ESTIMATIVAS DE ZONAS PLÁSTICAS OBTIDAS A PARTIR DE UM CAMPO DE TENSÕES DETERMINADO NUMERICAMENTE

Rafael A. Sousa[a], Luiz Fernando C.R. Martha[a], Alexandre A.O. Lopes[b] e Jaime T.P. Castro[c]

[a]*Departamento de Engenharia Civil, Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea, 22453-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, www.civ.puc-rio.br*

[b]*Petrosoft Design LTDA, Rio de Janeiro, RJ, Brasil*

[c]*Departamento de Engenharia Mecânica, Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea, 22453-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, www.mec.puc-rio.br*

Palavras chave: Zonas Plásticas, Mecânica da Fratura Linear Elástica, Método dos Elementos Finitos.

Resumo. *A Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) tem seu campo de tensões determinado analiticamente a partir de um parâmetro denominado de Fator de Intensidade de Tensões (FIT). Esse parâmetro foi determinado independentemente por Williams (1958) e Irwin (1958). A utilização da MFLE só é válida se o tamanho da zona plástica (zp) formada à frente da ponta de trincas for menor que o tamanho característico da peça. A primeira estimativa de zonas plásticas, que é clássica, é baseada no uso exclusivo de FIT. Entretanto, a precisão dessas estimativas é limitada para baixos níveis da relação entre a tensão nominal e a tensão de escoamento (σ_n/S_Y). Tentando contornar essa limitação, a adição de um parâmetro adicional foi proposta para representar o campo de tensões na ponta de trincas. Essa adição ficou conhecida como T-stress, que é o primeiro termo de ordem zero da série de Williams. Contudo, nem o campo de tensões obtido por FIT e nem o determinado por FIT mais T-stress podem reproduzir o campo de tensões linear elástico (LE) que satisfaz todas as condições de contorno de corpos trincados. Para provar essa afirmação, este trabalho apresenta estimativas de zonas plásticas obtidas a partir da função de tensão de Westergaard, que é a solução LE completa para o exemplo da placa de Griffith. Usando esse exemplo, este trabalho compara as zonas plásticas obtidas a partir dos campos de tensões gerados pelo FIT, FIT mais T-stress, função de tensão de Westergaard e a partir do uso do Método dos Elementos Finitos. Com essa comparação, mostra-se que para altos valores de σ_n/S_Y os campos de tensões fundamentados no FIT e no FIT mais T-stress não são suficientes para estimar o tamanho das zonas plásticas.*

1. INTRODUÇÃO

A Mecânica da Fratura (MF) tem como principais objetivos quantificar a maior carga que uma estrutura trincada pode suportar em serviço, identificar a maior trinca tolerável para uma peça em serviço e quantificar a taxa de propagação e a vida residual de estruturas trincadas sob cargas de serviço (Castro e Meggiolaro, 2009). A MF é dividida em duas principais áreas. A Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE), que é caracterizada pelos parâmetros *FIT* e *T-stress*, e a Mecânica da Fratura Elastoplástica (MFEP). O parâmetro que define qual das duas mecânicas que deve ser utilizada é o tamanho das zonas plásticas formadas na ponta das trincas. Dessa forma, este trabalho estuda a validade da MFLE a partir da estimativa das zonas plásticas geradas pelos campos de tensões lineares elásticos.

Inicialmente, o FIT foi considerado como o parâmetro responsável por caracterizar o campo de tensões da MFLE para estruturas sob baixos níveis de carregamento (Irwin, 1957; Williams, 1957). Felizmente, existe uma grande quantidade de problemas com trincas em que as zonas plásticas são pequenas quando comparadas com outras dimensões da estrutura, tal como a espessura ou como o ligamento residual. Notadamente, esses problemas caracterizam o caso de fadiga sob baixas cargas de serviço. Devido a necessidade de determinar o campo de tensões em condições de alto nível de carregamento, um novo parâmetro denominado de *T-stress* foi adicionado na componente σ_{xx} obtida a partir do FIT (Irwin, 1958). Entretanto, este trabalho mostra que esses dois parâmetros são partes da solução linear elástica completa que pode ser obtida a partir de uma função de tensão ou de uma análise numérica linear elástica.

Dentro desse contexto, este trabalho é dividido em seis seções. Nesta primeira seção se apresenta o problema e a organização do trabalho. Em seguida, mostra-se o campo de tensões determinado a partir de K_I, FIT em modo I de trincamento. Posteriormente, mostra-se o campo de tensões obtido pela adição da *T-stress* na componente σ_{xx} gerada por K_I. Na quarta seção se apresenta o campo de tensões gerado a partir da função de tensão de Westergaard. A quinta seção mostra o campo de tensões determinado numericamente a partir do uso do Método dos Elementos Finitos (MEF). Finalmente, a sexta seção faz as conclusões deste trabalho. É importante mencionar que todas as zonas plásticas mostradas neste trabalho são referentes ao exemplo da placa de Griffith, cujos parâmetros podem ser visualizados mais claramente na Fig. 1.

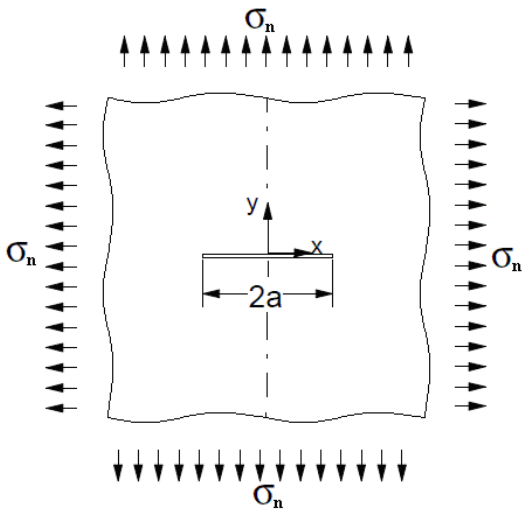


Figura 1: Placa de Griffith

A Fig. 1 mostra a placa de Griffith biaxialmente carregada com uma tensão nominal igual a σ_n e com um tamanho de trinca igual a $2a$.

2. O CAMPO DE TENSÕES DETERMINADO A PARTIR DE K_I

O campo de tensões obtido a partir de K_I é mostrado na Eq. (1):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{Bmatrix} 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{Bmatrix}. \tag{1}$$

Entretanto, o campo de tensões representado pela Eq. (1) só é válido para regiões bem próximas da ponta das trincas. Essa afirmação pode ser confirmada quando se examina a placa de Griffith (1920) carregada uniaxialmente em modo I, com uma tensão nominal de σ_n e com um campo de tensões linear elástico gerado por K_I. A expressão de K_I para o caso da placa de Griffith é mostrada na Eq. (2):

$$K_I = \sigma_n \sqrt{\pi a}\,, \tag{2}$$

em que a é a metade do comprimento da trinca. A partir da observação da componente σ_{yy} para pontos distantes da ponta da trinca tem-se $\sigma_{yy}(K_I,\ r \to \infty,\ \theta = 0) = 0$, em vez de $\sigma_{yy}(K_I, r \to \infty,\ \theta = 0) = \sigma_n$ como necessário. Nas duas expressões de σ_{yy} mostradas anteriormente, r é a distância de qualquer ponto no plano em relação a ponta da trinca e θ é o ângulo medido em relação ao plano da trinca. Esse problema mostra que o campo de tensões determinado a partir de K_I não pode descrever corretamente as tensões e deformações dentro das zonas plásticas presentes na ponta de trincas. Contudo, as zonas plásticas tradicionalmente estimadas consideram esse campo de tensões simplificado.

A partir de um critério de escoamento, Mises por exemplo, Unger (2001) apresentou a Eq. (3) para estimar as fronteiras elastoplásticas em tensão plana (pl-σ) e a Eq. (4) para caso de deformação plana:

$$pz(\theta)_{M,pl-\sigma} = \left(\frac{K_I^{\,2}}{2\pi S_Y^{\,2}}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(1 + 3\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \tag{3}$$

$$pz(\theta)_{M,pl-\varepsilon} = \left(\frac{K_I^{\,2}}{2\pi S_Y^{\,2}}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left((1-2\nu)^2 + 3\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \tag{4}$$

em que ν é o coeficiente de Poisson. Então, conforme essa estimativa clássica, o tamanho da zona plástica calculada diretamente a frente da ponta da trinca em pl-σ é:

$$pz(\theta = 0)_{pl-\sigma} = pz0 = (1/2\pi)(K_I/S_Y)^2. \tag{5}$$

O parâmetro $pz0$ será usado para normalizar todas as outras estimativas feitas neste trabalho. Mesmo que essas estimativas de zonas plásticas não façam sentido em regiões próximas da ponta de trincas, vale a pena estimar os efeitos de σ_n/S_Y nessas estimativas, em que S_Y é a tensão de escoamento do material. Essa tarefa já foi feita por Rodriguez (2007). Esse autor mostrou que as estimativas das zonas plásticas obtidas a partir do campo de tensões determinado pela Eq. (1) são insensíveis à σ_n/S_Y. Essas zonas plásticas são estimadas pelo critério de escoamento de Mises, conforme mostra a Eq. (6):

$$\sigma_{Mises}\left(K_I, r, \theta\right) = S_Y \,. \tag{6}$$

O valor de r que satisfizer a Eq. (6), para cada valor específico de θ, fará parte da zona plástica para o caso em tensão plana $\left(pz(\theta)^{K_I}_{M,pl-\sigma}\right)$ ou para o caso em deformação plana $\left(pz(\theta)^{K_I}_{M,pl-\varepsilon}\right)$. O superescrito K_I indica que esse parâmetro é usado para representar o campo de tensões. A Fig. 2 mostra essa insensiblidade das $pz(\theta)^{K_I}_{M,pl-\sigma}$.

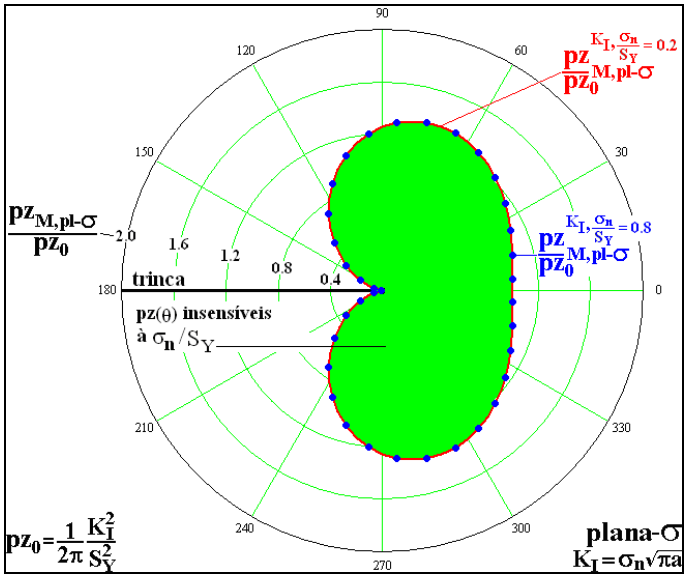


Figura 2: Zonas plásticas sob tensão plana insensíveis à relação σ_n/S_Y para o caso da placa de Griffith carregada em modo I com o campo de tensões determinado por K_I

A Fig. 3 mostra o mesmo exemplo da Fig. 2, a diferença é que na Fig. 3 se estuda o caso de deformação plana.

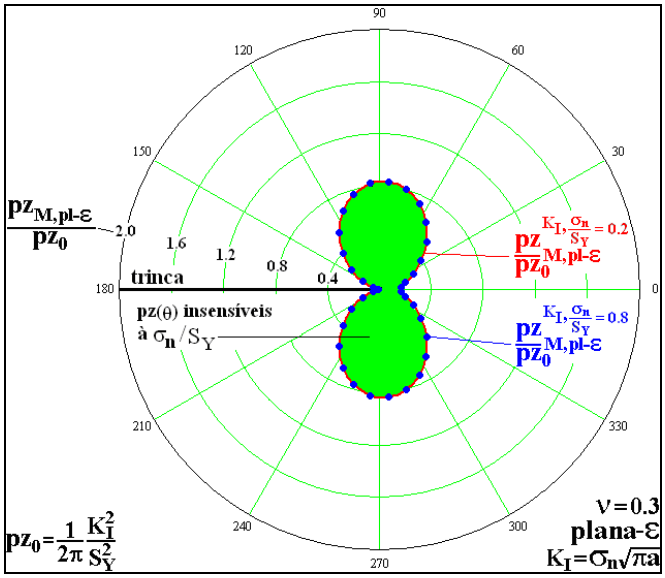


Figura 3: Zonas plásticas sob deformação plana insensíveis à relação σ_n/S_Y para o caso da placa de Griffith carregada em modo I com o campo de tensões determinado por K_I

Em ambos os casos mostrados nas duas figuras, as tensões dentro das zonas plásticas são

limitadas pela tensão de escoamento, ou seja, o truncamento do campo de tensões linear elástico não obedece as condições de equilíbrio. A próxima seção mostra como obter o campo de tensões a partir da utilização de K_I mais *T-stress*. Nessa seção se mostra os efeitos desse campo de tensões nas zonas plásticas.

3. O CAMPO DE TENSÕES DETERMINADO A PARTIR DE K_I MAIS *T-STRESS*

A *T-stress* foi proposta por Irwin (1958) para ajustar os resultados experimentais fotoelásticos feitos por Wells e Post (1958). Larsson e Carlsson (1973), que estavam investigando os limites recomendados pela ASTM (1970) para o uso do FIT, propuseram a adição da *T-stress* na componente σ_{xx} para ajustar as formas e tamanhos das zonas plásticas obtidas a partir de análises lineares elásticas. Com essa proposta, Larsson e Carlsson compararam essas zonas plásticas com as zonas plásticas obtidas em análises elastoplásticas feitas a partir do Método dos Elementos Finitos (MEF). A adição da *T-stress* no campo de tensões linear elástico pode ser vista na Eq. (7):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\, r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{Bmatrix} 1-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ 1+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} T_{stress} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{7}$$

Apesar de mudar a forma das zonas plásticas e fazê-las sensíveis à relação σ_n/S_Y, as soluções lineares elásticas obtidas a partir de K_I mais *T-stress* não são completas, pois as componentes de tensão geradas por esse campo não reproduzem as respostas esperadas do problema. Por exemplo, a resposta $\sigma_{yy}^{\infty} = \sigma_n$ não é verificada para o exemplo da placa de Griffith.

Para mostrar os efeitos do campo de tensões gerado por K_I mais *T-stress* nas estimativas das zonas plásticas, usa-se o exemplo de uma placa retangular tracionada por um tensão nominal de valor igual a σ_n com largura igual a $2W$, altura igual a $2H$ e com um trinca interna central de tamanho $2a$. De acordo com Fett (1998), a expressão da *T-stress* para o caso de uma placa retangular com uma trinca interna depende dos valores de *a/W* and *H/W*, conforme mostra a Eq. (8):

$$T_{stress} = \frac{\alpha\, \sigma_n}{1 + a/W}, \tag{8}$$

em que o parâmetro α pode ser determinado pela Tabela 1 conforme foi mostrado por Fett (1998)

Tabela 1: Valores de α obtidos a partir do valor adotado para *a/W* para o caso em que *H/W* = 1.25

a/W	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
H/W = 1.25	-1.0	-0.9	-0.83	-0.777	-0.716	-0.656
a/W	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
H/W = 1.25	-0.596	-0.53	-0.47	-0.43	-0.413	

De acordo com Tada *et al* (1985), os valores de K_I para o caso de uma placa retangular pode ser obtido a partir da Eq. (2) modificada:

$$K_I = \sigma_n \sqrt{\pi\, a}\; F(a/W), \tag{9}$$

em que o valor de $F(a/W)$ é dado pela Tabela 2.

Tabela 2: Valores de $F(a/W)$ para uma placa retangular com uma trinca interna carregada em modo I.

a/W	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
$F(a/W)$	1.0000	1.0060	1.0246	1.0577	1.1094
a/W	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$F(a/W)$	1.1867	1.3033	1.4882	1.8160	2.5776

Ao se usar a tensão equivalente de Mises e o campo de tensões gerado por K_I mais *T-stress* é possível obter a partir da Eq. (10) as zonas plásticas correspondentes ao estado plano de tensão (pl-σ) e ao estado plano de deformação (pl-ε):

$$\sigma_{Mises}\left(K_I + T_{stress}, r, \theta\right) = S_Y \,. \tag{10}$$

Os valores de r que satisfizerem a Eq. (10), para cada valor de θ adotado, serão as $pz(\theta)_M$ em tensão plana $\left(pz(\theta)_{M,pl-\sigma}^{K_I+T}\right)$ ou em deformação plana $\left(pz(\theta)_{M,pl-\varepsilon}^{K_I+T}\right)$. O superescrito K_I+T indica que o K_I e a *T-stress* são usados para representar o campo de tensões.

Para mostrar os efeitos do campo gerado por K_I mais *T-stress* nas estimativas das zonas plásticas para o caso sob tensão plana, a Fig. 4 avalia as $pz(\theta)_{M,pl-\sigma}^{K_I+T}$ para cinco níveis de σ_n/S_Y: 0,2; 0,4; 0,6; 0,7 e 0,8.

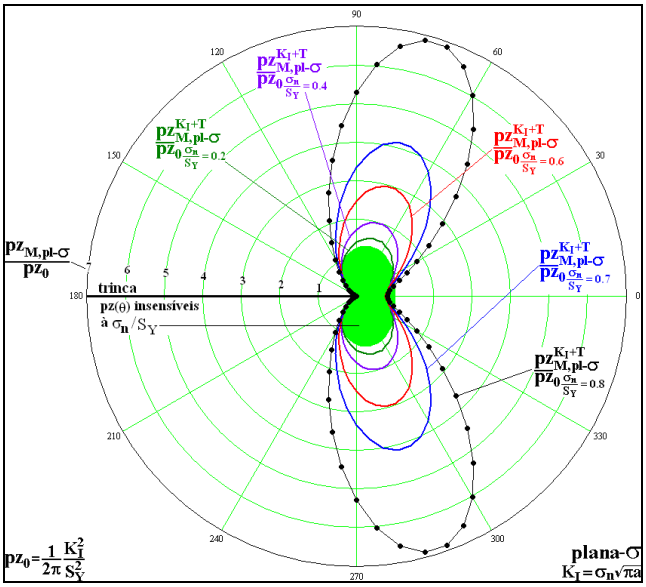


Figura 4: Zonas plásticas sob tensão plana sensíveis à relação σ_n/S_Y para o caso da placa de Griffith carregada em modo I com o campo de tensões determinado por K_I mais *T-stress*

A Fig. 5 avalia as $pz(\theta)_{M,pl-\varepsilon}^{K_I+T}$ para cinco níveis σ_n/S_Y: 0,2; 0,4; 0,6; 0,7 e 0,8.

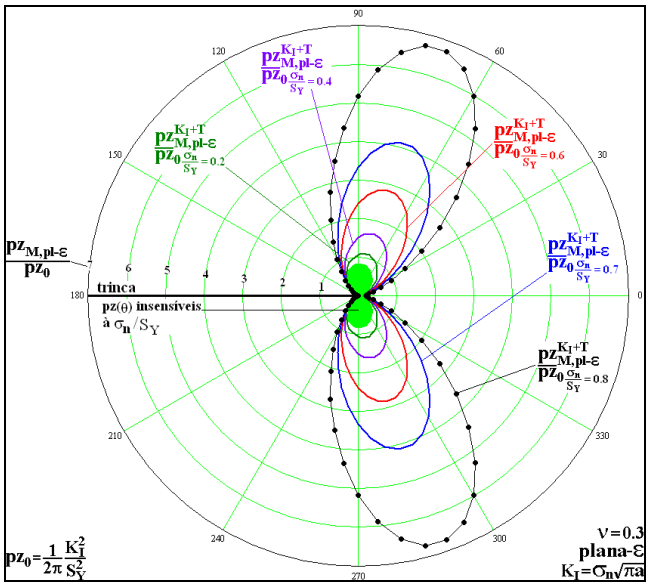


Figura 5: Zonas plásticas sob deformação plana sensíveis à relação σ_n/S_Y para o caso da placa de Griffith carregada em modo I com o campo de tensões determinado por K_I mais *T-stress*

Ao se analisar a Fig. 4 e a Fig. 5 é possível perceber que a medida que se aumenta o valor de σ_n/S_Y as zonas plásticas aumentam de tamanho. A próxima seção apresenta o campo de tensões determinado pela função de tensão de Westegaard.

4. O CAMPO DE TENSÕES DETERMINADO PELA FUNÇÃO DE TENSÃO DE WESTERGAARD

O campo de tensões gerado pela função de tensão de Westergaard foi apresentada por Westegaard (1929) para representar o campo de tensões nas proximidades da ponta da trinca de uma placa de Griffith. Em seguida, Irwin (1957) usou esse campo de tensões para obter a expressão de K_I, Eq. (2), e o campo de tensões representado pela Eq. (1). A função de tensão de Westergaard apresenta o seguinte aspecto:

$$Z = \frac{\sigma_n \, z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \tag{11}$$

em que σ_n é a tensão nominal, $z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$ e $Z(z)$ é a função de tensão de Westergaard para uma placa infinita biaxialmente carregada.

O campo de tensões determinado a partir da Eq. (11) é mostrado na Eq. (12):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathrm{Re}(Z(z)) - y\,\mathrm{Im}(Z'(z)) \\ \mathrm{Re}(Z(z)) + y\,\mathrm{Im}(Z'(z)) \\ -y\,\mathrm{Re}(Z'(z)) \end{Bmatrix} \tag{12}$$

A Fig. 6 mostra a comparação entre as estimativas das zonas plásticas sob um estado de tensão plana obtidas a partir do campo de tensões gerado por K_I, K_I mais *T-stress* e pelo campo de tensões gerado pela função de tensão de Westergaard. Seis níveis de σ_n/S_Y são avaliados: 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7 e 0,8.

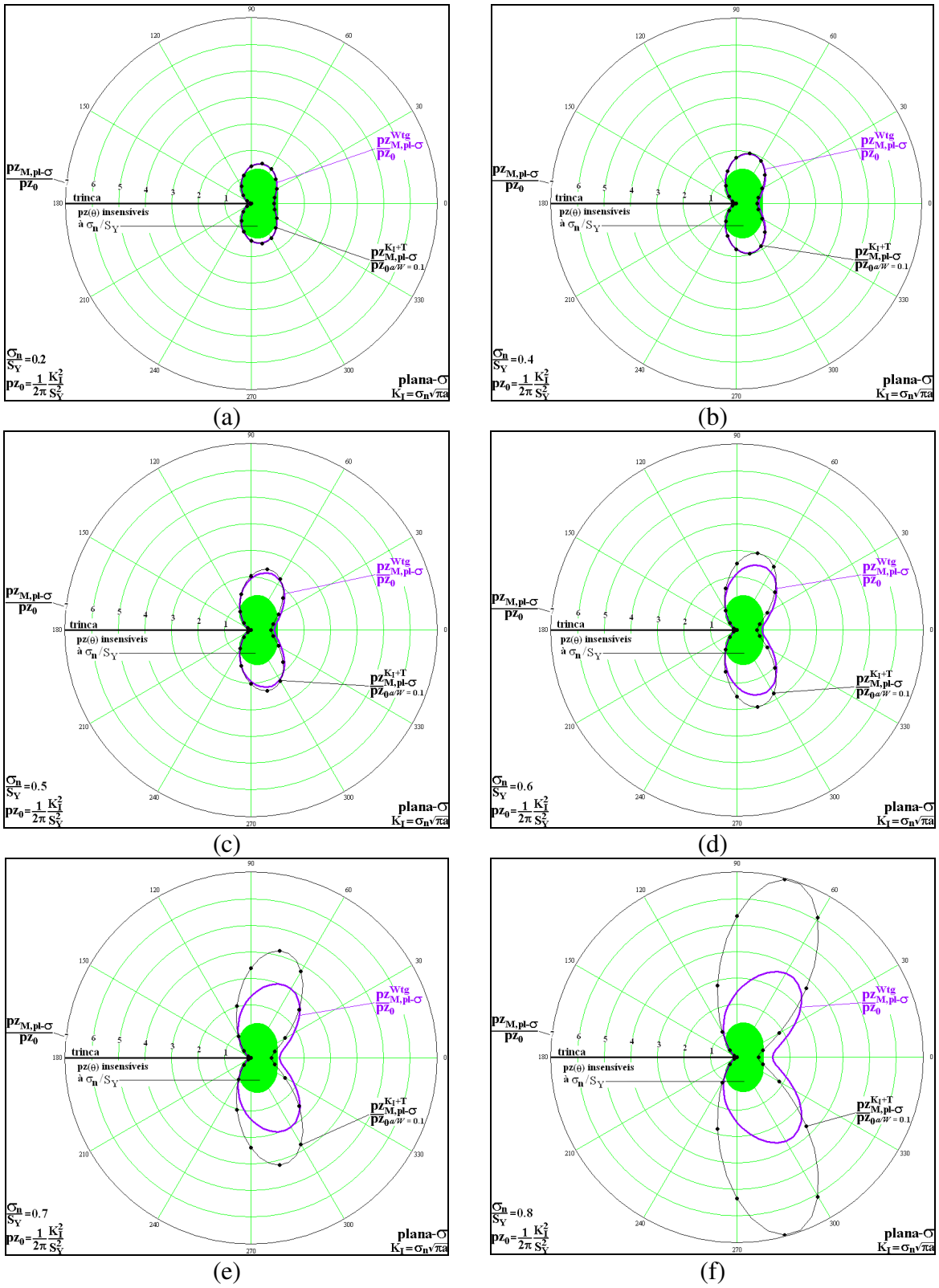


Figura 6: Comparação das zonas plásticas sob tensão plana para o caso da placa de Griffith carregada em modo I com os campos de tensões determinados por K_I, K_I mais *T-stress*, e pela função de tensão de Westergaard para (a) $\sigma_n/S_Y = 0{,}2$; (b) $\sigma_n/S_Y = 0{,}4$; (c) $\sigma_n/S_Y = 0{,}5$; e (d) $\sigma_n/S_Y = 0{,}6$ (e) $\sigma_n/S_Y = 0{,}7$ e (f) $\sigma_n/S_Y = 0{,}8$

A Fig. 7 é similar a Fig. 6. A diferença é que a Fig. 7 apresenta estimativas de zonas plásticas correspondentes um estado de deformação plana. Os mesmos seis níveis de σ_n/S_Y são avaliados.

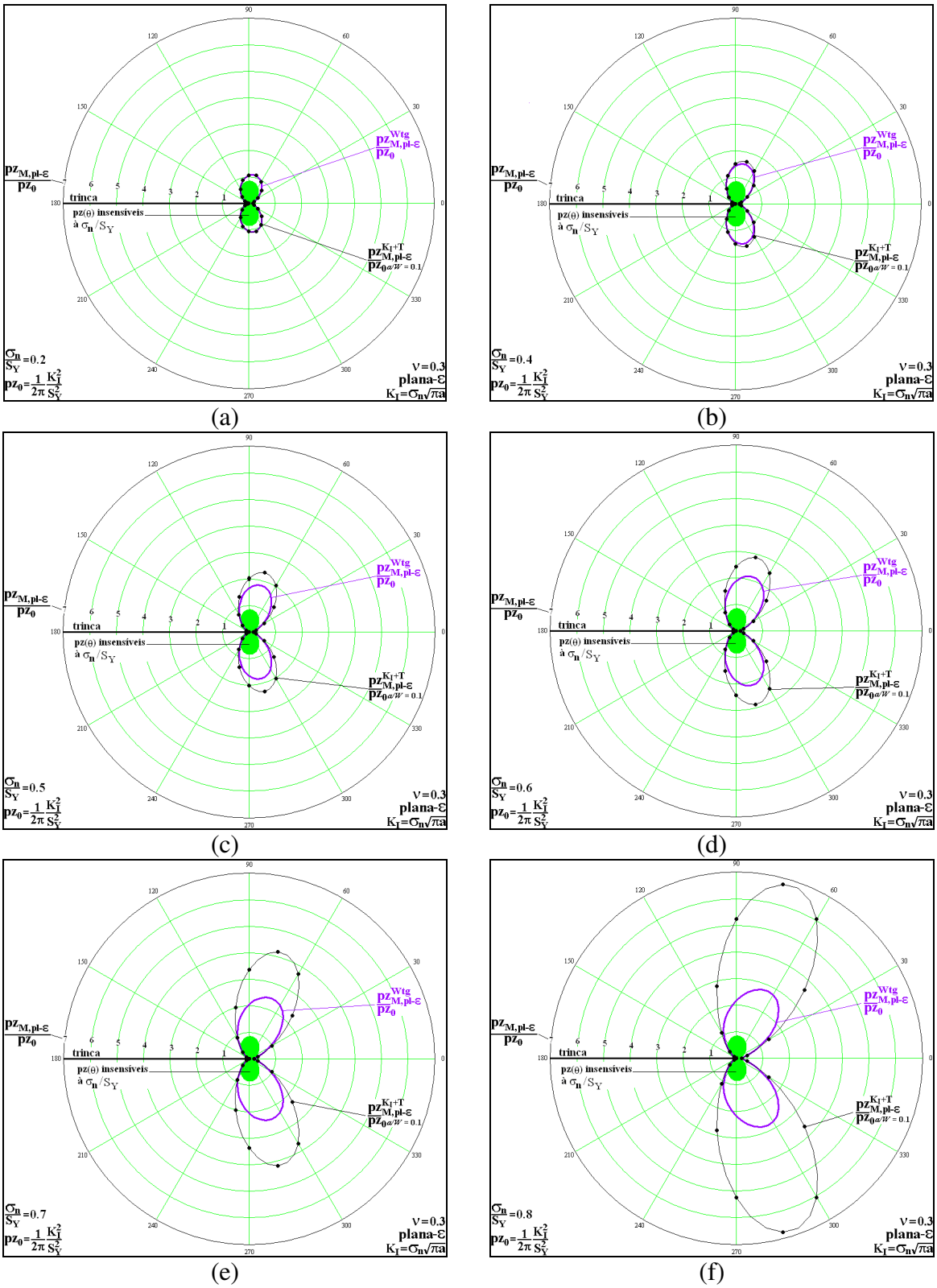


Figura 7: Comparação das zonas plásticas sob deformação plana para o caso da placa de Griffith carregada em modo I com os campos de tensões determinados por K_I, K_I mais *T-stress*, e pela função de tensão de Westergaard para (a) $\sigma_n/S_Y = 0{,}2$; (b) $\sigma_n/S_Y = 0{,}4$; (c) $\sigma_n/S_Y = 0{,}5$; e (d) $\sigma_n/S_Y = 0{,}6$ (e) $\sigma_n/S_Y = 0{,}7$ e (f) $\sigma_n/S_Y = 0{,}8$

Ao se analisar a Fig. 6 é possível perceber que para $\sigma_n/S_Y = 0{,}2$ e $\sigma_n/S_Y = 0{,}4$; para o caso sob tensão plana, as estimativas das zonas plásticas obtidas pelo campo de tensões gerado por K_I mais *T-stress* são idênticas às estimativas das zonas plásticas obtidas pelo campo de

tensões gerado pela função de tensão de Westergaard. Para o caso de deformação plana, a igualdade nas estimativas de zonas plásticas obtidas por esses dois campos de tensões só se verifica para a situação em que σ_n/S_Y é igual a 0,2.

5. O CAMPO DE TENSÕES DETERMINADO NUMERICAMENTE A PARTIR DO USO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Nesta seção são mostradas as zonas plásticas obtidas a partir de uma análise linear elástica em que se utiliza o Método dos Elementos Finitos (MEF). Conforme foi pesquisado durante o desenvolvimento deste trabalho, apenas duas funções de tensão de Westergaard foram encontradas. Uma para o caso da placa de Griffith e outra para uma placa retangular semi infinita tracionada. Portanto, para que se possa estudar as zonas plásticas em geometrias mais complicadas e carregamentos não convencionais é indispensável a utilização de métodos numéricos.

Dentre os métodos numéricos mais estudados na engenharia estrutural, destacam-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Ambos os métodos têm sido aplicados à Mecânica da Fratura (MF).

No MEF destacam-se os elementos denominados de Quarter Point, que reproduzem a singularidade intrínseca do modelo matemático da MFLE. Já o MEC com suas soluções fundamentais singulares é uma opção natural para o problema da MF. Entretanto, o MEC não é usado neste trabalho.

Como tradicionalmente o principal interesse da Mecânica da Fratura é a obtenção dos Fatores de Intensidade de Tensão, foram estudadas formas de se obter, utilizando-se o MEF, a mesma singularidade presente no campo de tensões gerado por FIT, que é da ordem de $1/\sqrt{r}$. Barsoum (1976) e Henshell & Shaw (1975) mostraram, de forma independente, que essa singularidade poderia ser obtida ao se mover os nós de meio de lado do elemento finito a um quarto de distância do nó da ponta da trinca. Esse tipo de elemento ficou conhecido como Quarter Point. Contudo, o uso do elemento Quarter Point não é necessário para estimar as zonas plásticas. Na verdade, para que as estimativas das zonas plásticas obtidas a partir de uma análise numérica sejam coincidentes com as estimativas obtidas a partir do campo de tensões gerado pela função de tensão de Westergaard, basta discretizar o domínio de acordo com o MEF e resolver o sistema de equações. Nesse processo, não é necessário a utilização de elementos do tipo Quarter Point na ponta das trincas. O único detalhe que deve ser lembrado diz respeito ao nível de discretização da malha de elementos finitos na região próxima à ponta da trinca.

Para mostrar como as estimativas numéricas obtidas pelo MEF são coincidentes com as estimativas obtidas pela função de tensão de Westergaard, apresenta-se a Fig. 8 para o caso de uma análise sob tensão plana $\left(pz_{M,pl-\sigma}^{LE-MEF}\right)$ e a Fig. 9 para o caso de uma análise sob deformação plana $\left(pz_{M,pl-\varepsilon}^{LE-MEF}\right)$. Em ambas as figuras se mostra as estimativas das zonas plásticas para seis níveis de σ_n/S_Y: 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7 e 0,8.

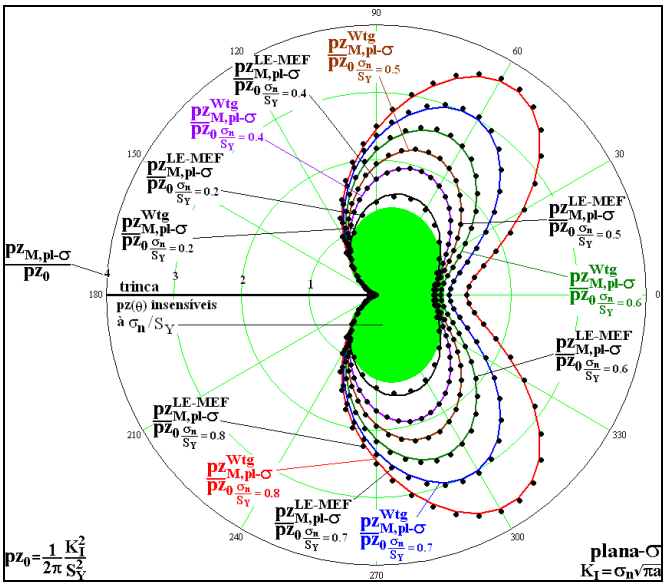


Figura 8: Comparação das zonas plásticas sob tensão plana obtidas numericamente e analíticamente para o caso da placa de Griffith carregada em modo I

A Fig. 9 mostra a comparação entre as zonas plásticas sob deformação plana obtidas numericamente via MEF e analíticamente pelo campo de tensões gerado pela função de tensão de Westergaard para o caso da placa de Griffith.

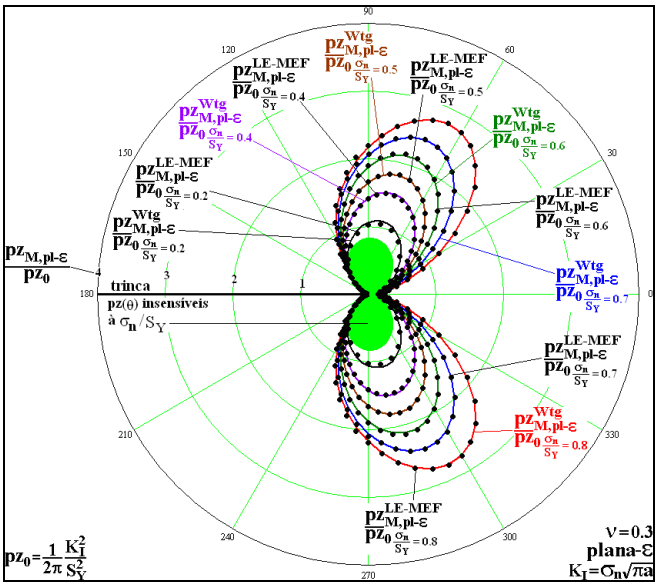
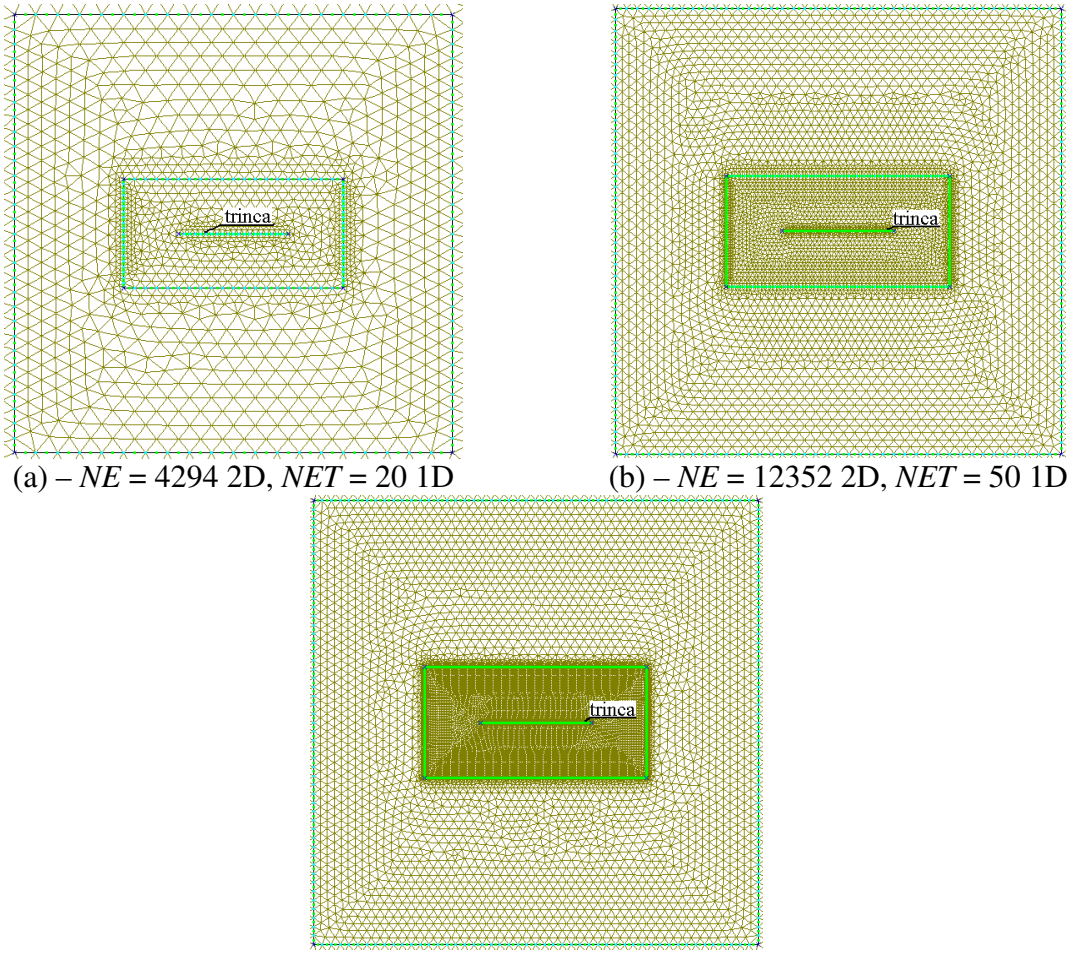


Figura 9: Comparação das zonas plásticas sob deformação plana obtidas numericamente e analíticamente para o caso da placa de Griffith carregada em modo I

Ao se analisar a Fig. 8 e a Fig. 9 é possível perceber que para todos os níveis de σ_n/S_Y estudados as estimativas numéricas das zonas plásticas são coincidentes com as estimativas analíticas obtidas pelo campo de tensões gerado pela função de tensão de Westergaard. Esse fato mostra que os campos de tensões gerados por K_I e K_I mais *T-stress* não são suficientes para estimar zonas plásticas para níveis altos de σ_n/S_Y. Deve-se lembrar, conforme dito anteriormente, que para as estimativas numéricas das zonas plásticas serem coincidentes com as estimativas analíticas obtidas pelo campo de tensões gerado pela função de tensão de Westergaard, é necessário que se faça um estudo do nível de discretização da malha de elementos finitos na região próxima da ponta da trinca. Dentro desse enfoque, a Fig. 10

mostra os detalhes das malhas, como número de elementos 2D (*NE*) e o número de elementos de trinca 1D (*NET*), referentes à três dos cinco níveis de refinamento utilizados nas estimativas das zonas plásticas apresentadas na Fig. 8 e na Fig. 9.



(a) – *NE* = 4294 2D, *NET* = 20 1D (b) – *NE* = 12352 2D, *NET* = 50 1D

(c) – *NE* = 26002 2D, *NET* = 120 1D

Figura 10: Detalhe de três dos cinco níveis de refinamento utilizados nas malhas de elementos finitos para o estado de tensão plana, com $\sigma_n/S_Y = 0{,}4$ em que (a) mostra o menor nível de refinamento usado, (b) mostra um nível de refinamento intermediário e (c) mostra o maior nível de refinamento usado na estimativa das zonas plásticas.

Para se visualizar a inflûencia do nível de refinamento da malha de elementos finitos, a Fig. 11 mostra as estimativas das zonas plásticas obtidas numericamente correspondentes aos cinco níveis de refinamento utilizados para um estado plano de tensão e para o caso em que σ_n/S_Y é igual a 0,4.

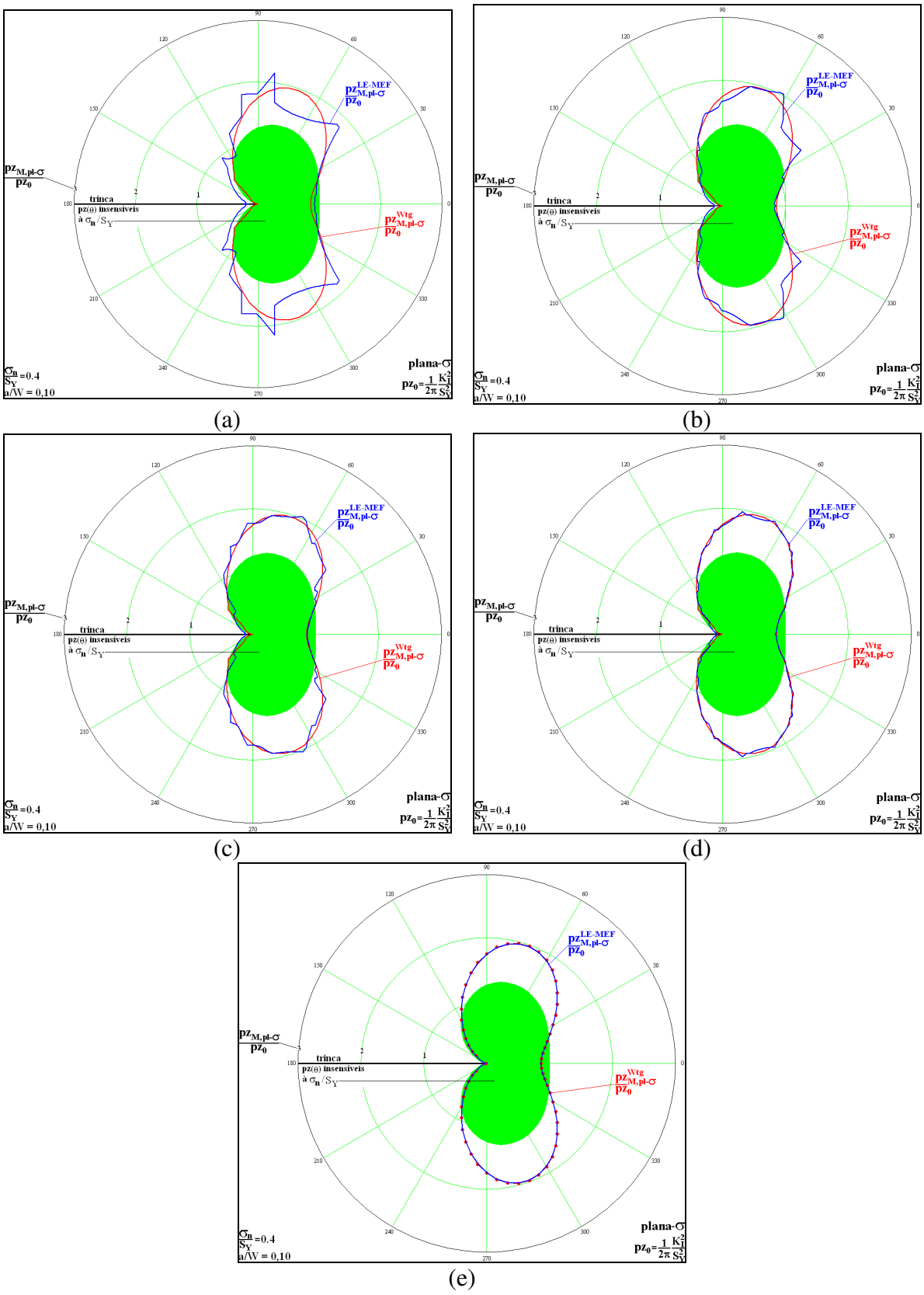


Figura 11: Zonas plásticas lineares elásticas sob tensão plana estimadas analíticamente pelo campo de tensões gerado pela função de Westegaard e numericamente a partir do MEF para $\sigma_n/S_Y = 0{,}4$ para o caso da placa de Griffith carregada em modo I para (a) o primeiro nível de refinamento, (b) o segundo nível de refinamento; (c) o terceiro nível de refinamento; (d) o quarto nível de refinamento e para (e) o quinto nível de refinamento

Ao se analisar a Fig. 11 é possível perceber a sensibilidade das estimativas de zonas

plásticas obtidas numericamente pelo MEF em relação ao nível de refinamento da malha. As estimativas numéricas vão se aproximando do formato da estimativa analítica a medida que se aumenta o refinamento da malha. A Fig. 11(d) mostra o caso em que não se consegue visualizar diferença entre as estimativas numéricas e analíticas.

6. CONCLUSÃO

Este trabalho mostrou três campos de tensões analíticos que são usados para descrever as tensões nas proximidades da ponta de trincas. Foi mostrado que o campo de tensões determinado pelo Fator de Intensidade de Tensão (FIT) gera zonas plásticas insensíveis à relação entre a tensão nominal e a tensão de escoamento (σ_n/S_Y) para o exemplo da placa de Griffith, que é caracterizada por uma trinca em um meio infinito. Em seguida, foi mostrado que o campo de tensões obtido pela adição de uma tensão constante (*T-stress*) na componente σ_{xx} gerada pelo campo de tensões obtido por FIT faz com que as estimativas das zonas plásticas fiquem sensíveis à σ_n/S_Y. Entretanto, analisando o exemplo da placa de Griffith uniaxialmente carregada, comentou-se que as soluções lineares elásticas obtidas a partir de K_I mais *T-stress* não são completas, pois a componente σ_{yy} não reproduz a resposta esperada, ou seja, $\sigma_{yy}(x \to \infty) = \sigma_n$ não é verificada. Ao invés disso, tem-se $\sigma_{yy}(x \to \infty) = 0$. O campo de tensões obtido a partir da função de tensão de Westergaard além de gerar estimativas de zonas plásticas sensíveis à σ_n/S_Y faz com que as componentes de tensão reproduzam as respostas esperadas no contorno da placa de Griffith. Dessa maneira, comentou-se que a função de tensão de Westergaard gera a solução do exemplo da placa de Griffith em termos de tensões. Posteriormente, este trabalho mostrou, para o exemplo da placa de Griffith, que o campo linear elástico completo que é gerado pela função de tensão de Westergaard pode ser reproduzido numericamente a partir do uso do Método dos Elementos Finitos (MEF). Para que essa reprodução numérica dos resultados analíticos possa ser feita com sucesso é necessário que se atente para o nível de refinamento da malha de elementos finitos. A influência desse refinamento na estimativa das zonas plásticas foi mostrado a partir de cinco níveis de refinamento de malha. Em termos de estimativas de zonas plásticas, este trabalho mostrou que os campos de tensões gerados a partir de K_I e de K_I mais *T-stress* são válidos para regiões próximas à ponta de trincas apenas para baixos níveis de σ_n/S_Y.

Agradecimentos

O primeiro autor deste trabalho agradece o financiamento do Tecgraf (Grupo de Tecnologia em Computação Gráfica), PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brazil.

REFERÊNCIAS

ASTM. Annual Book of ASTM Standards. *American Society for Testing Materials*, Philadelphia, 1970.

Barsoum, R.S. On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10:25-37, 1976.

Castro, J.T.P., & Meggiolaro, M.A. *Fadiga - Técnicas e Práticas de Dimensionamento Estrutural sob Cargas Reais de Serviço: Volume I - Iniciação de Trincas*. Rio de Janeiro: Copyright, 2009.

Castro, J.T.P., & Meggiolaro, M.A. *Fadiga - Técnicas e Práticas de Dimensionamento Estrutural sob Cargas Reais de Serviço: Volume II - Propagação de Trincas, Efeitos Térmicos e Estocásticos*. Rio de Janeiro: Copyright, 2009.

Fett, T. A compendium of T-stress solution. *Institut fur Materialforschung*. (http://bibliothek.fzk.de/zb/berichte/FZKA6057.pdf), 1998.

Henshell, R.D., and Shaw, K.G. Crack tip finite elements are unnecessary. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 9:495-507, 1975.

Irwin, G.R. Analysis of Stress and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. *Journal of Applied Mechanics*, 24:361-364, 1957.

Irwin, G.R. Discussion. *Proc.SESA*, 16:-93, 1958.

Larsson, S.G., and Carlsson, A.J. Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 21:263-277, 1973.

Rodriguez, H.Z. *Efeito da tensão nominal no tamanho e forma da zona plástica.* Msc. Thesis, Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, Brasil, 2007.

Tada, H., Paris, P.C., and Irwin, G.R. The Stress Analysis of Cracks Handbooks. Paris Productions, 1985.

Unger, D.J. *Analytical Fracture Mechanics*. Dover, 2001.

Wells, A.A., and Post, D. The Dynamic Stress Distribution Surrounding a Running Crack—A Photoelastic Analysis. *Proc. SESA*, 16:-69, 1958.

Westergaard, H.M. Bearing Pressures and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 6:49-53, 1939.

Williams, M.L. On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack. *Journal of Applied Mechanics*, 24:109-114, 1957.