AUTOMATIC GENERATION OF TOPOLOGY ENVELOPES APPLIED IN STRUT AND TIE MODELS USING MULTIOBJECTIVE OPTIMIZATION TECHNIQUES

João da Costa Pantoja[a], Luiz Eloy Vaz[a], Luiz F. Martha[b] e Paul A. Antezana[b]

[a]*Department of Civil Engineering, Federal Fluminense University, Rua Passo da Pátria, 156, Bloco D, sala 468, São Domingos, 24210-240, Niterói, RJ, Brazil, http://www.engenharia.uff.br*

[b]*Department of Civil Engineering, Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro, Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea, 22453-900, Rio de Janeiro, RJ, Brazil, www.civ.puc-rio.br*

Keywords: Topology Optimization, Multiobjective Optimization, Pareto Surface.

Abstract. The proposal of this work is the development of a methodology that uses an algorithm of topology optimization with multiobjective optimization technic, for automatic generation of a topology set of an envelope that may represent a viable region in the bi-dimensional concrete structures using strut-and-tie model. Due to a realistic variation of project loadings some objective functions are required and a Pareto frontier should be built. That is performed using an appropriate optimization algorithm. Two problems of bi-dimensional concrete structures are submitted to multiple loadings, after analysis is presented and the correspondent viable regions obtained, confirming the validity of the methodology.

1 INTRODUÇÃO

Em geral, a resposta de uma determinada estrutura aos carregamentos aplicados e de suas correspondentes condições de apoio, pode levar a uma distribuição interna de deformações linear ou não. Isso ocorre quando a estrutura possui alguma forma geometricamente descontínua ou carregamento concentrado. Áreas com uma distribuição linear de deformações são conhecidas como regiões B *(Bernoulli*) enquanto que áreas como distribuições não lineares são denominadas regiões D (*Discontinuity*) conforme proposto por Schlaich et al. (1987). Regiões D são pontos estruturais críticos sujeitos a danos, onde fenômenos do tipo fissuração podem ocorrer. Sendo assim, os códigos normativos relativos a estruturas de concreto de vários países como EUA, Alemanha, Espanha entre outros, propõem projetos separados para regiões B e D de modo a garantir eficiência e economia aos mesmos.

Na aplicação prática de projetos estruturais, os critérios utilizados no projeto de regiões B já são bastante conhecidos e difundidos. No entanto, o projeto de regiões D é executado com base na experiência ou por decisões baseadas no conhecimento estrutural do projetista responsável pelo projeto. O modelo de bielas e tirantes introduzido por Schlaich et al (1987) é uma alternativa bastante interessante para o projeto de regiões D. Essa metodologia têm uma série de vantagens (Silva et al,. 2000) e suas orientações tem sido utilizadas frequentemente pelos códigos normativos de vários países.

Um projeto estrutural baseado no modelo de bielas e tirante aplicado de modo convencional requer um procedimento de tentativa e erro que é orientado principalmente pela experiência e decisões dos projetistas envolvidos de forma a garantir o funcionamento correto e a segurança das regiões D. Apesar do modelo de bielas e tirantes ser conceitualmente simples, sua aplicação na forma discreta não é na maioria das vezes intuitiva. A direção e espessura das bielas e a posição dos tirantes são determinadas pelas linhas de tração e compressão das tensões principais e calculadas através da análise linear de elementos finitos de barras (treliças). Contudo, na prática é bastante penoso o lançamento de um modelo de treliça quando a distribuição de tensões é complexa devido à ocorrência de múltiplos carregamentos e condições de contorno especiais.

De modo a reduzir o processo de tentativa e erro no modelo de bielas e tirantes e melhorar sua eficiência nas situações onde existam perturbações nas tensões, foi introduzida a ideia de projeto ótimo. Desde então, uma série de métodos de otimização topologia de elementos de treliça têm sido desenvolvidos e utilizados para avaliação dos modelos de treliça nas estruturas de concreto armado (Ali et al. 2001, Biondini 2001). Métodos dessa natureza porém, possuem a desvantagem de necessitarem de uma geração inicial de barras dentro do domínio de projeto. Também a direção do fluxo de forças fica condicionada as direções das barras previamente definidas.

De maneira a ultrapassar os problemas dos métodos discretos, alguns métodos de otimização topológica do contínuo foram então propostos (Bendsøe e Kikuchi, 1988 e Xie and Steven, 1993). Nesse estudo um método de otimização topológica de material denominado SIMP (*Solid Isotropic Microstructure Penalization*) é utilizado na obtenção das topologias ótimas dos modelos de bielas e tirantes a serem empregados em estruturas planas de concreto armado. A estratégia de obtenção de topologia é baseada na remoção de áreas ineficazes para rigidez da estrutura através de um método de tentativa e erro, que conduz a uma estrutura de barras (treliça) apropriada à aplicação do método das bielas e tirantes. Também uma otimização multiobjetivo é aplicada para generalizar a topologia do modelo.

2 GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MODELOS DE BIELAS E TIRANTES

Atualmente uma série de trabalhos tem sido feitos no sentido de automatizar a concepção do modelo de bielas e tirantes dentro da estrutura de concreto. Isso se deve a problemática de dispor de forma a mais adequada possível os elementos dentro da estrutura levando a um modelo eficiente. Essa tarefa nem sempre é simples e em alguns casos onde a geometria é complexa, pode ser bastante difícil uma solução coerente. Isso poderia conduzir a modelos inseguros uma vez que não representem o funcionamento correto da estrutura.

Assim a perspectiva de uma metodologia que auxilie o projetista estrutural nessa tarefa pode ser bastante interessante do ponto de vista da utilização do modelo. Uma explicação bastante completa e que abrange uma série de trabalhos nesta área de pesquisa e suas principais características pode ser encontrado em Souza (2004). Nesse trabalho apenas serão mostrados apenas aspectos relativos à utilização da otimização topológica nesse tipo de modelagem.

3 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA (OT)

Otimização topológica pode ser entendida como um método computacional capaz de sintetizar estruturas através da distribuição de material em uma determinada região do espaço. Para isso utilizada da combinação do método dos elementos finitos (MEF) e os métodos de otimização. Assim, uma região do espaço é discretizada em elementos finitos de modo que se possa analisar seu comportamento, e então, é distribuído material de forma racionalizada através de algoritmos de otimização.

Uma vantagem da otimização topológica é sua capacidade de fornecer o layout ótimo de um componente estrutural ou mesmo da própria estrutura, para certa aplicação. Assim, este método pode ser aplicado durante a fase do projeto conceitual, diferentemente dos métodos tradicionais de otimização, como a otimização paramétrica ou de forma, que só podem ser aplicados após a definição do layout da estrutura. Desse modo, a otimização topológica pode ser definida como um processo de síntese estrutural.

Um problema típico de otimização topológica é a seleção da melhor configuração possível para o projeto de uma estrutura. Na última década, muita atenção em sido dada para o desenvolvimento dos métodos de otimização topológica do contínuo. Bendsoe & Kirkuchi (1988) propuseram um método otimização baseado em homogeneização que trata a otimização topológica do contínuo como um problema de redistribuição dos materiais. Atualmente existem uma série de técnicas utilizadas na resolução dos problemas de otimização topológica. A adotada neste trabalho é a formulação SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*).

A formulação via método SIMP surgiu como uma opção simples de introduzir o material com propriedades intermediárias similares às que se obtêm com o uso de microestruturas e técnicas de homogeneização. No entanto, no caso da metodologia SIMP, este material intermediário, normalmente definido na forma de densidade artificial, é usado apenas como artifício matemático enquanto na técnica de homogeneização o material intermediário pode corresponder a um material composto ou microestruturado. A função densidade artificial definida pelo SIMP é então utilizada como variável de projeto, definida no domínio Ω, no intuito de determinar quais regiões devem possuir material e quais devem ser vazias.

Considerando a necessidade de definição de regiões vazias ou não, representa-se o material sólido como uma densidade artificial $\rho = 1$ e o vazio $\rho = 0$, variando ρ entre estes dois limites. No presente contexto, as densidades artificiais intermediárias não têm nenhum interesse prático, logo técnicas que penalizem estes valores devem ser utilizadas no intuito de se evitar a incidência deste tipo de região no domínio analisado.

3.1 Metodologia SIMP

No problema de otimização a ser considerado, a variável de projeto x^e representa a densidade relativa do material em cada elemento e, assim $\rho = x^e \rho_0$. A densidade ρ é a densidade de apenas um elemento no domínio de projeto Ω. Caso o elemento do domínio seja sólido teremos $x^e = 1$. Podemos representar a rigidez para um elemento como $k^e = (x^e)^p k^0$. Assim, a formulação via flexibilidade ou energia de deformação da estrutura será:

$$C = F^T u = u^T k\, u = \sum_{e=1}^{N} u^e k\, u^e = \sum_{e=1}^{N} x^p u^e k^0\, u^e \tag{1}$$

O número de elementos será denominado N e p é um fator de penalidade. Fazendo o fator de penalidade igual à unidade, elementos com densidades intermediárias irão ocorrer com freqüência. Fazendo o fator de penalidade igual a 3, de uma forma contrária, o projeto final conterá elementos que estão totalmente preenchidos de material(sólido) ou com nenhum material(vazio). Esta formulação é normalmente denominada como problemas do tipo 0-1. O volume de material V pode então ser representado então na forma:

$$V = x^T v \tag{2}$$

Denominaremos de V_0 o volume do domínio de projeto. Podemos então partir para formulação de um problema de otimização onde queremos minimizar a flexibilidade ou a energia de deformação da estrutura, na forma:

Minimizar: $C = F^T u$

Sujeito a:

$$f = \frac{V}{V_0} \quad \text{(Restrição de volume)}$$

$$F = k \cdot u \quad \text{(Restrição de Equilíbrio)} \tag{3}$$

$$0 < x_{min} \leq x^e \leq x_{max} \quad \text{(Restrições Laterais)}$$

Podemos notar que x_{min} e $x_{\max}$ serão os limites inferiores e superiores da variável de projeto. Neste caso, escolheremos $x_{max} = 1$ e $x_{min} = 0.001$. A função do limite inferior é prevenir contra uma possível singularidade na matriz de rigidez da estrutura. Nos exemplos a serem apresentados a restrição na fração do volume final do domínio de projeto foi variada de forma a melhor se adequar ao estudo pretendido.

Na formulação SIMP algumas prerrogativas são feitas, de modo que as características do material, como por exemplo, o módulo de elasticidade, num elemento discreto é considerado constante. Se ρ_0 é a densidade inicial do elemento e ρ é a densidade após a otimização, então é preciso impor ao problema de otimização uma taxa de redução no volume de material existente representado pela relação entre as densidades na forma $\rho = \frac{\rho_e}{\rho_0}$. A restrição de volume apresentada no problema de otimização têm essa função.

As características do material dentro de um elemento podem ser modificadas através de uma relação exponencial na densidade do elemento. Se E_0 e E, são os módulos de elasticidade do elemento antes e depois da otimização, respectivamente, então vale a relação $E =$

$(\rho_e)^p E_0$. Se k_0e k, são a rigidez inicial e posterior à otimização, respectivamente, também a relação $k = (\rho_e)^p k_0$é válida. O parâmetro p têm a função de penalizar as densidades intermediárias, de maneira a decrescer o número de elementos com esse tipo de densidades e induzir que a maioria das densidades dos elementos fique entre 0 e 1.

Uma vez consideradas as pré-condições acima, cada elemento possui apenas uma variável de projeto. Comparado com o método da homogeneização, a formulação do método SIMP traz excelentes progressos na diminuição do número de variáveis de projeto. Outra vantagem do método SIMP é que as características do material após as modificações são escritas como uma função exponencial da densidade e das características do material no instante inicial da análise, sendo assim esta formulação, simplifica muito a solução da otimização topológica. Um diagrama de fluxo para formulação de um problema de otimização topológica via método SIMP é mostrado na Figura 3.9.

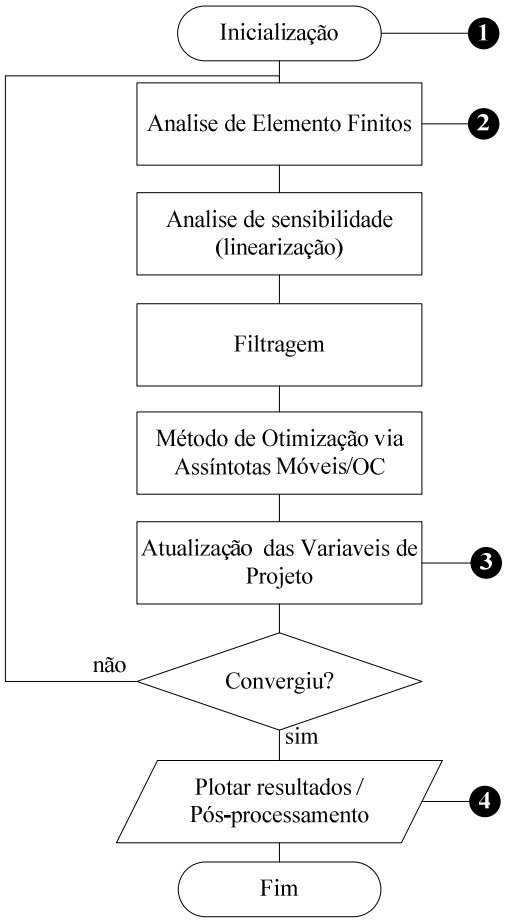

Figura 1: Diagrama de fluxo – Método SIMP

3.2 Envoltória topológica

Um problema existente na aplicação de topologias para modelos de bielas e tirantes é quando há mais de uma carga cujos valores relativos podem mudar, por exemplo, cargas acidentais não correlacionadas do tipo vento e carga móvel de uma ponte, podem ter intensidades diferentes. Sendo assim, cada par de valores relativos, levaria a uma nova topologia. Esse artigo apresenta uma metodologia para geração de um único modelo topológico que satisfaça as restrições de todos os possíveis casos de carga. Esse problema

pode ser formulado como um problema de otimização multiobjetivo cuja obtenção da topologia ótima deve passar pela geração e consideração de uma série de modelos topológicos ótimos diferenciados. Denominou-se a esse modelo final de envoltória topológica.

4 OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO

O projeto ótimo de aplicado a problemas reais muitas vezes envolve várias metas, na forma de funções objetivo, a serem aprimoradas e várias restrições a serem satisfeitas. No entanto, os algoritmos usualmente utilizados na literatura sobre otimização são capazes de resolver apenas problemas que possuam somente uma função objetivo. Problemas de otimização que resolvem simultaneamente várias funções objetivo são denominada como problemas de otimização multiobjetivo (Arora, 2006).

A estratégia mais usual nos problemas de otimização multiobjetivo é: O conceito de Pareto. No presente trabalho apenas a formulação através do conceito de Pareto será utilizada na obtenção das topologias ótimas.

4.1 Definição do problema

Um problema multiobjetivo (POM) pode ser expresso na forma:

$$\min_{x} F(x) = [f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_{nobj}(x)], nobj \geq 2 \tag{4}$$

Sujeito as seguintes restrições:

$$\begin{array}{ll} h_k(x) = 0 & k = 1, \dots, ne \\ g_i(x) \leq 0 & i = 1, \dots, ni \\ x_{lj} \leq x_j \leq x_{uj} & j = 1, \dots, npv \end{array} \tag{5}$$

onde:

- x → Vetor das variáveis de projeto;
- $F(x) \rightarrow Vetor\ das\ nobj\ funções\ objetivo\ a\ serem\ minimizadas;$
- $h_k(x)$ →Função restrição de igualdade;
- $g_i(x)$ →Função restrição de desigualdade;
- ne → Número de funções de igualdade;
- ni → Número de funções de desigualdade;
- npv → Número de variáveis de projeto;
- $\mathbb{R}^{nvp}$ → Espaço das variáveis de projeto;

4.2 Conceito de ótimo de Pareto

Nos problemas de otimização multiobjetivo encontrar um x^* que minimize várias funções objetivo simultaneamente é uma tarefa extremamente difícil. Uma forma de determinar uma solução que satisfaça em parte as equações presentes na otimização multiobjetivo está contida na definição de Otimalidade de Pareto segundo Arora (2006).

Pontos de Pareto são pontos x^P tais que não exista nenhum ponto x o qual:

$i)\ f_k(x) \leq\ f_k(x^P)$ para $k = 1, \ldots, n$
$ii)\ f_k(x) <\ f_k(x^P)$ para uma função objetivo a menos.

Os pontos de pareto apresentam a propriedade de que quando se movem na direção decrescente de uma das funções, pelo menos uma das outras funções restantes tem seu valor aumentado. Na Figura 2 podemos perceber isso, onde o ponto de ótimo de Pareto é qualquer ponto no intervalo $x_1 \leq x \leq x_2$. Também, devido às restrições, pode estar localizado ao longo do contorno da região viável.

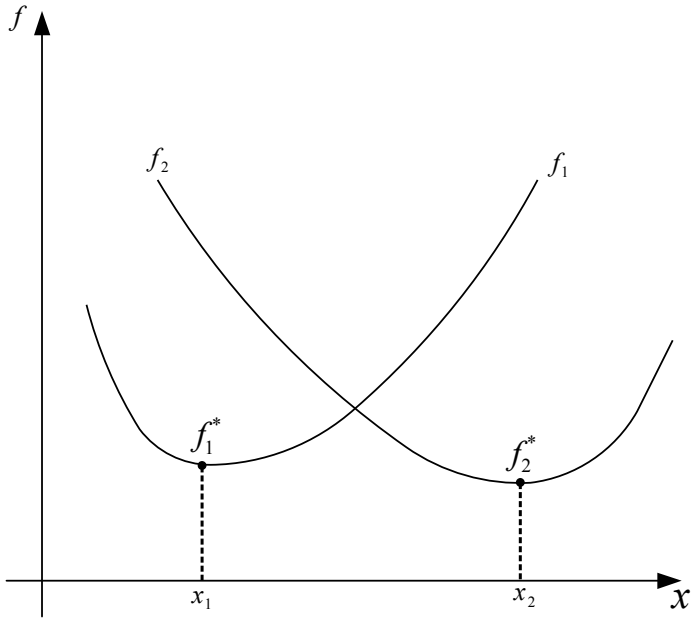

Figura 2: Problema de otimização com uma variável e duas funções objetivo

Em problemas de otimização multiobjetivo é muito importante formular o problema no espaço das funções objetivo. Isto pode ser feito usando-se um sistema de equações geradas pelas funções objetivo e conjunto das restrições ativas. Para cada projeto viável, haverá correspondentes valores das funções objetivo que definirão o espaço viável das funções objetivo. Sobre o seu contorno se localizam os pontos ótimos de Pareto. Na figura 3, um problema com duas variáveis de projeto e duas funções objetivo é mostrado. Em ambas as figuras, a linha tracejada representa os pontos ótimos de Pareto.
O interesse do projetista em problemas multiobjetivo é encontrar um vetor de variáveis de projeto x^* tal que as equações (4) e (5) sejam satisfeitas. Normalmente, pode não existir tal x^* devido ao aspecto de conflito comum entre as funções objetivo. Usando o conceito de Pareto, o projetista tem encontrar tantos pontos quanto possíveis. A partir desses pontos, será escolhido o projeto o qual irá satisfazer, mais adequadamente, cada função objetivo.

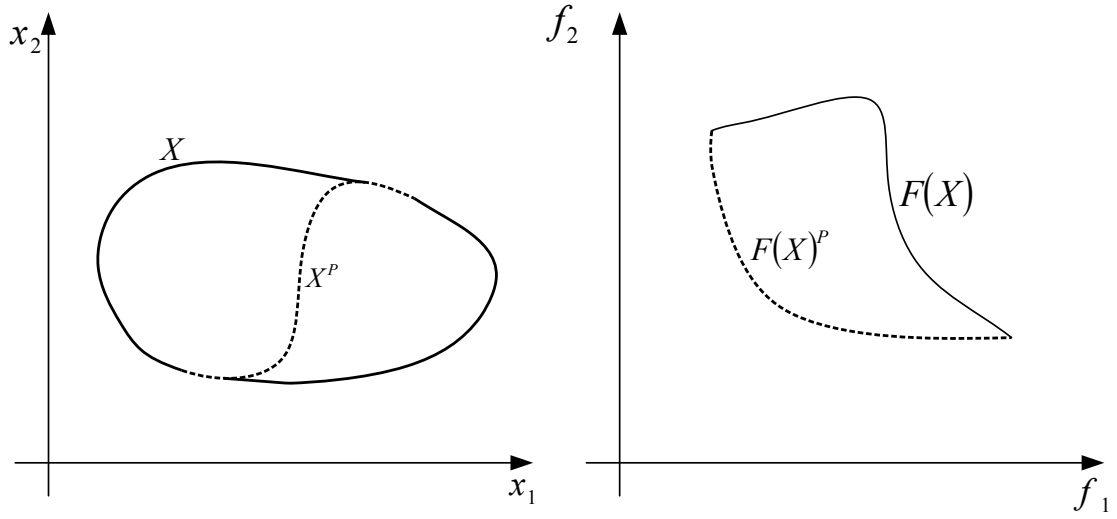

Figura 3: Região viável e pontos de Pareto no espaço das variáveis de projeto e no espaço das funções objetivo

4.3 Métodos de geração de pontos de Pareto

Neste trabalho apenas uma técnicas para geração dos pontos de Pareto será aplicada. Essa técnica será desenvolvida diretamente no algoritmo de otimização SIMP que através de uma geração contínua de pontos de projeto ótimos (par de valores relativos) com base combinação linear dos carregamentos. Esse método é conhecido como método dos coeficientes de ponderação (Ibañez 1990).

4.4 Método dos coeficientes de ponderação

No método dos coeficientes de ponderação um vetor λ, relativo aos coeficientes de ponderação, é definido de forma a modificar a função objetivo mediante o produto:

$$F = \alpha^T F = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k \tag{6}$$

onde os coeficientes do vetor λ são convenientemente normalizados de forma que cumpram:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k = 1 \ , 0 \leq \ \alpha_k \leq 1 \tag{7}$$

e f_{0k}é a função objetiva k no projeto inicial x_0.
A função F da Equação (6) é otimizada nesse método. Variando os coeficientes α_k, uma série de topologias aparecerá correspondente aos mínimos de Pareto. Esse método apresenta inconveniente quando o conjunto é não convexo, sendo esse o caso quando não é possível a obtenção de todos os valores de mínimo mediante a combinação linear da equação (6) conforme mostrado na Figura 3. A escolha dos valores dos coeficientes é muito importante uma vez que é necessário identificar completamente a geometria do conjunto de soluções. Problemas na obtenção dos pontos de Pareto através da utilização do método poderão surgir quando o contorno da região viável no espaço das funções for não-convexa, como mostra a figura 4. Neste caso, não existirá nenhum α_k, capaz de fornecer uma solução que esteja na

parte não-convexa.

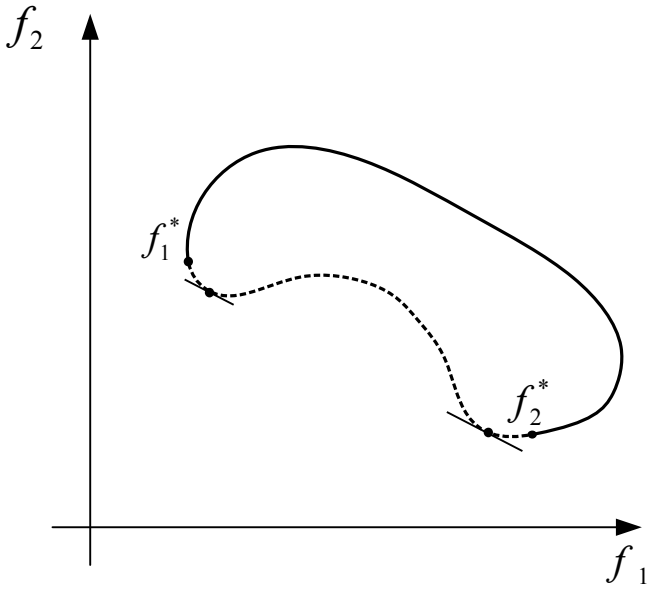

Figura 4: Região viável não-convexa no espaço das funções objetivo

5 APLICAÇÕES NUMÉRICAS E DISCUSSÕES

De modo a exemplificar a metodologia proposta dois exemplos foram escolhidos. São exemplos de estruturas planas com carregamentos aplicados nos nós e condições de apoio pré-definidas. Os carregamentos existentes nos exemplos sofreram uma variação linear nos valores sendo que para cada um dos pares de valores uma solução ótima para topologia foi obtida. Os parâmetros de cada exemplo relativos a refinamento da malha, fração do volume de material, raio de sensibilidade e etc, são descritos a seguir para cada caso específico. Para cada um dos exemplos uma envoltória de topologias é obtida com base nos resultados parciais. O modelo de bielas e tirantes então pode ser concebido levando em consideração todos os casos existentes de carregamentos. Uma vez que uma superfície de pontos do tipo Pareto foi construída, denominou-se a região geometricamente viável, obtida por todos os modelos de topologias considerados de envoltória topológica de Pareto.

Nos casos apresentados a seguir apenas dois carregamentos diferentes foram considerados. Isso simplifica consideravelmente o problema, pois a necessidade de outros carregamentos levaria a uma geração de pontos de Pareto mais sofisticada. No entanto, a metodologia proposta é bastante geral é pode ser utilizada de modo bastante eficaz na geração de modelo de bielas e tirantes.

5.1 Consolo curto com furo no centro

O primeiro exemplo considerado é uma estrutura de consolo curto com um buraco na sua região central e dois carregamentos atuantes P1 e P2. A carga P1 na parte superior do consolo no sentido vertical e a carga P2 na parte inferior no sentido horizontal conforme mostra a Figura 5. Um furo com diâmetro igual a L/4 foi considerado de forma centralizada na estrutura. Um engastamento foi considerado no lado esquerdo do consolo de modo a estabilizar a estrutura ao carregamento aplicado. Uma fração igual a 25% do volume inicial foi adotada conjuntamente com um raio de sensibilidade igual a 2. O parâmetro de penalização p foi tomado igual a 3. A geometria do consolo foi definida por uma malha com 50x50 elementos. Foram tomados também um módulo de elasticidade do material igual a 2.08

GPa e um coeficiente de Poisson igual a 0.15. Para o processo de otimização dos modelos foram considerados elementos de treliça conforme proposto por Kwak e Noh (2006) e como caso de carregamento a consideração de múltiplos carregamentos atuantes conforme mostrada por Bendsøe e Sigmund (2004).

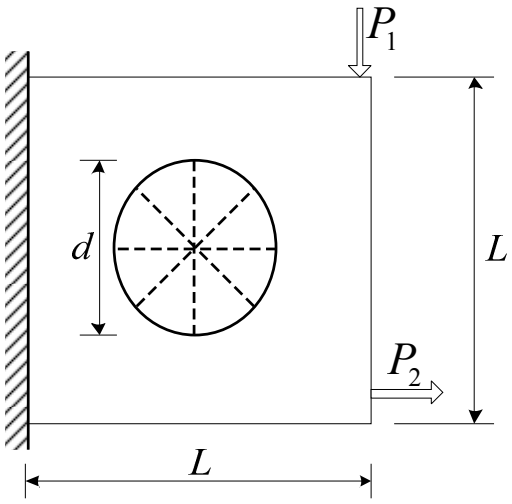

Figura 5: Geometria, cargas e condições de contorno do modelo 1.

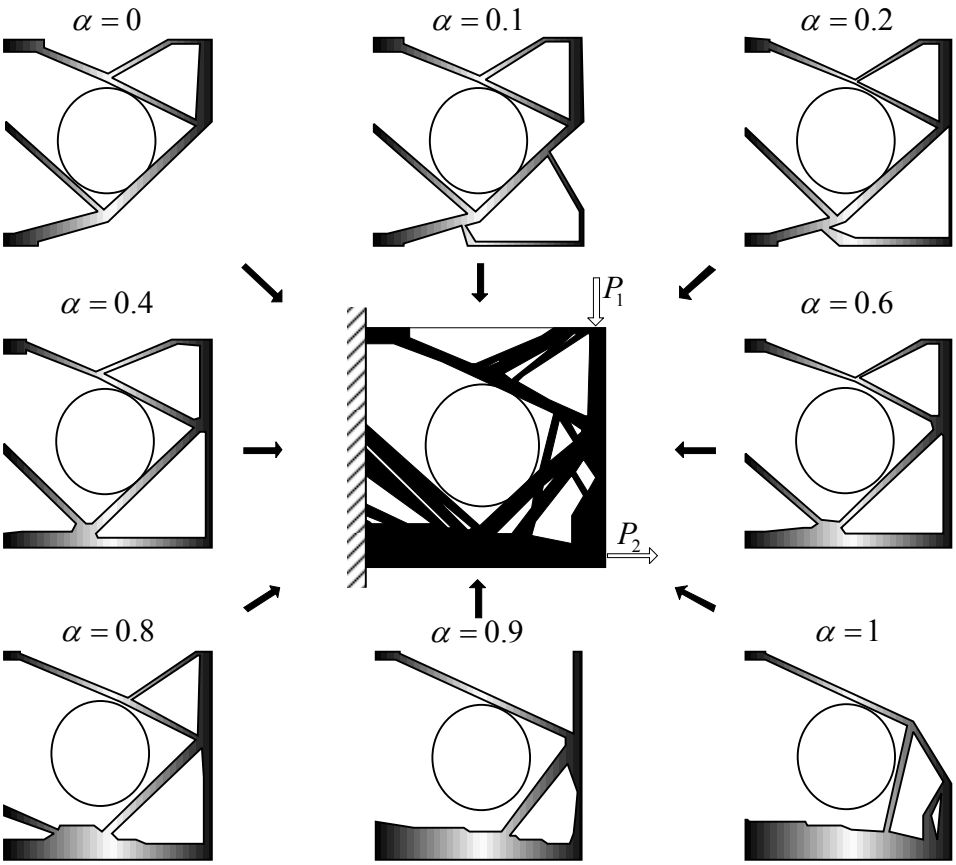

Figura 6: Topologias geradas pelos pontos de Pareto do modelo 1

A Figura 6 mostra as topologias obtidas para cada par de carregamentos entre P1 e P2

(superfície de Pareto). Cada um dos modelos topológicos obtidos representa um fluxo de forças que transfere o carregamento até o apoio. A influência da intensidade de cada uma das forças pode ser observada na mudança da topologia do modelo. O fator α representa o coeficiente da combinação linear entre cargas. Ao centro a envoltória topológica de Pareto para a estrutura do consolo é mostrada. Fica claro ser impossível cumprir com um único modelo topológico todas as possíveis combinações de carga.

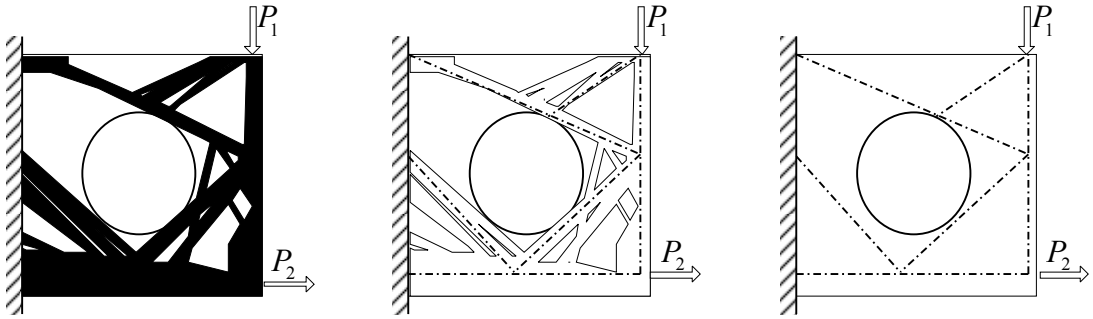

Figura 7: Envoltória topológica de Pareto e modelo de bielas e tirantes do modelo 1.

Uma vez obtida à envoltória topológica de Pareto é possível então propor um modelo generalizado que seja capaz de cumprir um encaminhamento ótimo independentemente da combinação de carga entre P1 e P2. Na Figura (7) é possível ver como a concepção do modelo topológico final é feita. A envoltória topológica de Pareto corresponde, na verdade, a uma região viável otimizada.

5.2 Viga parede com balanço e com furo no centro

O segundo exemplo corresponde a uma estrutura de viga parede com um balanço e um buraco na sua região central. Dois carregamentos atuantes P1 e P2 são aplicados na parte superior da viga conforme mostra a Figura 8. Um furo com diâmetro igual a d = L3/4 foi considerado de forma centralizada na estrutura. Um apoio de segundo gênero foi considerado no lado esquerdo da viga parede e um de primeiro gênero no lado direito de modo a estabilizar a estrutura ao carregamento aplicado. Uma fração igual a 25% do volume inicial e um raio de sensibilidade igual a 2 também foram considerados. Foi adotado um parâmetro de penalização p igual a 3. A malha da viga foi de 100x50 elementos. Similarmente ao exemplo 1, um módulo de elasticidade do material igual a 2.08 GPa e um coeficiente de Poisson igual a 0.15 foram adotados. Elementos de treliça e o caso de carregamentos múltiplos foram utilizados.

As diferenças topológicas apresentadas em cada caso de carregamento podem ser vista na Figura 9. O fluxo de forças fica realmente modificado à medida que a variação relativa entre forças é modificada. O conjunto de topologias, similarmente ao modelo 1, é utilizado para compor a envoltória topológica de Pareto. Um modelo completo que apresente uma quantidade necessária de barras deve ser posta dentro da região viável da envoltória topológica de Pareto. È possível observar a necessidade de um conjunto de barras internas (Fig. 9) que possam distribuir o encaminhamento de modo razoável até os apoios. Isso não é possível de ser observado sem a consideração da metodologia de otimização multiobjetivo com uso da superfície de Pareto.

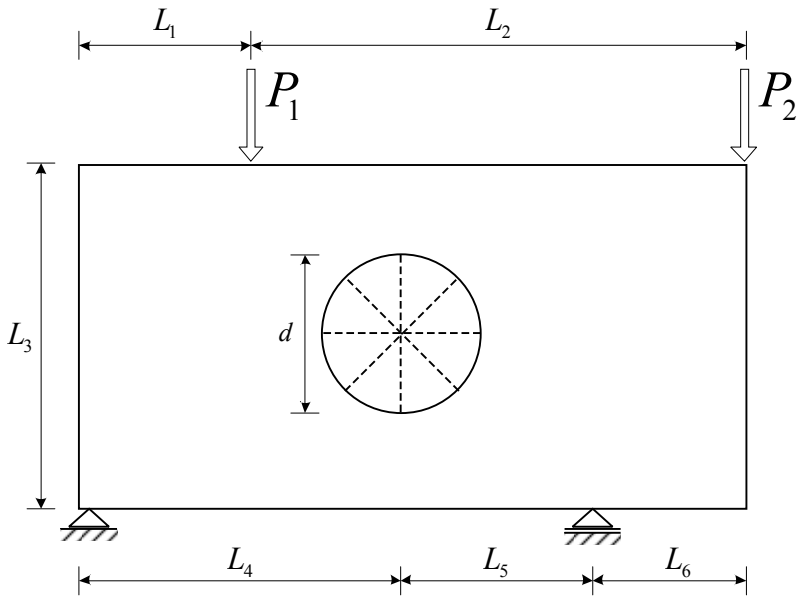

Figura 8: Geometria, cargas e condições de contorno do modelo 2.

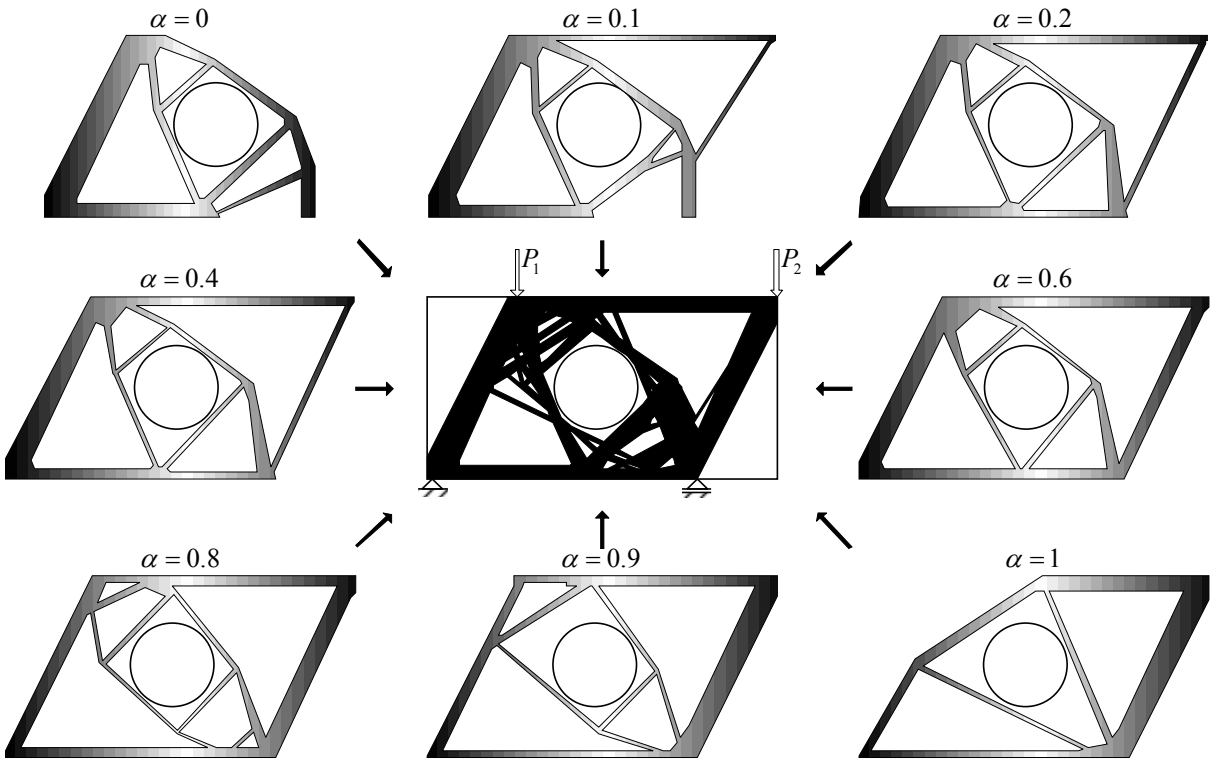

Figura 9: Topologias geradas pelos pontos de Pareto do modelo 2

Novamente, obtida a envoltória de Pareto é possível o lançamento da treliça ótima no interior da envoltória. Uma treliça que atenda ao carregamento aplicado é mostrada na Figura 10. As barras lançadas internamente são responsáveis pelo desvio no fluxo de forças devido à presença do furo no meio da estrutura. Também tirantes tanto na parte inferior como superior serão necessários.

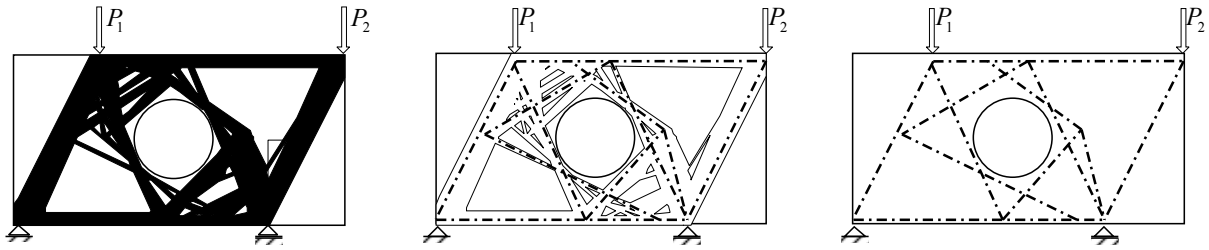

Figura 10: Envoltória topológica de Pareto e modelo de bielas e tirantes do modelo 2.

6 CONCLUSÕES

Uma metodologia para geração automática de modelo de bielas e tirantes utilizando um algoritmo de otimização topológica conjuntamente com técnicas de otimização multiobjetiva é introduzida nesse trabalho. Os exemplos numéricos mostram a aplicabilidade da metodologia na determinação de um modelo de bielas e tirantes ótimo que satisfaça os diversos casos de carregamentos envolvidos no problema. Claramente, o acoplamento dessa metodologia no projeto de estruturas de concreto via modelo de bielas e tirantes mostrou ser uma técnica viável para aplicações em projeto. O presente método se mostrou eficaz e possibilita um tratamento bastante prático e direto na geração automática de topologias do modelo de bielas e tirantes em estruturas de concreto armado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ali, M.A. and W.hite, R.N.," *Automatic generation of truss model of optimal design of reinforced concrete structures*", ACI Struct. J., Vol. 98(4), 431-442, 2001.

Arora, J.S. *Optimization of Structural and Mechanical Systems*. World Scientific. 2006.

Bendsøe, M.P. and Kikuchi, N.," Generating Optimal Topologies in Optimal Design using a Homogenization Method", Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 71, 197~224. 1988

Bendsøe, M. P. and Sigmund, O., *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*, Spring Verlang, Berlin Heildelberg., 2004.

Biondini, F. and Bontempi, F. and Malerba, P.G., " *Stress path adapting strut-and-tie models in cracked and uncracked R.C. elements*", Struct. Eng. Mech., Vol. 12(6), 685-698., 2001.

Ibañez, S. H. *Metodos de Diseño Optimo de Estructuras*. Coleccion Seinor, N. 8, Paraninfo S.A., 1990.

Kwak, H.G. and Noh, S.H.," *Determination of Strut-and-Tie Models using Evolutionary Structural Optimization*", Korean Society of Civil Engineers, Vol. 23(1), 1-11., 2003.

Liang, Q.Q., Xie, Y.M. and Steven, G.P.," *Topology optimization of strut-and-tie models in reinforced concrete structures using an evolutionary procedure*". ACI J., Vol. 97(2), 322-330., 2000.

Schlaich, J., Schaefer, K. and Jennewein, M., " *Toward a consistent design of structural concrete*". PCI J., Vol. 32(3), 75-105, 1987.

Silva, R. C. e Giongo, J. S. *Modelos de Bielas e Tirantes Aplicados a Estruturas de Concreto Armado*. Livro. Editora EESC-USP. São Carlos/SP. 2000.

Souza, R. A., *Concreto Estrutural: análise e dimensionamento de elementos com descontinuidades*. Tese de doutorado. USP – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia e Fundações. São Paulo/SP. 2004

Xie, Y.M. and Steven, G.P." *A simple evolutionary procedure for structural optimization*", Comput. Struct., Vol. 49(5), 885~896. 1993