XL CILAMCE
IBERO-LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING
NOVEMBER 11-14, 2019
Praiamar Natal Hotel & Convention
Natal, RN-BRAZIL

AVALIAÇÃO DE UMA MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE COMPLETA DE TIMOSHENKO CONSIDERANDO TERMOS DE ORDEM ELEVADA DO TENSOR DEFORMAÇÃO

Marcos Antonio Campos Rodrigues
Rodriguesma.civil@gmail.com
Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)
Avenida Fernando Ferrari, 514, 29075-910, Vitória/ES, Brasil
Rodrigo Bird Burgos
rburgos@eng.uerj.br
Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ)
Rua São Francisco Xavier, 524, 20550-900, Rio de Janeiro/RJ, Brasil
Luiz Fernando Martha
lfm@tecgraf.puc-rio.br
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)
Rua Marquês de São Vicente, 225, 22453-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Abstract. For a geometric nonlinear analysis, the beam theory employed, the strain-displacement relations and the interpolation functions have a great influence in the structural response. Elements with small slenderness or made of composite materials, in some cases, only can be described considering the Timoshenko beam theory, and also presents an important reduction in the critical buckling load when the higher-order terms in the strain tensor are considered. Beyond that, the bar discretization also includes an important influence to the analyses, however when the interpolation functions used are calculated directly from the solution of the equilibrium differential equation of an infinitesimal element, a minimum discretization can be employed. Therefore, this work include these effects in a unified element for a geometric nonlinear analyses, considering a updated Lagrangian formulation, and develops a tangent stiffness matrix using the Timoshenko beam theory, higher-order terms in the strain tensor and interpolation functions calculated from the equilibrium differential equation of an deformed infinitesimal element. Results clearly shows that the developed element can accurate describe the behavior of an element in a geometric nonlinear analyses using just one element per member.

Keywords: Timoshenko Beam, Tangent Stiffness Matrix, Interpolation Functions.

1 Introdução

Em uma análise não linear geométrica utilizando métodos numéricos, como o método dos elementos finito (MEF), a resposta da estrutura (modelo contínuo) é diretamente influenciada pela discretização empregada (modelo discreto), portanto, se faz necessário um estudo de convergência de malha e ainda, experiência do Engenheiro na análise que deve ser realizada. Esta influência ocorre pelo fato de que as funções de interpolação que definem a configuração deformada da estrutura não correspondem a solução homogênea do problema. Assim, a solução do modelo discreto de elementos finitos é uma aproximação da solução analítica.

Dessa forma, muitos autores desenvolveram pesquisas para reduzir essa depedência da discretização da estrutura nos resultados encontrados usando o método dos elementos finitos em uma análise não linear geométrica. So e Chan [1] propuseram um elemento com ordem elevada, Burgos et al. [2] fez uso da linearização clássica do problema de estabilidade e utilizou graus de liberdade adicionais no interior dos elementos. Outros autores trabalharam no campo das clássicas ou modificadas funções de estabilidade como Chen e Lui [3], Aristizabal-Ochoa [4,5,6]. Enquanto que, Yunhua [7] e Tang et al. [8] empregaram a abordagem de campos de deformação consistentes, e então, os deslocamentos foram transformados em séries de potência.

Entretanto, algumas pesquisas buscam soluções baseadas no equilíbrio de elementos infinitesimais em suas configurações indeformadas ou deformadas, levando em consideração a carga axial do elemento, como é desenvolvido em Goto e Chen [9], Chan e Gu [10] e em Rodrigues et al. [11]. Além disso, muitos trabalhos consideram ainda a deformação por cisalhamento na análise, teoria de flexão de Timoshenko. Essa influência é importante em elementos com reduzido índice de esbeltez, ou em materiais compósitos em que se pode verificar que o módulo de rigidez ao cisalhamento (χGA) não é elevado em relação ao módulo de rigidez flexão (EI).

Nesse campo de solução e utilizando a teoria de flexão de Timoshenko, importantes trabalhos se destacam como Davis et al. [12] e Nukulchai [13]. Muitas pesquisas nessa área, incluem ainda a influência de elementos apoiados em bases elásticas, como desenvolvido em Onu [14], Morfidis [15] e em Burgos e Martha [16].

Assim, este trabalho desenvolve uma matriz de rigidez tangente para um elemento baseado na solução homogênea da equação diferencial do problema, ou seja, do equilíbrio de um elemento infinitesimal deformado, levando em consideração a carga axial nas equações de equilíbrio. Para alcançar este objetivo, as funções de interpolação dos deslocamentos do elemento são calculadas diretamente dessa solução. Além disso, a formulação desenvolvida neste trabalho considera ainda a influência da deformação por cisalhamento (teoria de flexão de Timoshenko), como desenvolvido em Burgos e Martha [16].

Contudo, esta pesquisa inclui também termos de ordem elevada no tensor deformação de Green-Lagrange, utilizando uma formulação Lagrangeana atualizada (Bathe e Bolourchi [17], Bathe [18] e McGuire et al. [19]). Para a teoria de flexão de Euler-Bernoulli, essa consideração é bem conhecida, como apresentado nos trabalhos de Yang e Leu [20], Yang e Kuo [21] e ainda em Chen [22]. Quando considerando a teoria de flexão de Timoshenko esse desenvolvimento pode ser encontrado em Rodrigues et al. [23].

Portanto, a formulação apresentada neste artigo unifica o desenvolvimento da matriz de rigidez tangente, calculada a partir da solução da equação diferencial do problema, com a influência da deformação por cisalhamento e a contribuição dos termos de ordem elevada no tensor deformação. Como a equação diferencial corresponde ao equilíbrio de um elemento infinitesimal deformado considerando a teoria de flexão de Timoshenko, as funções de interpolação e a matriz de rigidez tangente são diretamente afetadas pela carga axial presente no elemento e também pela deformação por cisalhamento.

O artigo está organizado da seguinte maneira: a próxima seção introduz a teoria de flexão de

Timoshenko e a equação diferencial que governa o problema de um elemento infinitesimal deformado. A seção 3 apresenta as funções de interpolação calculadas diretamente da solução homogênea da equação diferencial do problema. Na seção 4, essas funções de interpolação são usadas para calcular a matriz de rigidez tangente utilizando a formulação Lagrangeana atualizada e considerando os termos de ordem elevada no tensor deformação. Por fim, a eficiência da matriz de rigidez desenvolvida é verificada com exemplos numéricos, empregando uma discretização mínima da estrutura (um elemento por barra). A seção 6 resume as conclusões desse trabalho e aponta para futuros desenvolvimentos.

2 Teoria de flexão de Timoshenko

Na teoria de flexão de Timoshenko, a rotação total da seção transversal (dv_0/dx) é composta pela rotação devido à flexão (θ) acrescida da distorção por cisalhamento (γ) de acordo com a Figura 1 e a eq. (1).

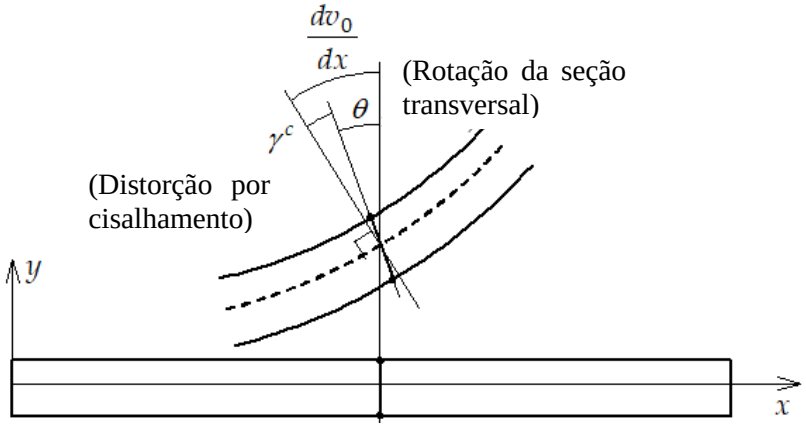

Figura 1 – Teoria de flexão de Timoshenko

$$\frac{dv_0}{dx} = \theta + \gamma \tag{1}$$

Ainda, a partir do equilíbrio de um elemento infinitesimal de viga deformado (Figura 2), a eq. (2) e a eq. (3) podem ser escritas.

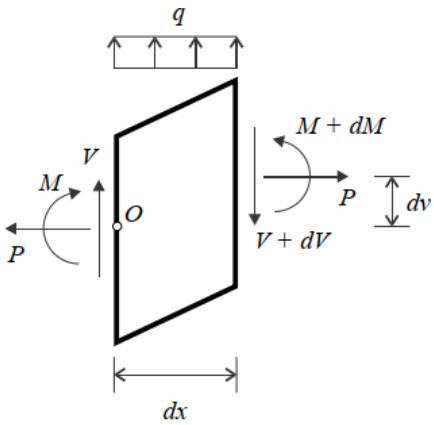

Figura 2 – Equilíbrio de um element infinitesimal de viga deformado

$$\sum F_y \rightarrow -dV + q(x)dx = 0 \rightarrow \frac{dV(x)}{dx} = q(x) \tag{2}$$

$$\sum M_o \rightarrow dM - (V + dV)dx - P.dv + q(x)\frac{dx^2}{2} = 0 \tag{3}$$

Em que, $v(x)$ corresponde ao deslocamento transversal, $q(x)$ ao carregamento transversal distribuído, $V(x)$ a component vertical da força na seção transversal, P a componente da força horizontal e $M(x)$ o momento fletor atuante na seção transversal.

Desconsiderando os termos diferenciais de ordem elevada na eq. (3) e usando a equação diferencial da linha elástica ($M = EI\, d\theta/dx$), eq. (4) pode ser deduzida.

$$EI\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} - V(x) - P\frac{dv(x)}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad EI\frac{d^3\theta(x)}{dx^3} - \frac{dV(x)}{dx} - P\frac{d^2v(x)}{dx^2} = 0$$

$$\rightarrow EI\frac{d^3\theta}{dx^3} - P\frac{d^2v(x)}{dx^2} = q(x) \tag{4}$$

Sabendo-se que a força cortante atuante na seção transversal é dada conforme a eq. (5), com A sendo a area da seção transversal, χ o fator que define a area efetiva para o cisalhamento da seção transversal e G o módulo de rigidez ao cisalhamento, e utilizando a equação fundamental da estática ($dM/dx = V$), a eq. (6) pode ser obtida.

$$V(x) = -\chi GA.\gamma(x) \quad \rightarrow \quad V(x) = \chi GA.\left[\theta(x) - \frac{dv(x)}{dx}\right] \tag{5}$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = \chi GA.\left[\theta(x) - \frac{dv(x)}{dx}\right] \tag{6}$$

Novamente, empregando a equação diferencial da linha elástica ($M = EI\, d\theta/dx$), a eq. (6) pode ser reescrita de acordo com a eq. (7).

$$\frac{dv(x)}{dx} = \theta(x) - \frac{EI}{\chi GA}\frac{d^2\theta}{dx^2} \tag{7}$$

Finalmente, substituindo esta expressão na eq. (4), a equação diferencial de um elemento infinitesimal deformado considerando a teoria de flexão de Timoshenko pode ser escrita pela eq. (8).

$$\frac{d^3\theta}{dx^3} - \frac{P}{\left(1 + \frac{P}{\chi GA}\right)EI}\frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{q(x)}{\left(1 + \frac{P}{\chi GA}\right)EI} \tag{8}$$

3 Funções de interpolação para elemento infinitesimal deformado considerando a teoria de flexão de Timoshenko

A configuração deformada de um elemento pode ser escrito baseada nos deslocamentos nodais usando funções de interpolação, conforme a eq. (9).

$$\begin{matrix} v_0(x) = N_1^v(x)d_2' + N_2^v(x)d_3' + N_3^v(x)d_5' + N_4^v(x)d_6' \\ \theta(x) = N_1^\theta(x)d_2' + N_2^\theta(x)d_3' + N_3^\theta(x)d_5' + N_4^\theta(x)d_6' \end{matrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = [N].\{d'\} \tag{9}$$

As funções de interpolação são calculadas diretamente pela solução homogênea da equação diferencial do problema, isto é, do equilíbrio de um elemento infinitesimal deformado considerando a teoria de flexão de Timoshenko, eq. (8). Essas equações podem ser reescritas usando as relações apresentadas na eq. (10), de acordo com a eq. (11).

$$\Lambda = \frac{\mu}{\sqrt{1+\frac{EI}{\chi GA}.\mu^2}} \quad , \quad \mu = \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad , \quad \Omega = \frac{EI}{\chi GA}\frac{1}{L^2} \tag{10}$$

$$\frac{d^3\theta}{dx^3} - \Lambda^2\frac{d\theta(x)}{dx} = 0 \ , \quad \Lambda = \frac{\mu}{\sqrt{1+\Omega\mu^2L^2}} \tag{11}$$

A solução homogênea da eq. (11) é dada de acordo com a eq. (12) para qualquer valor de carga axial, podendo ainda ser escrita conforme a eq. (13) para cargas de tração (força axial positiva), ou com a eq. (14) para cargas de compressão (força axial negativa).

$$\begin{gathered}\theta_h(x) = \Lambda(c_1e^{\Lambda x} - c_2e^{-\Lambda x}) + c_3 \\ v_h(x) = (1-\Omega L^2\Lambda^2)\left[c_1e^{\Lambda x} - c_2e^{-\Lambda x}\right] + c_3x + c_4\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\theta_h(x) = \Lambda[c_1cosh(\Lambda x) + c_2sinh(\Lambda x)] + c_3 \\ v_h(x) = (1-\Omega L^2\Lambda^2)[c_1sinh(\Lambda x) + c_2cosh(\Lambda x)] + c_3x + c_4\end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\theta_h(x) = \Lambda[c_1cos(\Lambda x) - c_2sin(\Lambda x)] + c_3 \\ v_h(x) = (1+\Omega L^2\Lambda^2)[c_1sin(\Lambda x) + c_2cos(\Lambda x)] + c_3x + c_4\end{gathered} \tag{14}$$

Baseando-se na solução homogênea apresentada, as funções de interpolação podem ser calculadas. Considerando apenas a solução exponencial, eq. (12), os deslocamentos transversais do elemento podem ser escritos conforme a eq.(15).

$$\begin{gathered}\begin{Bmatrix} v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = [X].\{C\} \\ [X] = \begin{bmatrix} (1-\Omega L^2\Lambda^2)e^{\Lambda x} & (1-\Omega L^2\Lambda^2)e^{-\Lambda x} & x & 1 \\ \Lambda e^{\Lambda x} & \Lambda e^{-\Lambda x} & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \{C\} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix}\end{gathered} \tag{15}$$

As condições de contorno são encontradas analisando-se a solução homogênea do problema nos nós do elemento, de acordo com a eq. (16).

$$\begin{gathered}\{d'\} = \begin{Bmatrix} d'_2 \\ d'_3 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_0(0) \\ \theta(0) \\ v_0(L) \\ \theta(L) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 + c_2 + c_4 \\ c_1\mu - c_2\mu + c_3 \\ c_1e^{\mu L} + c_2e^{-\mu L} + c_3L + c_4 \\ c_1\mu e^{\mu L} - c_2\mu e^{-\mu L} + c_3 \end{Bmatrix} \\ \{d'\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \mu & -\mu & 1 & 0 \\ e^{L\mu} & e^{-L\mu} & L & 1 \\ \mu e^{L\mu} & -\mu e^{-L\mu} & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} \rightarrow [H].\{C\} = \{d'\}\end{gathered} \tag{16}$$

Finalmente, usando a eq. (9), eq.(15) e a eq. (16), as funções de interpolação podem ser expressadas usando a relação apresentada na eq. (17), e que, para a solução exponencial, as funções de interpolação são apresentadas na eq.(18).

$$\begin{Bmatrix} v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = [X].[H]^{-1}.\{d'\} \Rightarrow [N] = [X].[H]^{-1} \tag{17}$$

$$N_2^v = -\frac{e^{\Lambda(L+x)} + e^{L\Lambda} - e^{\Lambda x} - e^{2\Lambda x} - L\Lambda e^{\Lambda(L+x)} + \Lambda x e^{\Lambda(L+x)} - L\Lambda e^{\Lambda x} + \Lambda x e^{\Lambda x}}{2e^{x\Lambda} - 2e^{\Lambda(L+x)} + L\Lambda e^{\Lambda(L+x)} + L\Lambda e^{\Lambda x} + 2L^2\Lambda^2\Omega e^{\Lambda(L+x)} - 2L^2\Lambda^2\Omega e^{\Lambda x}} +$$

$$+\frac{-L^2\Lambda^2\Omega e^{\Lambda(L+x)} - L^2\Lambda^2\Omega e^{L\Lambda} + L^2\Lambda^2\Omega e^{\Lambda x} + L^2\Lambda^2\Omega e^{2\Lambda x}}{2e^{x\Lambda} - 2e^{\Lambda(L+x)} + L\Lambda e^{\Lambda(L+x)} + L\Lambda e^{\Lambda x} + 2L^2\Lambda^2\Omega e^{\Lambda(L+x)} - 2L^2\Lambda^2\Omega e^{\Lambda x}}$$

$$N_3^v = \frac{e^{\Lambda(L-x)}(L^2\Lambda^2\Omega - 1)\left(e^{\Lambda(L+x)} - e^{L\Lambda} - e^{2\Lambda x} - e^{-\Lambda(L-x)} + e^{-\Lambda(L-2x)} - L^2\Lambda^2\Omega\right)}{\Lambda(e^{L\Lambda} - 1)(L\Lambda - 2e^{L\Lambda} - 2L^2\Lambda^2\Omega + L\Lambda e^{L\Lambda} + 2L^2\Lambda^2\Omega e^{L\Lambda} + 2)} +$$

$$+\frac{e^{\Lambda(L-x)}(L^2\Lambda^2\Omega - 1)\left(-L\Lambda e^{\Lambda(L+x)} + L\Lambda e^{L\Lambda} + \Lambda x e^{\Lambda(L+x)} - L\Lambda e^{-\Lambda(L-x)} + L\Lambda e^{-\Lambda(L-2x)}\right)}{\Lambda(e^{L\Lambda} - 1)(L\Lambda - 2e^{L\Lambda} - 2L^2\Lambda^2\Omega + L\Lambda e^{L\Lambda} + 2L^2\Lambda^2\Omega e^{L\Lambda} + 2)} +$$

$$+\frac{e^{\Lambda(L-x)}(L^2\Lambda^2\Omega - 1)\left(-2\Lambda x e^{\Lambda x} + \Lambda x e^{-\Lambda(L-x)} - L^2\Lambda^2\Omega e^{\Lambda(L+x)} + L\right)}{\Lambda(e^{L\Lambda} - 1)(L\Lambda - 2e^{L\Lambda} - 2L^2\Lambda^2\Omega + L\Lambda e^{L\Lambda} + 2L^2\Lambda^2\Omega e^{L\Lambda} + 2)}$$

$$N_5^v = \frac{e^{L\Lambda} - e^{\Lambda(L+x)} + e^{\Lambda x} - e^{2\Lambda x} + \Lambda x e^{\Lambda(L+x)} + \Lambda x e^{\Lambda x} + L^2\Lambda^2\Omega e^{\Lambda(L+x)}}{2e^{x\Lambda} - 2e^{\Lambda(L+x)} + L\Lambda e^{\Lambda(L+x)} + L\Lambda e^{\Lambda x} + 2L^2\Lambda^2\Omega e^{\Lambda(L+x)} - 2L^2\Lambda^2\Omega e^{\Lambda x}} +$$

$$+\frac{-L^2\Lambda^2\Omega e^{L\Lambda} - L^2\Lambda^2\Omega e^{\Lambda x} + L^2\Lambda^2\Omega e^{2\Lambda x}}{2e^{x\Lambda} - 2e^{\Lambda(L+x)} + L\Lambda e^{\Lambda(L+x)} + L\Lambda e^{\Lambda x} + 2L^2\Lambda^2\Omega e^{\Lambda(L+x)} - 2L^2\Lambda^2\Omega e^{\Lambda x}}$$

$$N_6^v = -\frac{e^{\Lambda(L-x)}(L^2\Lambda^2\Omega - 1)\left(e^{\Lambda(L+x)} - e^{L\Lambda} - e^{2\Lambda x} - e^{-\Lambda(L-x)} + e^{-\Lambda(L-2x)} + L\Lambda - L^2\Lambda^2\Omega\right)}{\Lambda(e^{L\Lambda} - 1)(L\Lambda - 2e^{L\Lambda} - 2L^2\Lambda^2\Omega + L\Lambda e^{L\Lambda} + 2L^2\Lambda^2\Omega e^{L\Lambda} + 2)} +$$

$$+\frac{e^{\Lambda(L-x)}(L^2\Lambda^2\Omega - 1)\left(-\Lambda x e^{\Lambda(L+x)} - 2L\Lambda e^{\Lambda x} + L\Lambda e^{2\Lambda x} + 2\Lambda x e^{\Lambda x} - \Lambda x e^{-\Lambda(L-x)} - L^2\Lambda^2\Omega e^{\Lambda(L+x)}\right)}{\Lambda(e^{L\Lambda} - 1)(L\Lambda - 2e^{L\Lambda} - 2L^2\Lambda^2\Omega + L\Lambda e^{L\Lambda} + 2L^2\Lambda^2\Omega e^{L\Lambda} + 2)}$$

$$+$$

$$+\frac{e^{\Lambda(L-x)}(L^2\Lambda^2\Omega - 1)\left(L^2\Lambda^2\Omega e^{L\Lambda} + L^2\Lambda^2\Omega e^{2\Lambda x} + L^2\Lambda^2\Omega e^{-\Lambda(L-x)} - L^2\Lambda^2\Omega e^{-\Lambda(L-2x)} + 1\right)}{\Lambda(e^{L\Lambda} - 1)(L\Lambda - 2e^{L\Lambda} - 2L^2\Lambda^2\Omega + L\Lambda e^{L\Lambda} + 2L^2\Lambda^2\Omega e^{L\Lambda} + 2)}$$

$$N_2^\theta = -\frac{\Lambda\left(e^{\Lambda(L+x)} - e^{L\Lambda} + e^{\Lambda x} - e^{2\Lambda x}\right)}{2e^{x\Lambda} - 2e^{\Lambda(L+x)} + L\Lambda e^{\Lambda(L+x)} + L\Lambda e^{\Lambda x} + 2L^2\Lambda^2\Omega e^{\Lambda(L+x)} - 2L^2\Lambda^2\Omega e^{\Lambda x}}$$

$$N_3^\theta = -\frac{e^{-\Lambda x}(e^{2L\Lambda} + e^{\Lambda x} + e^{2\Lambda x} + e^{2L\Lambda}e^{\Lambda x} - L\Lambda e^{2L\Lambda} + L\Lambda e^{2\Lambda x} - L^2\Lambda^2\Omega e^{2L\Lambda} - L^2\Lambda^2\Omega e^{\Lambda x})}{(e^{L\Lambda} - 1)(L\Lambda - 2e^{L\Lambda} - 2L^2\Lambda^2\Omega + L\Lambda e^{L\Lambda} + 2L^2\Lambda^2\Omega e^{L\Lambda} + 2)} +$$

$$+\frac{e^{-\Lambda x}(-L^2\Lambda^2\Omega e^{2\Lambda x} - L^2\Lambda^2\Omega e^{2L\Lambda}e^{\Lambda x})}{(e^{L\Lambda} - 1)(L\Lambda - 2e^{L\Lambda} - 2L^2\Lambda^2\Omega + L\Lambda e^{L\Lambda} + 2L^2\Lambda^2\Omega e^{L\Lambda} + 2)} +$$

$$+\frac{-e^{L\Lambda}e^{-\Lambda x}(2e^{\Lambda x} + e^{2\Lambda x} - L^2\Lambda^2\Omega - 2L^2\Lambda^2\Omega e^{\Lambda x} - 2L^2\Lambda^2\Omega e^{2\Lambda x} + 1)}{(e^{L\Lambda} - 1)(L\Lambda - 2e^{L\Lambda} - 2L^2\Lambda^2\Omega + L\Lambda e^{L\Lambda} + 2L^2\Lambda^2\Omega e^{L\Lambda} + 2)}$$

$$N_5^\theta = \frac{\Lambda\left(e^{\Lambda(L+x)} - e^{L\Lambda} + e^{\Lambda x} - e^{2\Lambda x}\right)}{2e^{x\Lambda} - 2e^{\Lambda(L+x)} + L\Lambda e^{\Lambda(L+x)} + L\Lambda e^{\Lambda x} + 2L^2\Lambda^2\Omega e^{\Lambda(L+x)} - 2L^2\Lambda^2\Omega e^{\Lambda x}}$$

$$N_6^\theta = -\frac{e^{-\Lambda x}(e^{\Lambda x} - 1)(e^{2L\Lambda} - e^{\Lambda x} - L^2\Lambda^2\Omega e^{2L\Lambda} + L^2\Lambda^2\Omega e^{\Lambda x})}{(e^{L\Lambda} - 1)(L\Lambda - 2e^{L\Lambda} - 2L^2\Lambda^2\Omega + L\Lambda e^{L\Lambda} + 2L^2\Lambda^2\Omega e^{L\Lambda} + 2)} +$$

$$\frac{-e^{L\Lambda}e^{-\Lambda x}(e^{\Lambda x} - 1)(L\Lambda - e^{\Lambda x} - L^2\Lambda^2\Omega + L\Lambda e^{\Lambda x} + L^2\Lambda^2\Omega e^{\Lambda x} + 1)}{(e^{L\Lambda} - 1)(L\Lambda - 2e^{L\Lambda} - 2L^2\Lambda^2\Omega + L\Lambda e^{L\Lambda} + 2L^2\Lambda^2\Omega e^{L\Lambda} + 2)} \tag{18}$$

4 Matriz de rigidez tangente

A matriz de rigidez tangente é desenvolvida a partir da formulação Lagrangeana atualizada. Nesta descrição, o princípio dos trabalhos virtuais é dado pela eq. (19),

$$\int_V C_{ijkl}\Delta e_{kl}\delta\Delta e_{ij}\, dV + \int_V \tau_{ij}\,\Delta\eta_{ij} dV = R^{(t+\Delta t)} - R^{(t)} \tag{19}$$

sendo que C_{ijkl} representa a matriz com os coeficiente da relação constitutiva do material, Δe a parcela linear do tensor deformação de Green-Lagrange, $\Delta\eta_{ij}$ a parcela não linear deste tensor deformação, τ_{ij} o tensor tensão de Cauchy, $R^{(t)}$ e $R^{(t+\Delta t)}$ o trabalho virtual devido ao carregamento externo para uma configuração de referência conhecida e um configuração de referência desconhecida, respectivamente. O lado esquerdo da eq. (19) pode ser expresso de acordo com a eq. (20) e a eq. (21).

$$\int_V C_{ijkl}\Delta e_{kl}\delta\Delta e_{ij}\, dV = \int_V \varepsilon_{xx}.E\delta\varepsilon_{xx}\, dV + \int_V \gamma_{xy}.G\delta\gamma_{xy}\, dV \tag{20}$$

$$\int_V \tau_{ij}\,\Delta\eta_{ij} dV = \int_V \tau_{xx}\delta\eta_{xx}\, dV + \int_V \tau_{xy}\delta\eta_{xy}\, dV \tag{21}$$

Considerando a teoria de flexão de Timoshenko, as parcelas linear e não linear do tensor deformação de Green-Lagrange podem ser escritas com a eq. (22) e a eq. (23), respectivamente.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - y\frac{\partial \theta_Z}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial x} - \theta_Z \tag{22}$$

$$\begin{gathered}\eta_{xx} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + y^2\left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x}\right)^2\right) - y\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \theta_z}{\partial x} \\ \eta_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = y\frac{\partial \theta_z}{\partial x}\theta_z - \theta_z\frac{\partial u}{\partial x}\end{gathered} \tag{23}$$

Assim, a parcela linear do princípio dos trabalhos virtuais, eq. (20), resultará na eq. (24).

$$\begin{gathered}\delta U = \int_A\left(\int_0^L\left(\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial \theta_z}{\partial x}\right)E\left(\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial \theta_z}{\partial x}\right)dx\right)dA + \int_A\left(\int_0^L\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \theta_Z\right)G\left(\delta\frac{\partial v}{\partial x} - \delta\theta_Z\right)dx\right)dA \\ \delta U = \left(\int_0^L \frac{\partial u}{\partial x}\delta\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)EA + \left(\int_0^L \frac{\partial \theta_Z}{\partial x}\delta\frac{\partial \theta_Z}{\partial x}dx\right)EI_z + \left(\int_0^L \frac{\partial v}{\partial x}\delta\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)GA + \left(\int_0^L \theta_Z\delta\theta_Z dx\right)GA + \\ -\left(\int_0^L \theta_Z\delta\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)GA - \left(\int_0^L \frac{\partial v}{\partial x}\delta\theta_Z dx\right)GA\end{gathered} \tag{24}$$

Escrevendo-se a eq. (24) utilizando as funções de forma, obtém-se a eq. (25).

$$\begin{aligned}\delta U_1 = &\{\delta u\}^T \int_0^L EA\{N_u'\}\{N_u'\}^T dx\{u\} + \{\delta v\}^T \int_0^L EI_z\{N_{\theta z}'\}\{N_{\theta z}'\}^T dx\{v\} + \\ &\{\delta v\}^T \int_0^L GA\{N_v'\}\{N_v'\}^T dx\{v\} + \{\delta v\}^T \int_0^L GA\{N_{\theta z}\}\{N_{\theta z}\}^T dx\{v\} + \\ &-\{\delta v\}^T \int_0^L GA\{N_{\theta z}\}\{N_v'\}^T dx\{v\} - \{\delta v\}^T \int_0^L GA\{N_v'\}\{N_{\theta z}\}^T dx\{v\}\end{aligned} \tag{25}$$

Usando as funções de interpolação desenvolvidas e apresentadas na eq.(18), a eq. (25) resultará na matriz “elastica” do elemento. Esta matriz não pode ser considerada totalmente como elástica, porque a influência da carga axial está presente nesta matriz com o parâmetro Λ, uma vez que as funções de interpolação já possuem essa influência em sua construção.

Por outro lado, a eq. (21) sera escrita de acordo com a eq. (26) e pela eq. (27) usando funções de interpolação.

$$\begin{aligned}\delta U_{NL} = &\int_A \left(\int_0^L t_{xx}\delta\left(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + y^2\left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x}\right)^2 \right) - y\frac{\partial \theta_z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \right) dA + \\ &+\int_A \left(\int_0^L t_{xy}\delta\left(y\frac{\partial \theta_z}{\partial x}\theta_z - \theta_z\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \right) dA\end{aligned}$$

$$\delta U_{NL} = \frac{1}{2}\int_0^L \left[P\delta\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \right) + P\frac{I_z}{A}\delta\left(\left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x}\right)^2 \right) \right] dx + \int_0^L \left[M_z\delta\left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} \right) - Q_y\delta\left(\theta_z\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] dx \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\delta U_{NL} = &\{\delta u\}^T \int_0^L P\{N_u'\}\{N_u'\}^T dx\{u\} + \{\delta v\}^T \int_0^L P\{N_v'\}\{N_v'\}^T dx\{v\} \\ &+\{\delta v\}^T \int_0^L P\frac{I_z}{A}\{N_{\theta z}'\}\{N_{\theta z}'\}^T dx\{v\} \\ &+\{\delta v\}^T \int_0^L M_z\{N_{\theta z}'\}\{N_u'\}^T dx\{u\} + \{\delta u\}^T \int_0^L M_z\{N_u'\}\{N_{\theta z}'\}^T dx\{v\} + \\ &-\{\delta v\}^T \int_0^L Q_y\{N_{\theta z}\}\{N_u'\}^T dx\{u\} - \{\delta u\}^T \int_0^L Q_y\{N_u'\}\{N_{\theta z}\}^T dx\{v\}\end{aligned} \tag{27}$$

Dessa forma, mais uma vez, usando as funções de interpolação desenvolvidas anteriormente e apresentadas na eq.(18), a eq. (27) resulta na matriz “geométrica” do elemento. Neste caso, a influência da carga axial ocorre de duas formas, embutida nas funções de forma, também com o parâmetro Λ, como também na própria formulação Lagrangeana atualizada com o fator P. Finalmente, a matriz de rigidez tangente do elemento será dada pela soma da duas matrizes, a “elástica” na eq. (25), com a “geométrica” na eq. (27) .

5 Aplicações numéricas

Para validar a formulação apresentada neste trabalho, a carga crítica de flambagem de diferentes estruturas foi calculada. O elemento proposto ("TBT_Large_complete") foi implementado no programa computacional *Ftool* (Martha [24]), e os seus resultados foram comparados com a formulação convencional e com o *software Mastan2 v3.5* ("TBT_Mastan"), em todos os elementos foi considerado a teoria de flexão de Timoshenko. Para a formulação convencional sem considerar os termos de ordem elevada no tensor deformação, o elemento foi nomeado como "TBT_Small_2tr", enquanto que, foi chamado de "TBT_Large_2tr" (Rodrigues et al. [23]) ao se considerar os termos de ordem elevada no tensor deformação. Os mesmos exemplos estudados neste trabalho foram desenvolvidos em Rodrigues et al. [23] e em Silva et al. [25], em que se verificou a influência da teoria de flexão de Timoshenko como também da consideração dos termos de ordem elevada no tensor deformação.

5.1 Carga crítica de coluna simplesmente apoiada

O primeiro exemplo avalia a formulação desenvolvida para descrever o comportamento de uma coluna simplesmente apoiada. A coluna possui comprimento de $L = 1m$, um fator de forma da seção transversal de $\chi = 1$, Módulo de Young de E=10^7 kN/m^2 e coeficiente de Poisson nulo ($\nu = 0$), Figura 3. A estrutura foi modelada com apenas um elemento para descrever a coluna, enquanto que a resposta adotada como referência foi feita com uma discretização de 5 elementos (Rodrigues et al. [23]).

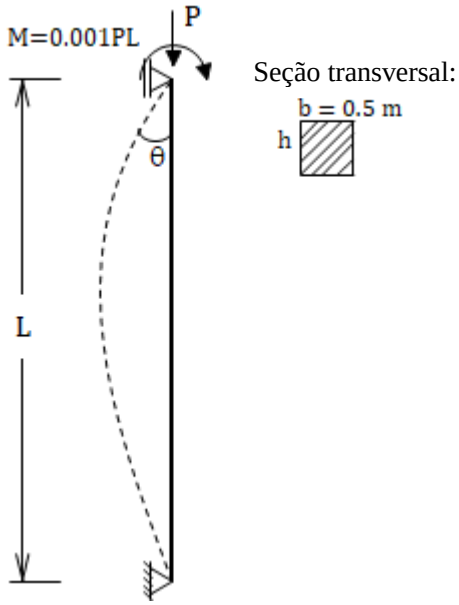

Figura 3 – Coluna simplesmente apoiada

Para verificar a influência da teoria de flexão de Timoshenko na resposta da estrutura, um reduzido índice de esbeltez foi adotado ($\lambda = L/h$). De acordo com Rodrigues et al. [23] ao se analisar um elemento com índice de esbeltez $\lambda = 4{,}0$, diferenças consideráveis ao se considerar a teoria de flexão de Timoshenko são obtidas, e ainda, este índice de esbeltez não é totalmente distante da realidade e podem existir elementos com essa característica. Assim, os resultados obtidos são demonstrados na Figura 4.

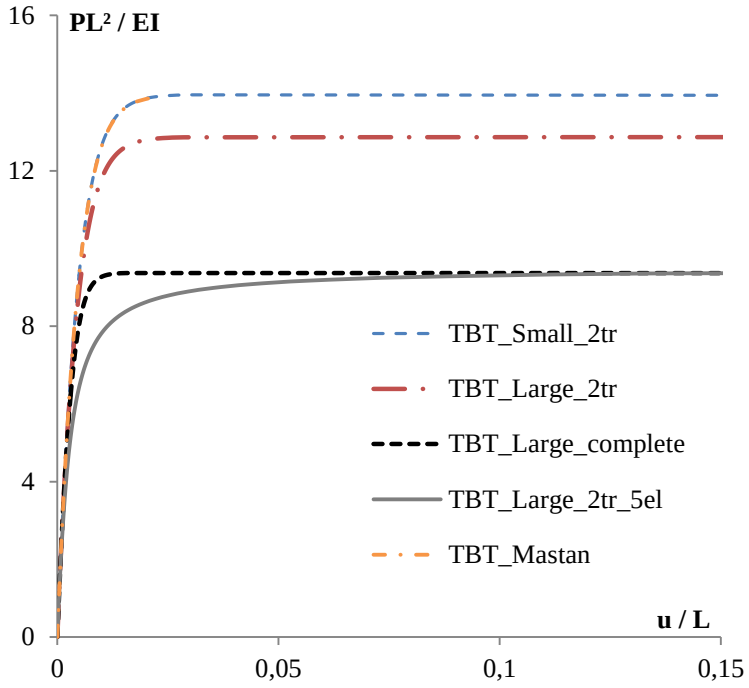

Figura 4 – Curvas de equilíbrio para coluna simplesmente apoiada

A partir das curvas de equilíbrio apresentadas, pode-se verificar que ao se modelar a coluna empregando apenas um elemento, a melhor resposta é obtida pelo elemento desenvolvido neste trabalho (TBT_Large_complete). A trajetória fornecida por este elemento se aproxima consideravelmente da curva resposta (discretizada com 5 elementos), e ainda, a carga crítica de flambagem da coluna é a mesma obtida. As outras formulações fornecem cargas críticas com valores bem superiores ao real. Também pode-se observar a influência da consideração dos termos de ordem elevada no tensor deformação na resposta da estrutura (Large), uma vez que o seu emprego reduz a carga crítica de flambagem.

5.2 Carga crítica de viga-coluna

O segundo estudo verifica o elemento formulado para analisar uma viga-coluna com dois vãos, Figura 5. As propriedades geométricas da estrutura são as mesmas do exemplo anterior (comprimento $L = 1m$, fator de forma da seção transversal $\chi = 1$), e as propriedades do material também são as mesmas (módulo de Young E=10^7 kN/m^2, coeficiente de Poisson nulo, $\nu = 0$). Para avaliar a matriz de rigidez tangente desenvolvida, ambos os vãos são modelados utilizando apenas um elemento em cada, e a resposta encontrada foi comparada com uma formulação convencional e uma discretização de 5 elementos por vão, conforme elaborado em Rodrigues et al. [23].

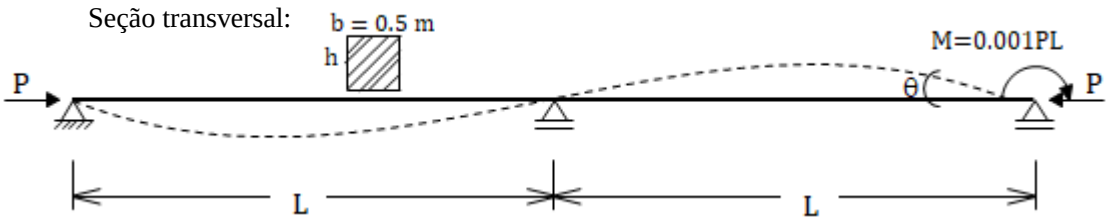

Figura 5 – Viga-coluna

Também como no exemplo anterior, foi considerado um índice de esbeltez $\lambda = 4{,}0$, de maneira que a influência da teoria de flexão de Timoshenko seja mais perceptível, e também, dos termos de ordem elevada no tensor deformação. Os resultados são apresentados na Figura 6.

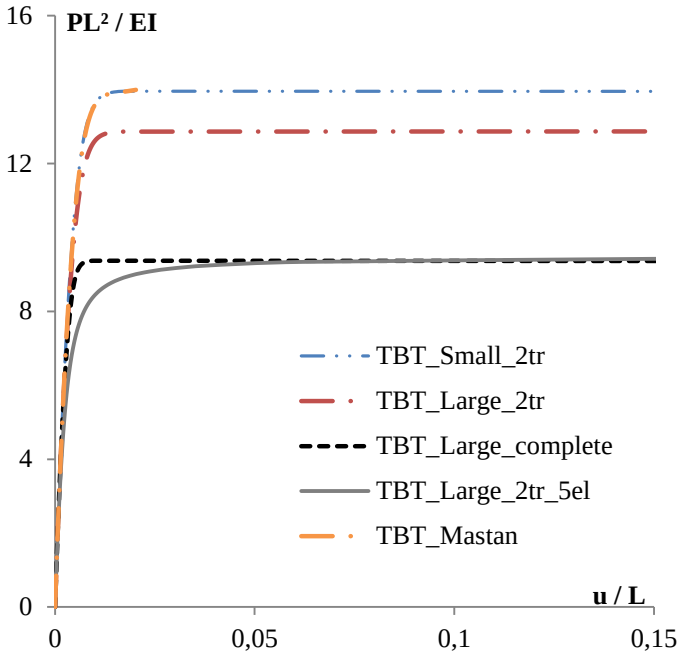

Figura 6 – Curvas de equilíbrio para viga-coluna

A partir da análise da Figura 6, pode ser observado que o elemento desenvolvido neste trabalho (TBT_Large_complete) fornece resultados melhores para a resposta da estrutura, ou seja, utilizando apenas um elemento por vão, a formulação proposta obteve o mesmo resultado para a carga crítica de flambagem da viga-coluna, e a trajetórioa de equilíbrio deste elemento sobrepõe a curva de equilíbrio da formulação convencional utilizando discretização de 5 elementos por barra / vão. Este exemplo também mostra claramente a importância da consideração dos termos de ordem elevada do tensor deformação para a formulação de um elemento, uma vez que a carga crítica tem uma significativa redução ao se empregar estes termos.

5.3 Carga crítica de pórtico de Roorda

O último exemplo examina a carga crítica de flambagem de um pórtico de Roorda com a formulação desenvolvida neste trabalho. O portico analisado é mostrado na Figura 7. As propriedades geométricas são as mesmas utilizadas nos exemplos anteriores, comprimento $L = 1m$, fator de forma de seção transversal $\chi = 1$, módulo de Young E=10^7 kN/m^2 e coeficiente de Poisson nulo ($\nu = 0$). Para validar o potencial do element formulado, a estrutura foi discretizada com apenas um elemento por barra. A resposta da estrutura também foi comparada com os resultados encontrados por Rodrigues et al. [23] utilizando uma discretização de 5 elementos por barra.

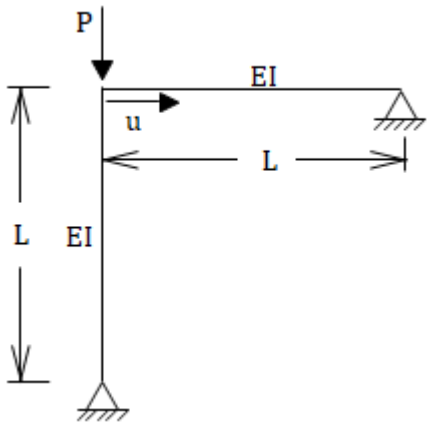

Figura 7 – Pórtico de Roorda

Os resultados considerando um índice de esbeltez de $\lambda = 4{,}0$ são mostrados na Figura 8.

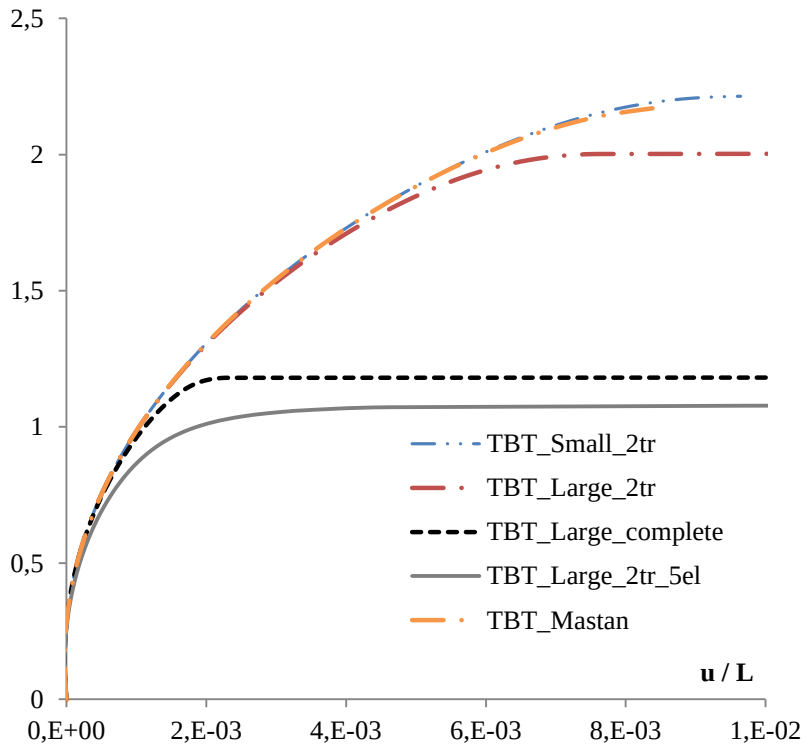

Figura 8 – Curvas de equilíbrio para pórtico de Roorda

As curvas de equilíbrio mostram que o elemento desenvolvido neste trabalho (TBT_Large_complete), empregando apenas um element por barra, fornece resultados satisfatórios para predizer o comportamento não linear geométrico do pórtico, pois a resposta dada pelo elemento é próximo a curva de equilíbrio obtida com uma estrutura mais discretizada (5 elementos por barra), e a diferença entre a carga crítica de flambagem para essas duas formulações é aceitável, menor do que 10%.

Entretanto, empregar a formulação usual com apenas um elemento por barra fornece resultados contrários a segurança, com erro na carga crítica de flambagem da ordem de 100%. A Figura 8 também mostra que não considerar os termos de ordem elevada no tensor deformarção eleva o erro desta carga crítica.

6 Conclusões

Uma matriz de rigidez tangente completa foi desenvolvida para realizar análises não lineares geométricas, essa matriz é calculada considerando uma formulação Lagrangeana atualizada e usando funções de interpolação calculadas diretamente da solução homogênea da equação diferencial do problema. Para reduzir o efeito da influência da discretização da estrutura nos resultados, o problema considera o equilíbrio de um elemento infinitesimal deformado, dessa forma, as funções de interpolação dependem da carga axial atuante no elemento, e consequentemente a matriz de rigidez também. A formulação desenvolvida neste trabalho também considera a deformação por cisalhamento, ou seja, a teoria de flexão de Timoshenko. Além disso, a matriz de rigidez tangente é obtida utilizando todos os termos do tensor deformação, inclusive os de ordem elevada.

As aplicações numéricas apresentadas claramente demonstram a eficiência e a independência de discretização da formulação desenvolvida, uma vez que, ao se empregar apenas um elemento por barra em uma estrutura resultados satisfatórios são obtidos para a curva de equilíbrio e para a carga crítica da estrutura. Os exemplos também evidenciam a importância de formular elementos considerando a

influência da deformação por cisalhamento e dos termos de ordem elevada no tensor deformação de Green-Lagrange, pois esses efeitos geram uma redução significativa na carga de flambagem da estrutura.

Futuros trabalhos utilizam a abordagem apresentada para desenvolver elementos completos em um contexto espacial (elementos 3D), considerando os efeitos e não linearidades apresentadas, e adicionando-se ao problema a influência da interação entre torção e carga axial, assim como, das rotações finitas.

Agradecimentos

Esse trabalho foi parcialmente financiado pelo Centro Tecnológico da UFES, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ) e pela FAPERJ..

Referências

[1] A. K. W. So and S. L. Chan. Buckling and geometrically nonlinear analysis of frames using one element / member. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 20, p. 271–289, 1991.
[2] R. B. Burgos; R. R. Silva and L. F. Martha, 2005. Avaliação de Cargas Críticas e Comportamento Pós-Crítico Inicial de Pórticos Planos. In: *XXXV Iberian Latin American Congres on Computational Methods in Engineering*, Guarapari, ES, Brasil.
[3] W. F. Chen and E.M. Lui, *Stability design of steel frames*. CRC Press, Boca Raton, USA, 1991.
[4] J. D. Aristizábal-Ochoa. Matrix method for stability and second-order analysis of Timoshenko beam-column structures with semi-rigid connections. *Engineering Structures*, vol. 34, p. 289-302, 2012.
[5] J. D. Aristizábal-Ochoa. Slope-deflection equations for stability and second-order analysis of Timoshenko beam-column structures with semi-rigid connections. *Engineering Structures*, vol. 30, p. 2517-2527, 2008.
[6] J. D. Aristizábal-Ochoa. First- and second-order stiffness matrices and load vector of beam-columns with semirigid connections. *Journal of Structural Engineering*, vol. 123, n. 5, p. 669-678, 1997.
[7] L. Yunhua. Explanation and elimination of shear locking and membrane locking with field consistence approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 162, p. 249-269, 1998.
[8] Y. Q. Tang; Z. H. Zhou and S. L. Chan. Nonlinear beam-column element under consistent deformation. *World Scientific Publishing Company*, vol. 15, n.5, p. 123–144, 2015.
[9] Y. Goto and W. F. Chen. Second-order elastic analysis for frame design. *Journal of Structural Engineering*, vol. 113, n. 7, p. 1501-1519, 1987.
[10] S. L. Chan and J. X. Gu. Exact tangent stiffness for imperfect beam-column members. Journal of Structural Engineering, vol. 126, n. 9, p. 1094-1102, 2000.
[11] M. A. C. Rodrigues; R. B. Burgos; L. F. Martha and M. V. B. Santana, 2017. Avaliação de uma formulação completa da matriz de rigidez para análise não linear de estruturas. In: *XXXVIII Iberian Latin American Congres on Computational Methods in Engineering*, Florianópolis, SC, Brasil.
[12] R. Davis; R. D. Henshell and G. B. Warburton. A Timoshenko beam element. *Journal of Sound and Vibration.* v. 22, n. 4, p. 475-487, 1972.
[13] W. K. Nukulchai; P. H. Dayawansa and P. Karasudhi. An exact finite element model for deep beams. *International Journal of Structures*, vol. 1, n. 1, p. 1-7, 1981.
[14] G. Onu. Finite elements on generalized elastic foundation in Timoshenko beam theory. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 134, n. 9, p. 763-776, 2008.
[15] K. Morfidis. Exact matrices for beams on three-parameter elastic foundation. *Computers and Structures*, vol. 85, pp. 1243–1256, 2007.

[16] R. B. Burgos and L. F. Martha, 2013. Exact shape functions and tangent stiffness matrix for the buckling of beam-columns considering shear deformation. In: *XXXIV Iberian Latin American Congres on Computational Methods in Engineering*, Pirenópolis, GO, Brasil.
[17] K. J. Bathe and S. Bolourchi. Large displacement analysis of three-dimensional beam structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* v. 14, p. 961-986, 1979.
[18] K. J. Bathe. *Finite element procedures*. Prentice-Hall, Englewoods Cliffs, NJ USA, 1996.
[19] W. Mcguire; R. H. Gallagher and R. D. ziemian. *Matrix structural analysis*. John Wiley & Sons Inc, NY, USA, 2000.
[20] Y. B. Yang and L. J. Leu. Non-linear stiffnesses in analysis of planar frames. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 117, p. 233-247, 1994.
[21] Y. B. Yang and S. R. Kuo. *Theory & analysis of nonlinear framed structures*, Prentice Hall, Simon & Schuster (Asia) Pte ltd, Singapura, 1994.
[22] D. C. Chen. Geometric nonlinear analysis of three-dimensional structures. Msc Thesis, University of Cornell, Ithaca, NY, 1994.
[23] M. A. C. Rodrigues; R. B. Burgos and L. F. Martha. A Unified Approach to the Timoshenko Geometric Stiffness Matrix Considering Higher-Order Terms in the Strain Tensor. *Latin American Journal of Solids and Structures.* v. 16, n. 4, p. 1-22, 2019.
[24] L. F. Martha. Ftool: A structural educational interactive tool. *Proceedings of Workshop in Multimedia Computer Techniques in Engineering Education*, Institute for Structural Analysis, Technical University of Graz, Austria, p. 51-65, 1999.
[25] J. L. Silva; I. J. M. Lemes; R. A. M. Silveira and A. R. D. Silva, 2016. Influência da teoria de viga na análise geometricamente não linear de estruturas reticuladas. In: *XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Brasilia, Brasil.