MODELO DE BIELAS E TIRANTES GERADOS POR OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA E ELEMENTOS INDUTORES

João da Costa Pantoja.
Luiz Eloy Vaz.
Luiz Fernando Martha.
joao_pantoja@hotmail.com
eloy@terra.com.br
lfm@tecgraf.puc-rio.br

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC Rio, Rua Marquês de São Vicente, 225 Prédio Cardeal Leme – 3º andar Gávea Rio de Janeiro, RJ – Brasil CEP 22450-900

Resumo. *Este artigo tem como objetivo utilizar a técnica de otimização topológica de forma a automatizar a geração de modelos de bielas e tirantes aplicados ao projeto e detalhamento de estruturas de concreto armado e protendido permitindo a interação com o projetista. O conceito de densidade artificial aplicado através da metodologia SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) com otimização via método MMA (Method of Moving Asymptotes) conjuntamente com método dos elementos finitos, conforme proposto por Bendsøe & Sigmund (2003), é utilizado para encontrar um encaminhamento de cargas ótimo. Assim, o desenvolvimento dos modelos de bielas e tirantes é tratado como um problema de otimização topológica em projeto de estruturas do meio contínuo. Através do modelo apresentado, o mecanismo de transferência de cargas é idealizado dentro da estrutura de concreto armado, através da remoção gradual do material em regiões que têm pouca efetividade na resistência ao carregamento aplicado com base nas densidades artificiais de cada elemento e suas correspondentes sensibilidades. A inclusão de elementos indutores dentro do modelo do contínuo e sua influência nos resultados obtidos para os encaminhamentos de carga obtidos pela otimização topológica é mostrada e discutida. Através dessa técnica, uma interação maior entre o projetista e o software utilizado pode ser obtida, resultando numa possível melhora do número e dos tipos de encaminhamentos de cargas. Exemplos de vigas-parede são apresentados e seus respectivos encaminhamentos mostrados. Aspectos relativos ao refino das malhas de elementos e a influência da taxa de densidade adotada são discutidos de forma a demonstrar a validade e efetividade da técnica como alternativa racional e confiável para o projeto de estruturas de concreto armado utilizando o modelo de bielas e tirantes.*

Palavras-Chave: *Otimização Topológica, Bielas e Tirantes, Método dos Elementos Finitos, Concreto Armado.*

INTRODUÇÃO

O projeto de estruturas especiais bidimensionais de concreto armado e protendido com a presença de regiões com descontinuidades geométricas ou de tensões, onde a hipótese de Bernoulli não pode ser aplicada, é um problema complexo cuja solução ainda hoje não está definitivamente resolvida. Divergências apresentadas entre as equações empíricas adotadas nos códigos normativos e os resultados experimentais mostraram a necessidade de adoção de uma formulação mais racional a ser aplicada nesse tipo de situação. O modelo de bielas e tirantes proposto por Bay, Franz, Leonhardt e Thürlimann, e sistematizado por Schlaich & Schaefer (1987), é uma alternativa bastante interessante a ser considerada nestes casos. A modelagem feita pelo modelo de bielas e tirantes reduz o projeto de estruturas bidimensionais de concreto armado ao projeto de treliças com barras comprimidas de concreto (bielas) e barras tracionadas de aço (tirantes).

Um dos maiores problemas na adoção do modelo de bielas e tirantes no projeto deste tipo de estruturas é a definição pelo projetista do mecanismo de transferência ou encaminhamento de cargas dentro da estrutura de concreto em questão. Um procedimento usual é a simulação numérica da estrutura via método dos elementos finitos para obtenção de sua distribuição de tensões. Com base nessa distribuição o projetista precisa conceber um modelo treliçado, estaticamente admissível, com barras comprimidas (bielas) e tracionadas (tirantes) interligadas através dos nós. Esse lançamento estrutural pode ser feito de várias maneiras diferentes e sofre influência direta da experiência do projetista responsável pelo projeto. Desse modo, uma sistemática que auxilie ao projetista nesta tarefa pode ser de grande valia.

Recentemente, os métodos de otimização têm sido utilizados como uma alternativa extremamente atraente na definição de variáveis de projeto para estruturas das indústrias automobilísticas e aeroespacial. A otimização da geometria e topologia no *layout* destas estruturas têm um grande impacto no desempenho das mesmas, uma vez que possibilitam a obtenção de estruturas com menor quantidade de material possível, ainda assim atendendo os requisitos de estados limites últimos e de serviço. Sendo assim, a extensão desses mesmos procedimentos para as estruturas civis se mostra de extrema relevância. Também a obtenção de um encaminhamento de cargas via otimização auxilia o projetista na definição do lançamento da estrutura treliçada a ser concebida diminuindo, o tanto quanto possível, a necessidade de uma experiência anterior vasta.

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar uma formulação que utiliza os métodos de otimização topológica para definição do modelo de bielas e tirantes a serem considerados no dimensionamento das estruturas de concreto armado e protendido. O algoritmo SIMP, que faz uso de densidades artificiais, é utilizado como base para busca de um encaminhamento de cargas ótimo e estaticamente admissível. Alguns parâmetros, cuja influência têm relevância na definição dos encaminhamentos de carga, são mostrados e discutidos. Exemplos de vigas-parede com e sem elementos indutores, antes do processo de otimização, são discutidos de forma a demonstrar a validade e efetividade da técnica como alternativa racional e confiável para o projeto de estruturas de concreto.

1 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA COMO PROCEDIMENTO DE PROJETO

Otimização topológica pode ser entendida como um método computacional capaz de sintetizar estruturas através da distribuição de material em uma determinada região do espaço. Para tal ela faz uso do método dos elementos finitos (MEF) e de um algoritmo de otimização. Assim, uma região do espaço é discretizada em elementos finitos de modo que se possa

analisar seu comportamento, sendo então, o material distribuído de forma racionalizada através de algoritmos de otimização.

Uma vantagem da otimização topológica é sua capacidade de fornecer o *layout* ótimo de um componente estrutural ou mesmo da própria estrutura, para certa aplicação. Assim, esse método pode ser aplicado durante a fase do projeto conceitual, diferentemente dos métodos tradicionais de otimização, como a otimização de dimensões ou de forma, que só podem ser aplicados após a definição do *layout* da estrutura. Desse modo, a otimização topológica pode ser definida como um processo de síntese estrutural.

Um problema típico de otimização topológica é a seleção da melhor configuração possível para o projeto de uma estrutura. Na última década, muita atenção em sido dada para o desenvolvimento dos métodos de otimização topológica do contínuo. Bendsoe & Kikuchi (1988) propuseram um método de otimização, baseado em homogeneização, que trata a otimização topológica do contínuo como um problema de redistribuição dos materiais. Atualmente existem uma série de técnicas utilizadas na resolução dos problemas de otimização topológica. A adotada neste trabalho é a formulação SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*).

A formulação via método SIMP surgiu como uma opção simples de introduzir o material com propriedades intermediárias similares às que se obtêm com o uso de microestruturas e técnicas de homogeneização. No entanto, no caso da metodologia SIMP, este material intermediário, normalmente definido na forma de densidade artificial, é usado apenas como artifício matemático enquanto na técnica de homogeneização o material intermediário pode corresponder a um material composto ou microestruturado. A função densidade artificial definida pelo SIMP é então utilizada como variável de projeto, definida no domínio Ω, no intuito de determinar quais regiões devem possuir material e quais devem ser vazias.

Considerando a necessidade de definição de regiões vazias ou não, representa-se o material sólido com uma densidade artificial $\rho = 1$ e o vazio com $\rho = 0$, variando ρ entre esses dois limites. No presente contexto, as densidades artificiais intermediárias não têm nenhum interesse prático, logo técnicas que penalizem estes valores devem ser utilizadas no intuito de se evitar a incidência desse tipo de região no domínio analisado.

2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA VIA MÉTODO SIMP

3.1. Minimização da energia de deformação com aplicação das restrições

No problema de otimização a ser considerado, a variável de projeto x^e representa a densidade relativa do material em cada elemento e, assim $\rho = x^e \rho_0$. A densidade ρ_0 é a densidade de apenas um elemento no domínio de projeto Ω. Caso o elemento do domínio seja sólido teremos $x^e = 1$. Podemos representar a rigidez para um elemento como $k^e = \left(x^e\right)^p k^0$. Sendo k^0é a rigidez inicial. A função objetivo da formulação adotada será a flexibilidade ou energia de deformação da estrutura será:

$$C = F^T u = u^T k u = \sum_{e=1}^{N} u^e k u^e = \sum_{e=1}^{N} (x^e)^p u^e k^0 u^e$$

O número de elementos será denominado N e p é um fator de penalidade. Fazendo o fator de penalidade igual à unidade, elementos com densidades intermediárias irão ocorrer

com freqüência. Conforme demonstrado em Bendsøe & Sigmund(1999), o fator de penalidade tomado igual a 3, leva de uma forma consistente, o projeto final a conter elementos que estão totalmente preenchidos de material (sólido) ou com nenhum material (vazio). Esta formulação é normalmente denominada como problemas do tipo 0-1. Considerando v como o vetor que contém os volumes de cada elemento e chamando o volume de material V, podemos então definir:

$$V = x^T v$$

Denominaremos V_0 o volume inicial do domínio de projeto e x o vetor das variáveis de projeto. Podemos então partir para formulação de um problema de otimização onde queremos minimizar a flexibilidade ou a energia de deformação da estrutura, na forma:

Minimizar: $C = F^T u$

Sujeito a: $f = V / V_0$ (Restrição de volume)

$F = ku$ (Restrição de Equilíbrio)

$0 < x_{\min} \leq x^e \leq x_{\max}$ (Restrições Laterais)

Podemos notar que $x_{\min}$ e $x_{\max}$ serão os limites inferiores e superiores da variável de projeto. Neste caso, escolheremos $x_{\max} = 1$ e $x_{\min} = 0.001$. A função do limite inferior é prevenir contra uma possível singularidade na matriz de rigidez da estrutura.

Na formulação SIMP algumas prerrogativas são feitas de modo que as características do material, como por exemplo, o módulo de elasticidade, num elemento discreto é considerado constante. Se x_0 é a densidade inicial do elemento e x é a densidade após a otimização, então é preciso impor ao problema de otimização uma taxa de redução no volume de material existente representado pela relação entre as densidades na forma $x = x^e / x_0$. A restrição de volume apresentada no problema de otimização têm essa função.

As características do material dentro de um elemento podem ser modificadas através de uma relação exponencial na densidade do elemento. Se E_0 e E, são os módulos de elasticidade do elemento antes e depois da otimização, respectivamente, então vale a relação $E = \left(x^e\right)^p E_0$. Se k_0 e k, são a rigidez inicial e posterior à otimização, respectivamente, também a relação $k = \left(x^e\right)^p k_0$ é válida. O parâmetro p têm a função de penalizar as densidades intermediárias, de maneira a decrescer o número de elementos com esse tipo de densidades e induzir que a maioria das densidades dos elementos fique entre 0 e 1.

Uma vez consideradas as pré-condições acima, cada elemento possui apenas uma variável de projeto. Comparado com o método da homogeneização, a formulação do método SIMP traz excelentes progressos na diminuição do número de variáveis de projeto. Outra vantagem do método SIMP é que as características do material após as modificações são escritas como uma função exponencial da densidade e das características do material no instante inicial da análise. Sendo assim, essa formulação simplifica muito a solução da otimização topológica. Um diagrama de fluxo para a formulação de um problema de otimização topológica via método SIMP é mostrado na Fig. 1.

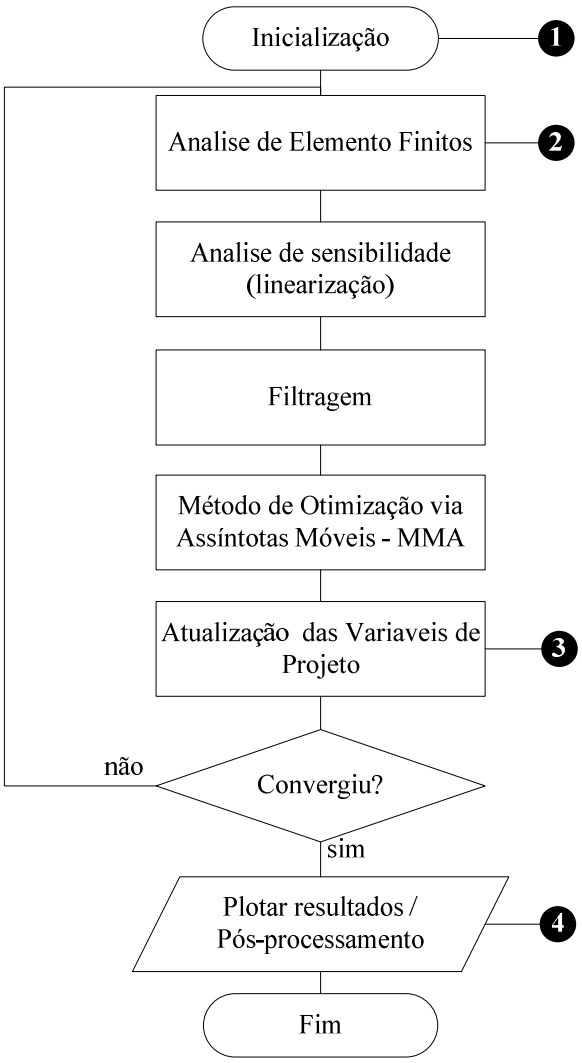

Figura 1: Diagrama de fluxo – Método SIMP

3 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

3.1 Método das Assíntotas Móveis - MMA

Uma forma de resolver o problema de otimização proposta por Svanberg (1987) nos leva a uma classe de métodos de otimização com convergência global, que é baseado em funções aproximadoras separadas conservativas convexas, denominadas CCSA.

Os métodos CCSA são aplicados a problemas de programação não-linear com restrições de desigualdade, que podem ser encarados na forma de problemas de minimização com restrições do tipo menores ou iguais. Existem iterações externas e internas nestes métodos. Uma iteração externa inicia a partir da iteração atual $x^{(k)}$ e termina com uma nova iteração $x^{(k+1)}$. Em cada iteração, entre uma iteração externa e outra, um subproblema convexo é gerado e resolvido. Nesse subproblema, a função objetivo original e suas restrições são representadas por certas funções separadas convexas que aproximam a função original

nos arredores de $x^{(k)}$. A solução ótima do subproblema pode ser aceita ou rejeitada. Se for aceita, torna-se $x^{(k+1)}$ e outra iteração externa é completada. Se for rejeitada, uma nova iteração interna é feita, com um subproblema modificado baseado em alguma modificação feita nas funções de aproximação. As iterações internas serão repetidas até que as funções aproximadoras da função objetivo e das restrições se tornem maiores ou iguais às funções originais na solução ótima do subproblema. Quando isso acontece, é dito que as funções de aproximação são conservativas. Isso não implica que o conjunto de soluções viáveis do subproblema está completamente contido no conjunto de soluções viáveis originais, mas implica que a solução ótima do subproblema é uma solução viável do problema original, com valor da função objetivo menor do que a iteração anterior. Cada nova iteração externa requer valores para a função e as derivadas de primeira ordem da função objetivo original e de suas restrições, calculados na iteração atual $x^{(k)}$. Cada nova iteração interna requer apenas os valores da função e não de suas derivadas, calculados a partir da solução ótima do subproblema mais recente.

Utilizar esquemas baseados em uma resolução de uma seqüência de subproblemas não é uma idéia nova. Podemos citar problemas do tipo SQP (Sequential Quadratic Programming) onde, em cada iteração, um problema de programação quadrática convexa (QP) é resolvido e uma busca em linha é feita via função de mérito. No entanto, as restrições lineares no subproblema QP não garantem que os pontos de iteração sejam viáveis com respeito às restrições originais, o que os torna não conservativos conforme definido anteriormente. Em contraposição aos métodos SQP, os métodos CCSA introduzem uma curvatura tanto na função objetivo quanto nas funções de restrição do subproblema. Esta curvatura é atualizada durante as iterações internas uma vez que as funções aproximadoras são conservativas, não sendo assim necessária a execução de nenhuma busca em linha. Outra classe de métodos que gera pontos de iteração viáveis são os métodos de pontos interiores. Mas nesses métodos a viabilidade é garantida adicionando à função objetivo uma função de barreira logarítmica e não usando funções aproximadoras conservativas para as funções de restrição conforme proposto pelos métodos CCSA.

Um ponto que deve ser enfatizado é que os métodos CCSA podem ser aplicados com sucesso a problemas com número muito grande de variáveis, sem que as matrizes Hessianas da função objetivo e das restrições fiquem densas. Esta propriedade também pode ser estendida pelo uso das funções aproximadoras separadas.

Um dos métodos CCSA adotados neste trabalho é denominado Método das Assíntotas Móveis ou MMA, que têm aplicação no campo da otimização estrutural, onde o cálculo das funções objetivo e seus gradientes conduzem a um grande consumo de tempo (envolvendo um enorme número de cálculo de elementos finitos). Uma consideração normalmente importante aos usuários, nesses casos, é que os pontos de cada iteração gerada, sejam viáveis. Isto é garantido pelo método MMA.

A formulação em MMA é baseada numa expansão em série de Taylor de primeira ordem da função objetivo e funções das restrições. Com esse método, um subproblema convexo explícito é gerado para aproximar um problema não linear implícito. Uma vez que o problema é separado e convexo, uma formulação dual ou um método de pontos interiores primal-dual pode ser utilizado para resolvê-lo. A solução de uma seqüência de subproblemas pode convergir em direção ao problema original.

Dessa maneira, o problema de otimização estrutural pode ser montado da seguinte maneira:

Minimizar: $f_0(x)$

Sujeito a: $f_i(x) \leq \bar{f}_i \qquad i = 1,\ldots,M$

$0 < x_{\min} \leq x^e \leq x_{\max} \qquad i = 1,\ldots,N$

Onde M é o número de restrições e N é o número de elementos. A função f_0 é a função objetivo. As funções f_i representam as restrições e os contornos das variáveis de projeto serão $x_{\min}$ e $x_{\max}$. As funções implícitas f_i são aproximadas pelas funções explícitas $\tilde{f}_i(k)$ que são caracterizadas por serem separáveis e convexas. A escolha dessas funções aproximadoras é baseada em cálculos prévios dos valores das funções calculadas e dos seus gradientes. É assumido que tanto a função objetivo quanto as funções das restrições podem ser aproximadas através das funções aproximativas. Podemos então modificar o problema de otimização anterior para:

Minimizar: $\tilde{f}_0^{(k)}(x)$

Sujeito a: $\tilde{f}^{(k)}{}_i(x) \leq \bar{f}_i \qquad i = 1,\ldots,M$

$0 < x_{\min} \leq x^e \leq x_{\max} \qquad i = 1,\ldots,N$

Sendo k o número da iteração atual e o vetor $x^{(0)}$ é o ponto de inicial para as densidades relativas. Na MMA, cada função aproximativa $\tilde{f}_i^{(k)}(x)$ é obtida pela linearização de $f_i(x)$ por variáveis do tipo $1/(U_e - x_e)$ e $1/(x_e - L_e)$, dependendo do sinal das derivadas em $x^{(k)}$, onde U_e e L_e são parâmetros denominados assíntotas que devem satisfazer $L_e < x^{e(K)} < U_e$. Assim teremos:

$$\tilde{f}_i^K(x) = \sum_{e=1}^{N} \left(\frac{p_{ie}}{U_e - x^e} + \frac{q_{ie}}{x^e - L_e} \right) + r_i$$

Onde:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x^e} > 0 \text{ em } x^{(k)} \text{ então: } \quad p_{ie} = \left(U_e - x^{e(k)}\right)^2 \frac{\partial f_i}{\partial x^e} \wedge q_{ie} = 0$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x^e} < 0 \text{ em } x^{(k)} \text{ então: } \quad q_{ie} = -\left(x^{e(k)} - L_e\right)^2 \frac{\partial f_i}{\partial x^e} \wedge p_{ie} = 0$$

Observe que r_i é escolhido de forma que $\tilde{f}_i^{(k)}(x^{(k)}) = f_i^{(k)}(x^{(k)})$. Os valores dos pontos assintóticos U_e e L_e são normalmente modificados entre as iterações e, por conseguinte, esses pontos são também uma função de k.

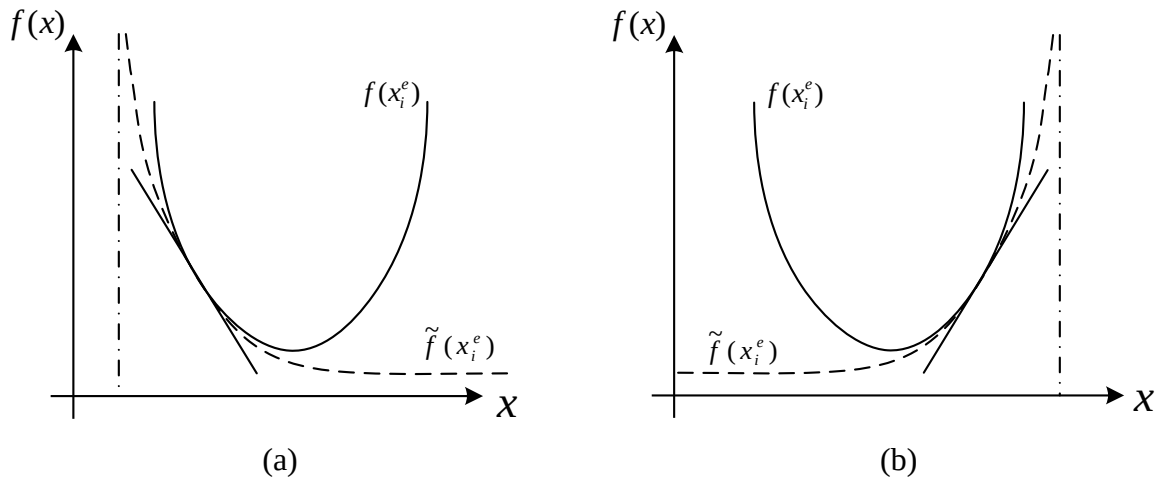

Figura 2: Formulação via MMA para variável de projeto x^e sendo (a)assíntota à esquerda e (b) assíntota à direita.

A Figura 2 mostra o procedimento para utilização da MMA para uma variável de projeto x^e num espaço unidimensional. A função $f(x)$ e a função $\tilde{f}(x)$ é a função aproximativa. Os pontos assintóticos U_e e L_e são normalmente representados por valores finitos. Um procedimento heurístico pode então ser utilizado para atualizar os pontos assintóticos U_e e L_e. As assíntotas serão movidas para cada vez mais perto uma da outra de modo a obter iterativamente o ponto de projeto ótimo.

Observe que se $U_e \to +\infty$ e $L_e \to -\infty$ a aproximação MMA torna-se, no limite, igual a uma aproximação linear via Programação Linear Seqüencial (SLP). Nos casos considerados a flexibilidade ou energia de deformação é igual a $f_0(x)$ e a estrutura é restringida a certa porção do domínio de projeto V_0, assim $f_1(x) = fV_0$.

A derivada da função objetivo é encontrada utilizando o equilíbrio:

$$ku = F \to \frac{\partial k}{\partial x^e} u + k \frac{\partial u}{\partial x^e} = 0$$

Derivando a função objetivo com respeito à variável de projeto e usando a expressão anterior conforme apresentado em Pedersen & Buhl (1997):

$$\frac{\partial C}{\partial x^e} = \frac{\partial u^T}{\partial x^e} ku + u^T \frac{\partial k}{\partial x^e} u + u^T k \frac{\partial u}{\partial x^e} = -p\left(x^e\right)^{p-1} u^e k^0 u^e$$

A expressão anterior assume que os carregamentos são independentes das variáveis de projeto, ou seja, $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$. A derivada das funções de restrição será então:

$$\frac{\partial V}{\partial x^e} = v^e$$

A maior vantagem na utilização da MMA é que nela a função $\tilde{f}_i(x)$ é convexa logo aproxima de maneira fechada o comportamento da função objetivo e as funções das restrições, conforme mostrado na Fig. 2.

4 ELEMENTOS INDUTORES

Os elementos indutores são formados através de *arrays* inclusos dentro do algoritmo de resolução do método SIMP de modo a garantir que durante o processo de otimização sejam assegurados valores máximos e mínimos de densidade para alguns elementos da malha. Assim um determinado trecho pré-definido para um encaminhamento de carga possa ser obedecido de modo a possibilitar uma interação do projetista com o processo de otimização a ser executado. Vale salientar que apesar disso, em função da atualização das variáveis de projeto ser feita através da filtragem das densidades, conforme recomendado por Bendsøe & Sigmund *(2003)*, de modo a evitar problemas do tipo instabilidades de tabuleiro e dependência da malha, não necessariamente o modelo de encaminhamento de carga final obrigatoriamente possua o trecho inicialmente pré-definido.

Bielas e tirantes poderão então ser definidos de uma forma mais livre através destes *arrays* modificando o resultado da otimização via novos encaminhamentos de carga, conforme será mostrado adiante nos exemplos apresentados. Elementos de natureza similar com aplicação em outras áreas foi proposto por Bendsøe & Sigmund *(2003)*.

Essa técnica possibilita ao projetista determinar uma série de modelos de bielas e tirantes que cumpram o Teorema do Limite Inferior da Teoria da Plasticidade resultando em estruturas estaticamente admissíveis, segundo Souza *(2004)*.

5 EXEMPLOS

A formulação via método SIMP para resolução de problemas de otimização topológica é aplicada a dois exemplos nesta seção. Estruturas de concreto armado do tipo vigas paredes são otimizadas utilizando o método proposto. A utilização de elementos indutores no interior das estruturas de concreto armado é feita e sua influência no processo de otimização mostrada. A modelagem dos elementos indutores é feita através da fixação das densidades dos elementos. Sendo assim são apresentados nos exemplos dois tipos de processos. Processos sem indução, ou seja, onde o processo de otimização não conta com nenhuma imposição proposta pelo projetista e processos induzidos onde a presença de elementos indutores necessários ao modelo podem ser pré-definidos de acordo com o modelo de biela e tirantes imaginado pelo projetista. Devido a esse fato, uma gama variada de modelos de bielas e tirantes pode ser testada e de acordo com a experiência do projetista. A eficiência das topologias estruturais obtidas pelo processo de otimização proposto são apresentadas e seus resultados comparados com modelos clássicos presentes na literatura do modelo de bielas e tirantes existentes.

5.1 Estrutura de Viga Parede – VP1

O domínio de projeto para uma viga parede com duas cargas concentradas atuantes na face superior e distantes dos apoios ¼ do vão é apresentado na Fig. 3. O domínio de projeto é discretizado por uma malha de elementos finitos quadriláteros com quatro nós em um estado plano de tensões, cujo número de elementos foi variado, de modo a demonstrar a influência do refino da malha sobre o processo de otimização. As restrições de apoio são apresentadas através de vínculos de 1 e 2 gêneros e cargas concentradas P de 1 KN aplicadas de cada lado

entre o centro e os apoios da viga parede. O módulo de Young e o coeficiente de Poisson são definido como 300 Pa e 0.3 respectivamente.

Primeiramente o modelo obtido através da otimização topológica é feito sem o processo de indução, sendo o resultado mostrado na Fig. 4. Nota-se que o modelo obtido é compatível com os modelos em Souza *(2004)* e normalmente utilizados na prática. Os parâmetros fixos considerados no processo de otimização sem indução foram nelx = 80 e nely = 80 que são os números de elementos nas direções horizontal e vertical, a fração do volume inicial a ser obtida adotada foi de 10%, fator de penalidade de igual a 3 e o raio de influência para o filtro igual a 2 (filtragem). Para cada iteração dentro do processo de otimização, o programa gera um resultado da distribuição corrente de densidade sobre os elementos da malha.

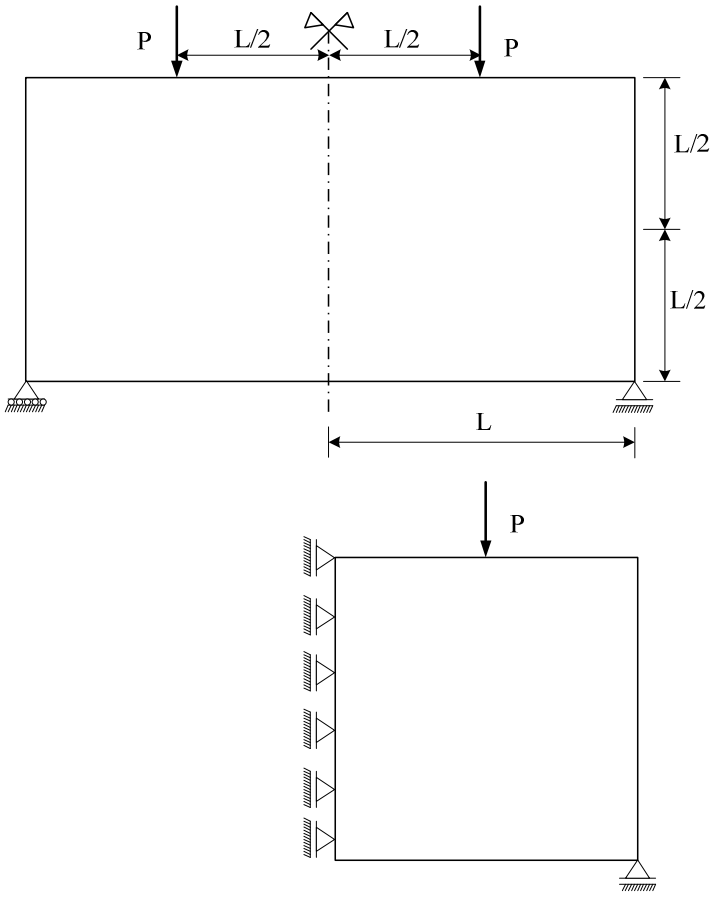

Figura 3: Viga parede VP1 com carregamento na parte superior

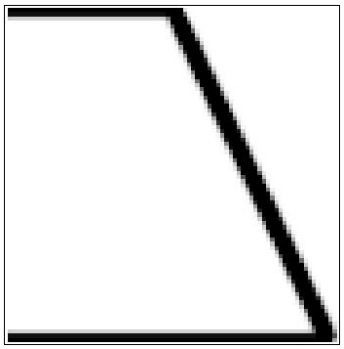

Figura 4: Resultado obtido via simetria para VP1 num processo sem indução

Em seguida, um novo processo de otimização topológica foi feito com acréscimo do processo de indução. Um elemento indutor saindo de baixo da carga P e indo a metade da malha foi acrescido e um elemento indutor em toda parte inferior também foi colocado. Isto conduziu a uma modificação no modelo obtido pela otimização topológica.

Através da Fig.5 observam-se as modificações ocorridas à medida que o refino da malha de elementos é aumentado. O resultado dos modelos pelo processo de otimização acarretou numa modificação nos modelos obtidos. De acordo com os exemplos malhas pouco refinadas pode levar a ineficiência num processo de otimização com indução. Durante a modificação do número de elementos na malha foi preciso variar a fração do volume inicial considerada de modo a garantir a convergência do modelo.

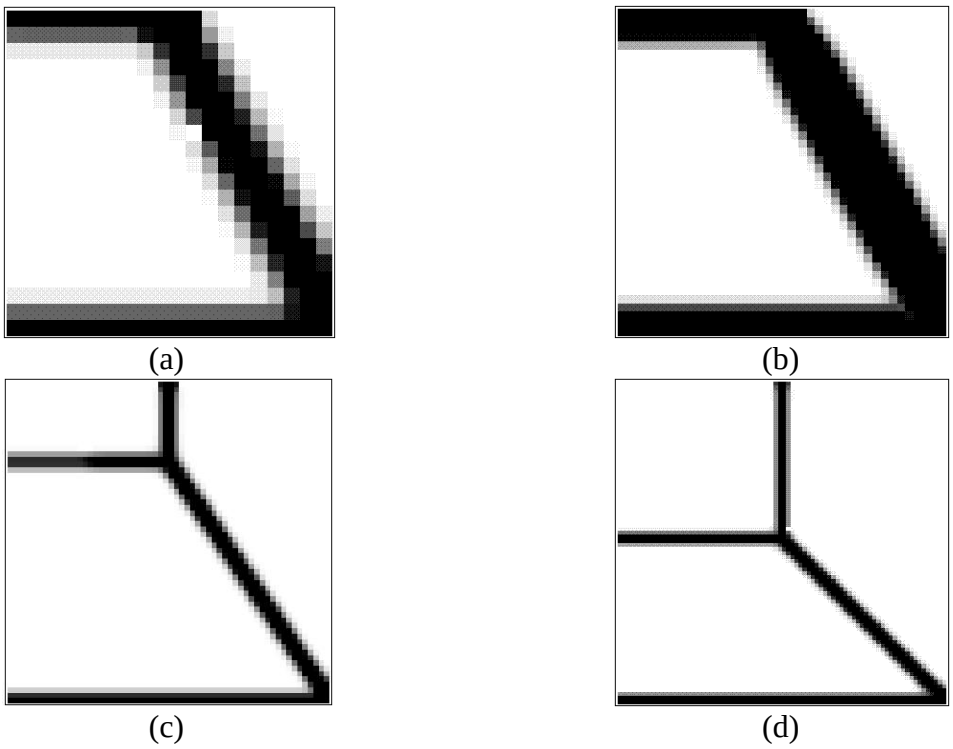

Figura 5: Influência do refinado da malha no na OT com indução
[(a) 400, (b) 1600, (c) 3600 e (d) 6400 elementos].

Variou-se então a fração de volume no problema proposto de modo a verificar sua influência na otimização (Fig. 6). Essa variação também levou a uma modificação substancial nos modelos obtidos. Nota-se que, com o aumento da fração de volume final considerada o resultado final tende ao modelo obtido via processo sem indução. O número de elementos da malha foi mantido igual ao modelo sem indução.

Durante o estudo numérico feito para definição da fração de volume mais adequada ao problema proposto, os valores abaixo de 10% não obtiveram convergência enquanto valores superiores a este levam a um aumento muito grande no número de iterações necessárias e tempo de processamento para convergência.

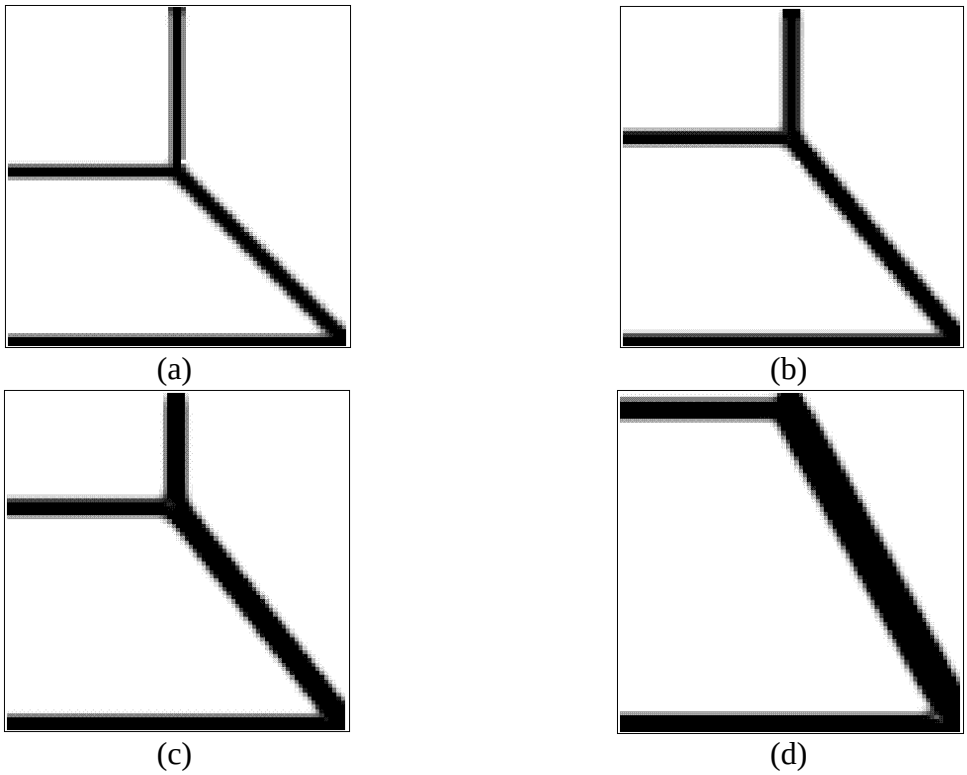

Figura 6: Modificações nos resultados da OT com indução devido à variação na fração de volume adotada [(a) 10%,(b) 12%,(c) 15% e (d) 20%].

Assim, ao aplicar otimização topológica com processos de indução, os parâmetros referentes ao número de elementos da malha e frações de volume a serem considerados, devem ser tomados com bastante critério.

5.2 Estrutura de Viga Parede – VP2

Neste exemplo o domínio de projeto considerado para a viga parede VP2 foi modificado de forma que as duas cargas concentradas atuantes no meio do vão foram deslocadas para a parte inferior da viga parede, conforme mostrado na Fig. 7. O domínio de projeto é discretizado por uma malha de elementos finitos quadriláteros com quatro nós em um estado plano de tensões, cujo número de elementos foi de 6400 (80x80). As restrições de apoio são mantidas através de vínculos de 1 e 2 gêneros e cargas concentradas P de 1 KN são aplicadas. O módulo de Young e o coeficiente de Poisson são definido como 300 Pa e 0.3 respectivamente.

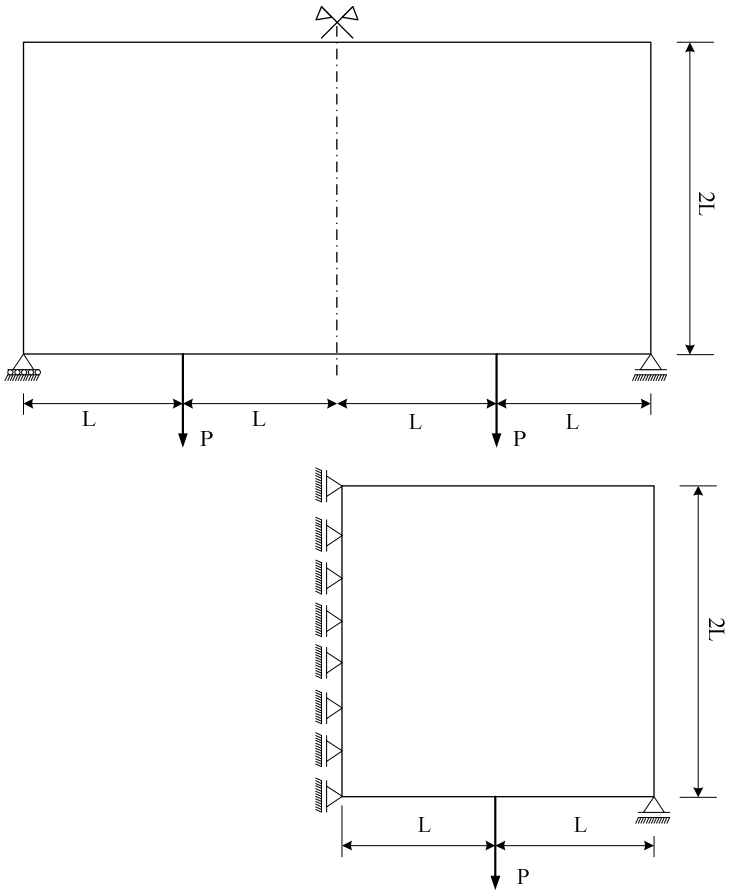

Figura 7: Viga parede VP2 com carregamento na parte inferior

Novamente foi primeiramente obtido o modelo através da otimização topológica sem o processo de indução, sendo o resultado mostrado na Fig. 8. O modelo obtido é compatível com os modelos considerados em Liang (2005). Os parâmetros fixos considerados no processo de otimização sem indução foram nelx = 80 e nely = 80, que são os números de elementos nas direções horizontal e vertical, fração do volume inicial a ser obtida adotada foi de 8%, o fator de penalidade igual a 3 e o raio de influência para o filtro igual a 2.

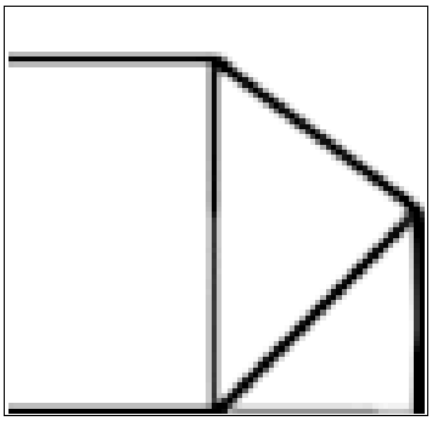

Figura 8: Viga parede VP2 com carregamento na parte inferior

Em seguida um novo processo de otimização topológica foi feito com acréscimo do processo de indução. Um elemento indutor foi colocado entre as duas cargas P que atuam na estrutura real. Depois o elemento indutor foi inclinado a 45° graus encaminhando a carga até o apoio. A função deste elemento indutor é simular uma biela de compressão. Também em toda parte inferior foi acrescido um elemento indutor horizontal. O resultado do modelo induzido pode ser visto na Fig. 9.

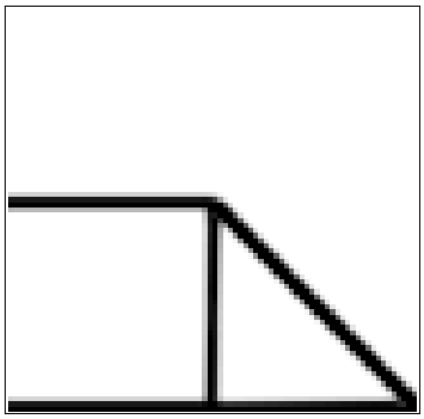

Figura 9: Resultado obtido da OT com processo induzido

Fica demonstrado assim que os resultados obtidos através da otimização topológica com processos induzidos leva a modelos diferentes do que obtidos via processos sem indução. Isso leva a uma vantagem muito grande do ponto de vista do engenheiro estrutural que pode utilizar o processo de indução para gerar um encaminhamento de cargas mais adequado ao seu critério pessoal quando da concepção do modelo de bielas e tirantes a ser utilizado.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou a influência da presença de elementos indutores do tipo armaduras existentes e bielas pré-definidas no processo de otimização para obtenção do encaminhamento de carga via otimização topológica. O métodos de otimização MMA foi utilizado na atualização das variáveis de projeto. Exemplos foram apresentados e os resultados obtidos para vigas paredes com e sem os processos de indução. Modificações dos parâmetros de refinamento de malha e fração do volume inicial foram feitas de modo a entender sua influência dentro do processo de otimização proposto. De acordo com os resultados obtidos, pode-se concluir que a otimização topológica com processos de indução é uma alternativa viável e bastante eficaz na definição do encaminhamento de cargas pelo engenheiro estrutural na concepção do modelo das bielas e tirantes a ser utilizado.

Agradecimentos

Agradeço ao Professor Krister Svanberg do Royal Institute of Technology de Stockholm Sweden pelo fornecimento do código do algoritmo MMA em linguagem Matlab e ao Eng. Anderson Pereira da TecGraf - PUC Rio pelas informações e posteriores discussões durante meus primeiros estudos em otimização topológica.

REFERÊNCIAS

Arora, J. S., 2006. Optimization of Structural and Mechanical Systems. World Scientific.

Bendsøe, M. P. & Kikuchi, N., 1988. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71(2):197-224.

Bendsøe, M. P. & Sigmund, O., 1999. Material interpolation schemes in topology optimization, *Archives of Applied Mechanics* 69(9-10): 635-654.

Bendsøe, M. P. & Sigmund, O., 2003. Topology Optimization: Theory, Methods and Applications. Springer Verlag, Berlin Heildelberg.

Cardoso, E. L., 2005. Otimização Topológica de Transdutores Piezelétricos considerando Não-Linearidade Geométrica. Tese de doutorado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul – URGS. Departamento de Engenharia Mecânica. Porto Alegre/RS.

Fu, C. C., 2001. The Strut and Tie Model of Concrete Structures. Presented to Maryland State Highway Administration. University of Maryland.

Liang, Q. Q., 2005. Performance-based Optimization of Structures: Theory and applications. Spon Press - Taylor & Francis Group.

Pedersen, C. B. W. & Buhl, T., 1997. Topology Optimization (A one-semester project from the fall-semestre of 1997). Web-pages of Department of Solid Mechanics, Technical University of Denmark(DTU).

Rozvany, G. I. N. & Zhou, M., 1991. The COC algorithm, part I: Cross-section optimization or sizing, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineerig*, 89:281-308.

Sigmund, O., 2006. Morphology-based black and white filters for topology optimization, *Stuctural Multidisciplinary Optimization*, 33:401-424.

Silva, R. C. & Giongo, J. S., 2000. Modelos de Bielas e Tirantes Aplicados a Estruturas de Concreto Armado. EESC USP.

Souza, R. A., 2004. Concreto Estrutural: análise e dimensionamento de elementos com descontinuidades. Tese de doutorado. USP – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia e Fundações. São Paulo/SP.

Svanberg, K., 1987. The method of moving asymptotes - A new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:359-373.

Svanberg, K., 2002. A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations. SIAM *Journal on Optimization*, 12(2):555-573.

Zuo, K. T., Chen, L. P., Zhang, Y. Q. & Yang, J., 2007. Study of key algorithms in topology optimization. *International Journal Adv. Manuf. Technol.*, 32:787-796.