# PARÂMETROS QUE INFLUENCIAM NAS MEDIDAS DE ZONAS PLÁSTICAS USANDO A MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA

Rafael Araujo de SousaLuiz Fernando Campo Ramos MarthaJaime Tupiassú Pinho de CastroAlexandre Antonio de Oliveira LopesAntônio Carlos de Oliveira Mirandarflsousa@tecgraf.puc-rio.brlfm@tecgraf.puc-rio.brjtcastro@puc-rio.bralexol@tecgraf.puc-rio.bramiranda@tecgraf.puc-rio.brPontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil

Abstract. A validade da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) é fundamentada no tamanho da região (zona) plástica em torno da ponta de uma trinca, pois quando se tem um tamanho de zona plástica pequena em relação às dimensões da peça, o uso da MFLE é suficiente para prever seu comportamento mecânico. O principal parâmetro da MFLE é o Fator de Intensidade de Tensão (FIT), que é usado para estimar o tamanho de zonas plásticas. Irwin obteve de forma analítica o FIT para o caso de uma placa infinita, a partir da linearização de uma função complexa de tensão, conhecida como função de tensão de Westergaard, que é dependente das características geométricas da peça e de seu carregamento. Porém, estimativas de zonas plásticas, usando apenas o FIT, podem ser extremamente não-conservativas, já que ele é um parâmetro linear que só vale nas proximidades das pontas das trincas, fazendo com que as condições de contorno não sejam satisfeitas, o que não acontece quando se usa a função de tensão de Westergaard completa (sem linearização). Entretanto, a obtenção de funções desse tipo, para o caso geral, é extremamente complexa, sendo conhecidas apenas para dois casos: placa infinita e placa finita, ambas para uma trinca interna perpendicular ao carregamento. Esses dois casos serão usados para mostrar a influência da relação entre a tensão nominal e a tensão de escoamento, da relação entre o comprimento da trinca e a largura da peça, e do comportamento do material (encruamento) no tamanho e forma das zonas plásticas em comparação com zonas plásticas obtidas a partir do FIT.

Keywords: Mecânica da Fratura, Zona plástica, Função de tensão de Westergaard

## 1 INTRODUÇÃO

A responsabilidade básica de um engenheiro estrutural é dimensionar peças capazes de suportar as cargas solicitantes. A presença de entalhes ou trincas, denominados pólos concentradores de tensões, altera a resistência do elemento estrutural. Entalhes são comuns em alguns tipos de estrutura, como estruturas de madeira e aço. Essas perturbações são quantificadas por um parâmetro denominado Fator de Concentração de Tensão (K<sub>t</sub>). Trincas podem ser idealizadas como entalhes elípticos cujo raio de ponta tende a zero ( $\rho \rightarrow 0$ ). Dessa forma, a trinca apresentaria um K<sub>t</sub> infinito (K<sub>t</sub>  $\rightarrow \infty$ ), o que não faz sentido físico, pois se isso fosse verdade, qualquer tensão nominal, por menor que fosse, provocaria a ruína da estrutura. É por esse fato que a análise de tensões tradicional não é válida na presença de trincas, resultando na necessidade de uma mecânica específica, denominada Mecânica da Fratura (MF).

Castro e Meggiolaro (2002) citam os objetivos da MF: quantificar a carga crítica de uma peça trincada; quantificar a maior trinca que uma estrutura pode suportar; e quantificar a vida residual de uma estrutura trincada.

A MF pode ser dividida em duas partes: uma denominada Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) e outra, Mecânica da Fratura Elastoplástica (MFEP). A diferença entre as duas consiste no fato que a MFLE só é válida quando apenas uma "pequena" quantidade de material à frente da ponta trinca (zona plástica) não possui comportamento elástico (Dowling, 1977). Caso contrário, é necessário adotar a MFEP, que tem como parâmetros representativos a integral *J* e a abertura de ponta de trinca (CTOD).

O campo de tensões em regiões próximas à ponta da trinca, na MFLE, é caracterizado por um parâmetro conhecido como Fator de Intensidade de Tensão (FIT). Segundo Anderson (1995), esse parâmetro caracteriza a severidade da singularidade do campo de tensão em torno da ponta de uma trinca. Quando o FIT ultrapassa o valor crítico do material de uma peça estrutural (K<sub>IC</sub>) a trinca irá propagar, o que provocará, conseqüentemente, sua ruptura.

A MF teve início com Charles Edward Inglis (1913), que analisou entalhes elípticos em placas planas, obtendo K<sub>t</sub> infinito quando  $\rho \rightarrow 0$ , mas não conseguiu explicar o motivo dessas peças não romperem. Alan Arnold Griffith (1920) explicou o problema evocando um princípio energético, de tal forma que mesmo que o modelo matemático tenha a presença da singularidade, a propagação da trinca só poderá ocorrer se obedecer à lei da conservação de energia.

Westergaard (1939), analisando problemas de contato, identificou uma função complexa de tensão ( $Z_1$ ) para representar o campo de tensões no caso de uma trinca em placa infinita. Os trabalhos de Carothers (1920) e Nádai (1921), de forma independente, expressaram funções harmônicas complexas em termos de funções analíticas. O trabalho de MacGregor (1935) usou outros tipos de funções analíticas como funções de tensão. A função complexa de tensão tem as seguintes características importantes: obedecer às condições de Cauchy-Riemann e ser analítica e harmônica, isto é, obedecer à equação de Laplace. Rodriguez (2007) definiu essa equação como a solução de Westergaard completa.

Em 1956 e 1957, Irwin, partindo do trabalho de Westergaard, identificou o Fator de Intensidade de Tensão. O FIT foi determinado de forma independente por Williams (1957).

Sih (1966) mostrou que a relação entre o campo de tensões e a função complexa de tensão usada por Irwin não é válida para alguns casos de meio infinito com trincas sob carregamento também aplicado ao longo do comprimento infinito.

Eftis e Liebowitz (1972) mostraram o motivo do erro mencionado por Sih, e também apresentaram a função de tensão que resolve o caso da placa finita com uma trinca centrada

de comprimento "2a" sob carregamento uniaxial uniforme  $(Z_2)$ , com algumas restrições geométricas.

Lopes (2002), usando o método híbrido de elementos de contorno, determina o FIT para vários problemas planos. Na formulação desenvolvida nesse trabalho, utilliza-se a solução de Westergaard como solução fundamental.

Rodriguez (2007), estudando apenas o caso da placa infinita, mostra que as zonas plásticas apresentadas na literatura, que dependem unicamente do FIT, estão subavaliadas, pois o campo de tensões obtido apenas com o FIT não satisfaz as condições de contorno. Assim, esse autor avalia a influência da relação entre a tensão nominal e a tensão de escoamento (*SnSe*), usando a solução de Williams, Westergaard e Inglis. Sendo que neste último caso, Rodriguez relaciona o raio da ponta da trinca ( $\rho$ ) com o CTOD.

Neste trabalho, partindo do trabalho de Rodriguez, avaliam-se os efeitos da relação SnSe, da relação entre o tamanho da trinca e do comprimento da placa (a/W) e do encruamento no tamanho e forma das zonas plásticas.

# 2 FORMULAÇÕES DE ZONAS PLÁSTICAS NA MFLE

Irwin e Williams, ao determinarem o FIT para o caso da placa infinita com uma trinca de comprimento "2a", possibilitaram a determinação do campo de tensões, Eq. (1), para o modo I (abertura) em peças com material linear-elástico, isotrópico e homogêneo.

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{cases} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{cases} 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{cases}$$
(1)

Irwin chegou nessas equações partindo das seguintes relações complexas:

( ->

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{cases} = \begin{cases} \operatorname{Re}(Z(z)) - y \operatorname{Im}(Z'(z)) \\ \operatorname{Re}(Z(z)) + y \operatorname{Im}(Z'(z)) \\ - y \operatorname{Re}(Z'(z)) \end{cases},$$
(2)

sendo Z(z) uma função analítica e z um número complexo (z = x + iy).

A Eq. (1) representa apenas o primeiro termo da decomposição em série da Eq. (2), e só é válida em uma pequena zona à frente da ponta da trinca. Para que a MFLE seja válida é necessário que a zona plástica seja pequena, cuja definição para tamanho característico é subjetiva. Assim, vários ensaios de fraturamento em corpos de prova (CP's), com diversas geometrias e dimensões, resultaram no desenvolvimento da norma ASTM E399 que trata sobre ensaios de tenacidade.

A propagação de uma trinca pode ser prevista para  $K_I = K_{IC}$  se a zona plástica for pequena em relação às dimensões da peça. Outro ponto importante é a dependência de  $K_{IC}$ com relação à espessura (*t*) da peça. Para peças delgadas,  $K_{IC}$  não poderia ser considerado uma propriedade mecânica, pois passa a depender do valor de *t*. A tenacidade é chamada de  $K_{IC}$  para valores de  $K_C(t)$  com espessuras *t* acima da espessura mínima ( $t_{min}$ ) prescrita pela ASTM E399). A Fig. 1 mostra o comportamento de  $K_C(t)$  e  $K_{IC}$  para uma liga de titânio (Ti) (Castro e Meggiolaro, 2002). Observa-se que  $K_C(t)$  tende a crescer à medida que *t* diminui em relação à  $t_{min}$ .



Figura 1 – Variação de K<sub>C</sub> com a espessura t (Castro e Meggiolaro, 2002).

A norma ASTM E399 prescreve para espessura mínima  $t_{min} = 2.5(K_{IC}/S_E)^2$ . Assim, podese avaliar o que seria uma zona plástica pequena (crítica),  $(zp_c)$ , que validaria a MFLE.

$$zp_c \approx \frac{t}{6} \tag{3}$$

As considerações anteriores mostram a importância da medição correta do tamanho e forma das zonas plásticas para a utilização da MFLE.

# 2.1 Estimativas clássicas do tamanho e forma das zonas plásticas

Expressando o campo de tensões em coordenadas polares, o tamanho da zona plástica pode ser avaliado, como primeira aproximação, pelo valor do raio (*r*) para  $\theta = 0$  onde a componente de tensão normal na direção vertical ( $\sigma_{yy}$ ) se iguala à tensão de escoamento do material ( $S_E$ ). Dessa forma, tem-se:

$$\sigma_{yy}(r = zp, \theta = 0) = S_E \Longrightarrow Zp0 = \frac{K_I^2}{2\pi S_E^2}$$
(4)

Assim, em uma primeira aproximação (Zp0), pode-se associar uma forma circular à zona plástica, conforme mostra a Fig. 2.



Figura 2 - Zonas plásticas circulares de "grandes" e "pequenas" tamanhos que validam ou não a MFLE (Castro e Meggiolaro, 2002).

A Eq. (4) mostra a relação entre a zona plástica e o FIT, que para o caso da placa infinita tracionada é  $(K_I = \sigma \sqrt{\pi a})$ .

Usando um critério de escoamento, por exemplo, Mises ou Tresca, pode-se obter zonas plásticas em função do raio zp(r), fixando o valor de  $\theta$ , ou seja, será obtido um valor de r para cada valor de  $\theta$ .

Em seguida são apresentados todos os cálculos necessários para avaliar a fronteira elastoplástica variando o ângulo  $\theta$ . Para facilitar o entendimento, o sistema polar de coordenadas é utilizado.

A função complexa de tensão varia com o ângulo  $\theta$ , o raio r, e a tensão nominal  $\sigma_n$ . Dessa forma, é possível escrever, através do critério de escoamento, as tensões de Mises correspondentes aos estados planos de deformação e de tensão.

Quando a tensão de Mises for igual à tensão de escoamento, fica evidente a presença da relação entre tensão nominal e a tensão de escoamento.

$$1 = \frac{\sigma_n}{S_E} \sigma_{Mises}(r, \theta) \tag{5}$$

Da Eq. (5) tem-se:

$$Zp_{West} = \frac{\sigma_n}{S_E} \sigma_{Mises}(r, \theta) - 1 \tag{6}$$

As raízes dessa equação, para cada valor de  $\theta$ , representam as zonas plásticas em coordenadas polares.

#### 2.2 Correção da zona plástica para garantir equilíbrio

A determinação de zonas plásticas usando o processo descrito anteriormente, não trata adequadamente a singularidade intrínseca do modelo matemático, já que as tensões em

regiões próximas às pontas da trinca tendem para valores infinitos, não considerando que os materiais dúcteis escoam e os frágeis rompem. Como neste trabalho só são analisadas zonas plásticas para materiais dúcteis, as tensões que excedem o limite de escoamento do material devem ser redistribuídas. O problema que surge é como realizar essa redistribuição.

Irwin tratou esse problema apenas para materiais lineares perfeitamente plásticos (sem encruamento) com o valor do ângulo fixo em  $(\theta = 0)$ , considerando uma equivalência de forças resultantes para a distribuição de tensões antes e depois da redistribuição. A Fig. 3 e a Eq. (7) mostram a idéia de Irwin.



# Figura 3 - Redistribuição das tensões elásticas de acordo com a proposta por Irwin, que assume um deslocamento x<sub>1</sub> na distribuição de tensões $\sigma_y(x,0)$ (Castro e Meggiolaro, 2002).

De acordo com a proposta de Irwin, as tensões lineares elásticas ao longo do eixo x em tensão plana, são  $\sigma y(x) = \sigma x(x) = K_I / \sqrt{(2\pi x)} e \sigma z = 0.$ 

$$\int_{0}^{\infty} \frac{K_{I} dx}{\sqrt{2\pi x}} = \int_{0}^{zp_{Irw}} S_{E} dx + \int_{zp_{0}}^{\infty} \frac{K_{I} dx}{\sqrt{2\pi x}} \therefore \int_{0}^{zp_{0}} \frac{K_{I} dx}{\sqrt{2\pi x}} = S_{E} zp_{Irw} \therefore zp_{Irw} = \frac{K_{I}^{2}}{\pi S_{E}^{2}}$$
(7)

Deslocando o campo de tensões de  $x_1$  Irwin previu uma zona plástica que é o dobro da zona plástica original (*Zp*0).

#### 2.3 Estimativas melhoradas das zonas plásticas

Rodriguez (2007), estudando uma placa infinita tracionada e considerando a função de Westergaard completa, sem considerar o FIT para determinar o campo de tensões, conseguiu avaliar a influência da relação entre a tensão nominal e a tensão de escoamento na forma das zonas plásticas sob tensão e deformação plana.

Rodriguez também considerou a redistribuição das tensões dentro da zona plástica, para tanto, ele usou a solução de Westergaard completa e limitou a tensão de Mises à tensão de escoamento do material na ponta da trinca, ou seja,  $\sigma_{Mises} (0 < r < Zp_{West}E, \theta) = S_E$  (vide Fig.

4). De acordo com Rodriguez, como o carregamento é uniaxial ele considerou apenas equilíbrio das forças geradas pela tensão  $\sigma_{yy}$ .

Pela segunda Eq. (2), tem-se

 $\sigma_{yy}(\sigma_n, Zp_{West}, \theta) = \operatorname{Re}[Z(\sigma_n, Zp_{West}, \theta)] + y(r, \theta)\operatorname{Im}[Z'(\sigma_n, Zp_{West}, \theta)]$ (8) onde  $y(r, \theta) = r\sin(\theta)$ .

Usando o argumento de Irwin para evitar singularidade e fixando o valor de  $\theta$ , tem-se

$$\sigma_{yy}(\sigma_n, Zp_{West}, \theta) Zp_{West} E = \int_0^{Zp_{West}} \sigma_{yy}(\sigma_n, r, \theta) dr$$
(9)

Através da Eq. (9) pode-se determinar o valor da zona plástica considerando a relação entre a tensão nominal e a tensão de escoamento e também o equilíbrio de forças geradas pelas tensões singulares.

$$Zp_{West}E = \frac{1}{\sigma_{yy}(\sigma_n, Zp_{West}, \theta)} \int_0^{Zp_{West}} \sigma_{yy}(\sigma_n, r, \theta) dr$$
(10)



Figura 4 - Limitação da tensão dentro da zona plástica (Rodriguez, 2007).

## 2.4 Efeito do encruamento na estimativa das zonas plásticas

Para considerar a influência do encruamento no tamanho e forma das zonas plásticas, usou-se o modelo de Ramberg-Osgood para simular o comportamento mecânico do material. Dodds *et al* (1991) estudaram a influência do encruamento usando o modelo de Ramberg-Osgood, porém ele obtinha o campo de tensões em função do FIT. O modelo de Ramberg-Osgood que ele usou era adimensionalizado, conforme a Eq. (11).

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n \tag{11}$$

onde  $\varepsilon_0$ ,  $\sigma_0$ ,  $\alpha$  e *n* são constantes do material.

Outra forma para a equação de Ramberg-Osgood, cujos parâmetros possuem significado físico, é:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{total} = \boldsymbol{\varepsilon}_{linear} + \boldsymbol{\varepsilon}_{plastico} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{E} + \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{H}\right)^{\frac{1}{h}}$$
(12)

onde E é o módulo de elasticidade, H é o coeficiente de encruamento e h é o expoente de encruamento.

A Fig. 6 mostra as três possibilidades de comportamento do material: solução singular, material perfeitamente plástico e com o material encruando.



Figura 6 - Tamanhos das zonas plásticas para os três casos de material.

Na Fig. 6, as áreas em azul (círculos), vermelho (listras inclinadas) e em verde (listras horizontais) correspondem ao comportamento plástico do material, onde  $Zp_{West}$  corresponde a zona plástica com a presença da singularidade,  $Zp_{West}E^*$  corresponde a zona plástica considerando encruamento e  $Zp_{West}E$  é a zona plástica considerando um material perfeitamente plástico.

A figura mostra a idéia de que a zona plástica considerando o encruamento deve estar variando dentro de um intervalo fechado, como  $Zp_{West} \leq Zp_{West}E^* \leq Zp_{West}E$ . A explicação para esse intervalo consiste no fato de que ao se considerar o encruamento (ganho de resistência por deformação plástica) usando um modelo do tipo Ramberg-Osgood, a fronteira elastoplástica  $Zp_{West}E^*$  deve ser menor que  $Zp_{West}E$ , pois o material dentro da zona plástica consegue suportar maiores tensões. Essa é tendência, mas em materiais onde a fase plástica é muito maior que fase elástica, pode acontecer que  $Zp_{West}E^* < Zp_{West}$ .

A Eq. (12) do modelo de Ramberg-Osgood escreve a deformação em função da tensão, não sendo possível escrever tensões em função das deformações. A equação de Ramber-Osgood é resolvida numericamente para valores específicos de deformação.

Dessa forma para se determinar a área listrada em vermelho na Fig. 6 é necessário compor áreas.

Para esclarecer o que se quer dizer, se mostrará primeiramente gráfico que descreve a Eq. (12), Fig. 7.a, com os seguintes valores simbólicos adotados. H = 4GPa e E = 10GPa

para vários valores do expoente de encruamento. A Fig. 7.b mostra a área que deve ser equilibrada com as tensões singulares. A parte listrada em verde, corresponde a força que se teria caso todo o material dentro da zona plástica suportasse tensões constantes maiores que a tensão de escoamento. A região pontilhada em azul é a força descrita pela Eq. (12). Portanto a força que se quer equilibrar com a força gerada pelas tensões singulares é a diferença entre as duas áreas. Nessa figura foi usado um expoente de encruamento h = 0.4.



Figura 7 - (a) Curvas, segundo o modelo de Ramberg-Osgood para vários valores de h e
(b) área em verde com listras verticais que representam a tensão σ em função da deformação ε.

Algebricamente, tem-se

$$\int_{0}^{Zp_{West}} \left(\sigma_{y}\right) d\varepsilon = \sigma_{0} Zp_{West} E^{*} - \int_{\sigma_{0}}^{S_{E}} (\varepsilon) d\sigma$$
(13)

onde  $\sigma_0$  é a tensão gerada quando o material atinge sua deformação máxima, sendo obtido pela solução numérica da Eq. (13), e  $Zp_{West}E^*$  é a zona plástica equilibrada usando o modelo de Ramberg-Osgood para descrever o comportamento plástico do material (encruamento).

#### **3** EXEMPLOS

Serão estudados dois exemplos: o da placa infinita e o da placa finita. Para o caso da placa infinita, será mostrado também a insensibilidade das zonas plásticas ao se mexer na relação entre a tensão nominal e tensão de escoamente, quando se obtém o campo de tensões diretamente do FIT. Como todos os exemplos analisados estão sob tração, a correção que evita a singularidade será a mesma feita por Rodriguez.

#### 3.1 Placa Infinita

A Eq. (14) mostra a função de tensão para o caso da placa infinita.

$$Z_1 = \frac{\sigma_n z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \tag{14}$$

A Fig. 8.a mostra a insensibilidade das zonas plásticas à relação entre a tensão nominal e a tensão de escoamento para o estado plano de tensão e a Fig. 8.b para o estado plano de deformação.



Figura 8 - (a) Zonas plásticas insensíveis a relação *SnSe* em tensão plana e (b) Zonas plásticas insensíveis a relação *SnSe* em deformação plana.

A Fig. 9 mostra a influência de *SnSe* no tamanho e forma das zonas plásticas, quando se usa a função completa de Westergaard. Ela reproduz as resultados obtidos por Rodriguez tanto para o estado plano de tensão quanto para o de deformação.



Figura 9 – Zonas plásticas obtidas por Rodriguez que mostram a influência de SnSe para (a) estado plano de tensão e para (b) estado plano de deformação.

# 3.2 Placa Finita

Este exemplo fornece informações adicionais ao caso da placa infinita, pois com dimensões finitas, a influência da geometria no tamanho e forma das zonas plásticas poderá ser estimada. A Eq. (15) mostra a função de tensão para o caso da placa finita.

$$Z_{2} = \frac{\sigma_{n} \sin\left(\frac{z\pi}{W}\right) \left[\frac{a\pi}{W} \csc\left(\frac{a\pi}{W}\right)\right]^{0.5}}{\left[\sin^{2}\left(\frac{z\pi}{W}\right) - \sin^{2}\left(\frac{a\pi}{W}\right)\right]^{0.5}}$$
(15)

Uma análise adicional deve ser feita devido as dimensões serem finitas, que é a competição entre a fratura e o colapso plástico. O colapso plástico ocorrerá quando a tensão atuante dentro do ligamento residual for igual à tensão de escoamento, conforme mostra a equação a seguir.

$$\frac{\sigma}{S_E} = \left(1 - \frac{a}{W}\right) \tag{16}$$

Para se avaliar o problema do ponto de vista analítico, usou-se a Eq. (2), apresentada por Eftis e Liebowitz, atentando para o limite de validade da equação  $(a\pi/W >> 0,3)$  recomendada pelos autores.

Também se fará neste problema, a estimativa da zona plástica considerando o efeito do encruamento para o caso da placa finita que reproduzir os resultados da placa infinita. Para tanto, se usou informações de dois tipos de aço carbono, um com grande encruamento e outro com pouco encruamento.

Serão avaliados 3 valores de (a/W), os quais são: 0,01; 0,04 e 0,09 com todos eles obedecendo o limite de aplicabilidade recomendado pelos autores.

- Para  $a/W = 0.01 \rightarrow SnSe_{CP} = 0.99;$
- Para  $a/W = 0.06 \rightarrow SnSe_{CP} = 0.94;$
- Para  $a/W = 0.09 \rightarrow SnSe_{CP} = 0.91$ .

A Fig. 10 mostra que as zonas plásticas geradas para as placas finitas reproduzem, como caso limite (a/W = 0.01), as zonas plásticas geradas para as placas infinitas.



Figura 10 – Zonas plásticas para a placa finita reproduzem o caso da placa infinita quando (a/W = 0,01) e mostram a influência de SnSe para (a) estado plano de tensão e para (b) estado plano de deformação.

#### **3.2.1** Efeito da geometria no tamanho e forma das zonas plásticas

Para se verificar apenas a influência da geometria, as medidas foram feitas para apenas um nível de tensão, que foi SnSe = 0.6 e com largura constante (W = 3142mm) com os seguintes valores do tamanho da trinca (2a): 10, 60 e 90 mm, conforme os valores de a/W indicados acima. A figura 11 mostra as zonas plásticas correspondentes.



Figura 11 – (a) mostra a influência do tamanho da trinca para o estado plano de tensão e (b) o caso do estado plano de deformação.

Pela análise da Fig. 11, constata-se que quando se usa a função completa de Westergaard, Eq. (15) dentro do seu limite de aplicabilidade, para avaliar a influência do comprimento da trinca (*a*) e consequentemente da relação a/W no tamanho e forma das zonas plásticas não há diferença entre elas e as zonas plásticas obtidas pela Eq. (4), Zp0.

#### 3.2.2 Efeito do encruamento no tamanho e forma das zonas plásticas

Foram usados, como exemplos, resultados experimentais (tensão x deformação) obtidos em laboratório de um aço de baixo carbono. A partir dos valores nodais e dos gráfico do comportamento mecânico desses materiais, achou-se por tentativa, os valores do expoente h e de coeficiente H de encruamento do modelo de Ramberg-Osgood.

A Fig. 12 mostra os gráficos de tensão x deformação para um aço com pouco e outro com bastante encruamento, juntamente com as suas propriedades mecânicas e com os valores do modelo de Ramber-Osgood que foram ajustados para cada caso. Em azul, estão os dados experimentais e em vermelho a curva do modelo de Ramberg-Osgood.



Figura 12 – (a) aço com bastante encruamento e (b) aço com pouco encruamento.

As zonas plásticas em estado plano de tensão e de deformação para os dois aços, são mostradas nas figuras abaixo. A Fig. 13 mostra as zonas plásticas para o caso do aço da Fig. 12.a e a Fig. 14 mostra as zonas plásticas para o caso do aço da Fig. 12.b. Em ambas as figuras 13 e 14 o nível de tensão é SnSe = 0,6, as linhas azuis são as zonas plásticas  $Zp_{West}$ , as linhas em vermelho são as zonas plásticas  $Zp_{West}E$  e as linhas em marrom são as zonas plásticas  $Zp_{West}E^*$ .



Figura 13 – (a) zonas plásticas para um aço com bastante encruamento sob o estado plano de tensão e (b) zonas plásticas para um aço com bastante encruamento sob o estado plano de deformação.



Figura 14 – (a) zonas plásticas para um aço com pouco encruamento sob o estado plano de tensão e (b) zonas plásticas para um aço com pouco encruamento sob o estado plano de deformação.

# 4 CONCLUSÃO

A singularidade intrínseca da trinca, afirma que quando o raio de ponta tende a zero, as tensões tendem ao infinito, impossibilitando a análise de tensões tradicional, fazendo-se necessário o uso da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE), que tem como seu principal parâmtero o Fator de Intensidade de Tensões (FIT). A MFLE só é válida se a "maior parte" do material da peça estiver no regime linear, evidenciando a necessidade de se estimar mais precisamente as suas regiões plastificadas.

Usando um critério de escoamento, Mises por exemplo, mostrou-se a diferença no tamanho e forma das zonas plásticas quando se usa uma função complexa de tensão ou quando se usa o FIT para descrever o campo de tensões em volta da ponta da trinca. Utilizando o mesmo argumento usado por Irwin, Rodriguez (2007) conseguiu estimar o efeito de *SnSe* no tamanho e forma das zonas plásticas, através da função completa de Westerggard (1939) para o caso de uma placa infinita.

Este trabalho mostrou a influência do encruamento e da geometria na estimativa das zonas plásticas. Esta última influência foi verificada através do uso de uma função complexa apresentada por Eftis e Liebowitz (1972) para o caso da placa finita com uma trinca central de comprimento 2a.

Conforme visto, constata-se que a utilização única e excluiva do FIT, não é suficiente para estimar as zonas plásticas que validam o uso da MFLE, pois parâmetros como a geometria e o encruamento alteram de forma significativa o tamanho e forma das zonas plásticas a frente de pontas de trincas.

#### REFERENCES

Anderson, T.L., 1995. Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications. 2th ed. CRC Press.

Carothers, S.D., 1920. Plane Strain: The Direct Determination of Stress. Proceedings of the Royal Society of London, series A, v.97, 110-123.

- Castro, J.T.P e Meggiolaro, M.A, 2002. Fadiga sob cargas reais de serviço. Apostila do curso Mecanica da Fratura e Fadiga \ MEC2231. Departamento de Engenharia Mecanica. PUC-RIO. Brasil.
- Eftis, J. e Liebowtiz, H., 1972. On the Modified Westergaard Equationsfor Certain Plane Crack Problems. International Journal of Fracture Mechanics, v.8, n4, 383-392.
- Griffith,A.A., 1920. The phenomenon of rupture and flow in solids. Philosophical Transactions of the Royal Society series A, v.221, p.163-198.
- Inglis, C.E., 1913. Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. Transactions of the Institution of Naval Architects v.55, p.219-230.
- Irwin, G.R., 1956. Onset of Fast Crack Propagation in High Strength Steel and Aluminum Alloys. Proceedings of 1955 Sagamore Conferencee on Strength Limitations of Metals, Syracuse University, N.Y., March, v.2, 289-305.
- Irwin, G.R., 1957. Analysis of Stress and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. Journal of Applied Mechanics, v.24, 361-364.
- Lopes, A.A.O., 2002. Determinação de fatores de intensidade de tensão com o método híbrido dos elementos de contorno. Tese de doutorado. Departamento de Engenharia Civil. PUC-RIO. Brasil.
- MacGregor, C.W., 1935. The Potential Function for the Solution of Two-Dimensional Stress Problems. Trans. American Mathematical Society, vol. 38, n. 1, p. 117-186.
- Nádai, A., 1921. Uber die Spannungsverteilung in einer durch eine Einzelkraft belasteten rechteckigen Platte. Der Bauingenieur, vol. 2, p. 11-16.
- Norma E399 "Standard test method for plane-strain fracture toughness of metallic materials", ASTM Standards, v. 03.01.
- Rodriguez, H.Z., 2007. Efeito da tensão nominal no tamanho e forma da zona plástica. Dissertação de mestrado, Departamento de Engenharia Mecanica. PUC-RIO. Brasil.
- Sih, G.C., 1966. On The Westergaard Method of Crack Analysis. International. Journal Fracture Mechanics, v. 2, 628-640.
- Westergaard, H.M., 1939. Bearing Pressures na Cracks. Journal of Applied Mechanics, 6, A49-A53.
- Williams, M.L., 1957. On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack. Journal of Applied Mechanics, v.24, 109-114.