625.7
E_2	27758.	27699.6
P_1	20.323	20.335
P_2	2012.90	2021.06
β^{FORM}	3.827	3.905
P_f^{FORM}	6.47×10^{-5}	4.7055×10^{-5}
β^{IS}	-	3.9023
P_f^{IS}	-	4.7648×10^{-5}
Iterações	5	8
NAF	45	21

Tabela 4.5: Coluna com 45 barras - Resultados com 4 variáveis para a função de falha associada ao deslocamento.

Analisa-se agora a probabilidade de falha desta estrutura com relação a carga crítica linearizada. A função de falha é representada pela função abaixo:

$$g(\lambda_{lin}(\mathbf{x})) = \lambda_{lin}(\mathbf{x}) - 1.0 \quad (4-38)$$

Foram necessárias 6 chamadas a função de falha e 5 chamadas ao seu gradiente durante as 4 iterações. A probabilidade de falha da estrutura é de 8.801×10^{-6} , ou seja, um $\beta = 4.293$. Analisando a estrutura através do

Variáveis	Ponto de projeto	
	22 variáveis	4 variáveis
E_1	24381.9	24341.9
E_2	27598.2	27581.3
P_1	19.90	19.90
P_2	2099.22	2104.9
β^{FORM}	4.293	4.310
P_f^{FORM}	8.801×10^{-6}	8.1511×10^{-6}
β^{IS}	4.2887	4.3183
P_f^{IS}	8.9859×10^{-6}	7.8622×10^{-6}

Tabela 4.6: Coluna com 45 barras - Resultados para a função de falha associada à carga crítica linearizada.

método de Monte Carlo por amostragem de importância, considerando um c.o.v. desejada de 0.05 e uma região de amostragem de 1 unidade de desvio padrão, obteve-se um $\beta = 4.2887$, sendo necessário para isso um total de 2005 chamadas a função objetivo. Tomando o IS como referência o erro do método FORM é de apenas 0.1%.

5

Otimização Considerando Incertezas

A otimização considerando incertezas pode ser feita objetivando-se diminuir a variabilidade de um certo parâmetro, chamada de projeto robusto, ou garantindo-se a confiabilidade do projeto, chamada de otimização baseada em confiabilidade (RBDO).

No projeto robusto obtém-se uma estrutura menos sensível a variações do sistema. A medida de variabilidade se dá, por exemplo, através do desvio padrão da função de performance e pode ser usada tanto na função objetivo quanto na restrições do problema de otimização.

Otimização baseada em confiabilidade é o foco deste trabalho e será apresentada neste capítulo. RBDO é primeiramente um processo de otimização, onde o objetivo é se otimizar uma função satisfazendo restrições de confiabilidade. As restrições de confiabilidade são restrições sobre a probabilidade de falha do sistema ou de apenas uma simples função. A probabilidade de falha é geralmente avaliada se realizando uma análise de confiabilidade, conforme o capítulo 4.

5.1

Otimização Determinística

Um problema de otimização determinística pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && f(\mathbf{h}, \mathbf{p}) \\
 &\text{sujeito a} && c_i(\mathbf{h}, \mathbf{p}) = 0 \quad i = 1 \dots nre \\
 & && c_i(\mathbf{h}, \mathbf{p}) \leq 0 \quad i = nre + 1 \dots nr \\
 & && \mathbf{h}^l \leq \mathbf{h} \leq \mathbf{h}^u \quad i = 1 \dots nvar
 \end{aligned} \tag{5-1}$$

onde \mathbf{h} são as variáveis de projeto e \mathbf{p} são parâmetros fixos em relação ao problema de otimização. c_i é a i -ésima restrição do modelo (como por exemplo: tensões, deslocamentos, carga crítica, etc). \mathbf{h}^l e \mathbf{h}^u são os limites inferiores e superiores das variáveis de projeto, respectivamente. Através da definição da função de performance, seção (4.2), pode-se escrever $c_i(\mathbf{h}, \mathbf{p}) = -g(\mathbf{h}, \mathbf{p})$.

A otimização determinística não considera as incertezas nas variáveis de projeto e nos parâmetros. Projetos ótimos baseados numa formulação

determinística são geralmente associados com uma alta probabilidade de falha. Isto é particularmente verdade se a restrição estiver ativa na solução do problema.

5.2

Otimização Baseada em Confiabilidade

Nas últimas décadas diversos métodos foram propostos de maneira a tratar as incertezas no processo de otimização. Basicamente pode-se dividir os métodos em duas categorias: os de duplo laço e os seqüenciais.

5.3

Método de Duplo Laço para RBDO

A formulação mais simples e usual de RBDO é aquela dividida em dois níveis, o primeiro nível seria o do projeto ótimo, onde são consideradas as variáveis de projeto e no segundo nível o processo de análise de confiabilidade, no qual se realiza a busca pelo MPP. Basicamente, neste método, as restrições da formulação determinística são trocadas por restrições de probabilidade, ou seja:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(\mathbf{h}, \mathbf{p}) \\ &\text{sujeito a} && g_i^R(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \geq 0 \quad i = 1 \dots nr \\ &&& \mathbf{h}^l \leq \mathbf{h} \leq \mathbf{h}^u \quad i = 1 \dots n \end{aligned} \quad (5-2)$$

onde $g_i^R(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$ são as restrições de confiabilidade que dependem das variáveis randômicas \mathbf{x} e dos parâmetros determinísticos $\boldsymbol{\eta}$.

As restrições de confiabilidade $g_i^R(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$ podem ser formuladas como:

$$g_i^R(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = P_{t_i} - P_{f_i}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}), \quad i = 1 \dots nr \quad (5-3)$$

onde $P_{f_i}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$ é a probabilidade de falha da restrição $g_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$, e P_{t_i} é a probabilidade de falha permitida. A avaliação de P_{f_i} é feita de acordo com os procedimentos descritos no capítulo 4. Pode-se também escrever as restrições da seguinte maneira:

$$g_i^R(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = \beta_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) - \beta_{t_i}, \quad i = 1 \dots nr \quad (5-4)$$

onde β_i é o índice de confiabilidade, definido no capítulo 4 e $\beta_{t_i} = -\Phi^{-1}(P_{t_i})$. Quando as restrições são definidas como em (5-3) e (5-4) chama-se esta formulação do índice de confiabilidade (RIA, do inglês *Reliability Index Approach*).

Conforme observado no capítulo 4, a análise de confiabilidade envolve uma transformação probabilística, uma busca pelo MPP, e a avaliação de uma CDF normal padrão. Em alguns casos esse processo não tem sucesso,

o algoritmo falha ao tentar achar a solução, especialmente quando a superfície limite está muito longe da origem no espaço normal padrão ou quando o caso especial de $G(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = 0$ não exista [27].

De maneira a contornar este problema, Tu et al. [76] propuseram uma outra formulação para resolver o problema de RBDO. Neste método, chamado PMA (*Performance Measure Approach*), as restrições de confiabilidade são formuladas de maneira inversa, ou seja:

$$g_i^R(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = g_i^P(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = G_i(\mathbf{u}_i^*_{\beta=\beta_{t_i}}, \boldsymbol{\eta}), \quad i = 1 \dots nr \quad (5-5)$$

onde $\mathbf{u}_i^*_{\beta=\beta_{t_i}}$ é a solução do problema de confiabilidade inverso (IRA, do inglês *Inverse Reliability Analysis*), formulado como o problema de otimização abaixo:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad G_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) \\ &\text{sujeito a} \quad \|\mathbf{u}\| = \beta_{t_i} \end{aligned} \quad (5-6)$$

Resolver RBDO via PMA é geralmente mais eficiente e robusto do que via RIA. Fato este devido a busca pelo MPP no IRA ser mais fácil [1, 27, 82].

As relações acima pode ser sumarizadas na tabela (5.1).

Formulação	Problema de Otimização	Análise de Confiabilidade
RIA	minimizar $f(\mathbf{h}, \mathbf{p})$ sujeito a $P_{t_i} - P_{f_i}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \geq 0$ ou $\beta_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) - \beta_{t_i} \geq 0$	minimizar $\ \mathbf{u}\ $ sujeito a $G_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = 0$
PMA	minimizar $f(\mathbf{h}, \mathbf{p})$ sujeito a $g_i^P(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \geq 0$	minimizar $G_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})$ sujeito a $\ \mathbf{u}\ = \beta_{t_i}$

Tabela 5.1: RIA vs. PMA (Youn & Choi [82]).

Conforme descrito anteriormente, o processo RBDO é realizado em dois diferentes espaços randômicos: o espaço original x e o espaço normal padrão não correlacionado u . Durante o processo RBDO, a transformação entre o espaço x e u é efetuada na avaliação da restrição probabilística. Esta transformação, definida na seção 4.1.3, requer as funções de distribuição das variáveis randômicas. A maior parte destas transformações, com exceção das variáveis normais, é altamente não-linear [82]. A tabela (5.2) apresenta as relações entre RIA e PMA do ponto de vista das não-linearidades que podem ser encontradas.

Formulação	Problema de Otimização	Análise de Confiabilidade
RIA	$\beta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = T^{-1}(\beta(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}))$: Transformação não linear inversa de $\beta(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})$	$G(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = G(T(\mathbf{x}), \boldsymbol{\eta})$ Transformação não linear de $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$
PMA	$g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$: Função de falha original	$\ \mathbf{u}\ $ Função quadrática explícita em relação a \mathbf{u}

Tabela 5.2: Não-linearidades das restrições probabilísticas (Youn & Choi [82]).

Em RBDO, conforme discutido anteriormente, dois problemas de otimização são resolvidos. Em geral, a eficiência dos métodos de otimização depende significativamente da complexidade das restrições envolvidas [82]. No problema formulado via RIA, as restrições nos dois problemas de otimização podem se tornar bastante não-lineares em função das transformações entre os espaços u e x . Já para PMA as restrições nos dois problemas de otimização não envolvem transformações não lineares. A função objetivo na avaliação da confiabilidade envolve, entretanto, esta transformação na formulação PMA.

Em resumo, é esperado que o processo RBDO usando RIA com distribuições não normais seja ineficiente e instável em função das não-linearidades envolvidas [82]. Além disso, segundo observado por Youn & Choi [82], PMA é mais eficiente que RIA mesmo para problemas simples com distribuições normais devido a formulação do problema de otimização para a análise de confiabilidade via PMA.

5.4

Linearizações da função de estado limite

As linearizações foram propostas de maneira a se reduzir o custo computacional durante a busca pelo MPP. Elas podem ser empregadas nos métodos RIA/PMA vistos anteriormente. Dentre as opções pode-se citar [14]:

1. expansão de Taylor de primeira ordem em torno da média das variáveis no espaço x (comumente chamada de AMV, do inglês *Advanced Mean Value*).

$$g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \approx g(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\eta}) + \nabla_{\mathbf{x}} g(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\eta})^T (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x) \quad (5-7)$$

2. idêntica a AMV exceto pela linearização que é feita em torno da média das variáveis no espaço u , lembrando que $\boldsymbol{\mu}_u = T(\boldsymbol{\mu}_x)$.

$$G(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) \approx G(\boldsymbol{\mu}_u, \boldsymbol{\eta}) + \nabla_{\mathbf{u}} G(\boldsymbol{\mu}_u, \boldsymbol{\eta})^T (\mathbf{u} - \boldsymbol{\mu}_u) \quad (5-8)$$

3. uma linearização inicial em torno da média no espaço x , com relinearizações sobre cada MPP estimado (\mathbf{x}^*) até que o MPP convirja (conhecida como método AMV+).

$$g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \approx g(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\eta}) + \nabla_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\eta})^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \quad (5-9)$$

4. idêntica a AMV+, exceto pelas linearizações que são feitas no espaço u .

$$G(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) \approx G(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\eta}) + \nabla_{\mathbf{u}} G(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\eta})^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \quad (5-10)$$

Nos trabalhos de Eldred et al. [15] expansões de Taylor de segunda ordem são apresentadas. A equação abaixo apresenta uma destas expansões (centrada na média no espaço x):

$$g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \approx g(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\eta}) + \nabla_{\mathbf{x}} g(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\eta})^T (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)^T \nabla_{\mathbf{x}}^2 g(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\eta}) (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x) \quad (5-11)$$

Para se usar uma expansão de Taylor de segunda ordem a Hessiana da função de falha ($\nabla_{\mathbf{x}}^2 g(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\eta})$ ou $\nabla_{\mathbf{u}}^2 G(\boldsymbol{\mu}_u, \boldsymbol{\eta})$) precisa ser calculada. Geralmente a obtenção destas matrizes não é uma tarefa trivial em problemas de engenharia, então, as mesmas podem ser aproximadas através de diferenças finitas ou ainda método Quasi-Newton, como por exemplo o BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno). No presente trabalho as linearizações, quando utilizadas, serão apenas as de primeira ordem.

5.5

Ponto Inicial nos Métodos de Busca pelo MPP

Os algoritmos de otimização responsáveis pela busca do MPP necessitam de um valor inicial. A eficiência destes algoritmos está diretamente relacionada a este valor, ou seja, quanto mais próximo da solução for o mesmo mais rapidamente o algoritmo convergirá para a mesma. No método de duplo laço, descrito na seção (5.3), se observa que a cada iteração do laço externo se avaliam as restrições de confiabilidade. Na avaliação das restrições de confiabilidade se resolve também um problema de otimização, seja ele da forma como apresentado em (4-20) ou (5-6), ambos irão precisar de um valor inicial. A fim de se melhorar a eficiência, pode-se utilizar como ponto de partida o MPP calculado na iteração anterior do processo de otimização. Nas linearizações AMV+, apresentadas na seção anterior, esta inicialização só é aplicada na primeira iteração, nas subseqüentes o valor é o próprio MPP da iteração anterior.

5.6

Análise de Sensibilidade em RBDO

As sensibilidades das restrições probabilísticas em relação as variáveis de projeto são necessárias para a solução do problema RBDO por algoritmos de PM de primeira ordem.

A sensibilidade da restrição probabilística formulada via PMA, apresentada em (5-5), em relação as variáveis de projeto \mathbf{h} é dada da seguinte forma:

$$\frac{dg_i^R(\mathbf{h}, \mathbf{p})}{d\mathbf{h}} = \frac{dg_i^P(\mathbf{h}, \mathbf{p})}{d\mathbf{h}} = \frac{dG_i(\mathbf{u}_i^*, \boldsymbol{\eta})}{d\mathbf{h}} \quad (5-12)$$

onde $\mathbf{u}_i^* = \mathbf{u}_{i\beta=\beta_{t_i}}^*$. O vetor de variáveis de projeto \mathbf{h} pode conter parâmetros determinísticos $\boldsymbol{\eta}$ ou parâmetros da distribuição $\boldsymbol{\theta}$, desta forma uma distinção se faz necessária na avaliação da sensibilidade em (5-12). Em relação as parâmetros $\boldsymbol{\eta}$ tem-se que:

$$\frac{dG_i(\mathbf{u}_i^*, \boldsymbol{\eta})}{d\mathbf{h}} = \frac{dG_i(\mathbf{u}_i^*, \boldsymbol{\eta})}{d\boldsymbol{\eta}} \quad (5-13)$$

Para os parâmetros da distribuição $\boldsymbol{\theta}$ pode-se obter a sensibilidade através da regra de cadeia, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{dG_i(\mathbf{u}_i^*, \boldsymbol{\eta})}{d\mathbf{h}} &= \frac{dG_i(\mathbf{u}_i^*, \boldsymbol{\eta})}{d\boldsymbol{\theta}} \frac{d\boldsymbol{\theta}}{d\mathbf{h}} \\ &= \frac{\partial G_i(\mathbf{u}_i^*, \boldsymbol{\eta})}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}_i^*}{\partial \boldsymbol{\theta}} \\ &= \nabla_{\mathbf{u}} G_i(\mathbf{u}_i^*, \boldsymbol{\eta}) \frac{\partial T(\mathbf{x}_i^*, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \quad (5-14)$$

onde a parcela $\nabla_{\mathbf{u}} G_i(\mathbf{u}_i^*, \boldsymbol{\eta})$ já é conhecida nesta etapa, oriundo da busca pelo MPP, e a segunda parcela, $\frac{\partial T(\mathbf{x}_i^*, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$, é determinada de acordo com o apresentado na seção (4.4).

Para a restrição formulada via RIA apresentada em (5-4) a seguinte expressão é utilizada para se avaliar as suas sensibilidades:

$$\frac{dg_i^R(\mathbf{h}, \mathbf{p})}{d\mathbf{h}} = \frac{d\beta_i(\mathbf{h}, \mathbf{p})}{d\mathbf{h}} = \frac{1}{\|\nabla_{\mathbf{u}} G_i(\mathbf{u}_i^*, \boldsymbol{\eta})\|} \frac{dG_i(\mathbf{u}_i^*, \boldsymbol{\eta})}{d\mathbf{h}} \quad (5-15)$$

onde $\mathbf{u}_i^* = \mathbf{u}_{iG(\mathbf{u})=0}^*$. Por fim, quando as restrições de confiabilidade são apresentadas em função da probabilidade de falha, conforme (5-3), a seguinte expressão é utilizada para se avaliar as suas sensibilidades:

$$\frac{dP_{f_i}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})}{d\mathbf{h}} = -\varphi(-\beta_i(\mathbf{h}, \mathbf{p})) \frac{d\beta_i(\mathbf{h}, \mathbf{p})}{d\mathbf{h}} \quad (5-16)$$

5.7

Exemplos

Nesta seção são apresentadas as soluções de alguns problemas de RBDO encontrados freqüentemente na literatura. Pretende-se, assim, validar a formulação aqui apresentada e verificar a eficiência dos algoritmos implementados. São consideradas apenas funções explícitas, desta forma as análises aqui envolvidas fazem uso dos módulos de otimização e análise de confiabilidade. No capítulo (6), a seguir, os processos descritos neste capítulo serão aplicados na otimização de estruturas treliçadas, envolvendo, então, os módulos de análise estrutural, apresentado no capítulo (2), e análise de sensibilidade, descrito no capítulo (3).

Os algoritmos IP e SQP, descritos no apêndice (B), fazem uso de diversos parâmetros que influenciam o desempenho de cada algoritmo. Entre os parâmetros numéricos do algoritmo de SQP estão a tolerância para con-

vergência (tol_1) e a tolerância para violação de restrições (tol_2). O algoritmo possui ainda dois parâmetros adicionais, b_z e g_z . Os parâmetros numéricos do algoritmo de IP são a tolerância para convergência (tol), os coeficientes de deflexão da direção de busca (k_a e k_f) e o coeficiente para a atualização dos multiplicadores de Lagrange (k_e).

Os dois algoritmos utilizam os mesmos procedimentos para a atualização da Hessiana da função Lagrangeana e para a busca linear. Os parâmetros de controle destas etapas são o número de iterações para o reinício da matriz \mathbf{B} (n_r), o valor inicial dos elementos desta matriz (b_0), o coeficiente de decréscimo da função objetivo (γ) e o valor base para a definição da sequência de valores do tamanho do passo (α).

Os valores usuais dos diversos parâmetros são mostrados na tabela (5.3). Nos exemplos apresentados neste capítulo, alguns destes parâmetros foram variados de maneira a melhorar o desempenho dos algoritmos. Quando valores diferentes dos contidos na tabela (5.3) forem utilizados, eles serão explicitamente indicados.

n_r	b_0	γ	α	tol_1	tol_2	b_z	g_z	tol	k_a	k_e	k_f
10	1.0	0.1	1.0	10^{-6}	10^{-6}	10^{-4}	10^2	10^{-4}	0.7	1.0	1.0

Tabela 5.3: Valores usuais dos parâmetros dos algoritmos.

5.7.1

Coluna Retangular Curta

Este exemplo consiste na análise plástica de uma seção transversal de uma coluna curta (com base b e altura h) tendo como variáveis aleatórias propriedades do material e também o carregamento. O vetor de variáveis randômicas fica definido como $\mathbf{x} = (P, M, Y)$, com os parâmetros estocásticos e as correlações definidos na tabela (5.4).

Variável	Dist.	μ/σ	ρ_P	ρ_M	ρ_Y
Força Axial (P)	N	500/100	1	0.5	0
Momento (M)	N	2000/400	0.5	1	0
Tensão de Escoamento (Y)	LN	5/0.5	0	0	1

Tabela 5.4: Variáveis aleatórias do problema coluna retangular curta.

A função de estado limite em termos do vetor de variáveis randômicas, $\mathbf{x} = (P, M, Y)$, e dos parâmetros, $\boldsymbol{\eta} = (b, h)$ (neste caso idêntico ao vetor de variáveis de projeto \mathbf{h}), é definida como:

$$g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = 1 - \frac{4M}{bh^2Y} - \frac{P^2}{b^2h^2Y^2} \quad (5-17)$$

O objetivo do problema é de se determinar a altura h e a largura b da seção transversal a fim de se minimizar o volume da estrutura satisfazendo as restrições. O problema de otimização determinística (DDO), eq. (5-1), fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(\mathbf{h}) = bh \\ &\text{sujeito a} && g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \geq 0 \\ &&& 5.0 \leq b \leq 15.0 \\ &&& 15.0 \leq h \leq 25.0 \end{aligned} \quad (5-18)$$

Considerando-se agora as incertezas apresentadas e fixando-se o valor de $P_t = 0.00621$ (ou $\beta_t = 2.5$), o problema de RBDO, eq. (5-2), formulado como RIA, fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(\mathbf{h}) = bh \\ &\text{sujeito a} && \beta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) - 2.5 \geq 0 \\ &\text{ou} && 0.00621 - P_f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \geq 0 \\ &&& 5.0 \leq b \leq 15.0 \\ &&& 15.0 \leq h \leq 25.0 \end{aligned} \quad (5-19)$$

Partindo do ponto inicial $\mathbf{h}^0 = (b, h) = (10.0, 15.0)$ para as variáveis de projeto e considerando os variáveis aleatórias como determinísticas avaliadas na média, o problema determinístico (5-18) tem como solução $\mathbf{h}^* = (5.480, 25.000)$. Para o problema não-determinístico (5-19), usando o mesmo ponto inicial das variáveis de projeto do problema determinístico e considerando o ponto inicial para a avaliação da restrição de confiabilidade como sendo a média ($\mathbf{x}^0 = (P, M, Y) = (500.0, 2000.0, 5.0)$), a solução é a seguinte: $\mathbf{h}^* = (8.668, 25.000)$ Os resultados obtidos neste trabalho concordam com os obtidos em Kuschel & Rackwitz [42], Agarwal [1] e Eldred et al. [14]. A tabela (5.5) apresenta os resultados obtidos para as diferentes opções de linearizações da função de falha.

Na tabela (5.6) são apresentados os números de avaliações de $g/\nabla g$ utilizando como ponto inicial para o cálculo da confiabilidade os valores obtidos na iteração anterior do problema de otimização. Também são apresentadas as avaliações tomando-se como ponto de partida das variáveis de projeto os valores ótimos do problema DDO ($\mathbf{h} = (5.47981, 25.0)$) e os obtidos após 5 iterações do método RBDO-RIA-MV ($\mathbf{h} = (7.90759, 25.0)$).

Nas referências consultadas, nem todas as informações relativas aos critérios de convergência, do algoritmo utilizado, entre outras, foram apresentadas. Desta forma a comparação do número de avaliações da função da falha ou iterações não serve como medida de eficiência da implementação. Apesar disto, na tabela (5.7) algum destes valores são apresentados.

Formulação			Avaliações de $g/\nabla g$	Base b	Altura h	Função objetivo f
DDO			11 / 8	5.47981	25.00000	136.99524
RBDO	RIA	MV	32 / 41	7.90759	25.00000	197.68983
		AMV espaço x	42 / 21	7.89580	25.00000	197.39493
		AMV espaço u	45 / 22	7.92688	25.00000	198.17206
		AMV+ espaço x	68 / 63	8.66850	25.00000	216.71245
		AMV+ espaço u	68 / 63	8.66850	25.00000	216.71245
		sem aproxim.	84 / 71	8.66850	25.00000	216.71245
	PMA	MV	34 / 47	7.90759	25.00000	197.68976
		AMV espaço x	42 / 21	8.59029	25.00000	214.75724
		AMV espaço u	42 / 21	8.61906	25.00000	215.47640
		AMV+ espaço x	72 / 66	8.66850	25.00000	216.71244
		AMV+ espaço u	84 / 78	8.66850	25.00000	216.71244
		sem aproxim.	524 / 342	8.66850	25.00000	216.71244

Tabela 5.5: Coluna retangular curta - Resultados.

Formulação			Avaliações de $g/\nabla g$		
			$\mathbf{h}^0 = (10.0, 15.0)$	$\mathbf{h}^0 = (5.480, 25.0)$	$\mathbf{h}^0 = (8.001, 25.0)$
RBDO	RIA	AMV+ espaço x	51 / 46	40(51) / 36(44)	40(56) / 36(58)
		AMV+ espaço u	53 / 48	40(51) / 36(44)	40(56) / 36(58)
		sem aproxim.	41 / 35	37(48) / 30(38)	32(48) / 27(49)
	PMA	AMV+ espaço x	55 / 49	55(66) / 49(57)	36(52) / 32(54)
		AMV+ espaço u	56 / 50	56(67) / 50(58)	37(53) / 33(55)
		sem aproxim.	166 / 99	173(184) / 102(110)	121(137) / 75(97)
Obs.: Os valores entre parênteses são os valores totais, incluindo os necessários para determinar o ponto inicial.					

Tabela 5.6: Coluna retangular curta - Resultados para diferentes pontos de partida.

5.7.2

Viga em Balanço

A viga em balanço apresentada na figura (5.1) é aqui estudada. O objetivo é minimizar o volume, ou equivalentemente a área de seção transversal ($f = wt$).

Duas funções de estado limite são consideradas. A primeira diz respeito à tensão de escoamento no engaste da viga e pode se escrita da seguinte forma:

$$g_S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = R - \frac{600}{wt^2}Y + \frac{600}{w^2t}X \quad (5-20)$$

onde w e t são a base e a altura da seção transversal, respectivamente. Y , X e R são variáveis aleatórias e suas descrições se encontram na tabela (5.8).

A segunda função de falha representa o deslocamento na extremidade livre da viga, ou seja:

$$g_D(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = D_0 - \frac{4L^3}{Ewt} \sqrt{\left(\frac{Y}{t^2}\right)^2 + \left(\frac{X}{w^2}\right)^2} \quad (5-21)$$

Trabalho	Avaliações de $g/\nabla g$
Kuschel & Rackwitz. [42]-DLM(RIA)	83/56
Agarwal [1]-DLM(PMA)	77/85
Agarwal [1]-Método desacoplado	31/31
Eldred et al. [14]-DLM(RIA/AMV+ espaço x)	72/–
Eldred et al. [14]-DLM(PMA/AMV+ espaço x)	105/–

Tabela 5.7: Coluna retangular curta - Comparação dos resultados.

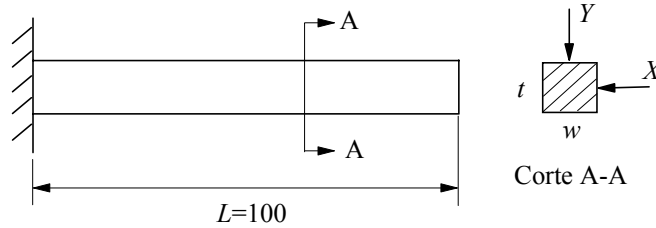


Figura 5.1: Viga em balanço.

Variável	Dist.	μ/σ	ρ_R	ρ_E	ρ_X	ρ_Y
Tensão de Escoamento (R)	N	40000/2000	1	0	0	0
Módulo de Elasticidade (E)	N	$2.9 \times 10^7 / 1.45 \times 10^5$	0	1	0	0
Carga Vertical (X)	N	500/100	0	0	1	0
Carga Horizontal (Y)	N	1000/100	0	0	0	1

Tabela 5.8: Variáveis aleatórias do problema da viga em balanço.

As funções de falha são normalizadas da seguinte maneira:

$$g_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = 1 - \frac{g_S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})}{R} \quad (5-22)$$

$$g_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = 1 - \frac{g_D(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})}{D_0} \quad (5-23)$$

O vetor de variáveis randômicas fica definido como $\mathbf{x} = (R, E, X, Y)$ e o vetor dos parâmetros $\mathbf{p} = (L, D_0)$, onde $L = 100$ e $D_0 = 2.2535$. Por fim o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\eta} = (w, t, L, D_0)$. O objetivo do problema é de se determinar a base w e a altura t da seção transversal a fim de se minimizar o volume da estrutura satisfazendo as restrições. O problema de otimização determinística, eq. (5-1), fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(\mathbf{h}, \mathbf{p}) = wt \\ &\text{sujeito a} && g_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \leq 0 \\ &&& g_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \leq 0 \\ &&& 1.0 \leq w \leq 4.0 \\ &&& 1.0 \leq t \leq 4.0 \end{aligned} \quad (5-24)$$

No problema de RBDO valor de $\beta_{t_1} = \beta_{t_2} = 3.0$. Desta forma:

$$\begin{aligned}
&\text{minimizar } f(\mathbf{h}, \mathbf{p}) = wt \\
&\text{sujeito a } \beta_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) - 3.0 \geq 0 \\
&\quad \beta_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) - 3.0 \geq 0 \\
&\quad 1.0 \leq w \leq 4.0 \\
&\quad 1.0 \leq t \leq 4.0
\end{aligned} \tag{5-25}$$

O problema é resolvido para o ponto inicial (2.5, 2.5), inviável, tanto para o problema DDO quanto para o RBDO, ou seja, o valor da função objetivo é aumentado (acrescentando-se a área) para se atender as restrições. Os resultados obtidos neste trabalho concordam com os obtidos em Yang & Gu [80] e Eldred et al. [14]. A tabela (5.9) apresenta os resultados obtidos para as diferentes opções de linearizações da função de falha.

Formulação			Avaliações de $g^*/\nabla g^*$	Base w	Altura t	Função objetivo f
DDO			18 / 16	2.35203	3.32628	7.82352
RBDO	RIA	MV	320 / 390	2.41949	3.88176	9.39188
		AMV espaço x	156 / 70	2.44621	3.83715	9.38649
		AMV espaço u	156 / 70	2.44621	3.83715	9.38649
		AMV+ espaço x	302 / 272	2.44839	3.88838	9.52025
		AMV+ espaço u	302 / 272	2.44839	3.88838	9.52025
		sem aproxim.	338 / 308	2.44839	3.88838	9.52025
	PMA	MV	276 / 336	2.41949	3.88176	9.39187
		AMV espaço x	96 / 48	2.45839	3.86569	9.50337
		AMV espaço u	96 / 48	2.45839	3.86569	9.50337
		AMV+ espaço x	176 / 162	2.44839	3.88838	9.52025
		AMV+ espaço u	176 / 162	2.44839	3.88838	9.52025
		sem aproxim.	996 / 752	2.44839	3.88838	9.52025

* – referente a soma das avaliações das funções de falha.

Tabela 5.9: Viga em balanço - Resultados.

Na tabela (5.10) são apresentados os números de avaliações de $g/\nabla g$ utilizando como ponto inicial para o cálculo da confiabilidade os valores obtidos na iteração anterior do problema de otimização. Também são apresentadas as avaliações tomando-se como ponto de partida das variáveis de projeto os valores ótimos do problema DDO ($\mathbf{h} = (2.35203, 3.32628)$) e os obtidos após 5 iterações do método RBDO-RIA-MV ($\mathbf{h} = (2.41861, 3.88149)$).

Os resultados obtidos nas referências citadas são apresentados, na tabela (5.11).

5.7.3 Coluna de Aço

O último exemplo a ser analisado envolve uma comparação entre custo e confiabilidade para uma coluna de aço. O custo é definido como:

$$C = bd + 5h \tag{5-26}$$

Formulação			Avaliações de $g^*/\nabla g^*$		
			$\mathbf{h}^0 = (2.5, 2.5)$	$\mathbf{h}^0 = (2.352, 3.326)$	$\mathbf{h}^0 = (2.419, 3.881)$
RBDO	RIA	AMV+ espaço x	253 / 223	121(139) / 107(123)	73(99) / 65(103)
		AMV+ espaço u	253 / 223	121(139) / 107(123)	73(99) / 65(103)
		sem aproxim.	206 / 176	87(105) / 71(87)	51(77) / 43(81)
	PMA	AMV+ espaço x	136 / 122	144(162) / 128(144)	72(98) / 64(102)
		AMV+ espaço u	136 / 122	144(162) / 128(144)	72(98) / 64(102)
		sem aproxim.	428 / 266	444(462) / 270(286)	191(217) / 132(170)
* – referente a soma das avaliações das funções de falha.					
Obs.: Os valores entre parênteses são os valores totais, incluindo os necessários para determinar o ponto inicial.					

Tabela 5.10: Viga em balanço - Resultados para diferentes pontos de partida.

Trabalho	Avaliações de $g_1 + g_2$	f
Yang & Gu [80]-DLM(RIA/sem aproxim.)	1584	9.527
Eldred et al. [14]-DLM(RIA/AMV+ espaço x)	279	9.529
Eldred et al. [14]-DLM(PMA/AMV+ espaço x)	207	9.520

Tabela 5.11: Viga em balanço - Comparação dos resultados.

onde b , d e h são as médias da largura da mesa, espessura da mesa e altura do perfil, respectivamente. Desta forma o vetor de variáveis de projeto fica definido como: $\mathbf{h} = (b, d, h)$. Nove variáveis aleatórias são usadas no problema e seus parâmetros estatísticos são apresentados na tabela (5.12).

Variável	Dist.	μ/σ	Unidade
Tensão de Escoamento (F_s)	LN	400/35	MPa
Carga de peso próprio(P_1)	N	500000/50000	N
Carga Vertical (P_2)	GU	600000/90000	N
Carga Horizontal (P_3)	GU	600000/90000	N
Largura da Mesa (B)	LN	$b/3$	mm
Espessura da Mesa (D)	LN	$d/2$	mm
Altura do Perfil (H)	LN	$h/5$	mm
Deslocamento Inicial (F_0)	N	30/10	mm
Módulo de Elasticidade (E)	WB	21000/4200	MPa

Tabela 5.12: Coluna de aço - Variáveis aleatórias.

A função de estado limite é a seguinte:

$$g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = F_s - P \left(\frac{1}{\mathcal{A}_s} + \frac{F_0}{\mathcal{M}_s} \frac{\epsilon_b}{\epsilon_b - \mathcal{P}} \right) \quad (5-27)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_s &= 2BD, \text{ (área da seção)} \\ \mathcal{M}_s &= BDH, \text{ (módulo da seção)} \\ \mathcal{M}_i &= \frac{1}{2}BDH^2, \text{ (momento de inércia)} \\ \epsilon_b &= \frac{\pi^2 E \mathcal{M}_i}{s^2}, \text{ (carga crítica de Euler)} \\ \mathcal{P} &= P_1 + P_2 + P_3 \end{aligned}$$

e $s = 7500 \text{ mm}$ é o comprimento da coluna.

Neste exemplo, diferentemente dos dois anteriores, as variáveis de projeto são parâmetros da distribuição. O objetivo deste problema é maximizar a confiabilidade satisfazendo a restrição de custo, ou seja:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && \beta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \\ &\text{sujeito a} && C(\mathbf{h}, \mathbf{p}) \leq C^{max} \\ &&& 200.0 \leq b \leq 400.0 \\ &&& 10.0 \leq d \leq 30.0 \\ &&& 100.0 \leq h \leq 500.0 \end{aligned} \quad (5-28)$$

onde C^{max} é o máximo custo admissível.

Os métodos utilizados foram o SQP para o problema de otimização e o HLRF para o cálculo da confiabilidade. O ponto inicial para o problema de confiabilidade foi vetor das médias, e para o problema de otimização foi $(b, h, d) = (300.0, 20.0, 300.0)$, Foi utilizada uma tolerância de 10^{-6} no processo de otimização e 10^{-4} no cálculo da confiabilidade.

Os resultados do problema de otimização para vários custos admissíveis são apresentados na tabela (5.13) e concordam com os apresentados em Kuschel & Rackwitz. [42]. Para o valor de $C^{max} = 13000.00$, marcado com um asterisco na tabela (5.13), o algoritmo não conseguiu convergir devido a problemas numéricos (*overflow*) nos cálculos das transformações probabilísticas.

Custo Máximo C^{max}	Variáveis ótimas			Índice de confiabilidade β
	b	d	h	
4000.00	200.00	17.50	100.00	3.132
5000.00	200.00	22.50	100.00	4.961
6000.00	200.00	27.50	100.00	6.369
7000.00	216.67	30.00	100.00	7.427
8000.00	250.00	30.00	100.00	8.249
9000.00	283.33	30.00	100.00	8.967
10000.00	316.67	30.00	100.00	9.605
11000.00	350.00	30.00	100.00	10.180
12000.00	383.33	30.00	100.00	10.709
13000.00*	400.00	30.00	200.00	11.065

Tabela 5.13: Coluna de aço - resultados.

A relação entre o custo máximo e a confiabilidade é apresentada na figura (5.2), onde é interessante destacar o comportamento não-linear da curva apresentada.

Em Eldred & Bichon [16] e Eldred et. al [15] este exemplo é resolvido para o valor de $C^{max} = 4000$ através do método SORM e, seus resultados são comparados na tabela (5.14).

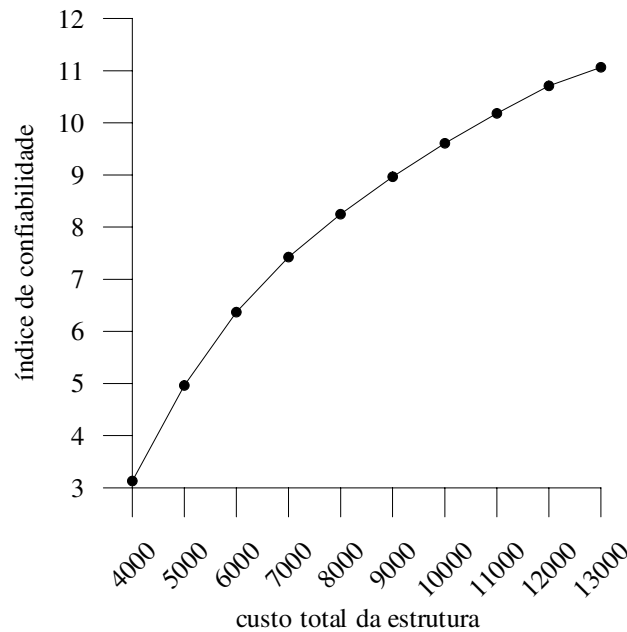


Figura 5.2: Coluna de aço - dependência de β sobre o custo máximo admissível da estrutura [42].

Formulação RBDO	Avaliações de $f/\nabla f$	Função objetivo f
Eldred et. al [15]	90 / 78	3.132
RIA - β SORM		
Presente trabalho	40 / 34	3.132
RIA - β sem aproxim.		

Tabela 5.14: Coluna de aço - Comparação dos resultados.

5.8 Comentários Sobre os Exemplos

Nos exemplos anteriores pode-se aplicar várias técnicas aqui apresentadas de maneira a se validar as implementações e testar a sua acurácia. As formulações do método de duplo laço, RIA e PMA, e as linearizações MV, AMV e AMV+ no espaço x e u podem ser combinadas para se obter a solução do problema. Opções de algoritmos, entre eles o SQP, IP, HLRF e iHLRF, também podem ser usadas como variantes neste processo.

Os três exemplos foram resolvidos com sucesso e várias aspectos puderam ser observados. Os métodos MV e AMV são significantemente menos custosos que os demais, mas conseqüentemente se tem uma redução na precisão se comparando com os métodos AMV+. Os métodos AMV+, comparados com a avaliação sem aproximação, obtiveram a mesma precisão, robustez e uma diminuição no custo computacional. Em suma, as linearizações fornecem a possibilidade de se variar o custo computacional e a precisão. A técnica de se tomar como ponto inicial no cálculo da confiabilidade os últimos valores

calculados se mostrou bastante eficaz na redução do custo computacional.

O método MV no segundo problema teve dificuldades para atingir a precisão e ficou oscilando em torno do ótimo, por este motivo apresentou resultados piores que os do método AMV neste exemplo. Este método é o menos custoso computacionalmente, mas por outro lado, tem-se uma limitação quanto a precisão. Os testes feitos realizando-se as 5 primeiras iterações com MV e em seguida trocando-se para um outro método mais preciso mostrou-se bastante eficaz na redução do número de avaliações das funções e de seu gradiente.

Dentre todas as opções, os métodos AMV+ com utilizando informações das iterações anteriores foram os que apresentaram o melhor resultado.

6

Otimização Baseada em Confiabilidade: Aplicação a Treliças Espaciais

6.1

Considerações Gerais

O desejo de se obter o projeto ideal, considerando aspectos relacionados com o consumo, desempenho ou eficiência, tais como quantidades mínimas de peso, volume ou massa, sempre foi um dos principais objetivos da engenharia estrutural. As técnicas de otimização são ferramentas valiosas na busca desse objetivo.

Um fator impulsionador no campo de otimização foi o desenvolvimento da indústria aeroespacial onde o objetivo principal é se obter estruturas mais leves. Em outras áreas, como a engenharia civil, mecânica e automotiva, o objetivo principal é minimizar o custo da estrutura, embora o peso afete o custo e o comportamento final do projeto.

A otimização de estruturas pode ser dividida em otimização de dimensões, otimização de forma e otimização topológica. O objetivo da otimização topológica é determinar a topologia ótima de uma estrutura através da eliminação de elementos desnecessários e da criação de vazios. Na otimização de forma, busca-se determinar a geometria ótima dos contornos externos e internos de estruturas contínuas e das coordenadas nodais de estruturas reticuladas cujas dimensões e topologia são fixas. A otimização de dimensões tem por objetivo determinar a dimensão (seções transversais, espessuras, etc) de cada componente de uma estrutura para a qual a forma e a topologia são fixas.

Durante o processo de otimização busca-se promover o aumento da eficiência na utilização da estrutura. Uma otimização com base no comportamento linear (geométrico) gera, para um grande número de casos práticos, uma estrutura com sérios problemas de instabilidade, pois a análise fornece uma incorreta capacidade de carga da estrutura. Esses problemas podem ser evitados desde que o modelo de otimização seja formulado com o objetivo de evitar problemas de instabilidade.

A utilização dos tradicionais critérios de projeto, através de coeficientes

parciais de segurança, não permite o conhecimento adequado dos níveis de segurança da estrutura. Fato este de extrema importância, uma vez que nos projetos atuais as estruturas estão cada vez mais esbeltas e complexas, trabalhando sempre próximas de seus limites. Para tratar esses problemas a análise probabilística é incorporada para se diminuir as incertezas na avaliação da segurança da estrutura. Na seção seguinte uma breve explanação com respeito a incorporação das incertezas nos projetos atuais será apresentada.

6.1.1

Consideração da Segurança nos Projetos

Um projeto de estrutura deve atender aos seguintes requisitos, segurança ao colapso, bom comportamento em serviço e economia. Durante séculos os engenheiros têm tentado sem sucesso criar critérios de projeto que conduzam a estruturas que atendam esses requisitos. Essas tentativas passaram por três níveis de evolução [73].

O nível I é o critério de projeto baseado no conceito de tensões admissíveis. Reconhecendo o caráter aleatório das resistências dos materiais de construção e procurando evitar que as resistências sejam ultrapassadas pelas solicitações, o critério recomenda minorar as resistências médias obtidas em ensaio via um coeficiente de segurança. Essa resistência minorada é denominada de resistência admissível e é utilizada para se obter os valores de projeto.

No nível II o critério de projeto passou a considerar duas propriedades estatísticas das resistências dos materiais e das cargas atuantes, nomeadamente, as médias e os desvios padrões. Para as resistências dos materiais, definem-se, uma vez conhecidos a média e os desvios padrões das variáveis, valores característicos que correspondem à probabilidade de 5% do valor da variável ser ultrapassado numa função de densidade de probabilidade normal no sentido mais desfavorável. Para as cargas a definição do valor característico depende do tipo de carga, se carga de peso próprio, variável etc. Esses valores característicos devem então ser majorados ou minorados, ainda no sentido mais desfavorável para o projeto, para se chegar aos valores de projeto que devem ser utilizados para a determinação das variáveis de projeto. Essa metodologia de projeto tem sido denominada de Método Semi-probabilístico.

O nível III difere do nível II apenas na maneira de se determinar o valor característico das variáveis aleatórias. No nível III deve-se usar a função de densidade de probabilidade mais apropriada a cada variável aleatória ao invés de se usar sempre a função de densidade de probabilidade normal para a determinação do valor característico da variável.

Apesar da grande evolução que o nível III representa em relação ao nível I no sentido de conduzir a estruturas mais econômicas e com probabilidades de falha mais próximas das que se deseja, ele não permite que se obtenha uma estrutura com uma determinada probabilidade de falha alvo, previamente definida pelo engenheiro de projeto, nem que se atinja a opção mais econômica de projeto.

Nas últimas décadas, o grande desenvolvimento dos computadores, tanto em termos de crescimento da capacidade de memória como em termos do aumento da velocidade de processamento, permitiu o avanço de diversas áreas do projeto de engenharia como a análise da resposta, a análise de confiabilidade e a otimização de estruturas.

A análise de confiabilidade criou uma ferramenta que possibilita a determinação da probabilidade de falha correspondente a uma dada função de falha para uma estrutura, uma vez que sejam conhecidas as propriedades estatísticas de suas variáveis aleatórias tais como, média, desvio padrão, função de densidade de probabilidade e as correlações entre elas. Essa ferramenta não pode, porém, ser confundida com uma metodologia de projeto já que ela permite apenas uma verificação a posteriori de uma dada estrutura.

Paralelamente ao desenvolvimento de análise de confiabilidade ocorreu um grande progresso na área de programação matemática, tanto do ponto de vista teórico como em termos numéricos com o desenvolvimento de mais poderosos algoritmos de otimização, o que possibilitou um enorme impulso na otimização de estruturas. As primeiras aplicações das técnicas numéricas de otimização de estruturas utilizavam o nível II de segurança para se definir o problema de otimização de estrutura. Isso se deve em grande parte ao fato dessa metodologia ser utilizada por muitas normas de projeto em vários países do mundo, entre eles o Brasil. Como já mencionado anteriormente, essa metodologia não permite, todavia, que se tenha controle sobre a probabilidade de falha da estrutura. Assim, estruturas com uma probabilidade de falha indesejável podem ser obtidas por esse processo.

Nessa etapa o quadro que se tinha era o seguinte. O projeto ótimo pelo nível II não permitia o controle da probabilidade de falha da estrutura e a análise de confiabilidade era uma ferramenta de análise, mas não um método para projeto de estruturas.

A síntese dessas duas técnicas conduziu ao que se chama hoje de Projeto Ótimo de Estruturas Baseado em Confiabilidade (RBDO, Reliability Based Design Optimization, em inglês). Essa metodologia corresponde ao nível IV dos critérios de projeto. Na RBDO a estrutura é otimizada para atingir um valor alvo de probabilidade de falha. Várias funções de falha correspondendo

a estados limites últimos ou de serviço podem ser definidas associadas a diferentes probabilidades de falha. É possível se obter dessa forma estruturas econômicas e com níveis de segurança prefixados. Essa metodologia é chamada de Método Probabilístico Puro.

6.2 Metodologia de Otimização

O problema de otimização, a ser considerado neste trabalho, consiste na minimização do peso da estrutura modelada com elementos de treliça. Podem ser variáveis de projeto as dimensões da seção transversal dos elementos e as coordenadas nodais. Já as variáveis aleatórias podem ser as já definidas como variáveis de projeto, como também as propriedades do material e os carregamentos. Serão consideradas restrições sobre a carga crítica, deslocamentos e tensões.

No tratamento de estruturas que possam apresentar pontos críticos, dois fatores de carga distintos devem ser considerados [58, 59]. O primeiro corresponde à carga total aplicada ($\lambda_a = 1$), onde os deslocamentos devem ser avaliados, e o segundo corresponde à carga crítica (λ^*) da estrutura. Assim, existe a possibilidade da ocorrência de duas situações, conforme ilustrado na figura (6.1).

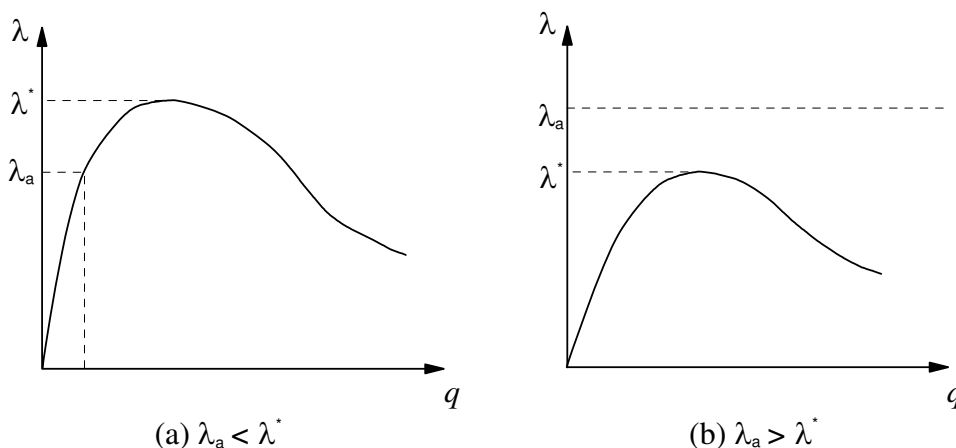


Figura 6.1: Situações encontradas na análise estrutural [58].

Na primeira situação, a carga aplicada é menor que a carga crítica, figura (6.1a). Neste caso, a análise pode ser completada sem problemas. Ao final, as respostas da estrutura e os respectivos gradientes são avaliados.

A outra situação ocorre quando a carga aplicada é superior à carga limite da estrutura, figura (6.1b). Neste caso, a análise não pode ser levada ao fim, pois

a carga aplicada não corresponde a nenhum ponto do caminho de equilíbrio. Portanto, é impossível se determinar os deslocamentos correspondentes ao nível de carga desejado. Como consequência, é impossível avaliar as sensibilidades destas grandezas, e o algoritmo de programação matemática é incapaz de prosseguir. Diferentes procedimentos podem ser utilizados para contornar este problema (Parente [58]; Melo [50]). A idéia é empregar um problema modificado, de maneira a sempre utilizar os deslocamentos avaliados em um nível de carga inferior à carga crítica. Neste trabalho optou-se pela solução adotada em Parente [58], onde sempre que houver risco da carga crítica ficar abaixo da carga aplicada, o uso do algoritmo de pontos interiores se torna mais conveniente.

O algoritmo de pontos interiores gera uma seqüência de pontos no interior da região viável com valores decrescentes da função objetivo. Portanto, a carga crítica de todos os projetos gerados é obrigatoriamente maior que a carga aplicada. A única desvantagem deste algoritmo é a necessidade de gerar um projeto inicial viável. Na maioria das vezes, contudo, este não é um problema sério, pois é simples criar uma estrutura com resistência maior que a necessária.

6.3

Formulação do Problema de Otimização

O problema de RBDO, apresentado no capítulo 5, pode ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(\mathbf{h}, \mathbf{p}) && \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \\ &\text{sujeito a} && g_i^R(\mathbf{h}, \mathbf{p}) \geq 0 && i = 1 \dots l \\ &&& h_i^l \leq h_i \leq h_i^u && i = 1 \dots n \end{aligned} \quad (6-1)$$

onde \mathbf{h} são as variáveis de projeto e $g_i^R(\mathbf{h}, \mathbf{p})$ são as restrições probabilísticas. A função objetivo adotada será o volume da estrutura, no caso de estruturas compostas por mais de um material, o volume deverá ser substituído diretamente pelo peso da estrutura.

$$f(\mathbf{h}, \mathbf{p}) = V(\mathbf{h}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{ne} A_i(\mathbf{h}, \mathbf{p}) l_i(\mathbf{h}, \mathbf{p}) \quad (6-2)$$

As restrições probabilísticas exigem a definição de uma função de performance, onde, neste trabalho, podem ser adotadas:

- deslocamento máximo permitido

$$g(\mathbf{h}, \mathbf{p}) = 1 - \frac{|q_i(\mathbf{h}, \mathbf{p})|}{q^a} \quad (6-3)$$

onde q_i é um deslocamento nodal selecionado e q^a é o deslocamento máximo permitido.

- tensão máxima permitida dos elementos / flambagem global da barra

$$g(\mathbf{h}, \mathbf{p}) = 1 - \frac{|\sigma_i(\mathbf{h}, \mathbf{p})|}{\sigma^a} \quad (6-4)$$

onde σ_i é uma tensão axial selecionada e σ^a é a tensão máxima permitida. $\sigma^a = \min[\sigma^0, \sigma^{cr}]$ onde σ^0 é a tensão de escoamento e σ^{cr} é a tensão crítica de Euler, dada pela seguinte expressão:

$$\sigma^{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{Al} \quad (6-5)$$

onde E é o módulo de elasticidade e I_{min} é o momento de inércia mínimo da seção.

- carga crítica global da estrutura

$$g(\mathbf{h}, \mathbf{p}) = \lambda_{cr}(\mathbf{h}, \mathbf{p}) - \lambda^a \quad (6-6)$$

onde λ_{cr} é carga crítica global da estrutura e λ^a representa o limite mínimo para capacidade de carga da estrutura. No caso de $\lambda^a = 1.0$ o carregamento total é considerado.

6.3.1 Fatores de escala

A diversidade de medidas presente no problema de otimização pode acarretar diferenças significativas entre as suas magnitudes e causar problemas na estabilidade numérica do algoritmo de solução. Segundo Haftka & Gürdal [29], o uso de fatores de escala tem o efeito de colocar todas as variáveis de projeto sobre uma mesma base. Isto quer dizer que variações de 1% nestas variáveis tenham aproximadamente o mesmo significado para cada uma delas. Desta forma a variável de projeto, h_i , é definida como a razão entre o valor corrente do parâmetro e o correspondente valor inicial, i. e.,

$$\bar{h}_i = \frac{h_i}{h_i^0} \quad (6-7)$$

O problema de otimização é resolvido então para a variável $\bar{\mathbf{h}}$, e as derivadas da função objetivo e restrições em relação a $\bar{\mathbf{h}}$ são obtida da seguinte forma:

$$\frac{d(.)}{d\bar{h}_i} = \frac{d(.)}{dh_i} \frac{dh_i}{d\bar{h}_i} = \frac{d(.)}{dh_i} h_i^0 \quad (6-8)$$

A função objetivo e as restrições ficam definidas em termos da variável de projeto adimensional, onde a função objetivo é agora a relação entre o volume corrente da estrutura (V) e o volume inicial (V_0):

$$\bar{f} = \frac{V}{V_0} \quad (6-9)$$

6.3.2

Cálculo dos Gradientes

Os algoritmos de programação matemática utilizados neste trabalho precisam dos gradientes da função objetivo e das restrições para a determinação da direção de busca. Assim, derivando-se a equação (6-9), obtém-se o gradiente da função objetivo:

$$\frac{d\bar{f}}{d\bar{h}_i} = \frac{1}{V_0} \frac{dV}{d\bar{h}_i} \quad (6-10)$$

onde, conforme (6-8), tem-se

$$\frac{dV}{d\bar{h}_i} = h_i^0 \frac{dV}{dh_i} \quad (6-11)$$

onde $\frac{dV}{dh_i}$ é a sensibilidade do volume da estrutura.

As restrições probabilísticas são formuladas em função do índice de confiabilidade β no caso de se usar o RIA ou através da função de performance g^P para o PMA. Desta forma, obtém-se as seguintes expressões:

$$\frac{d\beta}{d\bar{h}_i} = h_i^0 \frac{d\beta}{dh_i} \quad (6-12)$$

$$\frac{dg^P}{d\bar{h}_i} = h_i^0 \frac{dg^P}{dh_i} \quad (6-13)$$

onde $\frac{d\beta}{dh_i}$ e $\frac{dg^P}{dh_i}$ necessitam da sensibilidade das funções de falha. Partindo-se da equação (6-3), os gradientes podem ser escritos como:

$$\frac{dg}{dh_i} = -\frac{\text{sign}(q_i)}{q^a} \frac{dq_i}{dh_i} \quad (6-14)$$

onde $\text{sign}(\cdot) = \pm 1$ é o sinal da expressão avaliada. A partir de (6-4) e (6-6) chega-se, respectivamente, (6-15) e (6-16):

$$\frac{dg}{dh_i} = -\frac{\text{sign}(\sigma_i)}{\sigma^a} \frac{d\sigma_i}{dh_i} + \frac{|\sigma_i|}{(\sigma^a)^2} \frac{d\sigma^a}{dh_i} \quad (6-15)$$

$$\frac{dg}{dh_i} = \frac{d\lambda_{cr}}{dh_i} \quad (6-16)$$

6.4

Implementação da Formulação

A metodologia de RBDO aqui aplicada é a de duplo laço (loop). Um fluxograma típico desta metodologia é mostrado na figura (6.2). O laço externo é associado com a otimização das variáveis de projeto e o interno com a análise de confiabilidade. Os laços computacionais postos desta maneira solicitam FEA/DSA de maneira intensa, provocando, desta maneira, um grande custo computacional.

Os principais módulos do sistema computacional aqui empregado são apresentados na figura (6.2). O módulo de otimização (OPT) pode usar os algoritmos IP ou SQP. Na busca pelo MPP pode-se usar além dos já citados IP e SQP, o HLRF ou o iHLRF.

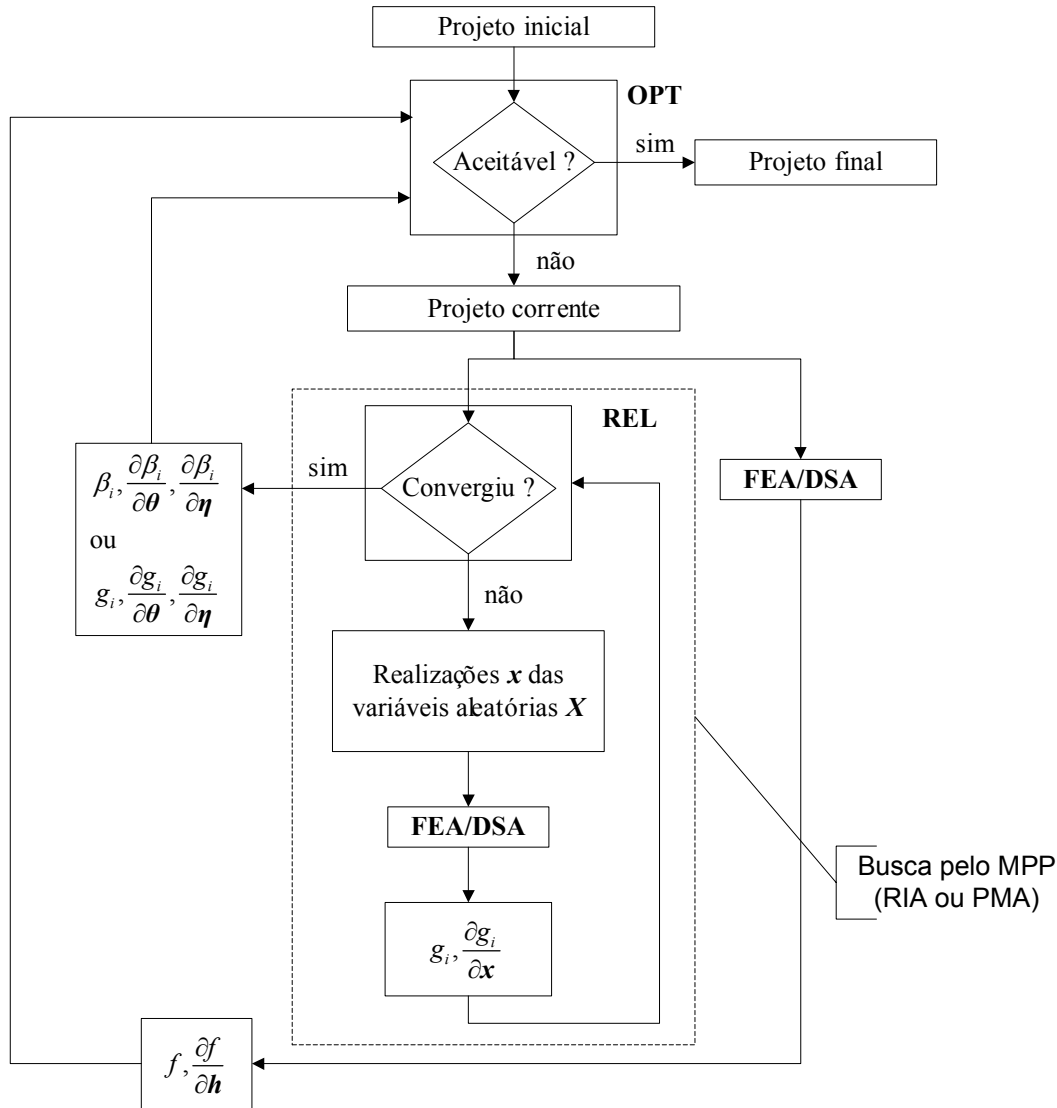


Figura 6.2: RBDO-Fluxograma [41].

A formulação foi desenvolvida em linguagem C++, seguindo uma filosofia de programação orientada a objetos (OOP). Ao contrário dos procedimentos convencionais, onde o objetivo é se dividir o programa em *funções* (ou *procedimentos*), em OOP o foco é se dividir em *classes* ou *objetos*. Uma classe contém não somente dados mas também funções. Basicamente podemos dizer que OOP tem quatro conceitos principais: *abstração*, *encapsulamento*, *herança* e *polimorfismo*. Os itens acima são extensivamente discutidos na literatura [75].

O uso da abordagem orientada a objetos aplicada em FEA tem sido difundida por diversos autores nas últimas décadas. Nos problemas de engenharia modelados por elementos finitos pode-se citar Zimmermann & Eyheramendy [86], Eyheramendy & Zimmermann [17, 18, 19], em especial nas áreas de análise não-linear e matemática simbólica. Hsien et. al [72] e Modak [51] apresentaram trabalhos na área de computação paralela, área esta que parece bem promissora.

Diversas bibliotecas de classes de objetos de código livre estão disponíveis para *download* e foram utilizadas como referência para a organização das classes do presente trabalho, entre elas a desenvolvida pela PUC-Rio (FEMOOP [47]), a desenvolvida na Universidade de Berkeley (OpenSees [38]) e a desenvolvida por pesquisadores do *Sandia National Laboratory*, (DAKOTA), descritas a seguir:

- FEMOOP é um programa de análise estrutural através do Método dos Elementos Finitos que vem sendo desenvolvido no Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio há bastante tempo. Este programa utiliza a filosofia de Programação Orientada a Objetos com o objetivo de facilitar sua expansão e manutenção. O programa contempla diversos modelos de análise (estado plano de tensão, estado plano de deformação, axissimétrico, sólido, etc.) e uma variedade de elementos finitos (T3, T6, Q4, Q8, treliça, pórtico, etc.). Contempla ainda elementos para análise não-linear geométrica, algoritmos para determinação de pontos críticos e procedimentos para cálculo das sensibilidades com relação as coordenadas nodais.
- OpenSees [57] é um código aberto de elementos finitos orientado a objetos escrito em C++, especificamente desenvolvido para a análise de terremotos. É a plataforma computacional oficial da *Pacific Earthquake Engineering Research (PEER) Center*. Recentemente foram incorporados ao código módulos de análise de confiabilidade e sensibilidade desenvolvidos por Haukaas [31].
- DAKOTA (*Design Analysis Kit for Optimization and Terascale Applications*) [12] é um conjunto de ferramentas, desenvolvidas por pesquisadores do *Sandia National Laboratory*, que provêem uma interface flexível e extensível entre os códigos de análise. DAKOTA contém algoritmos para otimização com métodos com gradientes ou sem gradientes; quantificação de incertezas com amostragem, confiabilidade, métodos estocásticos de elementos finitos; entre outros. O código emprega a filosofia orientada a objetos, desenvolvido em linguagem C++, e está disponível para uso de acordo com a licença pública GNU *General Public License* (GPL).

6.5

Exemplos

6.5.1

Treliça de 10 Barras

Este exemplo trata da otimização da treliça de 10 barras apresentada na figura (6.3). A estrutura está sujeita a dois carregamentos não correlacionados, o primeiro $P_1 = 100kN$ aplicado no nó 1 e o segundo $P_2 = 50kN$ aplicado nos nós 2 e 4, conforme apresentado na figura (6.3). Os elementos são feitos de aço com seções transversais de cantoneiras de abas iguais, A resposta estrutural é determinada empregando-se uma análise linear elástica. Os dados utilizados aqui são os mesmos apresentados por Stocki et. al [74] e consistem em 22 variáveis randômicas listadas na tabela (6.1). As seções transversais dos elementos e as coordenadas na direção vertical dos nós 1 ao 4, são também variáveis de projeto Para as seções transversais adotou-se um coeficiente de variação constante igual a 5%, já para as coordenadas, o desvio padrão se manteve constante em 2 cm.

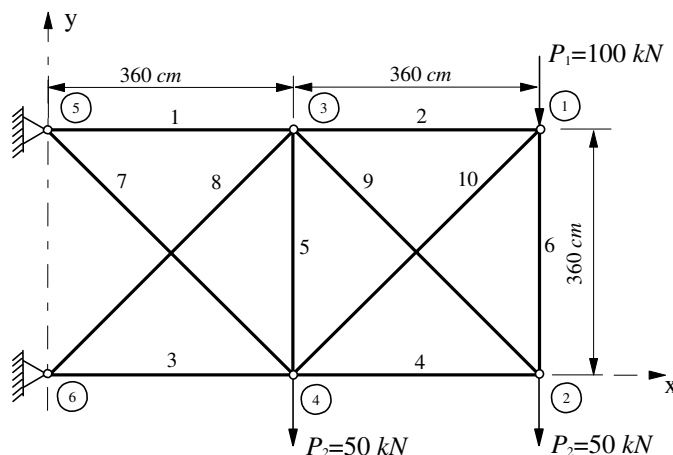


Figura 6.3: Treliça de 10 barras.

Neste problema o volume da estrutura é minimizado sujeito a 11 restrições de confiabilidade correspondentes às seguintes funções de estado limite.

- deslocamento vertical do nó 2 (q_2^2)

$$g_1(\mathbf{q}(\mathbf{h}, \mathbf{p})) = 1 - \frac{|q_2^2(\mathbf{h}, \mathbf{p})|}{q^a} \quad (6-17)$$

onde $q^a = 3.5$ cm.

- tensão máxima permitida/flambagem global dos elementos

$$g_i(\mathbf{h}, \mathbf{p}) = 1 - \frac{|\sigma_{i-1}(\mathbf{h}, \mathbf{p})|}{\sigma_{i-1}^a(\mathbf{p})} \quad i = 2, \dots, 11, \quad (6-18)$$

onde σ^a , no caso de barras comprimidas, considera a flambagem global da barra (ou local da estrutura). Desta forma, precisa-se do valor do momento de inércia mínimo da seção (I_{min}) para se avaliar a equação (6-5). Foi feita então, uma aproximação de segundo grau dos perfis de cantoneira de abas iguais disponíveis que relaciona I_{min} e A , apresentada na figura (6.4).

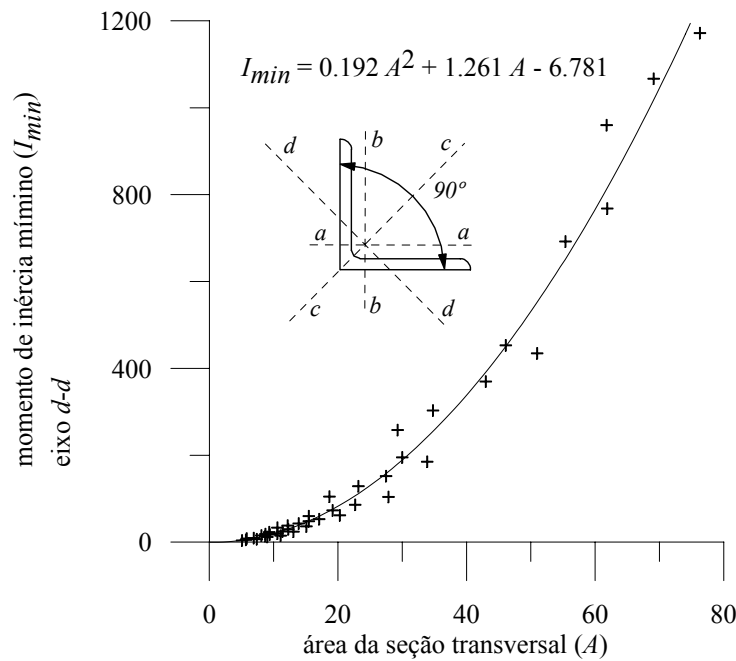


Figura 6.4: Cantoneira de abas iguais - Relação entre a área da seção transversal e o momento mínimo de inércia.

As funções de falha apresentadas em (6-17)-(6-18) definem as restrições de confiabilidade do problema de otimização. Para todas estas restrições o valor alvo β_t foi fixado em 3.7, o que corresponde a uma probabilidade de falha de aproximadamente 10^{-4} . As variáveis de projeto estão sujeitas a restrições laterais definidas no problema de RBDO formulado em (6-19).

X	Descrição	Tipo	Momen.	Valor inicial	h	Pres. trab.	Stocki et. al [74]
X_1	Área da seção - el. 1 c.o.v. constante: 5%	LN	$E(X_1)$	20.00	h_1	29.22	28.85
			$\sigma(X_1)$	1.0			
X_2	Área da seção - el. 2 c.o.v. constante: 5%	LN	$E(X_2)$	20.00	h_2	13.04	18.57
			$\sigma(X_2)$	1.0			
X_3	Área da seção - el. 3 c.o.v. constante: 5%	LN	$E(X_3)$	20.00	h_3	40.34	40.21
			$\sigma(X_3)$	1.0			
X_4	Área da seção - el. 4 c.o.v. constante: 5%	LN	$E(X_4)$	20.00	h_4	25.30	16.40
			$\sigma(X_4)$	1.0			
X_5	Área da seção - el. 5 c.o.v. constante: 5%	LN	$E(X_5)$	20.00	h_5	5.09	5.09
			$\sigma(X_5)$	1.0			
X_6	Área da seção - el. 6 c.o.v. constante: 5%	LN	$E(X_6)$	20.00	h_6	5.09	5.09
			$\sigma(X_6)$	1.0			
X_7	Área da seção - el. 7 c.o.v. constante: 5%	LN	$E(X_7)$	20.00	h_7	5.09	6.03
			$\sigma(X_7)$	1.0			
X_8	Área da seção - el. 8 c.o.v. constante: 5%	LN	$E(X_8)$	20.00	h_8	24.22	24.60
			$\sigma(X_8)$	1.0			
X_9	Área da seção - el. 9 c.o.v. constante: 5%	LN	$E(X_9)$	20.00	h_9	10.70	5.75
			$\sigma(X_9)$	1.0			
X_{10}	Área da seção - el. 10 c.o.v. constante: 5%	LN	$E(X_{10})$	20.00	h_{10}	30.41	35.53
			$\sigma(X_{10})$	1.00			
X_{11}	Módulo de elasticidade para todos os elementos	LN	$E(X_{11})$	21000.0			
			$\sigma(X_{11})$	1050.0			
X_{12}	Tensão de escoamento para todos os elementos	LN	$E(X_{12})$	21.0			
			$\sigma(X_{12})$	1.0			
X_{13}	Coordenada x do nó 1	N	$E(X_{13})$	720.0			
			$\sigma(X_{13})$	2.0			
X_{14}	Coordenada y do nó 1	N	$E(X_{14})$	360.0	h_{11}	150.0	150.0
			$\sigma(X_{14})$	2.0			
X_{15}	Coordenada x do nó 2	N	$E(X_{15})$	720.0			
			$\sigma(X_{15})$	2.0			
X_{16}	Coordenada y do nó 2	N	$E(X_{16})$	0.0	h_{12}	98.74	10.1
			$\sigma(X_{16})$	2.0			
X_{17}	Coordenada x do nó 3	N	$E(X_{17})$	360.0			
			$\sigma(X_{17})$	2.0			
X_{18}	Coordenada y do nó 3	N	$E(X_{18})$	360.0	h_{13}	245.83	259.9
			$\sigma(X_{18})$	2.0			
X_{19}	Coordenada x do nó 4	N	$E(X_{19})$	360.0			
			$\sigma(X_{19})$	2.0			
X_{20}	Coordenada y do nó 4	N	$E(X_{20})$	0.0	h_{14}	22.11	35.3
			$\sigma(X_{20})$	2.0			
X_{21}	Carregamento nodal P_1	GU	$E(X_{21})$	100.0			
			$\sigma(X_{21})$	20.0			
X_{22}	Carregamento nodal P_2	LN	$E(X_{22})$	50.0			
			$\sigma(X_{22})$	2.5			

Tabela 6.1: Trelça com 10 barras - variáveis randômicas e de projeto.

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && V(\mathbf{h}, \mathbf{p}) \\
 &\text{sujeito a} && \beta_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \geq 3.7 && i = 1, \dots, 11 \\
 &&& 5.09 \text{ cm}^2 \leq h_k \leq 76.4 \text{ cm}^2 && k = 1, \dots, 10 \\
 &&& 150.0 \text{ cm} \leq h_k \leq 450.0 \text{ cm} && k = 11, 13 \\
 &&& -100.0 \text{ cm} \leq h_k \leq 100.0 \text{ cm} && k = 12, 14
 \end{aligned} \tag{6-19}$$

Empregando o algoritmo de programação quadrática seqüencial (SQP) em conjunto com o método PMA sem linearização, o projeto ótimo foi obtido após 18 iterações. O volume inicial de 83929.35 cm³ é reduzido em cerca de 17%, ou seja, para 69988.61 cm³. O resultado apresentado é ligeiramente superior ao obtido em Stocki et. al [74] ($V = 69878.4 \text{ cm}^3$), contudo, fazendo-se uma análise da solução apresentada nesta referência, percebe-se que as restrições associadas as tensões nos elemento 3, 4, 8 e 10, que têm como valores de índices de confiabilidade 3.64, 3.56, 3.56 e 3.64, respectivamente, estão violadas. Estas diferenças podem estar relacionadas à relação entre I_{min} e A já que na referência a mesma não é fornecida. A estrutura obtida ao final do processo de otimização para o presente trabalho e para o apresentado em Stocki et. al [74] podem ser vistas nas figuras (6.5a) e (6.5b), respectivamente, onde as espessuras das linhas representam esquematicamente a magnitude das seções transversais.

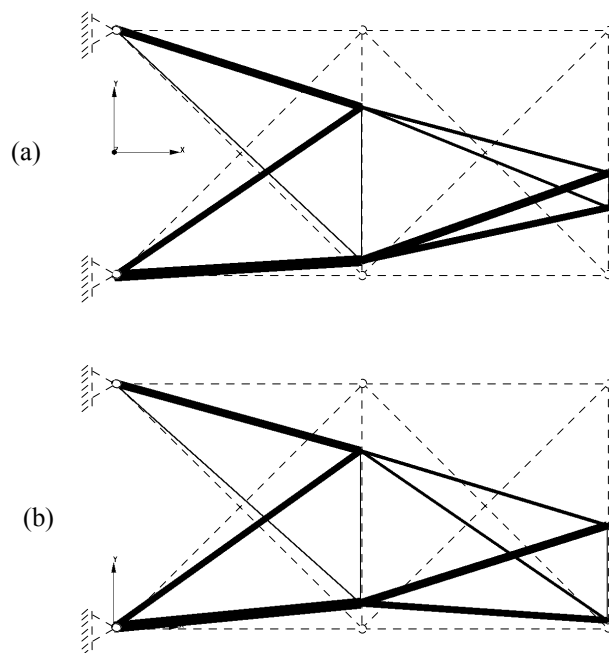


Figura 6.5: Treliça de 10 barras - Projeto ótimo: (a) presente trabalho; (b) Stocki et. al [74].

As figuras mostram estruturas bastante diferentes, entretanto, os volumes são praticamente iguais. Partindo-se da solução fornecida por Stocki et. al [74], obtém-se uma estrutura com pequenas variações nas variáveis de projeto, como já era esperado por haver apenas pequenas violações nas restrições, e com o volume de 70330.13 cm³. Na realidade, variando-se os parâmetros dos algoritmos ou os pontos de partida, diferentes estruturas ótimas podem ser obtidas, indicando que este problema apresenta mais de um mínimo local.

A evolução das restrições, assim como a evolução do volume é apresentada na figura (6.6). É interessante destacar que na solução ótima obtida neste trabalho, apenas as restrições associadas ao deslocamento e as associadas as tensões nos elementos 6 e 7 não estão ativas.

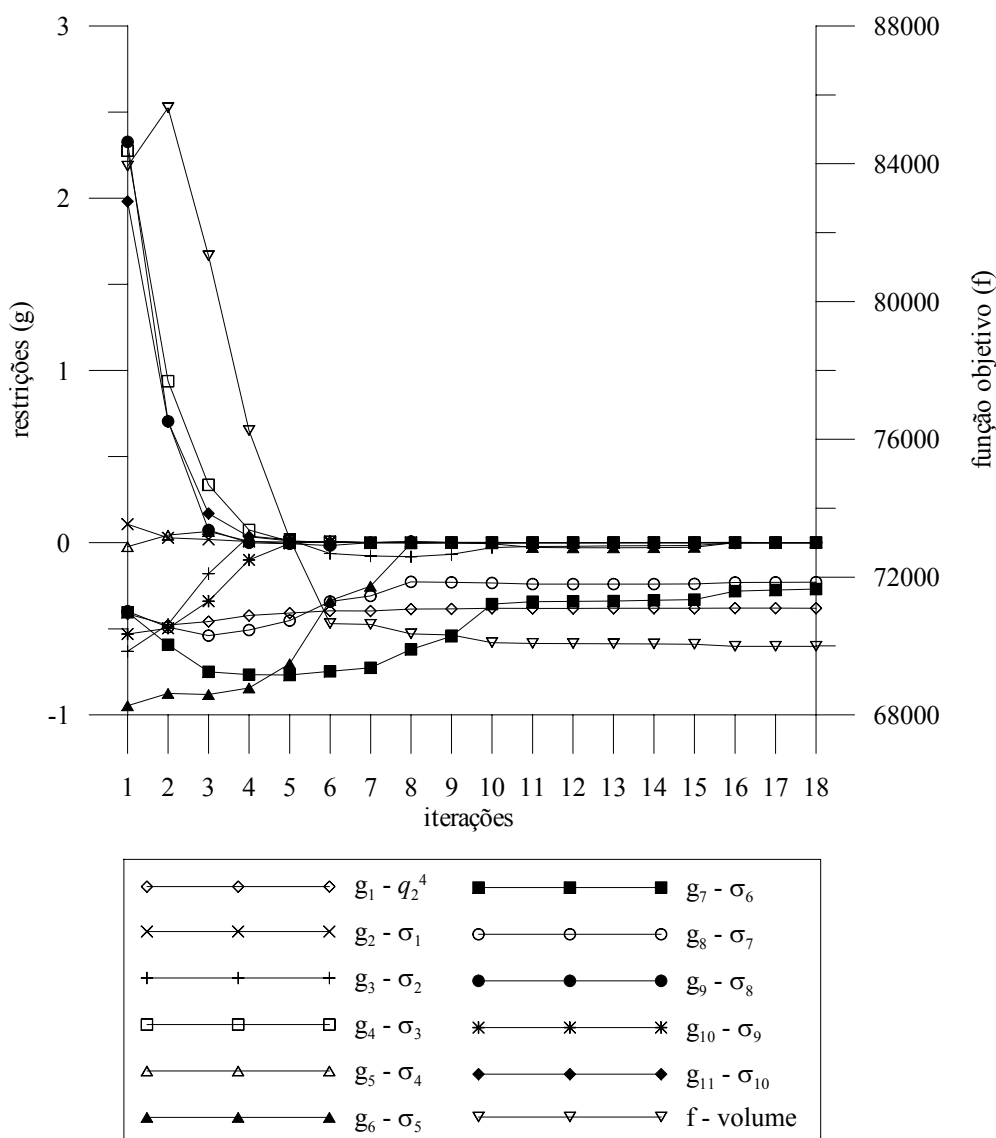


Figura 6.6: Treliça de 10 barras - Restrições e função objetivo ao longo das iterações.

No presente trabalho foram necessárias um total de 18 iterações, 1875 análises e 876 gradientes para obter a convergência. No trabalho de Stocki et. al, no qual foi utilizado o algoritmo NLPQL [53], fornece somente o número total de iterações igual a 33 iterações.

6.5.2

Treliça Espacial de 24 Elementos

Este exemplo trata da otimização de dimensões da treliça apresentada na figura (6.7). O comportamento altamente não-linear deste tipo de estrutura foi estudado na seção (2.7.2). Os dados utilizados aqui são os mesmos apresentados por Stocki et. al [74]. Neste problema o volume da estrutura é minimizado sujeito a 26 restrições de confiabilidade correspondentes as funções de estado limite apresentadas em (6-20), (6-21) e (6-23).

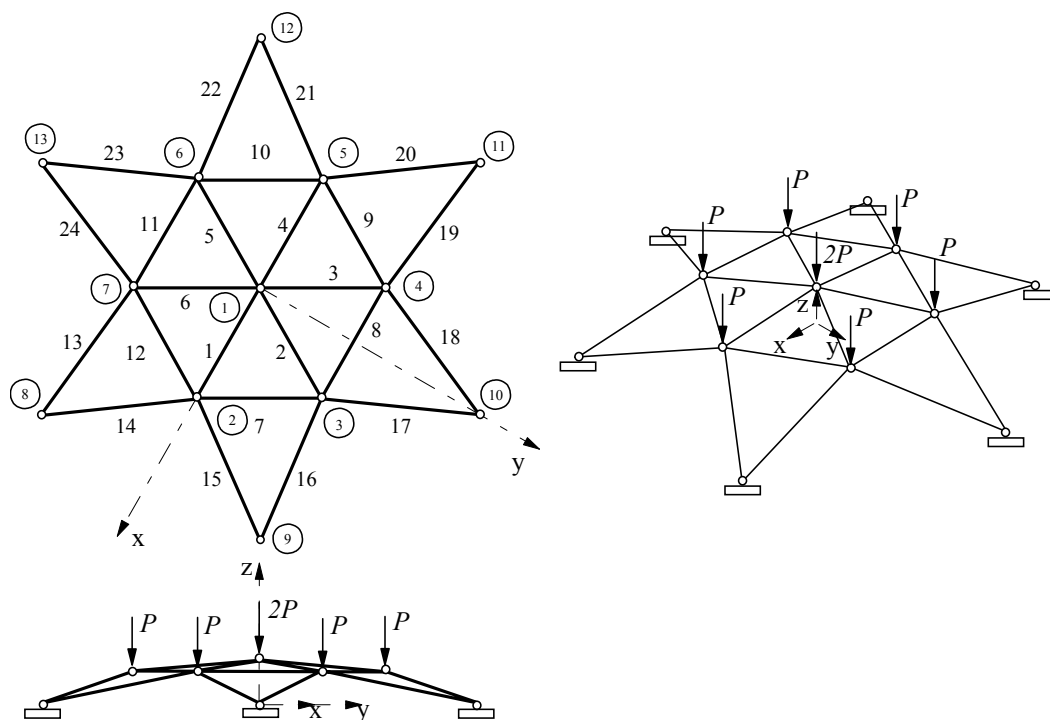


Figura 6.7: Treliça espacial de 24 elementos.

- deslocamento vertical máximo permitido no nó central (q_3^1)

$$g_1(\mathbf{q}(\mathbf{h}, \mathbf{p})) = 1 - \frac{|q_3^1(\mathbf{h}, \mathbf{p})|}{q^a} \quad (6-20)$$

onde $q^a = 3.5$ cm.

- tensão máxima permitida/flambagem global dos elementos

$$g_i(\mathbf{h}, \mathbf{p}) = 1 - \frac{|\sigma_{i-1}(\mathbf{h}, \mathbf{p})|}{\sigma_{i-1}^a(\mathbf{p})} \quad i = 2, \dots, 25, \quad (6-21)$$

onde a relação entre o momento de inércia mínimo da seção (I_{min}) e a área da seção transversal (A) foi obtida mantendo-se fixa a relação entre o diâmetro externo e o interno dos perfis, desta forma:

$$I_{min}(A) = \frac{\left(\left(\frac{d_e}{d_i}\right)^2 + 1\right) A^2}{4\pi \left(\left(\frac{d_e}{d_i}\right)^2 - 1\right)} \quad (6-22)$$

onde d_e e d_i são respectivamente os diâmetros externo e interno do perfil. Neste exemplo, d_e/d_i foi fixado em 1.25.

– carga crítica global

$$g_{26}(\mathbf{h}, \mathbf{p}) = \lambda_{cr}(\mathbf{h}, \mathbf{p}) - 1 \quad (6-23)$$

onde λ_{cr} neste exemplo é a carga crítica não linear (neste caso a fim de evitar o efeito *snap-through*).

O problema de RBDO é formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && V(\mathbf{h}, \mathbf{p}) \\ &\text{sujeito a} && \beta_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \geq 3.7 && i = 1, \dots, 25 \\ &&& \beta_{26}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \geq 4.7 \\ &&& 3.13 \text{ cm}^2 \leq h_k \leq 30.76 \text{ cm}^2 && k = 1, \dots, 10 \end{aligned} \quad (6-24)$$

Empregando o algoritmo de programação quadrática sequencial (SQP) em conjunto com o método PMA usando a linearização AMV+ no espaço x , o projeto ótimo foi obtido após 6 iterações. O volume inicial de 135936.30 cm³ é reduzido em cerca de 24%, ou seja, para 103667.51 cm³. O resultado apresentado é ligeiramente inferior ao obtido em Stocki et. al [74] ($V = 103710.0$ cm³).

A evolução das restrições, assim como a evolução do volume é apresentada na figura (6.8). É interessante destacar que na solução ótima obtida neste trabalho as restrições associadas aos elementos 13 – 24 e a restrição referente à carga crítica estão ativas, conforme a figura (6.8).

No presente trabalho foram necessárias um total de 6 iterações, 1671 análises e 831 gradientes para obter a convergência. No trabalho de Stocki et.

X	Descrição	Tipo	Momen.	Valor inicial	h	Pres. trab.	Stocki et. al [74]
X_1	Área da seção - el. 1-6 c.o.v. constante: 5%	LN	$E(X_1)$	20.00	h_1	19.398	19.371
			$\sigma(X_1)$	1.0			
X_2	Área da seção - el. 7-12 c.o.v. constante: 5%	LN	$E(X_2)$	20.00	h_2	13.655	13.712
			$\sigma(X_2)$	1.0			
X_3	Área da seção - el. 13-24 c.o.v. constante: 5%	LN	$E(X_3)$	20.00	h_3	14.239	14.239
			$\sigma(X_3)$	1.0			
X_4	Módulo de elasticidade para todos os elementos	LN	$E(X_4)$	21000.0			
			$\sigma(X_4)$	1050.0			
X_5	Tensão de escoamento para todos os elementos	LN	$E(X_5)$	21.0			
			$\sigma(X_5)$	1.0			
X_6	Coordenada x do nó 1	N	$E(X_6)$	0.0			
			$\sigma(X_6)$	1.0			
X_7	Coordenada y do nó 1	N	$E(X_7)$	0.0			
			$\sigma(X_7)$	1.0			
X_8	Coordenada z do nó 1	N	$E(X_8)$	82.16			
			$\sigma(X_8)$	1.0			
X_9	Coordenada x do nó 2	N	$E(X_9)$	250.0			
			$\sigma(X_9)$	1.0			
X_{10}	Coordenada y do nó 2	N	$E(X_{10})$	0.0			
			$\sigma(X_{10})$	1.0			
X_{11}	Coordenada z do nó 2	N	$E(X_{11})$	62.11			
			$\sigma(X_{11})$	1.0			
X_{12}	Coordenada x do nó 3	N	$E(X_{12})$	125.0			
			$\sigma(X_{12})$	1.0			
X_{13}	Coordenada y do nó 3	N	$E(X_{13})$	216.51			
			$\sigma(X_{13})$	1.0			
X_{14}	Coordenada z do nó 3	N	$E(X_{14})$	62.16			
			$\sigma(X_{14})$	1.0			
X_{15}	Coordenada x do nó 4	N	$E(X_{15})$	-125.0			
			$\sigma(X_{15})$	1.0			
X_{16}	Coordenada y do nó 4	N	$E(X_{16})$	216.51			
			$\sigma(X_{16})$	1.0			
X_{17}	Coordenada z do nó 4	N	$E(X_{17})$	62.16			
			$\sigma(X_{17})$	1.0			
X_{18}	Coordenada x do nó 5	N	$E(X_{18})$	-250.0			
			$\sigma(X_{18})$	1.0			
X_{19}	Coordenada y do nó 5	N	$E(X_{19})$	0.0			
			$\sigma(X_{19})$	1.0			
X_{20}	Coordenada z do nó 5	N	$E(X_{20})$	62.16			
			$\sigma(X_{20})$	1.0			
X_{21}	Coordenada x do nó 6	N	$E(X_{21})$	-125.0			
			$\sigma(X_{21})$	1.0			
X_{22}	Coordenada y do nó 6	N	$E(X_{22})$	-216.51			
			$\sigma(X_{22})$	1.0			
X_{23}	Coordenada z do nó 6	N	$E(X_{23})$	62.16			
			$\sigma(X_{23})$	1.0			
X_{24}	Coordenada x do nó 7	N	$E(X_{24})$	125.0			
			$\sigma(X_{24})$	1.0			
X_{25}	Coordenada y do nó 7	N	$E(X_{25})$	-216.51			
			$\sigma(X_{25})$	1.0			
X_{26}	Coordenada z do nó 7	N	$E(X_{26})$	62.16			
			$\sigma(X_{26})$	1.0			
X_{27}	Carregamento nodal P	GU	$E(X_{27})$	20.0			
			$\sigma(X_{27})$	3.0			

Tabela 6.2: Treliça espacial de 24 elementos - variáveis randômicas e de projeto.

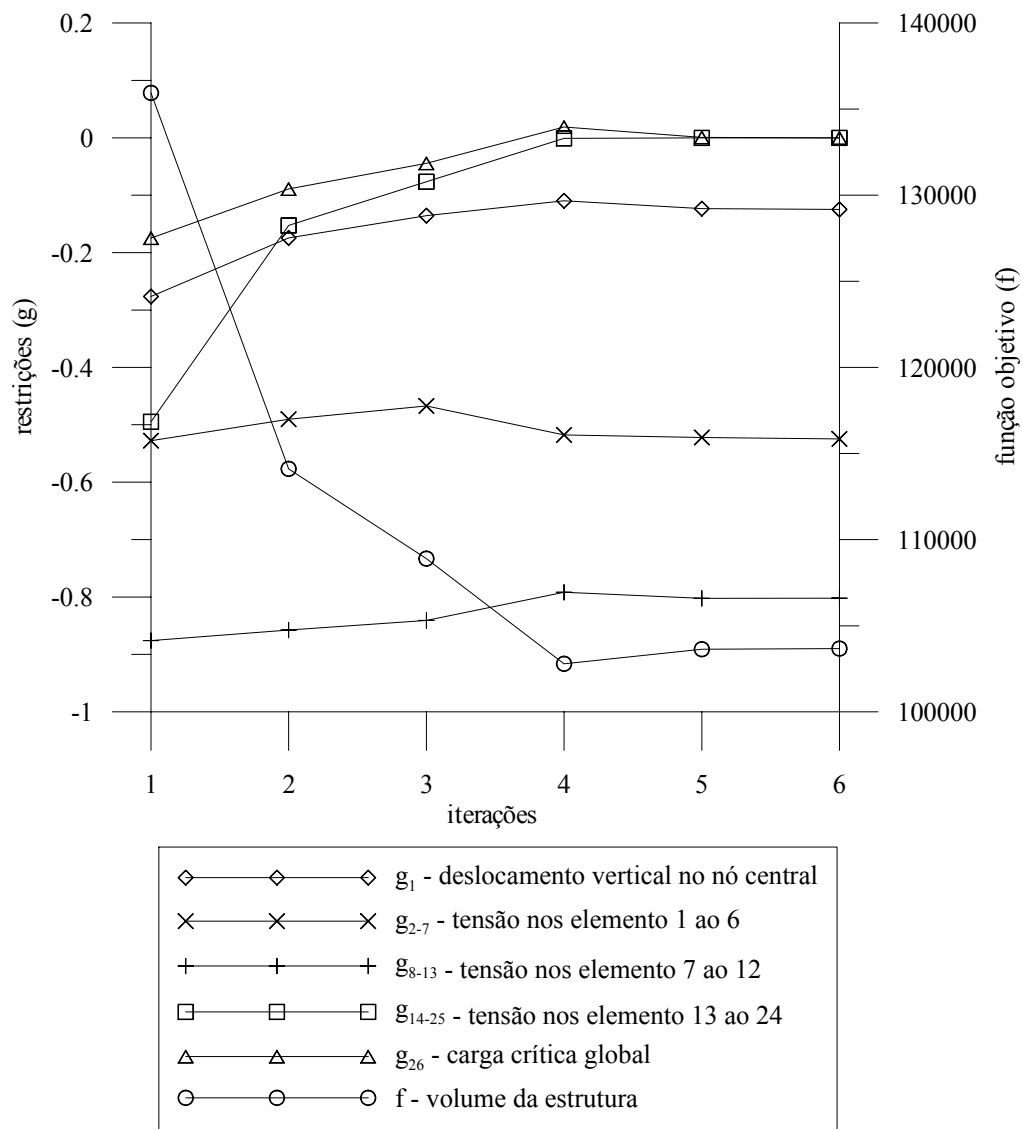


Figura 6.8: Treliça espacial de 24 elementos - Restrições e função objetivo ao longo das iterações.

al, no qual foi utilizado o algoritmo NLPQL [53], fornece somente o número total de iterações igual a 6 iterações.

Na tabela (6.3) são apresentados os resultados da variação do tipo de distribuição da variável X_{27} , que corresponde ao carregamento P , com relação ao volume da estrutura. Para as distribuições apresentadas percebe-se uma diminuição de cerca de 12% no volume ao se utilizar a distribuição Weibull ao invés da Gumbel. Complementando a tabela (6.3), na figura (6.9) são apresentados os valores do volume ótimo alterando-se também o coeficiente de variação da variável X_{27} , c.o.v. $[X_{27}]$. A partir do gráfico pode-se constatar a grande sensibilidade do volume ótimo em relação aos parâmetros da distribuição, principalmente com o aumento do c.o.v. $[X_{27}]$. Reduzindo-se o c.o.v. $[X_{27}]$ os valores do volume ótimo ficam menos sensíveis ao tipo de distribuição, o que já era de se

esperar uma vez que o c.o.v. mede a dispersão dos dados da variável aleatória em torno da média. Quanto mais próximos da média forem os valores menor será a contribuição desta variável na probabilidade de falha, passando a se comportar como determinística.

Dist.	A_1	A_2	A_3	Volume
WB	16.455	11.971	12.839	91405.06
N	16.942	12.253	13.132	93668.28
LN	17.570	12.624	13.487	96517.61
GU	19.398	13.655	14.239	103667.51

Tabela 6.3: Treliça espacial de 24 elementos - Resultados para diversos tipos de distribuição da variável X_{27} .

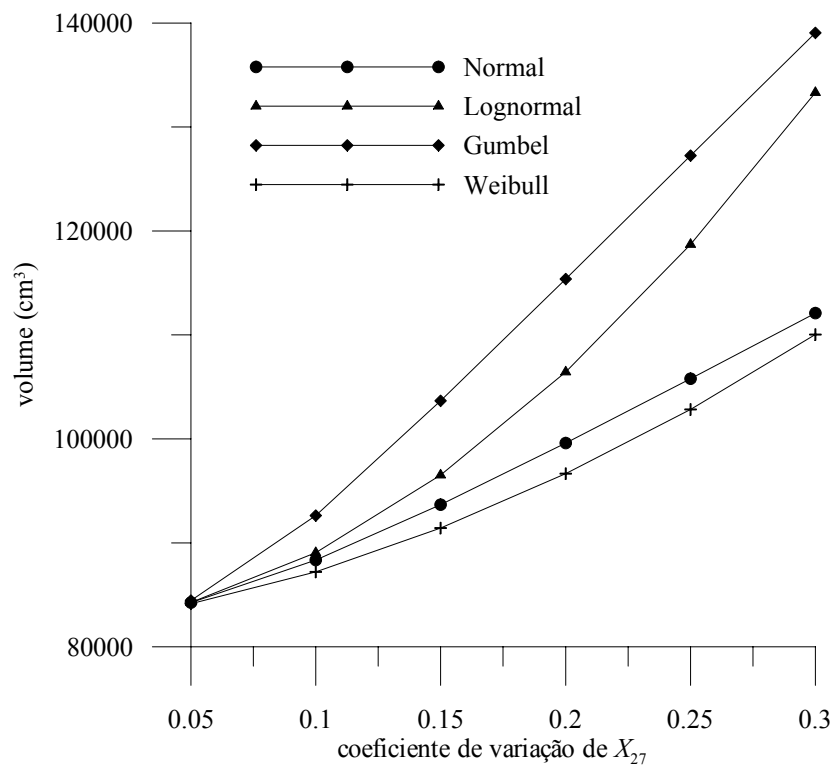


Figura 6.9: Treliça espacial de 24 elementos - Variação do volume em função do tipo de distribuição e do c.o.v. $[X_{27}]$.

7

Conclusões e Sugestões

Como evolução natural dos processos tradicionais de otimização estrutural, a incorporação de métodos probabilísticos a fim de se garantir, de maneira racional, a segurança dos projetos, constitui-se de um grande desafio, tanto de ordem computacional quanto teórica. Do ponto de vista computacional, comparada com a otimização determinística, a otimização baseada em confiabilidade apresenta um grande acréscimo no número de análises estruturais e análises de sensibilidade, resultando num enorme esforço computacional, que por sua vez pode se tornar proibitivo para estruturas de grande porte. Do ponto de vista teórico, a consolidação de várias áreas de estudo se fazem necessárias, onde, cada tema isoladamente representa uma área de conhecimento bastante vasta.

Nos trabalhos desenvolvidos pelo DEC/PUC-Rio se consolidou o uso da análise de sensibilidade e das técnicas de programação matemática na solução de problemas de otimização estrutural. Objetivando dar continuidade a estes trabalhos, a análise de confiabilidade, em particular os métodos baseados na busca pelo ponto de projeto, que fazem uso destes conceitos, foram incorporados ao problema de otimização estrutural. Para isto foram implementadas rotinas para a avaliação das restrições probabilísticas e das suas sensibilidades, que, acopladas a metodologia tradicional de otimização, possibilitaram a solução do problema de otimização baseada em confiabilidade.

O presente trabalho teve como objetivo fundamental considerar as incertezas associadas às propriedades dos materiais, às propriedades geométricas e aos carregamentos no processo de otimização estrutural. Para isto, um sistema computacional para a solução de problemas de RBDO foi desenvolvido. Este desenvolvimento requereu a implementação e a integração dos seguintes módulos: programação matemática, análise estrutural, análise de sensibilidade e análise de confiabilidade. Cada uma destas etapas foi discutida nos capítulos anteriores a alguns aspectos são destacados a seguir:

- O método utilizado neste trabalho para a determinação dos pontos críticos na análise não linear de estruturas foi um método indireto e se baseia na idéia de se reduzir o tamanho dos incrementos na região

próxima ao ponto crítico. O uso deste método se deu principalmente pela facilidade de implementação comparada com métodos diretos por exemplo e, conseqüentemente, um desempenho ineficiente computacionalmente já era esperado. Na busca pelo ponto crítico o algoritmo gerou uma grande quantidade de pontos de equilíbrio intermediários que resultaram na lentidão do processo. Apesar disto, como a restrição de carga crítica global é única no processo de otimização, este problema não foi tão sério comparando-se com o tempo despendido para a avaliação das demais restrições.

- A análise de sensibilidade da resposta estrutural desempenha um importante papel na otimização baseada em confiabilidade. Neste trabalho, as expressões necessárias para sua avaliação foram desenvolvidas usando-se o método da diferenciação direta. Equações unificadas foram apresentadas para a sensibilidade da resposta em relação as propriedades dos materiais, as coordenadas nodais, as áreas de seção transversal e aos carregamentos. A sensibilidade em relação aos parâmetros de forma permitiram se incluir as incertezas sobre as coordenadas nodais no modelo. Geralmente este tipo de incerteza é negligenciada nas aplicações de confiabilidade, porém as mesmas representam uma significativa fonte de incerteza.
- Para a avaliação das restrições probabilísticas foram implementados os métodos RIA e PMA. O primeiro se baseia na determinação direta da confiabilidade, o que, para problemas de RBDO pode se tornar inconveniente uma vez que muitas restrições se apresentam bastante “folgadas” produzindo com isso probabilidades de falha muito pequenas e muitas vezes impossíveis de serem determinadas. O segundo método avalia uma função de performance para uma dada probabilidade de falha alvo, o que, conceitualmente é um problema mais fácil de resolver. Além disso, nenhum problema de convergência na avaliação das restrições foi observado. Diante disto, pode-se dizer que PMA é mais indicada na solução de RBDO.
- A RBDO se tornou muito mais eficiente quando se utilizou informações da iteração anterior, principalmente quando as variáveis de projeto sofrem pequenas variações de uma iteração para outra. Esta eficiência se deu pela redução no número de iterações utilizadas na avaliação das restrições probabilísticas.

Em resumo, os resultados demonstram que o presente desenvolvimento pode ser usado com eficiência na solução de problemas de otimização baseada

em confiabilidade de treliças espaciais suscetíveis a flambagem e pode servir de base para futuros desenvolvimentos, alguns dos quais são relatados a seguir.

7.1

Sugestões para Trabalhos Futuros

É importante destacar que este é apenas um primeiro trabalho sobre o tema abordado. A linha de pesquisa na área de otimização baseada em confiabilidade é incipiente no Brasil e, em particular, na PUC-Rio. Todo o ferramental desenvolvido neste trabalho serve de base para muitas aplicações práticas, conseqüentemente um campo fértil para desenvolvimentos futuros.

Diversos aprimoramentos podem ser sugeridos neste trabalho, a maior parte deles como extensões de maneira a dar mais abrangência ao código, sendo, alguns deles, descritos a seguir:

Análise Estrutural, Análise de Sensibilidade e Instabilidade

- Incluir novos elementos, principalmente elementos de pórtico tridimensionais que são bastante utilizados e podem apresentar sérios problemas de instabilidade. Problemas como por exemplo torres de transmissão e linhas de ancoragem, podem ser analisados a partir deste elemento.
- Estudar a viabilidade da utilização de outros métodos para a determinação de cargas críticas e para o cálculo de suas sensibilidades, de maneira a acelerar o processo de otimização.

Análise de Confiabilidade

- Tratar grandezas que apresentam uma variação com o tempo (dependentes do tempo). Nos problemas tratados neste trabalho todas as variáveis foram tratadas como independentes do tempo mas, algumas grandezas, como por exemplo as ações ambientais, variam com o tempo. Desta forma, a definição de campos randômicos e processos estocásticos na análise de confiabilidade se fazem necessários.

Processo de Otimização

- Utilizar novos algoritmos de PM, tanto para determinação do MPP quanto para a solução do problema de otimização estrutural.
- Considerar a simetria e colinearidade das barras, a fim de obter estruturas passíveis de serem utilizadas na prática da engenharia. Os trabalhos de Falcón [20, 21] podem servir como referência na solução destes problemas.

- Implementar técnicas eficientes para a verificação das restrições probabilísticas. É comum em problemas de otimização que poucas restrições dominem o projeto, desta forma as demais, ditas inativas, não contribuem para a solução ótima. Alguns trabalhos propõem o uso de métodos aproximados na avaliação da confiabilidade, desta forma, caso a restrição atenda a um certo critério, que indica que a mesma está ativa, um outro método mais preciso é usado para a avaliação da confiabilidade. Em Youn et al. [83, 84] esta metodologia é explorada com sucesso e pode servir como referência.

Por fim, destaca-se também como sugestão o estudo e a implementação de outras metodologias para a consideração de incertezas no processo de otimização estrutural. Em RBDO a definição dos parâmetros estatísticos tem papel fundamental na resposta obtida. A definição incorreta ou aproximada destes parâmetros pode gerar uma avaliação incorreta da probabilidade de falha, invalidando portanto o uso de RBDO. Quando as informações estatísticas não estão disponíveis ou então não são suficientemente precisas pode-se utilizar a “Otimização Baseada em Possibilidade” (PBDO, do inglês *Possibility-Based Design Optimization*). Este método não requer a definição de funções de distribuição para se descrever as variáveis aleatórias, técnicas como *Interval set*, *Convex modeling* e *Fuzzy set* são usadas para se modelar as incertezas. Um outra formulação para se levar em conta as incertezas no processo de otimização estrutural é o “Projeto Robusto”. Esta formulação, conceitualmente diferente das duas anteriores (RBDO e PBDO), busca uma redução na variabilidade da resposta do sistema. No projeto robusto obtém-se uma estrutura menos sensível a variações do sistema. A medida de variabilidade se dá, por exemplo, através do desvio padrão da função de performance e pode ser usada tanto na função objetivo quanto na restrições do problema de otimização.

Referências Bibliográficas

- [1] AGARWAL, H.. **Reliability Based Design Optimization: Formulation and Methodologies**. PhD thesis, University of Notre Dame, 2004. 5.3, 5.7.1, 5.7.1
- [2] ALLEN, M.; MAUTE, K.. **Reliability-based design optimization of aeroelastic structures**. *Structural Multidisciplinary Optimization*, 27:228–242, 2004. 1.3
- [3] ALMEIDA, A. A. D.. **Análise probabilística de segurança sísmica de sistemas e componentes estruturais**. Tese de Doutorado., PUC, Rio de Janeiro, Brasil, 2002. 1.3
- [4] ARORA, J. S.. **Introduction to Optimum Design**. McGraw-Hill, 1989. 3.1
- [5] BARBOSA, A. H.. **Análise de confiabilidade estrutural utilizando o método de monte carlo e rede neurais**. Dissertação de Mestrado., UFOP, Ouro Preto, Brasil, dezembro 2004. 4.5.1
- [6] BATHE, K.-J.. **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**. Prentice Hall Inc., 1996. ISBN 0–13-301458 - 4. 2.2, 2.3.1, 2.3.2
- [7] BAZARAA, K. S.; SHERALI, H. D. ; SHETTY, C. M.. **Nonlinear Programming: theory and algorithms**. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2nd ed. edition, 1993. 4.3.2, B.5, B.6
- [8] CARVAJALINO, J. D. J. L.. **Desempenho das ferramentas de inspeção em linha e sua influência na confiabilidade estrutural de dutos corroídos**. Dissertação de Mestrado, PUC, Rio de Janeiro, Brasil, 2004. 1.3
- [9] CHOI, K. K.; YOUN, B. D.. **Hybrid analysis method for reliability-based design optimization**. In: *PROCEEDINGS OF DETC'01 ASME 2001 DESIGN ENGINEERING TECHNICAL CONFERENCES AND COMPUTERS AND INFORMATION IN ENGINEERING CONFERENCE*, Pittsburgh, Pennsylvania, September, 9–12 2001. 1.3

- [10] COOK, R. D.; MALKUS, D. S. ; PLESHA, M. E.. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. Wiley & Sons, New York, third edition, 1989. 2.2
- [11] CRISFIELD, M. A.. **Non - Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures Volume 1: Essentials**. John Wiley & Sons, Inc. New York, 605 Third Avenue, New York, NY 10158-0012, USA, 1991. 2.2, 2.3.2, 2.5.1, 2.5.2, 2.5.3
- [12] DAKOTA: Design Analysis Kit for Optimization and Terascale Applications, <http://endo.sandia.gov/DAKOTA>. Sandia National Laboratories, Albuquerque, 2007. 6.4
- [13] EBOLI, C. R.. **Dimensionamento ótimo de seções de concreto armado à flexão composta oblíqua**. Dissertação de Mestrado, PUC, Rio de Janeiro, Brasil, 1989. 1.3, B.6, B.7, B.7, B.7
- [14] ELDRED, M.; AGARWAL, H.; PEREZ, V.; JR., S. W. ; RENAUDX, J.. **Investigation of reliability method formulations in DAKOTA/UQ**. Sandia National Laboratories, Albuquerque, 2005. 1.3, 5.4, 5.7.1, 5.7.1, 5.7.2, 5.7.2
- [15] ELDRED, M. S.; BICHON, B. J. ; ADAMS, B. M.. **Overview of reliability analysis and design capabilities in DAKOTA**. In: PROCEEDINGS OF THE NSF WORKSHOP ON RELIABLE ENGINEERING COMPUTING MODELING ERRORS AND UNCERTAINTY IN ENGINEERING COMPUTING, Savannah, GA, February 22-24 2006. 1.3, 5.4, 5.7.3
- [16] ELDRED, M. S.; BICHON, B. J.. **Second-order reliability formulations in DAKOTA/UQ**. In: PROCEEDINGS OF THE 47TH AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC STRUCTURES, STRUCTURAL DYNAMICS, AND MATERIALS CONFERENCE AND 8TH AIAA NON-DETERMINISTIC APPROACHES CONFERENCE, Newport, Rhode Island, May 1-4 2006. 1.3, 5.7.3
- [17] EYHERAMENDY, D.; ZIMMERMAN, T.. **Object-oriented finite elements II. A symbolic environment for automatic programming**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 132(3-4):277-304, 1996. 6.4
- [18] EYHERAMENDY, D.; ZIMMERMAN, T.. **Object-oriented finite elements III. Theory and application of automatic programming**.

- Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 154(1-2):41–68, 1998. 6.4
- [19] EYHERAMENDY, D.; ZIMMERMAN, T.. **Object-oriented finite elements IV. Symbolic derivations and automatic programming of nonlinear formulations.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190:2729–2751, 2001. 6.4
- [20] FALCÓN, G. A. S.. **Otimização geométrica de estruturas treliçadas.** Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1991. 7.1
- [21] FALCÓN, G. A. S.. **Uma família de algoritmos de ponto interior para projeto ótimo em engenharia.** Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1996. 7.1
- [22] FARFÁN, A. D.. **Aplicação da análise limite a problemas geotécnicos modelados como meios contínuos convencionais e meios de cosserat.** Tese de Doutorado, PUC, Rio de Janeiro, Brasil, 2000. B.7
- [23] FIGUEIREDO, M. P.. **Avaliação estatística de metodologia para determinação de de espectros de resposta de projeto uniformemente prováveis.** Dissertação de Mestrado, PUC, Rio de Janeiro, Brasil, 2004. 1.3
- [24] FRANGOPOL, D. M.; IMAI, K.. **Geometrically nonlinear finite element reliability analysis of structural systems. II: applications.** Computers and Structures, 77:693–609, 2000. 1.3
- [25] GALVÃO, A. D. S.. **Formulações não-lineares de elementos finitos para análise de sistemas estruturais metálicos reticulados planos.** Dissertação de Mestrado., UFOP, Ouro Preto, Brasil, 2000. (document), 2.2, 2.3
- [26] GALVÃO, A. D. S.. **Instabilidade estática e dinâmica de pórticos planos com ligações semi-rígidas.** Tese de Doutorado, PUC, Rio de Janeiro, Brasil, 2004. 2.2
- [27] GANO, S. E.. **Simulation-Based Design Using Variable Fidelity Optimization.** PhD thesis, University of Notre Dame, april 2005. 5.3, 5.3
- [28] GRANDHI, R. V.; WANG, L.. **Reliability-based structural optimization using improved two-point adaptive nonlinear approximations.** Finite Elem. Anal. Des., 29(1):35–48, 1998. 1.3

- [29] HAFTKA, R. T.; GÜRDAL, Z.. **Elements os Structural Optimization**. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 3rd ed. edition, 1992. 1.1, 3.1, 6.3.1
- [30] HASOFER, A. M.; LIND, N. C.. **Exact and invariant second–moment code format**. Journal of the Engineering Mechanics Division, 100:111–121, 1974. 4.3.2, B.9.1
- [31] HAUKAAS, T.. **Finite Element Reliability and Sensitivity Methods for Performance–Based Engineering**. PhD thesis, University of California at Berkeley, 2003. 4.4, 6.4, B.9
- [32] HAUKAAS, T.; KIUREGHIAN, A. D.. **Strategies for finding the design point in non–linear finite element reliability analysis**. Probabilistic Engineering Mechanics, 1:1–15, 2005. B.9
- [33] HERSKOVITS, J.. **A view on nonlinear optimization**. Structural Optimization, p. 71–117, 1995. B.4, B.5, B.6, B.8
- [34] HERSKOVITS, J. & SANTOS, G.. **On the computer implementation of feasible direction interior point algorithms for nonlinear optimization**. Structural Optimization, 14:165–172, 1997. B.8, B.8.1
- [35] HERNÁNDEZ, A. O. V.. **Metodologia de calibração de fatores parciais de segurança para projeto de linhas de ancoragem baseada em confiabilidade**. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2004. 1.3
- [36] HOLM, C. A.. **Reliability Analysis of Structural Systems Using Nonlinear Finite Element Methods**. PhD thesis, The University of Trondheim, 1990. 4.5.1
- [37] IMAI, K.; FRANGOPOL, D. M.. **Geometrically nonlinear finite element reliability analysis of structural systems. I: theory**. Computers and Structures, 77:677–691, 2000. 1.3, 2.3.1
- [38] MCKENNA, F.; FENVES, G. ; SCOTT, M.. **Open system for earthquake engineering simulation**. Pacific Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, CA, 2006. 6.4
- [39] DER KIUREGHIAN, A.; LIU, P.. **Structural reliability under incomplete probability information**. J. Eng. Mech., 112:85–104, 1986. 4.1.3
- [40] KLEIBER, M.; ANTÚNES, H.; HIEN, T. D. ; KOWALCZYK, P.. **Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics**. John Wiley & Sons, Inc., Chichester, 1997. 1.1, 3.1, 3.2

- [41] KLEIBER, M.; SIEMASZKO, A. ; STOCKI, R.. **Interactive stability-oriented reliability-based design optimization**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 168:243–253, 1999. (document), 1.3, 6.2
- [42] KUSCHEL, N.; RACKWITZ, R.. **Two basic problems in reliability-based structural optimization**. Mathematical Methods of Operations Research, 46:309–333, 1997. (document), 5.7.1, 5.7.1, 5.7.3, 5.2
- [43] LEE, T. W.; KWAK, B. M.. **A reliability-based optimal design using advanced first order second moment method**. Mechanics of Structures and Machines, 15(4):523–542, 1987–88. 1.1, 1.3
- [44] LIU, P.-L.; KIUREGHIAN, A. D.. **Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances**. Probabilistic Engineering Mechanics, 1(2):105–112, 1986. 4.1.3, 4.1.3
- [45] LIU, P.-L.; KIUREGHIAN, A. D.. **Finite-element reliability methods for geometrically nonlinear stochastic structures**. Report No. UCB/SEMM–89/05, Dept. of Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1989. 4.5.1
- [46] LIU, P.-L.; KIUREGHIAN, A. D.. **Optimization algorithms for structural reliability**. Structural Safety, 9:161–177, 1991. 4.5.1, B.9
- [47] MARTHA, L. F.; JUNIOR, E. P.. **An Object-Oriented Framework for Finite Element Programming**. In: PROCEEDINGS OF THE FIFTH WORLD CONGRESS ON COMPUTATIONAL MECHANICS, IACM, Vienna – Austria, 2002. ISBN 3-9501554-0-6. 6.4
- [48] MCGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H. ; ZIEMIAN, R. D.. **Matrix Structural Analysis**. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2000. 2.3.1
- [49] MELCHERS, R. E.. **Structural Reliability Analysis and Prediction**. John Wiley & Sons Ltd, Chichester, second edition, 1999. ISBN 0–471–98324 - 1. 4.1.3
- [50] MELO, A. M. C.. **Projeto Ótimo de Pórticos Planos de Concreto Armado**. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2000. 6.2
- [51] MODAK, S.; SOTELINO, E. D.. **An object-oriented programming framework for the parallel dynamic analysis of structures**. Computers and Structures, 80:77–84, 2002. 6.4

- [52] MÜLLER, A. L.. **Otimização de estruturas reticuladas considerando incertezas**. Dissertação de Mestrado, PUC, Rio de Janeiro, Brasil, 2003. 1.3
- [53] SCHITTKOWSKI, K.. **Nonlinear Programming**. 2006. 6.5.1, 6.5.2
- [54] NAKIB, R.. **Deterministic and reliability-based optimization of truss bridges**. *Computers and Structures*, 65:767–775, 1997. 1.3
- [55] NOWAK, A. S.; COLLINS, K. R.. **Reliability of Structures**. McGraw Hill, 2000. ISBN 0–07–048163–6. 4.1.1, A
- [56] OÑATE, E.; MATIAS, W. T.. **A critical displacement approach for predicting structural instability**. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 134:135–161, 1996. 2.7.2, 2.7.2, 2.7.2
- [57] MCKENNA, F.; FENVES, G. L.; FILIPPOU, F. C.; MAZZONI, S. ; SCOTT, M. H.. **OpenSees: Open system for earthquake engineering simulation**, <http://opensees.berkeley.edu>. Pacific Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, CA, 2007. 6.4
- [58] PARENTE, JR., E.. **Análise de sensibilidade e otimização de forma de estruturas geometricamente não-lineares**. Tese de Doutorado, PUC, Rio de Janeiro, Brasil, 2000. (document), 1.3, 2.5, 6.2, 6.1, 6.2, B.6, B.7, B.7.1, 1, B.8, B.8, B.10
- [59] PEREIRA, A.. **Projeto ótimo de pórticos planos com restrição à flambagem**. Dissertação de Mestrado, PUC, Rio de Janeiro, Brasil, agosto 2002. 1.3, 6.2
- [60] PINHEIRO, L.. **Análises não-lineares de sistemas estruturais metálicos rotulados e semi-rídos**. Dissertação de Mestrado, UFOP, Ouro Preto, Brasil, 2003. 2.7.1, 2.7.2
- [61] PINHEIRO, L.; SANTOS, M. N. ; SILVEIRA, R. A. M.. **Análise geometricamente não-linear de treliças 2D e 3D através do MEF**. In: XXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS (CILAMCE 2006), Belém, Pará – Brazil, 2006. 2.7.1, 2.7.1, 2.7.2, 2.7.2, 2.7.2
- [62] POWELL, G.; SIMONS, J.. **Improved iteration strategy for nonlinear structures**. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17:1455–1467, 1981. 2.7.1, 2.7.1

- [63] QU, X.; HAFTKA, R. T.. Reliability-based design optimization using probabilistic sufficiency factor. *Structural Multidisciplinary Optimization*, 27:314–325, 2004. 1.1, 1.3
- [64] RACKWITZ; FIESSLER, B.. Structural reliability under combined load sequences. *Computers and Structures*, 9:489–494, 1978. 4.3.2, B.9.1
- [65] RIHA, D.; THACKER, B.; HALL, D.; AUEL, T. ; PRITCHARD, S.. Capabilities and applications of probabilistic methods in finite element analysis. In: PROC. INT. SOC. SCIENCE AND APPLIED TECHNOLOGIES (ISSAT) CONF. ON RELIABILITY AND QUALITY IN DESIGN, Las Vegas, Nevada, August 11-13 1999. 1.3
- [66] RIHA, D.; THACKER, B.; MILLWATER, H.; WU, Y.-T. ; ENRIGHT, M.. Probabilistic engineering analysis using the nessus software. In: 41ST STRUCTURAL DYNAMICS AND MATERIALS CONFERENCE, PAPER 2000-1512, Atlanta, Georgia, April 2000. 1.3
- [67] ROCHA, G.. Estratégias de Incremento de Carga e de Iteração para Análise Não-Linear de Sistemas Estruturais. Dissertação de Mestrado, UFOP, Ouro Preto, Brasil, 2000. 2.2
- [68] ROJAS, P. A. M.. Otimização de pré-formas e matrizes em problemas bidimensionais de forjamento. Tese de Doutorado, PROMEC/UFRGS, Porto Alegre, Brasil, outubro 2003. (document), 1.1, 3.2, 3.3, 3.1
- [69] SAGRILO, L. V. S.. Análise de confiabilidade estrutural utilizando os métodos analíticos FORM e SORM. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, fevereiro 1994. 1.3, 4.4, 4.5.1
- [70] SAGRILO, L. V. S.. Apostila do curso de confiabilidade estrutural. UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2003. 4, 4.2, 4.3, 4.3.1, 4.3.2, A, A.1, A.2, A.2.1
- [71] SAMPAIO, R. A. C.. Espectro de resposta de projeto uniformemente provável para sistemas secundários inelásticos. Tese de Doutorado, PUC, Rio de Janeiro, Brasil, 2003. 1.3
- [72] HSIEN, S.-H.; MODAK, S. ; SOTELINO, E. D.. Object-oriented parallel programming tools for structural engineering applications. *Computing Systems in Engineering*, 6(6):533–548, 1995. 6.4
- [73] DE CARVALHO SOARES, R.; VENTURINI, W. S.. Apostila do curso de confiabilidade estrutural. São Paulo, Brasil, 2001. 4.4, 6.1.1

- [74] STOCKI, R.; KOLANEK, K.; JENDO, S. ; KLEIBER, M.. **Study on discrete optimization techniques in reliability-based optimization of truss structures.** Computers and Structures, 79:2235–2247, 2001. (document), 6.5.1, 6.5.1, 6.5.1, 6.5, 6.5.1, 6.5.2, 6.5.2, 6.5.2
- [75] STROUSTRUP, B.. **The C++ Programming Language.** Addison-Wesley, third edition, 1997. 6.4
- [76] TU, J.; CHOI, K.; ; PARK, Y.. **A new study on reliability-based design optimization.** J. Mech. Design, 121:557–564, december 1999. 1.1, 1.3, 5.3
- [77] VANDERPLAATS, G. N.. **Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: with Applications.** McGraw-Hill, Inc., New York, 1984. B.6
- [78] YANG, Y. B.; SHIEH, M. S.. **Solution method for nonlinear problems with multiple critical points.** American Institute of Aeronautics and Astronautics, 28(12):2110–2116, 1990. 2.5.2
- [79] YANG, Y. B.; KUO, S. R.. **Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures.** Prentice-Hall, New York, 1994. 2.2, 2.5.1, 2.5.2, 2.5.2, 2.5.2, 2.7.2
- [80] YANG, R.; GU, L.. **Experience with approximate reliability-based optimization methods.** Structural Multidisciplinary Optimization, 26:152–159, 2004. 1.3, 5.7.2, 5.7.2
- [81] YOUN, B. D.; CHOI, K. K. ; PARK, Y. H.. **Hybrid analysis method for reliability-based design optimization.** Journal of Mechanical Design, ASME, 125(2):221–232, 2003. 1.3
- [82] YOUN, B. D.; CHOI, K. K.. **An investigation of nonlinearity of reliability-based design optimization approaches.** Journal of Mechanical Design, 126:403–411, 2004. (document), 1.3, 5.3, 5.1, 5.3, 5.2, 5.3
- [83] YOUN, B. D.; CHOI, K. K. ; DU, L.. **Enriched performance measure approach (PMA+) for reliability-based design optimization.** AIAA Journal, 43(4):874–884, April 2005. 7.1
- [84] YOUN, B. D.; CHOI, K. K. ; DU, L.. **Adaptive probability analysis using an enhanced hybrid mean value (HMFV+) method.** Structural Multidisciplinary Optimization, 29(2):134–148, 2005. 7.1

- [85] ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, R.. **The Finite Element Method.** Butterworth–Heinemann, Oxford, Boston, 5th edition, 2000. ISBN 0–7506–5055–9. 2.2, 2.3.2
- [86] ZIMMERMAN, T.; EYHERAMENDY, D.. **Object-oriented finite elements I. Principles of symbolic derivations and automatic programming.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 132(3-4):259–276, 1996. 6.4

A

Variáveis Randômicas

Um variável randômica é definida pela sua função cumulativa de distribuição (CDF, do inglês *Cumulative Distribution Function*), F_X . A função densidade de probabilidade f_X , identificada por PDF (do inglês *Probability Density Function*) é a primeira derivada de F_X , ou seja [70, 55]:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (\text{A-1})$$

A expressão

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx \quad (\text{A-2})$$

indica a probabilidade da variável X assumir valores entre a e b . Qualquer $f_X(x)$ que satisfaça as seguintes condições pode ser considerada como uma PDF:

$$\begin{aligned} f_X(x) &\geq 0.0 \quad \text{para qualquer } x; \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx &= 1.0 \quad (\text{área unitária}) \text{ e}; \\ \int_a^b f_X(x)dx &= P(a \leq X \leq b) \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

A CDF $F_X(x)$ de X é definida da seguinte forma:

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(x)dx \quad (\text{A-4})$$

onde $F_X(a)$ significa a probabilidade da variável X assumir valores menores ou iguais a a . Uma função cumulativa de probabilidades deve satisfazer as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} F_X(-\infty) &= 0.0; \\ 0 &\leq F_X(x) \leq 1.0 \quad \text{e}; \\ F_X(\infty) &= 1.0 \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

A.1

Valores Característicos de uma Variável Randômica

O valor médio, ou a média, ou o valor esperado de uma variável randômica X é definido como:

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx \quad (\text{A-6})$$

onde $f_x(x)$ é a PDF de X definida anteriormente. Outro resultado interessante é o valor médio quadrático de X definido como:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x) dx \quad (\text{A-7})$$

A variância mede a dispersão dos valores da variável em torno da média e é definida como:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx - 2\mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx + \mu_X^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx \\ &= E(X^2) - \mu_X^2 \end{aligned} \quad (\text{A-8})$$

O desvio padrão de X é definido como a raiz quadrada da variância, i.e.,

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)} \quad (\text{A-9})$$

O coeficiente de variação de X é definido como a razão entre o desvio padrão e a média, ou seja,

$$\text{c.o.v.} = \delta_X = \frac{\sigma_x}{\mu_x} \quad (\text{A-10})$$

O coeficiente de variação mede, de forma adimensional (ao contrário da variância) a dispersão dos dados da variável randômica em torno da média. Coeficientes de variação baixos indicam que os valores da variável randômica estão distribuídos próximos a média, enquanto que valores altos indicam uma forte dispersão em torno da mesma [70].

A.2

Distribuições de Probabilidades

Qualquer função que satisfaça as condições dadas pela equação (A-3) pode ser usada como uma distribuição de probabilidades. O uso prático desta função depende da capacidade dela representar estatisticamente um determinado fenômeno que está sendo investigado. Porém, na literatura já existem várias funções que atendem às condições citadas anteriormente e que podem ser usadas na prática da engenharia [70]. A seguir são apresentadas diversas funções existentes na literatura e implementadas no presente trabalho.

A.2.1

Distribuição Normal ou Gaussiana

Uma variável X é dita normalmente distribuída ou simplesmente uma variável Gaussiana, se a sua PDF for da seguinte forma

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sigma} \varphi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \\ &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A-11})$$

onde φ é a PDF da função normal padrão de uma variável auxiliar $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$:

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{y^2}{2} \right) \quad (\text{A-12})$$

cuja média é igual a 0 e o desvio padrão igual a 1. A função cumulativa de probabilidades da distribuição $\varphi(y)$ é usualmente denotada por $\Phi(y)$, onde

$$\Phi(y) = F_Y(y) = P(Y \leq y) = \Phi(y) = \int_{-\infty}^y \varphi(y) dy \quad (\text{A-13})$$

A distribuição Gaussiana tem somente como parâmetros a média μ e o desvio padrão σ da variável randômica e é geralmente denotada por $N(\mu, \sigma)$. A sua função cumulativa só pode ser avaliada por integração numérica, ou usando tabelas disponíveis em livros de estatística [70]. Outras características desta distribuição são apresentadas a seguir:

- Restrições das variáveis e parâmetros

$$\sigma > 0 \quad (\text{A-14})$$

- CDF

$$F(x) = \Phi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \quad (\text{A-15})$$

- Inversa da CDF

$$x(F) = \mu + \sigma \Phi^{-1}(F) \quad (\text{A-16})$$

A.2.2

Distribuição Lognormal

Uma variável X tem uma distribuição lognormal quando estatisticamente $\ln(X)$ pode ser representado por uma distribuição normal. A CDF de uma variável lognormal é definida como:

$$f(x) = \frac{1}{\xi x \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x) - \lambda}{\xi} \right)^2 \right] \quad (\text{A-17})$$

onde λ é o valor esperado de $\ln(X)$, i.e. $\lambda = E[\ln(X)] = \mu_{\ln(X)}$, e ξ é o desvio padrão de $\ln(X)$, i.e. $\xi = \sqrt{\text{Var}(\ln(X))} = \sigma_{\ln(X)}$. λ e ξ se relacionam com a média e o desvio padrão de X através das seguintes relações

$$\xi^2 = \ln \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^2 \right] \quad (\text{A-18})$$

$$\lambda = \ln \mu - \frac{1}{2} \xi^2 \quad (\text{A-19})$$

– CDF

$$F(x) = \Phi \left(\frac{\ln(x) - \lambda}{\xi} \right) \quad (\text{A-20})$$

– Inversa da CDF

$$x(F) = \exp[\Phi^{-1}(F)\xi + \lambda] \quad (\text{A-21})$$

– Média

$$\mu = \exp(\lambda + \frac{1}{2}\xi^2) \quad (\text{A-22})$$

– Desvio padrão

$$\sigma = \exp(\lambda + \frac{1}{2}\xi^2) \sqrt{\exp(\xi^2) - 1} \quad (\text{A-23})$$

A.2.3

Distribuição Uniforme

– PDF

$$f(x) = \frac{1}{b - a} \quad (\text{A-24})$$

– Restrições das variáveis e parâmetros

$$a < x < b, \quad a < b \quad (\text{A-25})$$

– CDF

$$F(x) = \frac{x - a}{b - a} \quad (\text{A-26})$$

– Inversa da CDF

$$x(F) = Fb - Fa + a \quad (\text{A-27})$$

– Média

$$(a + b)/2 \quad (\text{A-28})$$

– Desvio padrão

$$\left(\sqrt{3}(b - a) \right) / 6 \quad (\text{A-29})$$

A.2.4

Distribuição Gamma

– Função Gamma

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \exp(-t) dt \quad (\text{A-30})$$

– PDF

$$f(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{k-1} \exp(-\lambda x)}{\Gamma(k)} \quad (\text{A-31})$$

– Restrições das variáveis e parâmetros

$$x > 0, \quad \lambda > 0, \quad k > 0 \quad (\text{A-32})$$

– CDF
$$F(x) = \frac{\Gamma(k, \lambda x)}{\Gamma(k)} \quad (\text{A-33})$$

– Média
$$k/\lambda \quad (\text{A-34})$$

– Desvio padrão
$$\sqrt{k}/\lambda \quad (\text{A-35})$$

A.2.5 Distribuição Beta

Beta $Bet(a, b, q, r)$

– PDF
$$f(x) = \frac{(x-a)^{q-1}(b-x)^{r-1}}{B(q, r)(b-a)^{q+r-1}} \quad (\text{A-36})$$

– Restrições das variáveis e parâmetros
$$a < x < b, \quad q > 0, \quad r > 0 \quad (\text{A-37})$$

– CDF
$$F(x) = \text{sem expressão fechada} \quad (\text{A-38})$$

– Inversa da CDF
$$x(F) = \text{sem expressão fechada} \quad (\text{A-39})$$

– Média
$$(ar + bq)/(q + r) \quad (\text{A-40})$$

– Desvio padrão
$$\frac{b-a}{q+r} \sqrt{\frac{qr}{q+r+1}} \quad (\text{A-41})$$

A.2.6 Distribuição Gumbel

Gumbel $Gum(u, \alpha)$

– PDF
$$f(x) = \alpha \exp[-\alpha(x-u) - \exp[-\alpha(x-u)]] \quad (\text{A-42})$$

– Restrições das variáveis e parâmetros
$$\alpha > 0 \quad (\text{A-43})$$

– CDF
$$F(x) = \exp[-\exp(-\alpha(x-u))] \quad (\text{A-44})$$

– Inversa da CDF
$$x(F) = \frac{\alpha u - \ln(-\ln(F))}{\alpha} \quad (\text{A-45})$$

– Média $u + \gamma/\alpha$ sendo $\gamma = 0.5772156649$ (A-46)

– Desvio padrão $\frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$ (A-47)

A.2.7

Distribuição Tipo I Mínimos

Tipo I Mínimos $Mínimos(u, \alpha)$

– PDF $f(x) = \alpha \exp[\alpha(x - u) - \exp(\alpha(x - u))]$ (A-48)

– Restrições das variáveis e parâmetros $\alpha > 0$ (A-49)

– CDF $F(x) = 1 - \exp(-\exp(\alpha(x - u)))$ (A-50)

– Inversa da CDF $x(F) = \frac{\alpha u + \ln(-\ln(1 - F))}{\alpha}$ (A-51)

– Média $u - \gamma/\alpha$ sendo $\gamma = 0.5772156649$ (A-52)

– Desvio padrão $\frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$ (A-53)

A.2.8

Distribuição Tipo II Máximos

Tipo II Máximos $Máximos(u, \alpha)$

– PDF $f(x) = \frac{k}{u} \left(\frac{u}{x}\right)^{k+1} \exp\left(-\left(\frac{u}{x}\right)^k\right)$ (A-54)

– Restrições das variáveis e parâmetros $x > 0, u > 0, k > 0$ (A-55)

– CDF $F(x) = \exp\left(-\left(\frac{u}{x}\right)^k\right)$ (A-56)

– Inversa da CDF $x(F) = u(-\ln(F))^{-1/k}$ (A-57)

– Média $u\Gamma(1 - 1/k)$ (A-58)

– Desvio padrão $u\sqrt{\Gamma(1 - 2/k) - \Gamma(1 - 1/k)^2}$ (A-59)

A.2.9

Distribuição Tipo III Mínimos

Tipo III Mínimos $Mínimos(e, u, k)$

– PDF

$$f(x) = \frac{k}{u-e} \left(\frac{x-e}{u-e} \right)^{k-1} \exp \left(- \left(\frac{x-e}{u-e} \right)^k \right) \quad (\text{A-60})$$

– Restrições das variáveis e parâmetros

$$x > e, \quad u > 0, \quad k > 0, \quad u \neq e \quad (\text{A-61})$$

– CDF

$$F(x) = 1 - \exp \left(- \left(\frac{x-e}{u-e} \right)^k \right) \quad (\text{A-62})$$

– Inversa da CDF

$$x(F) = (u-e) \left(\frac{e}{u-e} + (-\ln(1-F))^{1/k} \right) \quad (\text{A-63})$$

– Média

$$e + (u-e)\Gamma(1+1/k) \quad (\text{A-64})$$

– Desvio padrão

$$(u-e)\sqrt{\Gamma(1+2/k) - \Gamma(1+1/k)^2} \quad (\text{A-65})$$

A.2.10

Distribuição Weibull

Weibull $Wbl(u, k)$

– PDF

$$f(x) = \frac{k}{u} \left(\frac{x}{u} \right)^{k-1} \exp \left(- \left(\frac{x}{u} \right)^k \right) \quad (\text{A-66})$$

– Restrições das variáveis e parâmetros

$$x > 0, \quad k > 0, \quad k > 0 \quad (\text{A-67})$$

– CDF

$$F(x) = 1 - \exp \left(- \left(\frac{x}{u} \right)^k \right) \quad (\text{A-68})$$

– Inversa da CDF

$$x(F) = u (-\ln(1-F))^{1/k} \quad (\text{A-69})$$

– Média

$$u\Gamma(1+1/k) \quad (\text{A-70})$$

– Desvio padrão

$$u\sqrt{\Gamma(1+2/k) - \Gamma(1+1/k)^2} \quad (\text{A-71})$$

B

Algoritmos de Otimização

São apresentados a seguir os conceitos de Programação Matemática (PM) necessários à compreensão do processo de otimização, assim como uma descrição dos algoritmos de otimização utilizados.

B.1

Formulação do Problema

Em problemas típicos de engenharia, podem ser obtidas várias, ou possivelmente infinitas, soluções. Em um problema de otimização deseja-se obter um *projeto ótimo*, maximizando ou minimizando uma função a qual denominamos *função objetivo*. Isto deve ser realizado através da determinação dos parâmetros que definem o sistema. Estes parâmetros são chamados de *variáveis de projeto*. Na maioria dos problemas encontraremos *restrições* impostas para que o *projeto* seja *admissível* ou *viável*, devido às leis físicas da natureza, leis políticas, limitações de orçamento, etc.

A PM é a disciplina que estuda a minimização de funções em problemas com ou sem restrições. Matematicamente, estes problemas são enunciados como:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(\mathbf{b}) && \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \\ &\text{sujeito a} && c_i(\mathbf{b}) = 0 && i = 1 \dots l \\ & && c_i(\mathbf{b}) \leq 0 && i = l + 1 \dots m \\ & && b_i^l \leq b_i \leq b_i^u && i = 1 \dots n \end{aligned} \tag{B-1}$$

onde \mathbf{b} é um ponto do \mathbb{R}^n sobre o qual são impostos os limites mínimos e máximos (restrições laterais), $f(\mathbf{b})$ é a função a ser minimizada e as funções $c_i(\mathbf{b})$ representam as restrições de igualdade e desigualdade. Assume-se que tanto a função objetivo quanto as restrições são funções contínuas no \mathbb{R}^n . Em geral, elas são funções não-lineares e implícitas das variáveis (\mathbf{b}) que definem o problema.

Um ponto que satisfaça todas as restrições é denominado um *ponto viável* e o conjunto de todos os pontos que satisfaçam todas as restrições é conhecido como *região viável*. Uma restrição de desigualdade define uma fronteira que divide o \mathbb{R}^n em uma região viável e outra inviável. Quando um ponto está

sobre esta fronteira, a restrição é dita *ativa*; quando um ponto está no interior da região viável, a restrição está *inativa* e, quando um ponto está fora desta região, a restrição está *violada*.

B.2

Condições de Ótimo

A solução \mathbf{b}^* do problema enunciado em (B-1) tem que necessariamente atender as condições de Kuhn-Tucker enunciadas por:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{b}} \mathcal{L}(\mathbf{b}^*, \boldsymbol{\kappa}^*) &= 0 \\ c_i(\mathbf{b}^*) &= 0 & i = 1 \dots l \\ c_i(\mathbf{b}^*) &\leq 0 & i = l + 1 \dots m \\ \kappa_i^* &\geq 0 & i = l + 1 \dots m \\ \kappa_i^* c_i(\mathbf{b}^*) &= 0 & \forall i \end{aligned} \quad (\text{B-2})$$

onde $\mathcal{L}(\mathbf{b}^*, \boldsymbol{\kappa}^*)$ é a função Lagrangeana dada pela expressão a seguir:

$$\mathcal{L}(\mathbf{b}^*, \boldsymbol{\kappa}^*) = f(\mathbf{b}^*) + \sum_{i=1}^l \kappa_i^* c_i(\mathbf{b}^*) \quad (\text{B-3})$$

onde κ_i^* são os multiplicadores de Lagrange associados às restrições no ponto \mathbf{b}^* , solução do problema.

As condições de Kuhn-Tucker são também conhecidas como condições de primeira ordem. Para determinadas classes de problemas de programação matemática as condições de Kuhn-Tucker são suficientes para a determinação de uma solução ótima global. São incluídos nessas classes os problemas de programação convexa, tais como os de programação linear e quadrática. O problema de programação convexa é caracterizado por função objetivo e restrições convexas.

Porém, se o problema não é de programação convexa, o que é mais comum, as condições de primeira ordem não são mais suficientes para a determinação da solução ótima global, devendo ser verificada a condição de segunda ordem, expressa na equação (B-4) a seguir

$$\mathbf{d}^t \mathbf{W}^* \mathbf{d} \geq 0, \quad \forall \mathbf{d} \neq 0 \quad \text{tal que} \quad \mathbf{d}^t \mathbf{a}_i^* = 0 \quad (\text{B-4})$$

onde $\mathbf{a}_i^* = \nabla c_i(\mathbf{b}^*)$ para todas as restrições ativas e $\mathbf{W}^* = \nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{b}^*)$ é a Hessiana da função Lagrangeana. O que significa que \mathbf{W}^* em \mathbf{b}^* é positiva definida no ponto ótimo para qualquer direção estacionária \mathbf{d} .

B.3

Tipos de Otimização	$f(\mathbf{b})$	$c_i(\mathbf{b})$
Programação Linear	linear	linear
Programação Quadrática	quadrática	linear
Programação Não-Linear	linear / não-linear	não-linear / linear

Tabela B.1: Divisão dos problemas de Programação Matemática.

Forma Geral dos Algoritmos de Otimização

Para resolver um problema de otimização, além dos algoritmos ditos evolucionários, existem diversos algoritmos de programação matemática que são definidos de acordo com as características da função-objetivo e das restrições. Assim, os problemas de otimização podem se dividir em diferentes formas, como mostra a tabela (B.1).

Algoritmos de otimização para problema de programação linear e programação quadrática têm solução em um número finito de passos, já os algoritmos de programação não-linear podem não ter solução em um número finito de passos, mas espera-se que a sequência gerada convirja (no limite) para um mínimo local. Portanto, um problema adicional no processo de otimização ocorre quando a função objetivo e as restrições são funções não-lineares do vetor de variáveis de projeto, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Os algoritmos de programação não-linear, restrita e irrestrita, são procedimentos iterativos em que novos pontos \mathbf{b} são gerados a partir do ponto corrente \mathbf{b}_0 através da expressão:

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + t\mathbf{d} \quad (\text{B-5})$$

Assim, os algoritmos podem ser divididos em duas etapas principais: a primeira etapa é a determinação da direção de busca \mathbf{d} e a segunda é a avaliação do parâmetro escalar t , que representa o tamanho do passo a ser dado ao longo da direção de busca. A partir da expressão (B-5) diversos algoritmos podem ser construídos utilizando diferentes técnicas para a determinação da direção de busca e do tamanho do passo.

Os algoritmos de PM podem ser classificados de acordo com a ordem da derivação da função objetivo e das restrições utilizadas para a determinação da direção de busca. Desta forma, um algoritmo é dito de primeira ordem se utilizar apenas os gradientes da função objetivo e das restrições para calcular a direção de busca. Por outro lado, se o algoritmo utiliza informações sobre as Hessianas destas funções, então ele é dito de segunda ordem.

B.4

Método de Newton para Problemas de Otimização sem Restrição

O método de Newton utiliza a informação de segunda ordem da função a otimizar. Assim, a sua convergência é quadrática. Com tal propósito a função $f(\mathbf{b})$ é expandida até a segunda ordem, ou seja, a expansão de Taylor em torno do ponto \mathbf{b}_0 será:

$$f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{b}_0) + \nabla f(\mathbf{b}_0)(\mathbf{b} - \mathbf{b}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{b}_0)^t \nabla^2 f(\mathbf{b}_0)(\mathbf{b} - \mathbf{b}_0) \quad (\text{B-6})$$

se

$$\mathbf{d} = \Delta \mathbf{b} = (\mathbf{b} - \mathbf{b}_0) \rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{d} + \mathbf{b}_0 \quad (\text{B-7})$$

e

$$\mathbf{g} = \nabla f(\mathbf{b}_0) \quad \text{e} \quad \mathbf{H} = \nabla^2 f(\mathbf{b}_0) \quad (\text{B-8})$$

Substituindo-se (B-7) e (B-8) em (B-6), tem-se:

$$f(\mathbf{d} + \mathbf{b}_0) = f(\mathbf{b}_0) + \mathbf{d}^t \mathbf{g} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^t \mathbf{H} \mathbf{d} \quad (\text{B-9})$$

onde \mathbf{d} é o incremento de \mathbf{b}_0 , \mathbf{g} é vetor gradiente de f e \mathbf{H} , uma matriz simétrica positiva definida, é a hessiana da função f no ponto \mathbf{b}_0 . A equação (B-9) é uma equação quadrática cuja variável é \mathbf{d} . Portanto, o algoritmo de otimização procura determinar um \mathbf{d} tal que $f(\mathbf{d} + \mathbf{b}_0) < f(\mathbf{b}_0)$ em cada passo, ou seja, uma direção de decréscimo em f , assim:

$$\min f(\mathbf{d} + \mathbf{b}_0) = \min(\mathbf{d}^t \mathbf{g} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^t \mathbf{H} \mathbf{d}) \quad (\text{B-10})$$

Escrevendo a condição de otimalidade de (B-10) ($\nabla_{\mathbf{d}} f(\mathbf{d} + \mathbf{b}_0) = 0$), obtém-se:

$$\mathbf{d} = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{g} \quad (\text{B-11})$$

Assim, (B-11) fornece um mínimo global único para a função aproximadora de f . Este método necessita da montagem da matriz \mathbf{H} e conseqüentemente a solução do sistema da eq. (B-11), o que pode demandar um grande esforço computacional, sobretudo em problemas com grande número de variáveis.

Os métodos Quase-Newton surgiram para resolver esse problema sem perder as boas propriedades de convergência do método de Newton. Nesses métodos, uma aproximação da Hessiana (ou de sua inversa) é construída a partir dos valores dos gradientes ao longo das iterações. Esses métodos, dos quais o BFGS (Broyden—Fletcher—Goldfarb—Shanno) é o mais popular, possuem convergência superlinear e são amplamente utilizados em problemas de otimização [33].

B.5

Busca Linear

A busca linear é um procedimento adotado tanto nos algoritmos de problemas sem restrição como nos de problemas com restrição. Após a determinação da direção de busca \mathbf{d} é necessário calcular o tamanho do passo a ser dado nessa direção, a fim de se obter o novo vetor das variáveis de projeto em (B-5). O tamanho do passo é calculado fazendo-se uma minimização da função unidimensional p definida através da expressão:

$$p(t) = f(\mathbf{b}_0 + t\mathbf{d}) \quad (\text{B-12})$$

A partir desta definição, pode-se verificar que:

$$p(0) = f(\mathbf{b}_0) \quad (\text{B-13})$$

e

$$p'(0) = \frac{f(\mathbf{b})^t}{\partial \mathbf{b}} \frac{df(\mathbf{b})}{dt} \Big|_{t=0} \quad (\text{B-14})$$

onde p' indica a derivada em relação à t .

A busca linear pode ser exata ou aproximada, dependendo do método utilizado para a minimização. A busca aproximada é uma forma mais moderna, na qual o objetivo é determinar t de forma que f apresente um certo nível de decréscimo, segundo um critério preestabelecido, como:

$$p(t) \leq f(\mathbf{b}_0) + t\gamma \mathbf{d}^t \mathbf{g} \quad , \quad \gamma \in (0, 1) \quad (\text{B-15})$$

De acordo com esta equação, o parâmetro γ controla o tamanho do passo. Assim, um γ pequeno permite a utilização de passos maiores e a utilização de um γ grande força a utilização de passos pequenos.

Uma forma bastante popular de busca linear é fazer uma aproximação quadrática de p e calcular t como o mínimo desta aproximação, verificando se a equação (B-15) é satisfeita. Se isto não ocorrer, então a aproximação é atualizada utilizando o novo ponto e o processo é repetido. Uma forma ainda mais simples é o método de Armijo [33, 7], no qual t é igual ao primeiro número da seqüência $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots\}$, $\alpha \in (0; 1)$, para o qual $p(t)$ satisfaz a condição (B-15).

B.6

Programação Quadrática

A Programação Quadrática (PQ) tem como objetivo determinar o vetor solução \mathbf{b}^* do problema colocado na seguinte forma [33, 7, 77]:

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar} && \mathbf{g}^t \mathbf{b} + \frac{1}{2} \mathbf{b}^t \mathbf{H} \mathbf{b} \\
& \text{sujeito a} && \mathbf{a}_i^t \mathbf{b} = b_i \quad i = 1 \dots l \\
& && \mathbf{a}_i^t \mathbf{b} \leq b_i \quad i = l + 1 \dots m
\end{aligned} \tag{B-16}$$

onde \mathbf{a} é uma matriz que contém os coeficientes dos gradientes das restrições, \mathbf{b} é o vetor dos termos independentes das restrições.

Sendo \mathbf{H} uma matriz positiva definida, o problema quadrático é convexo e pode-se garantir a existência de um único mínimo local.

A solução deste problema pode ser obtida em três etapas bem definidas (Eboli [13] e Parente [58]):

1. As l restrições de igualdade são eliminadas do problema diminuindo-se o número das variáveis independentes para $n - l$, obtendo-se um problema de programação quadrática (reduzida), chamado problema padrão de PQ, só com as restrições de desigualdade.
2. O problema quadrático reduzido é transformado em um Problema Linear Complementar (LCP), que pode ser resolvido através de métodos de pivoteamento como o de Lemke.
3. Recupera-se a solução para o espaço original com o cálculo das variáveis eliminadas na primeira etapa, obtendo-se os valores de \mathbf{b} e $\boldsymbol{\kappa}$.

B.7

Algoritmo de Han-Powell - Programação Quadrática Sequencial

O algoritmo de otimização de Han-Powell proposto por Han em 1976 e 1977 e por Powell em 1978 [13], foi implementado e aplicado a problemas de Engenharia Estrutural no DEC/PUC-Rio por Eboli [13], Parente [58] e Farfán [22]. Este algoritmo utiliza a técnica de Programação Quadrática Sequencial (SQP) através da resolução de um subproblema quadrático (PQ).

O método de SQP pode ser considerado como o resultado da aplicação do método de Newton à minimização de uma aproximação quadrática da função Lagrangeana do problema. Este método fornece a cada iteração os vetores \mathbf{d} (correção de \mathbf{b}) e $\Delta \boldsymbol{\kappa}$ (correção dos multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\kappa}$), os quais atualizados são aproximadores da solução \mathbf{b}^* e $\boldsymbol{\kappa}^*$. Este fato pode ser demonstrado considerando o problema:

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar} && f(\mathbf{b}) \\
& \text{sujeito a} && c_i(\mathbf{b}) = 0
\end{aligned} \tag{B-17}$$

cujas função Lagrangeana é dada por:

$$\mathcal{L}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\kappa}) = f(\mathbf{b}) + \sum_i \kappa_i c_i(\mathbf{b}) \tag{B-18}$$

Desenvolvendo $\nabla\mathcal{L}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\kappa})$ em séries de Taylor em torno de $(\mathbf{b}^k, \boldsymbol{\kappa}^k)$ até a primeira ordem, obtém-se

$$\begin{aligned} \nabla\mathcal{L}(\mathbf{b}^k + \mathbf{d}^{k+1}, \boldsymbol{\kappa}^k + \Delta\boldsymbol{\kappa}^{k+1}) = & \nabla\mathcal{L}(\mathbf{b}^k, \boldsymbol{\kappa}^k) + \dots \\ & \dots + [\nabla^2\mathcal{L}(\mathbf{b}^k, \boldsymbol{\kappa}^k)] \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{k+1} \\ \Delta\boldsymbol{\kappa}^{k+1} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B-19})$$

Considerando $\mathbf{d}^{k+1} = \mathbf{b}^{k+1} - \mathbf{b}^k$ e $\Delta\boldsymbol{\kappa}^{k+1} = \boldsymbol{\kappa}^{k+1} - \boldsymbol{\kappa}^k$ e aplicando a condição de estacionariedade a (B-19) no ponto $(\mathbf{b}^k + \mathbf{d}^{k+1}, \boldsymbol{\kappa}^k + \Delta\boldsymbol{\kappa}^{k+1})$, resulta:

$$[\nabla^2\mathcal{L}(\mathbf{b}^k, \boldsymbol{\kappa}^k)] \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{k+1} \\ \Delta\boldsymbol{\kappa}^{k+1} \end{Bmatrix} = -\nabla\mathcal{L}(\mathbf{b}^k, \boldsymbol{\kappa}^k) \quad (\text{B-20})$$

ou, expresso matricialmente, como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}^k & \mathbf{A}^{k^t} \\ \mathbf{A}^k & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{k+1} \\ \Delta\boldsymbol{\kappa}^{k+1} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \mathbf{g}^k + \mathbf{A}^k \boldsymbol{\kappa}^k \\ \mathbf{c}^k \end{Bmatrix} \quad (\text{B-21})$$

Substituindo $\boldsymbol{\kappa}^{k+1}$ por $\boldsymbol{\kappa}^k + \Delta\boldsymbol{\kappa}^{k+1}$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}^k & \mathbf{A}^{k^t} \\ \mathbf{A}^k & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{k+1} \\ \boldsymbol{\kappa}^{k+1} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \mathbf{g}^k \\ \mathbf{c}^k \end{Bmatrix} \quad (\text{B-22})$$

onde, \mathbf{A}^k é a matriz dos gradientes das restrições, \mathbf{W}^k é a Hessiana da Lagrangeana, e \mathbf{g}^k é o gradiente de $f(\mathbf{b})$ sendo todos avaliados no ponto \mathbf{b}^k . A solução de (B-22) equivale à solução do subproblema de PQ [13]:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \mathbf{g}^{k^t} \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^t \mathbf{W}^k \mathbf{d} \\ & \text{sujeito a} \quad \mathbf{c}^k + \mathbf{A}^{k^t} \mathbf{d} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B-23})$$

Ou seja, cada iteração k da solução do problema original é aproximada pela solução do PQ obtido pela linearização das restrições e pela expansão quadrática de f em torno de \mathbf{b}_0 .

Em problemas em que todas as restrições são de igualdade, a direção de busca e os multiplicadores de Lagrange podem ser obtidos pela solução do sistema de equações lineares gerado pelo método de Newton aplicado a Lagrangeana do problema, como mostrado em (B-22).

Para considerar o caso de restrições de desigualdade, pode-se resolver o problema geral de PM da seguinte forma [13]:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad f(\mathbf{b}) \\ & \text{sujeito a} \quad c_i(\mathbf{b}) = 0 \quad i = 1 \dots l \\ & \quad \quad \quad c_i(\mathbf{b}) \leq 0 \quad i = l + 1 \dots m \end{aligned} \quad (\text{B-24})$$

definindo uma direção de busca \mathbf{d} e uma nova estimativa dos multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\kappa}$ através da solução do PQ:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \mathbf{g}^{k^t} \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^t \mathbf{W}^k \mathbf{d} \\ &\text{sujeito a} \quad c_i^k + \mathbf{a}_i^{k^t} \mathbf{d} = 0 \quad i = 1 \dots l \\ &\quad \quad \quad c_i^k + \mathbf{a}_i^{k^t} \mathbf{d} \leq 0 \quad i = l + 1 \dots m \end{aligned} \quad (\text{B-25})$$

cujo método de solução foi visto na seção anterior.

B.7.1

Etapas do Algoritmo Não-Linear Han-Powell (SQP)

As etapas que formam o algoritmo Han-Powell são [58]:

1. Dado um ponto inicial \mathbf{b}_0 e uma aproximação da Hessiana da função Lagrangeana \mathbf{B}_0 , fazer $k = 0$. \mathbf{B}_0 é dada pela seguinte função:

$$\mathbf{B}_0 = b_0 \mathbf{I} \quad (\text{B-26})$$

onde b_0 é um parâmetro definido pelo usuário do algoritmo. O número de reinícios da matriz \mathbf{B} é controlado pelo parâmetro n_r definido pelo usuário. Segundo Parente [58], o reinício de \mathbf{B} serve para descartar a influência de pontos muito distantes do ponto corrente.

2. Para $k = k + 1$, montar e resolver o problema de programação quadrática definido pela equação (B-25) determinando os vetores \mathbf{d}^k e κ^k :

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \mathbf{g}^{k-1^t} \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^t \mathbf{B}^{k-1} \mathbf{d} \quad \mathbf{d} \in \Re^n \\ &\text{sujeito a} \quad c_i^{k-1} + \mathbf{a}_i^{k-1^t} \mathbf{d} = 0 \quad i = 1 \dots l \\ &\quad \quad \quad c_i^{k-1} + \mathbf{a}_i^{k-1^t} \mathbf{d} \leq 0 \quad i = l + 1 \dots m \end{aligned} \quad (\text{B-27})$$

onde c_i^{k-1} é o vetor com as restrições, $\mathbf{a}_i^{k-1^t}$ é uma matriz com o gradiente das restrições e \mathbf{B}^{k-1} é uma aproximação da Hessiana no ponto \mathbf{b}^{k-1} .

3. Verificar os critérios de convergência do algoritmo:

$$\begin{cases} |\mathbf{g}^{k-1^t} \mathbf{d}^k| \leq tol_1 \\ \max(c_i^k) \leq tol_2 \end{cases} \quad (\text{B-28})$$

onde o primeiro critério representa a variação da função objetivo na direção \mathbf{d}^k e o segundo critério verifica explicitamente o valor da restrição mais violada.

Verificar também os critérios de parada tais como: número de avaliações da função objetivo e número de iterações.

4. Se os critérios de convergência e/ou os de parada não são atendidos, faz-se então uma busca linear unidimensional para determinar o tamanho do passo t^k , na direção \mathbf{d}^k de forma que o novo estimador da solução

$\mathbf{b}^k = \mathbf{b}^{k-1} + t^k \mathbf{d}^k$ seja um ponto que contribua para o decréscimo da função objetivo. A busca é feita sobre a função de penalidade (p), construída no intuito de impor um alto custo à violação das restrições. Esta função é definida pela expressão:

$$p(t) = p(\mathbf{b} + t\mathbf{d}) = f(\mathbf{b}) + \sum_{i=1}^l r_i |c_i(\mathbf{b})| + \sum_{i=l+1}^m r_i \max [c_i(\mathbf{b}), 0] \quad (\text{B-29})$$

onde os r_i são os fatores de penalidades. A busca é aproximada, isto é a solução t^* não é o mínimo de $p(t)$, mas atende a um certo decréscimo pré-estipulado em $p(t)$ considerado satisfatório. O coeficiente de decréscimo da função é dado pelo parâmetro γ definido pelo usuário.

5. Atualização da matriz \mathbf{B}^k do subproblema quadrático através do método BFGS.
6. Retorno à etapa 2.

B.8

Método dos Pontos Interiores

O algoritmo de Pontos Interiores (IP), desenvolvido por Herskovitz [33], foi implementado e aplicado a problemas de Engenharia Estrutural no DEC/PUC-Rio por Parente [58].

O algoritmo utilizado neste trabalho baseia-se na aplicação do método de Newton para a solução do sistema de equações não-lineares obtidas a partir da aplicação das condições de Kuhn-Tucker do problema de otimização [33]. Neste trabalho, apenas o algoritmo para restrições de desigualdade será discutido, uma vez que os problemas de projeto ótimo a serem resolvidos não possuem restrições de igualdade. No entanto, as mesmas idéias aqui apresentadas também são válidas para os problemas que possuem simultaneamente restrições de igualdade e de desigualdade e podem ser vistas em mais detalhes em (Herskovitz [33]; Herskovitz & Santos [34]).

O método de Pontos Interiores tem como característica gerar uma sequência de pontos no interior da região viável que converge para a solução do problema. Outra propriedade importante deste algoritmo é que cada um dos pontos intermediários possui valores decrescentes da função objetivo, ou seja, se por algum motivo a convergência não for alcançada o ponto final é sempre viável e melhor que os anteriores.

Considere o problema de otimização:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(\mathbf{b}) \\ &\text{sujeito a } c_i(\mathbf{b}) \leq 0 \quad i = 1 \dots m \end{aligned} \quad (\text{B-30})$$

cuja condições de Kuhn-Tucker são:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{b}) + \sum_{i=1}^m \kappa_i \mathbf{a}_i &= 0 \\ \kappa_i^* c_i(\mathbf{b}^*) &= 0 \\ c_i(\mathbf{b}^*) &\leq 0 \\ \kappa_i^* &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{B-31})$$

Sendo \mathbf{A} a matriz dos gradientes das restrições e \mathbf{C} uma matriz diagonal contendo os valores das restrições, as duas primeiras equações podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} + \mathbf{A}^t \boldsymbol{\kappa} &= 0 \\ \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B-32})$$

Aplicando o método de Newton para resolver o problema acima, obtém-se o sistema:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{A}^t \\ \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{A} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_0 \\ \boldsymbol{\kappa}_0 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{g} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{B-33})$$

Na equação acima, $\boldsymbol{\Lambda}$ é uma matriz diagonal para a qual $\Lambda_{ii} = \kappa_i$, \mathbf{d}_0 é a direção de busca e κ_0 é a estimativa dos multiplicadores de Lagrange. Pode-se demonstrar que \mathbf{d}_0 é uma direção de decréscimo de f e que $\mathbf{d}_0 = 0$ se \mathbf{b} for um ponto estacionário [58].

A direção de busca fornecida por (B-33) nem sempre é uma direção viável. Expandindo-se uma equação da parte inferior do sistema (B-33), chega-se a:

$$\kappa_i \mathbf{a}_i^t \mathbf{d}_0 + c_i \kappa_{0i} = 0 \quad (\text{B-34})$$

Esta equação implica que $\mathbf{a}_i^t \mathbf{d}_0 = 0$ para todo i tal que $c_i = 0$. Geometricamente, isto significa que \mathbf{d}_0 é tangente às restrições ativas, indicando que a direção aponta para fora da região viável.

Uma solução para evitar este efeito é adicionar uma constante negativa do lado direito da equação acima:

$$\kappa_i \mathbf{a}_i^t \mathbf{d} + c_i \bar{\kappa}_i = -\rho \kappa_i \quad (\text{B-35})$$

onde $\bar{\kappa}_i$ é a nova estimativa de κ_i .

Este procedimento faz com que a direção original seja defletida, de um valor proporcional a ρ , para o interior da região viável. Como a deflexão é proporcional a ρ e \mathbf{d}_0 é uma direção de decréscimo de f , é possível encontrar limites em ρ para que \mathbf{d} também seja uma direção de decréscimo. Este objetivo pode ser atingido impondo-se que:

$$\mathbf{g}^t \mathbf{d} \leq k_a \mathbf{g}^t \mathbf{d}_0 \quad (\text{B-36})$$

para $k_a \in (0; 1)$. Em geral, a taxa de decréscimo de f ao longo de \mathbf{d} é menor que ao longo de \mathbf{d}_0 . No entanto, este é o preço a ser pago para se obter uma direção de decréscimo viável.

Considerando o sistema auxiliar:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{A}^t \\ \Lambda \mathbf{A} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \boldsymbol{\kappa}_1 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{g} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} \quad (\text{B-37})$$

é fácil mostrar que:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 + \rho \mathbf{d}_1 \quad (\text{B-38})$$

e

$$\bar{\boldsymbol{\kappa}} = \boldsymbol{\kappa}_0 + \rho \boldsymbol{\kappa}_1 \quad (\text{B-39})$$

Substituindo (B-38) em (B-36) chega-se a:

$$\rho \leq (k_a - 1) \frac{\mathbf{g}^t \mathbf{d}_0}{\mathbf{g}^t \mathbf{d}_1} \quad (\text{B-40})$$

Definida a direção de busca \mathbf{d} , é necessário realizar uma busca linear restrita ao longo dessa direção, de forma a garantir que o ponto gerado esteja no interior da região viável. Além disso, é necessário atualizar os valores dos multiplicadores de Lagrange de maneira a assegurar a convergência para a solução correta.

B.8.1

Etapas do Algoritmo de Pontos Interiores (IP)

O algoritmo de Pontos Interiores para problemas de restrições de desigualdade necessita de um ponto inicial viável \mathbf{b}_0 , uma estimativa para os multiplicadores de Lagrange de forma que $\kappa_i > 0$ e uma matriz \mathbf{B} simétrica e positiva definida, que é uma aproximação de \mathbf{W} . O algoritmo pode ser dividido nos seguintes passos [34]:

1. Obter a direção de busca \mathbf{d} :

- (a) Determinar os vetores $(\mathbf{d}_0, \boldsymbol{\kappa}_0)$ através da solução do sistema linear definido em (B-33).
- (b) Verificar o critério de convergência:

$$\|\mathbf{d}\| \leq tol_3 \quad (\text{B-41})$$

- (c) Determinar os vetores $(\mathbf{d}_1, \boldsymbol{\kappa}_1)$ através da solução do sistema linear definido em (B-37).

(d) Calcular o valor de ρ :

$$\begin{cases} \text{se } \mathbf{g}^t \mathbf{d}_1 > 0, \text{ então} & \rho = \min[k_f \|\mathbf{d}_0\|^2, (k_a - 1) \mathbf{g}^t \mathbf{d}_0 / \mathbf{g}^t \mathbf{d}_1] \\ \text{se } \mathbf{g}^t \mathbf{d}_1 \leq 0, \text{ então} & \rho = k_f \|\mathbf{d}_0\|^2 \end{cases} \quad (\text{B-42})$$

sendo $k_f > 0$.

(e) Calcular a direção de busca \mathbf{d} :

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 + \rho \mathbf{d}_1 \quad (\text{B-43})$$

e

$$\bar{\kappa} = \kappa_0 + \rho \kappa_1 \quad (\text{B-44})$$

2. Fazer uma busca linear sobre \mathbf{d} , determinando o tamanho do passo t que satisfaça um critério sobre o decréscimo da função objetivo e para o qual:

$$\begin{cases} c_i(\mathbf{b} + t\mathbf{d}) \leq 0, & \text{se } \bar{\kappa}_i \geq 0 \\ c_i(\mathbf{b} + t\mathbf{d}) \leq c_i(\mathbf{b}), & \bar{\kappa}_i < 0 \end{cases} \quad (\text{B-45})$$

e o novo ponto \mathbf{b} :

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + t\mathbf{d} \quad (\text{B-46})$$

3. Atualizar a matriz \mathbf{B} , que é uma aproximação da Hessiana da função Lagrangeana, através do método BFGS.
4. Definir uma nova estimativa para os multiplicadores de Lagrange:

$$\kappa_i = \max[\kappa_{0i}, k_e \|\mathbf{d}_0\|^2] \quad (\text{B-47})$$

sendo $k_e > 0$.

5. Fazer \mathbf{b} igual a \mathbf{b}_0 e retornar ao passo 1.

A aproximação inicial e o reinício da Hessiana da função Lagrangeana são controlados pelos mesmos parâmetros utilizados pelo algoritmo de Programação Quadrática Sequencial.

B.9

Algoritmos de Otimização para Análise de Confiabilidade

Vários algoritmos de otimização, além dos já vistos SQP e IP, podem ser usados na solução do problema de confiabilidade estrutural (apresentado no capítulo 4). O esforço principal nos métodos de análise de confiabilidade está em achar o ponto de distância mínima da superfície de falha à origem. O mesmo é formulado como um problema de otimização restringida e pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && F(\mathbf{u}) \\ &\text{sujeito a} && G(\mathbf{u}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B-48})$$

onde $F(\mathbf{u}) = 1/2\mathbf{u}^T\mathbf{u}$ é a função objetivo e $G(\mathbf{u})$ é a função de estado limite no espaço normal padrão. Assume-se que a restrição $G(\mathbf{u}) = 0$ é contínua e diferenciável.

Em Liu & Der Kiureghian [46], Haukaas [31], Haukaas & Der Kiureghian [32] este assunto é abordado em detalhes.

B.9.1

Algoritmo (Hasofer–Lind–Rackwitz–Fiessler) HLRF

Este método, originalmente proposto por Hasofer e Lind [30] para análise de confiabilidade de segundo-momento e depois estendido por Rackwitz e Fiessler [64] para incluir informação de distribuição, é atualmente o método mais usado para resolver o problema de otimização em confiabilidade estrutural.

A equação (B-5) é reescrita aqui para o problema enunciado na eq. (B-48):

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + t_k \mathbf{d}_k \quad (\text{B-49})$$

onde $t_k = 1$ e \mathbf{d}_k é calculado da seguinte forma:

$$\mathbf{d}_k = \frac{1}{|\nabla G(\mathbf{u}_k)|^2} [\nabla G(\mathbf{u}_k)^T \mathbf{u}_k - G(\mathbf{u}_k)] \nabla G(\mathbf{u}_k)^T - \mathbf{u}_k \quad (\text{B-50})$$

HLRF com Busca Linear

O método HLRF foi posteriormente aperfeiçoado por Zhang & Der Kiureghian de maneira a executar uma busca linear determinando assim o tamanho do passo a ser utilizado em (B-49). A busca linear pode ser qualquer um dos procedimentos mostrados na seção B.5, Zhang & Der Kiureghian propuseram a seguinte função para a determinação de t_k :

$$p(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2 + c|G(\mathbf{u})| \quad (\text{B-51})$$

onde c é um parâmetro de penalidade que satisfaz a seguinte equação:

$$c \geq \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{\|\Delta G(\mathbf{u})\|} \quad (\text{B-52})$$

e t_k é determinado como o mínimo da função unidimensional $p(t) = p(\mathbf{u}_k + t\mathbf{d}_k)$.

B.10 Implementação

Os algoritmos IP/SQP foram implementados em linguagem C++ a partir dos códigos utilizados por Parente [58], sendo a maioria das rotinas transcritas de C e outras modificadas de acordo com a adaptação do programa aos demais módulos. Os demais algoritmos estão implementados seguindo a mesma filosofia.