III Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas
Estruturas: atuais realizações e projetos futuros
Rio de Janeiro, 21 a 23 de abril de 2010

Avaliação de Desempenho de Modelos de Bielas e Tirantes via Análise de Confiabilidade

João da Costa Pantoja, MSc

Professor do Centro Universitário de Brasília - Uniceub,
joao_pantoja@hotmail.com

Luíz Eloy Vaz, PhD

Professor Titular da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ,
eloy@terra.com.br

Luíz Fernando Martha, PhD

Professor da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC Rio,
lfm@tecgraf.puc-rio.br

Resumo:

Este trabalho mostra à avaliação de desempenho de modelos de bielas e tirantes em estruturas de concreto armado através da utilização da análise de confiabilidade. Os métodos de modelagem numérica geralmente utilizam nos cálculos parâmetros determinísticos obtendo assim resultados fixos que não levam em consideração as incertezas e erros associados ao processo. Em alguns tipos de análise onde há um complexo estado de tensões ou estado de St. Venant, uma modelagem pode ser obtida via modelo de bielas e tirantes e seu desempenho avaliado através de um método de simulação do tipo Método de Monte Carlo. Esse método consegue apreciar as incertezas inerentes tanto nas cargas atuantes e como nas respectivas resistências do concreto e aço da estrutura em análise. Através dessa formulação é possível comparar os diferentes desempenhos a serem obtidos do modelo de bielas e tirantes devido às diferenças presentes na literatura entre normas e alguns autores. Os respectivos índices de confiabilidade serão obtidos de forma a mostrar a validade da formulação.

Palavras-chave: Análise de confiabilidade, modelo de bielas e tirantes, concreto armado.

1 Introdução

Apesar do rápido desenvolvimento dos métodos numéricos na engenharia estrutural, os fundamentos básicos através dos quais a concepção dos projetos é feita não têm tido uma mudança significativa. Um bom engenheiro pode ser distinguido por sua habilidade em modelar o mecanismo de funcionamento da estrutura utilizando modelos simples. Essa habilidade pode ser obtida com anos de experiência e têm um significado expressivo na prevenção de erros cruciais durante o processo de projetação. Esses erros podem ser cruciais durante a execução de uma simulação numérica necessária para uma análise estrutural.

Isso é especialmente verdade no projeto de estruturas de concreto. As propriedades materiais do concreto têm uma natureza complicada e ainda continuam sendo uma área em constante evolução. Existem diferentes teorias como plasticidade, modelos de dano, mecânica da fratura, entre outros, que podem ser aplicadas na modelagem das estruturas de concreto. Mesmo assim, o concreto tem sido utilizado com sucesso por mais de cem anos na engenharia estrutural. Obviamente, isso só foi possível através do desenvolvimento de formulações concisas e simples aplicadas na modelagem das estruturas. Uma das formulações propostas representa a estrutura contínua de concreto existente através de uma estrutura treliçada equivalente, onde o estado de tensões existente é perto do unidimensional. As contribuições pioneiras nesse campo foram feitas por Ritter e Mörsch, aplicadas a estruturas de vigas. A idéia provou ser bastante poderosa e tornou-se rapidamente uma prática comum na engenharia estrutural.

Uma tentativa consistente para generalizar essa formulação para regiões descontínuas, onde a hipótese de Bernoulli não é válida, ou seja, em estruturas onde existam descontinuidades geométricas, pontos de cargas concentradas, vigas paredes e consolos curtos, entre outras, foi proposta por SCHALAICH et al (1987). A proposta foi denominada de método das bielas e tirantes, que apesar de ser constituída por um modelo cinemático, têm sua concepção baseada na distribuição de tensões elásticas. Uma vez realizada uma modelagem através dessa análise espera-se uma previsão realística da capacidade portante da estrutura.

Nos dias atuais, após anos de pesquisa e aplicações práticas, a modelagem através de bielas e tirantes é uma valorosa ferramenta de projeto, que é recomendada para uso por várias normas internacionais.

Uma das hipóteses básicas para o correto funcionamento do método das bielas e tirantes se baseia na ductibilidade do modelo considerado. Isso significa que as estruturas modeladas devem possuir ductibilidade suficiente para que os modelos sejam mobilizados, evitando assim uma ruptura frágil. Com isso o esmagamento das bielas de concreto não devem ocorrer antes do escoamento da armadura. Uma das problemáticas atuais do método é que uma vez idealizado o modelo como saber se ele conduz a uma estrutura com ruptura dúctil ou frágil?

A proposta do atual trabalho é utilizar uma análise de confiabilidade no sentido de avaliar o nível de segurança do modelo obtido com base nas distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias envolvidas no problema através do método de simulação de Monte Carlo. Também impor níveis compatíveis de probabilidade para cada modo de ruptura, conduzindo então o modelo, a uma probabilidade final de ruptura dúctil muito superior a ruptura frágil. Isso consiste num avanço em relação ao funcionamento da modelagem

proposta uma vez que pode assegurar que o modelo proposto tenha uma grande probabilidade de que suas hipóteses básicas sejam cumpridas.

2 Confiabilidade estrutural

O conceito de segurança está associado à confiança qualitativa de que a estrutura terá um desempenho satisfatório quando em uso. No entanto, este conceito evolui com o tempo, e na era da revolução industrial inglesa tomou a forma quantitativa de coeficiente de segurança. Uma sistematização da tecnologia de projeto e execução da construção em geral, devido à grande demanda de obras civis. Assim consolidaram-se as Teorias da Resistência dos Materiais e a Teoria da Segurança conjuntamente no denominado Método das Tensões Admissíveis. Esta teoria adotou uma postura comparativa: selecionou as obras de desempenho estrutural satisfatório e quantificou suas solicitações, estabelecendo valores médios. Estes valores foram comparados às resistências médias obtidas em laboratório para materiais equivalentes aqueles utilizados nas obras analisadas, criando-se assim, uma quantificação da segurança adequada que deu origem ao coeficiente de segurança conforme mostrado em GRAZIANO (2005) e PALIGA,(2008).

Na atualidade, a teoria de segurança correntemente aplicada é a denominada Teoria Semi-Probabilística de Segurança (Método dos Estados Limites) que é um meio termo entre a Teoria Probabilística Pura e o Método das Tensões Admissíveis. Um exemplo de aplicação do Método Semi-Probabilístico no projeto de estruturas é a norma NBR 6118:2003 “Projeto de estruturas de concreto – Procedimentos” (ABNT, 2003), onde os conceitos probabilísticos são introduzidos no projeto através de valores característicos inferiores e dos coeficientes de minoração das resistências dos materiais envolvidos. Também, através de valores característicos superiores e dos coeficientes de majoração das cargas.

No decorrer dos últimos anos, vários modelos sofisticados têm sido desenvolvidos para análise não-linear de estruturas de concreto. Entretanto, todos os cálculos são normalmente feitos com base em valores determinísticos para a geometria da estrutura, para as propriedades mecânicas dos materiais e para o carregamento aplicado.

Na realidade, há sempre uma variabilidade nestes parâmetros do projeto estrutural. Existe incerteza quanto ao valor do carregamento atuante; às grandezas relativas aos materiais, em especial aquelas do concreto, que apresentam certa dispersão em relação aos valores médios usualmente adotados; aos erros de construção que podem produzir variações nas dimensões das peças estruturais; e, finalmente, podem existir erros ou simplificações no modelo de cálculo.

Assim sendo, a resposta da estrutura a um determinado carregamento é, na verdade, uma função de diversas variáveis aleatórias, que afetam o seu desempenho. Dessa forma, a própria resposta da estrutura será uma variável aleatória. Deslocamentos, deformações, tensões e esforços solicitantes são, portanto, variáveis aleatórias.

Como as resistências dos materiais e as dimensões da estrutura são variáveis aleatórias, existe sempre alguma incerteza sobre que valores assumirão na estrutura concluída. Isto faz com que a própria resistência da estrutura seja uma variável aleatória. Por outro lado, as ações, permanentes e variáveis, que vão atuar sobre a estrutura possuem também características aleatórias, pois apresentam certa dispersão em torno de seu valor médio. Logo, o valor máximo da carga ao qual a estrutura estará submetida ao longo de sua vida útil também não pode ser previsto com exatidão.

Conseqüentemente, a margem de segurança, ou seja, a diferença entre a resistência da estrutura e a carga atuante ou o efeito dessa carga, deverá sofrer oscilações. Portanto,

um dos objetivos primordiais de uma norma técnica de projeto de estruturas é assegurar que seja mínima a margem de segurança de uma determinada estrutura ser inferior a zero.

Com o maior conhecimento teórico e experimental das estruturas e o avanço das aplicações de controle de qualidade do setor industrial, os conceitos de segurança progrediram no âmbito probabilístico, trocando o conceito semi-probabilístico de coeficientes de segurança pelo conceito probabilístico puro de confiabilidade.

A análise probabilística das estruturas tem como objetivo determinar o efeito da dispersão dos parâmetros de projetos no seu comportamento final, tornando-se, dessa maneira, uma ferramenta de análise da confiabilidade alcançada no projeto de uma estrutura.

Uma das formas de se avaliar o nível de segurança (confiabilidade) atingido no projeto de estruturas é determinar o índice de confiabilidade β e correspondente probabilidade de falha P_f, associada a β, tanto no que se refere aos Estados Limites de Serviço, como aos Estados Limites Últimos.

Nesse trabalho, a análise de confiabilidade será utilizada de forma a avaliar o desempenho estrutural de um determinado modelo de bielas e tirantes obtido para regiões com descontinuidades geométricas ou estáticas. Assim, caso o modelo não atenda algum requisito de segurança imposto pelo projetista estrutural, o modelo deverá ser alterado de uma forma interativa até que o nível de segurança imposto seja cumprido.

2.1 Probabilidade de falha e índice de confiabilidade

A probabilidade de falha P_f é a probabilidade da função de falha ou função de estado, assumir valores pertencentes ao domínio de falha e pode ser definida na forma:

$$\mathrm{P_f = P\{G(X) \leq 0\}} \tag{2.1}$$

A função $\mathrm{G}(X)$ é conhecida como função de estado limite ou função de falha e X é o vetor com todas as variáveis aleatórias do problema. Estas funções representam os requisitos de projeto que deverão ser atendidos pela estrutura durante sua vida útil para que ela desempenhe adequadamente suas funções, ou seja, elas representam os modos de comportamento da estrutura.

As funções de falha são normalmente definidas por:

$$\mathrm{G(X) = R(X) - S(X)} \tag{2.2}$$

onde $R(X)$ e $\mathrm{S}(X)$ representam, respectivamente, a resistência do elemento e a solicitação aplicada.

A superfície de falha separa a região aceitável, ou dita segura, da região de falha definida quando $\mathrm{G(X)} = 0$. O domínio de falha é definido quando $\mathrm{G(X)} \leq 0$. Desta forma dizemos que a estrutura está segura quando $\mathrm{G(X)} > 0$. A figura 1 ilustra a superfície de falha no caso de duas variáveis aleatórias.

Conhecendo a PDF (*Probability Density Function*) conjunta das variáveis aleatórias, $f(x)$, representada pelas isocurvas na figura 1, a probabilidade de falha é calculada pela seguinte integral:

$$P_f = \int_{G(X) \leq 0} f(x)\, dx \tag{2.3}$$

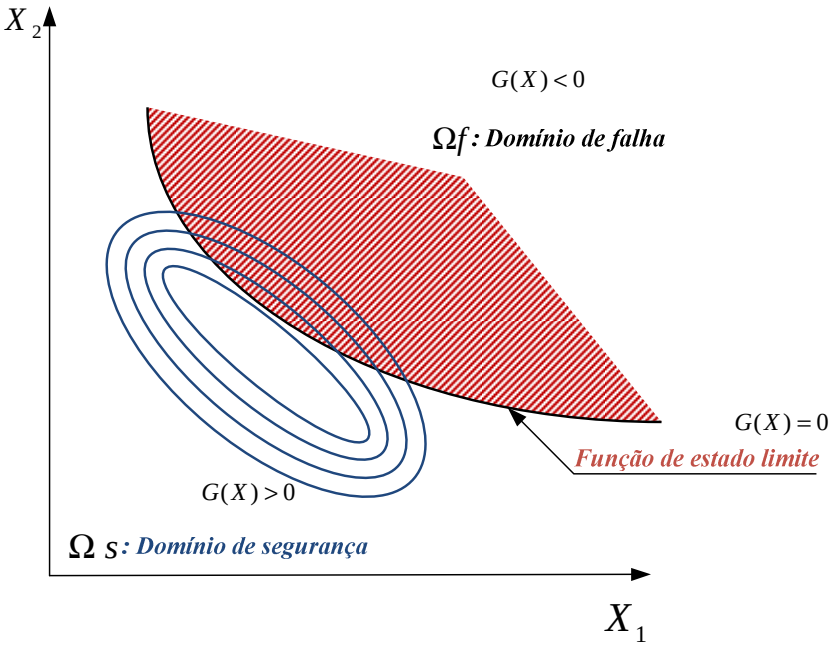

Figura 1: Superfície de falha no caso de duas variáveis aleatórias

Uma maneira conveniente de representar a confiabilidade estrutural é através do índice de confiabilidade de confiabilidade β, devido à pequena ordem de grandeza da probabilidade de falha. Esse índice mede a distância entre a origem e o ponto de máxima probabilidade MPP (Maximum Probability Point) sobre a curva $G(X) = 0$ representada no espaço normal padrão equivalente u. Quando a variável Z é transformada para o espaço amostral padrão equivalente u, a probabilidade de falha é calculada através de:

$$P_f = P(G \leq 0) = \int_{-\infty}^{u} \varphi(u)du = \Phi(u) \tag{2.4}$$

Onde $\varphi(u)$ e $\Phi(u)$ são respectivamente a PDF e a CDF (Cummulative Distribution Function) da distribuição normal padrão de u conhecida como variável normal reduzida.Sendo o índice de confiabilidade β calculado a partir da probabilidade de falha através da seguinte expressão:

$$\beta = -\Phi(P_f) \tag{2.5}$$

2.2 Confiabilidade em sistemas estruturais

A confiabilidade de sistemas estruturais é definida quando a falha da estrutura pode ocorrer devido a mais de uma função de estado limite ou de falha. Todos os exemplos de aplicação apresentados nesse artigo envolvem sistemas desse tipo com a presença de várias funções de falha (bielas, tirantes, nós, regiões de concentração de tensões), portanto será tratado na análise de confiabilidade estrutural como um sistema.

Um sistema para análise de confiabilidade pode ser representado por apenas um elemento estrutural que possa falhar por mais de um modo de comportamento, enquanto que na análise estrutural propriamente dita o elemento é apenas parte integrante da estrutura, que neste caso é o sistema.

Um sistema pode ser classificado em: sistema em série, quando a falha de um dos modos acarreta na falha do sistema, ou em paralelo, quando a falha do sistema somente ocorre quando todos os seus modos falham.

A probabilidade de falha P_f pode ser calculada para cada modo de falha, sendo depois avaliada a probabilidade de o sistema falhar como um todo, considerando-se todos os modos.

A probabilidade de falha dos sistemas em série é dada pela probabilidade de qualquer um dos seus modos falharem, ou seja, é a união dos eventos que representam a falha dos modos de ruptura individuais. Dessa forma, tem-se que:

$$P_f^s = P\left[\bigcup_{i=1}^{j}(g_i(Y) \leq 0)\right] \tag{2.6}$$

onde j é o número de modos de falha identificados na análise e Y é o vetor de variáveis normais padrão estatisticamente independentes.

Utilizando alguns dos conceitos básicos da teoria das probabilidades, a equação da probabilidade de sistemas em série pode ser reescrita na forma:

$$P_f^s = \sum_{i=1}^{j} P_i - \sum_{i=1}^{j}\sum_{k>1}^{j} P_{ik} - \sum_{i=1}^{j}\sum_{k>1}^{j}\sum_{l>k}^{j} P_{ikl} - \ \ldots \tag{2.7}$$

2.3 Método de Monte Carlo

Esse o método de simulação é muito utilizado quando se deseja obter uma estimativa precisa da probabilidade de falha. Uma condição necessária a sua utilização é que as variáveis aleatórias envolvidas no problema devem possuir distribuições de probabilidade conhecidas. Inicialmente, um vetor de N elementos é gerado para cada variável aleatória. O conjunto dos elementos de cada vetor deve ter as mesmas propriedades estatísticas das variáveis aleatórias correspondentes, ou seja, mesmo tipo de distribuição, média e desvio padrão. Com um elemento de cada conjunto calcula-se um valor para as funções de falha gerando-se assim um vetor com valores para as funções de falha com a mesma dimensão N do vetor das variáveis. A probabilidade de falha P_f é calculada dividindo-se o número de elementos do vetor das funções de falha que estão na região de falha pelo número total de elementos do vetor.

Normalmente, a geração dos valores aleatórios para as variáveis envolvidas são feitas com base em parâmetros de entrada dessas variáveis aleatórias. Utilizam-se então funções determinísticas existentes nos softwares do tipo MATLAB, MAPLE, FORTRAN, etc. Sendo assim, os valores obtidos são ditos pseudo-aleatórios.

Para gerar uma seqüência que obedeça a uma distribuição de probabilidades qualquer, pode-se gerar uma seqüência que obedeça a uma distribuição normal e depois efetuar a transformação adequada para distribuição desejada. Esse procedimento simples

para geração de valores de qualquer distribuição de probabilidade pode ser obtido da seguinte maneira: primeiramente gera-se uma amostra de valores q_i de probabilidades que obedecem a uma distribuição de uniforme com valores entre zero e um. Isso é feito via um conjunto de operações determinísticas realizadas pelo computador cujo truncamento das casas decimais pode ser fornecido pelo usuário. A seguir, calcula-se a correspondente variável normal padrão referente à q_i através de uma transformação isoprobabilística inversa na forma $u_i = \Phi^{-1}(\mathrm{q_i})$. Assim, obtêm-se a respectiva variável física mediante uma transformação para o espaço físico dada por, $x_i = F_X^{-1}\big(\Phi(u_i)\big)$. Assim, através dessa realização no espaço físico são obtidos os resultados de todas as variáveis aleatórias existente no processo, podendo então determinar a resposta do problema considerado. O método de Monte Carlo procura substituir a equação (2.3) por um estimador da probabilidade de falha com o cálculo da expectância matemática da variável aleatória $I(x)$ na forma:

$$P_f = \int_{\Omega_F} f_X(x)dx = \int_{R^n} I(x)\, f_X(x)dx = E[I(x)] \tag{2.8}$$

onde $E[I(x)]$ é a expectância matemática da variável aleatória $I(x)$. Define-se o estimador $I(x)$ por:

$$I(X) = \begin{cases} 1 \rightarrow x \in \Omega_\mathrm{f} \\ 0 \rightarrow x \notin \Omega_\mathrm{f} \end{cases} \tag{2.9}$$

Repetindo as análises para um número grande de simulações N, a média empírica dos valores de $I(x)$é um estimador da probabilidade de falha. Significa que:

$$\bar{P}_f = \frac{\sum_{j=1}^{N}\{I(G(U) \leq 0)\}}{N} \tag{2.10}$$

Uma visualização gráfica do método de Monta Carlo pode ser vista na figura 2. Em cada simulação uma resposta é obtida, no caso de um valor de carga último, que se encontra no domínio de segurança ou no domínio de falha. A probabilidade de falha pode então ser obtida pela soma dos eventos de falha e relacionando-os com os todos os eventos existentes.

Uma das grandes vantagens das simulações de Monte Carlo consiste na substituição do cálculo de integrais complexas que não possuem soluções analíticas fechadas. A simulação entra exatamente nesse ponto, produzindo como resultado um valor para a integral que tende a se estabilizar em torno da média à medida que o número de simulações se aproxima do infinito.

É importante salientar que a equação (2.8) não fornece uma solução exata e sim uma aproximação que converge para a solução exata a medida que o tamanho da amostra N aumenta. Com isso conclui-se que quanto menor a probabilidade de falha maior a necessidade da amostra, ou seja, um maior N.

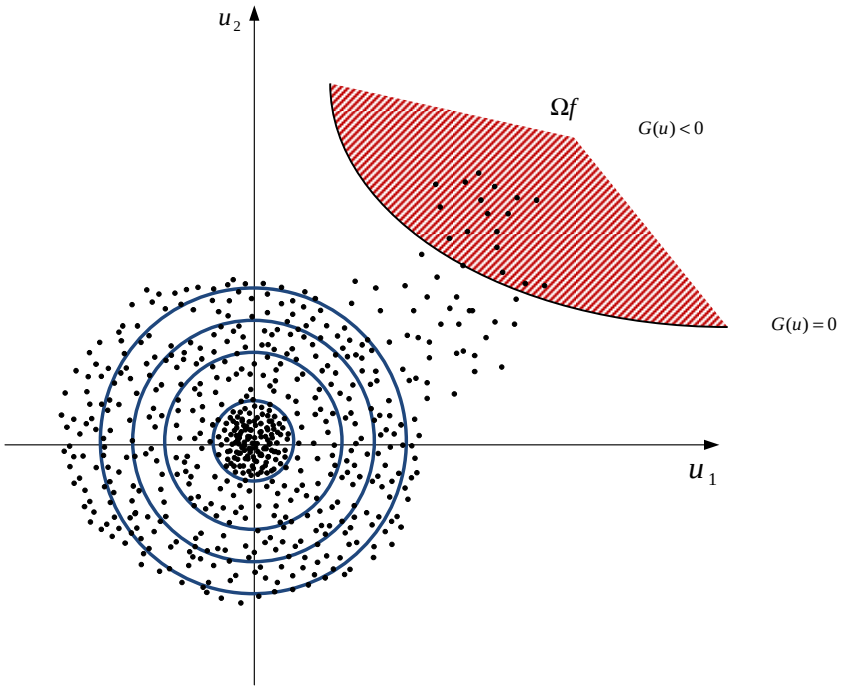

Figura 2: Sorteio de pontos na simulação de Monte Carlo

Uma maneira de verificar a convergência do método de Monte Carlo é verificar se o tamanho da amostra N utilizada está resultando num bom estimador da probabilidade de falha. Assim, podemos calcular o coeficiente de variação do cálculo da probabilidade de falha, dado na forma:

$$\delta_{\overline{P_f}} = \frac{\sigma_{\overline{P_f}}}{\overline{P_f}} \tag{2.11}$$

Onde $\sigma_{\overline{P_f}}$ é o desvio padrão da probabilidade de falha dado por:

$$\sigma_{\overline{P_f}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\left\{\sum_{j=1}^{N}\left\{I[G(U) \leq 0] - N\left(\overline{P_f}\right)^2\right\}\right\}} \tag{2.12}$$

Assume-se que valores na ordem de 0.025 e 0.05 seja uma boa aproximação do estimador.

3 Modelo de bielas e tirantes

Os modelos de bielas e tirantes são representações discretas dos campos de tensões atuantes nas estruturas de concreto armado. Elas representam o mecanismo de encaminhamento de cargas dentro da estrutura pela aproximação do fluxo das forças internas sendo as bielas representativas do fluxo das tensões de compressão enquanto os tirantes representam o fluxo das tensões de tração.

Sendo assim, o modelo das bielas e tirantes propõe uma sistematização no dimensionamento desses tipos de elementos possibilitando ao projetista estrutural um

entendimento bastante completo do funcionamento da estrutura. O modelo estrutural a ser adotado poderá ser inicialmente concebido através do campo de tensões elásticas ou mesmo pelo fluxo interno de tensões existente no contínuo (concreto). Isso feito, as forças atuantes nos elementos serão automaticamente calculadas por meio do equilíbrio de forças externas e internas. Assim projeta-se a estrutura do modelo pelo teorema do limite inferior da teoria da plasticidade considerando-se a estrutura estaticamente admissível.

Para aplicação do modelo de bielas e tirantes é necessária a determinação da topologia do modelo estrutural dentro da estrutura de concreto em análise. Essa geometria pode ser obtida com base nas cargas atuantes, ângulos entre as bielas e tirantes, as áreas de aplicação das forças atuantes (carregamentos e restrições de apoio), quantidade de armaduras dos tirantes e cobrimentos das armaduras.

A distribuição das tensões elásticas dentro da estrutura de concreto devido aos carregamentos atuantes normalmente é utilizada como uma referência inicial para determinação do posicionamento e dos ângulos entre as bielas e tirantes do modelo estrutural idealizado. As dimensões das bielas e das regiões nodais dependem da área de aplicação das forças (ações e reações), do número de camadas das armaduras existentes e do cobrimento adotado para as mesmas.

As bielas e tirantes devem ser dispostos de tal forma que os centros de gravidade de cada elemento da treliça conjuntamente com a linha de ação das forças atuantes coincidam em cada nó. Essa é uma exigência que acaba por limitar a largura das bielas. Também o número de camadas de armadura existentes e o cobrimento adotado serão responsáveis pela determinação das regiões nodais. A Figura 3 mostra esquematicamente como o processo de concepção do modelo é feito.

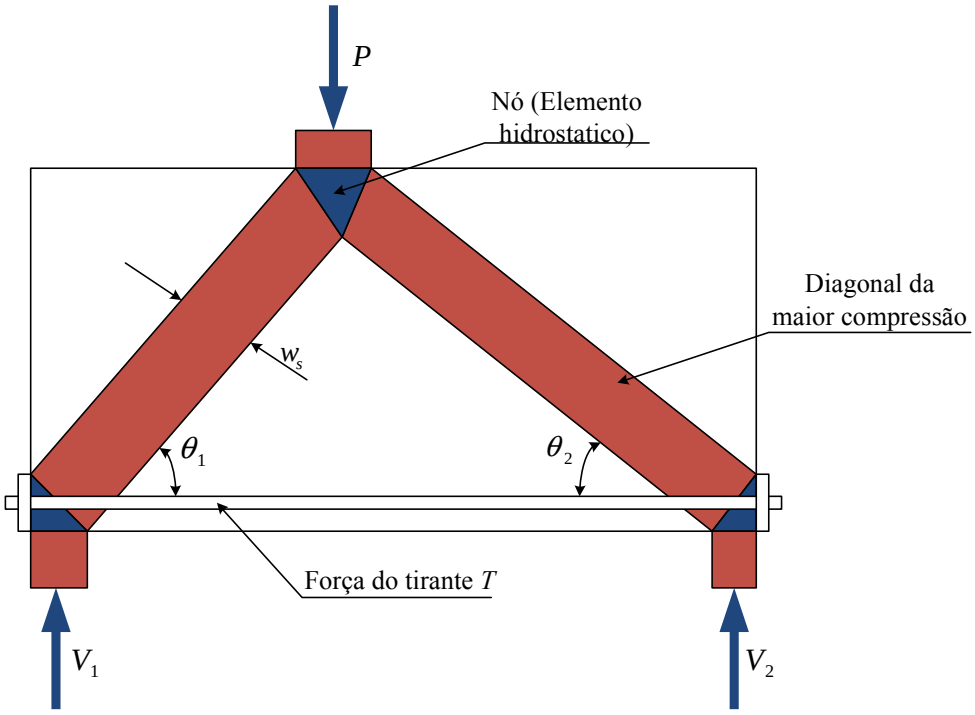

Figura 3 - Modelo de bielas e tirantes numa viga parede

No entanto, a utilização desses modelos requer do projetista alguma experiência ou conhecimento prévio, uma vez que o modelo escolhido deve representar o mais

realisticamente possível o funcionamento da estrutura. Dessa forma pode-se comparar esse tipo de determinação necessária a estruturação do modelo como uma espécie de lançamento estrutural muito comum na concepção dos edifícios.

4 Exemplo de aplicação

O exemplo apresentado foi retirado de HASSOUN et AL (2008) com as unidades transformadas para o sistema internacional-SI. Consiste numa viga parede bi-apoiada de seção retangular com um vão de entre apoios de $l = 365{,}76$ cm, altura de $h = 182{,}88$ cm e espessura $e = d_1 = 45{,}72$ cm. Os suportes possuem uma dimensão $d = 45{,}72$ cm e seu carregamento é formado no meio do vão através de uma carga permanente de $330\,KN$ e uma parcela acidental de $456\,KN$. O projeto de dimensionamento foi executado conforme as prescrições da norma Americana ACI-318 (2002) através do método das bielas e tirantes. O domínio de projeto da viga parede com o carregamento, restrições de apoio, armaduras, cobrimentos e seção transversal é apresentado na Figura 4.

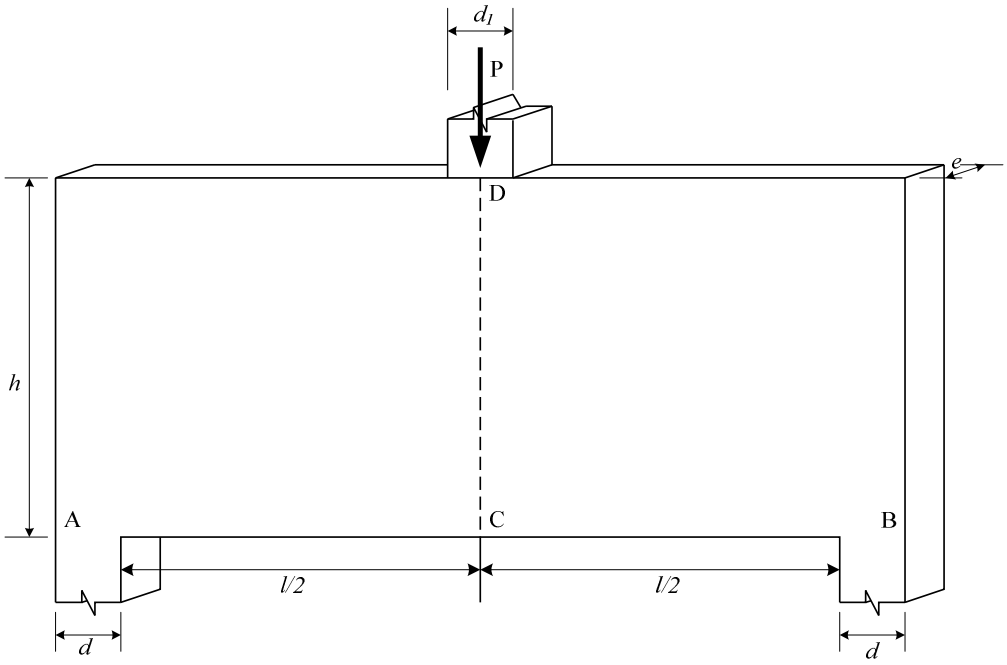

Figura 4 – Viga parede considerada no estudo

A modelagem via o método das bielas e tirantes para a estrutura de viga parede proposta é mostrada na figura 5. O sistema treliçado equivalente é formado de duas bielas simétricas e um tirante na parte inferior. Dois tipos de nó serão considerados: CCC e CCT (C- Compressão e T- Tração).

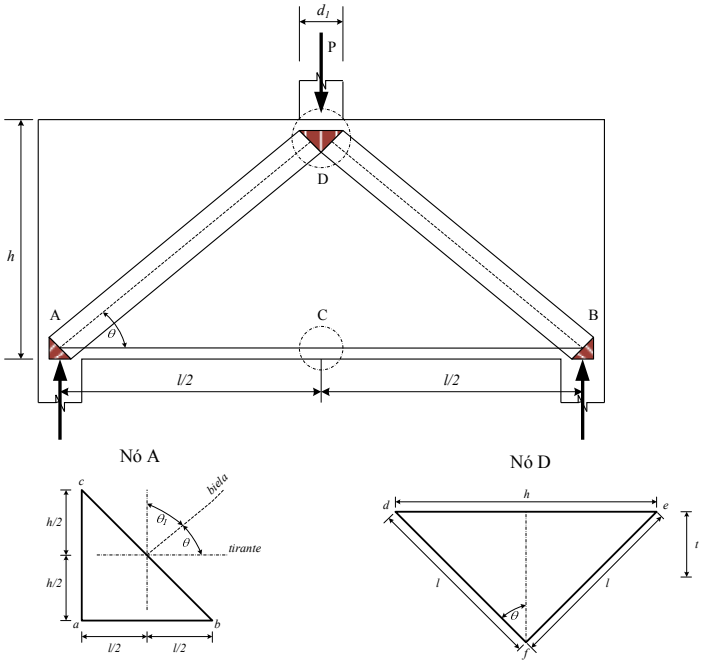

Figura 5 – Modelo de bielas e tirantes proposto

Um detalhamento do nó CCT e da armadura distribuída na seção transversal é mostrado na figura 6. Uma zona aumentada para consideração da ancoragem das armaduras é mostrada em detalhe. A área de aço obtida no dimensionamento pela norma ACI é de 77,42 cm2.

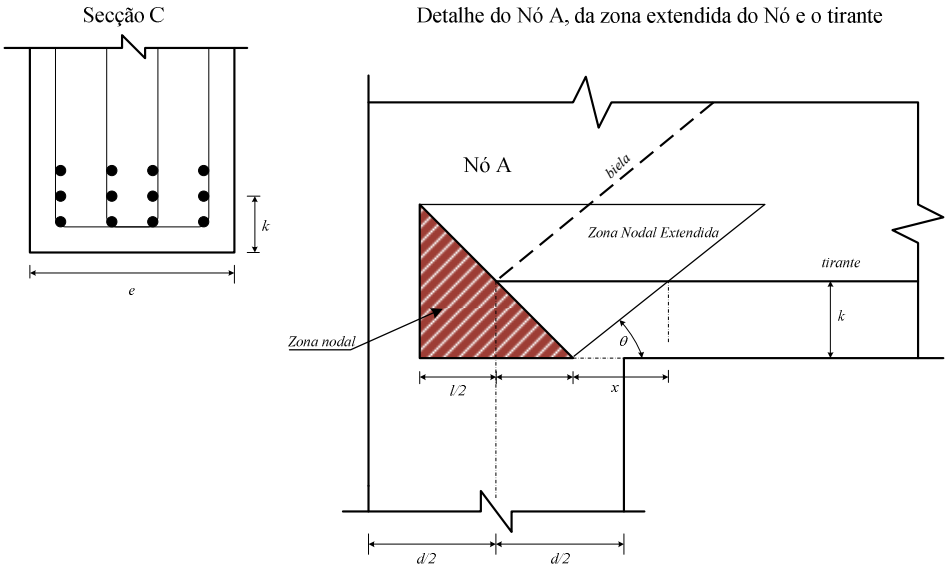

Figura 6 – Detalhamento do nó CCT e distribuição da armadura

4.1 Variáveis estatísticas e índice de confiabilidade de referência

Para cada uma das variáveis aleatórias consideradas na análise de confiabilidade executada sobre o exemplo, foram obtidos os valores médios e de desvio padrão e definido o tipo de distribuição. Esse é um procedimento necessário uma vez que os valores inicialmente apresentados são característicos. Uma vez definidas as propriedades estatísticas das variáveis aleatórias é feita a geração dos valores aleatórios correspondentes.

Os tipos de distribuição e valores referentes para cada tipo de variável aleatória foram retirados em textos disponibilizados em JCSS (2001).

Tabela 2 - Variáveis aleatórias do modelo

Variável aleatória	Funçao de distribuiçao	Média	Desvio Padrao	Coeficiente de variaçao
Carregamento permanente	Normal	V_{qk}(kN)	0,25 V_{qk}(kN)	0,25
Carregamento acidental	Gamma	T_{qk}(kN)	0,25 T_{qk}(kN)	0,25
Resistência a compressão - concreto	Lognormal	V_{gk}(kN)	0,10 V_{gk}(kN)	0,10
Resistência a tração - Aço	Lognormal	T_{gk}(kN)	0,10 T_{gk}(kN)	0,10

Nesse trabalho foi considerada uma classe de conseqüência de CC2 para obtenção do índice de confiabilidade de referência. Isso foi feito para um Estado Limite Último de e um período de retorno de 50 anos, o que leva a um índice de referência de igual a 3,8, ou uma probabilidade de falha igual a $7{,}2x10^{-5}$. Para melhores esclarecimentos ver GOMES (2008) e JCSS (2001).

4.2 Funções de estado do modelo de bielas e tirantes

As funções de estado consideradas são definidas a partir das prescrições apresentadas no ACI-318(2002) para a verificação do estado limite último de resistência. Assim o modelo é considerado satisfatório quando são verificadas simultaneamente as seguintes condições (sistema em série):

- **Biela**: $G_1(X_1, X_2, X_3) = R_1(X_1, X_2) - S_1(X_3)$

Onde:
$S_1(X_3)$ - Força solicitante atuante na biela comprimida;
$R_1(X_1, X_2) = F_e * A_P$ - Força resistente (Resistência efetiva X Área da biela)

Formulação segundo ACI-318 [2002]
$F_e = 0.85 * \beta_s * f_c(i)$
$\beta_s = 0.85$ (Bielas tipo garrafa)

Formulação segundo CEB-FIP Model Code [1993]
$F_e = 0.60 * (1 - f_c(i)/25) * f_c(i)$

Formulação segundo Schäfer & Schlaich [1988,1991]

$F_e = 0.80 * f_c(i)$

- **Nós**: $G_2(X_1, X_2, X_3) = R_2(X_1, X_2) - S_2(X_3)$ e $G_3(X_1, X_2, X_3) = R_3(X_1, X_2) - S_3(X_3)$

Onde:
G_2, equilíbrio dos nós tipo 1 e G_3, equilíbrio dos nós tipo 2: $\sum Forças = 0$
$S_2(X_3)$ e $S_3(X_3)$ - Forças solicitantes na placa (apoio ou carregamento);
$R_2(X_1, X_2) = R_3(X_1, X_2) = F_e * A_P$ - Força resistente

Tipo 1 (CCC):
Formulação segundo ACI-318 [2002]
$F_e = 0.85 * \beta_s * f_c(i)$
$\beta_s = 1$ (Zonas nodais circundadas)

Formulação segundo CEB-FIP Model Code [1993]
$F_e = 0.85 * (1 - f_c(i)/25) * f_c(i)$

Formulação segundo Schäfer & Schlaich [1988,1991]
$F_e = 1 * f_c(i)$

Tipo 2 (CCT):
Formulação segundo ACI-318 [2002]
$F_e = 0.85 * \beta_s * f_c(i)$
$\beta_s = 0.85$ (Zonas nodais com 1 único tirante)

Formulação segundo CEB-FIP Model Code [1993]
$F_e = 0.60 * (1 - f_c(i)/25) * f_c(i)$

Formulação segundo Schäfer & Schlaich [1988,1991]
$F_e = 0.80 * f_c(i)$

- **Tirante**: $G_4(X_1, X_2, X_3) = R_4(X_1, X_2) - S_4(X_3)$, onde:

$S_4(X_3)$ - Força solicitante atuante na tirante tracionado;
$R_4(X_1, X_2) = F_e * A_P$ - Força resistente

Todas formulações
$F_e = f_y(i)$

- **Ancoragem da armadura**: $G_5(X_1, X_2, X_3) = R_5(X_1, X_2) - S_5$

Onde:
S_5 – Comprimento de ancoragem existente na área do nó;
$R_5(X_1, X_2) = l_{dh} = 0.02 * F_e * 2.865/\sqrt{Fck}$ - Comprimento de ancoragem resistente

Todas formulações
$F_e = f_y(i)$

4.3 Resultados obtidos

Diversas análises foram feitas para obtenção dos índices de confiabilidade do modelo proposto. Foram consideradas três propostas diferentes para avaliação das resistências nodais e das bielas conforme literatura corrente. Estas propostas são apresentadas em SCHLAICH et al (1987), CEB-FIP Model Code (1993) e ACI 318/95 (1995).

Inicialmente, foi executada uma análise de confiabilidade sobre a modelagem proposta na expectativa de avaliar o nível de confiabilidade do modelo, uma vez que os aspectos aleatórios envolvidos no processo estariam sendo considerados. Em cada rodada pelo método de Monte Carlo foram executadas 1.000.000 (um milhão) de realizações de modo a garantir bons resultados no processo de convergência.

As variáveis aleatórias consideradas no modelo foram: a resistência à compressão do concreto – f_{ck}, a resistência à tração do aço - f_{yk}, a carga atuante permanente P_g e a carga atuante acidental P_q. Todas as equações de estado verificadas pelos diversos modos de falha podem ser calculadas através das variáveis aleatórias descritas anteriormente.

Dois aspectos importantes foram observados em cada rodada da análise: o nível de confiabilidade do modelo proposto e a ductibilidade representada pela probabilidade menor ou maior da falha ocorrer de forma frágil, ou seja, nos nós e bielas existentes, como também de forma dúctil através do escoamento do aço dos tirantes.

O gráfico apresentado na figura 7 mostra como o dimensionamento obtido pelo modelo de bielas e tirantes conforme prescrito no ACI-318(2002) leva a um índice de confiabilidade do sistema inferior ao índice de referência solicitado pelo JCSS (2005). Comparativamente percebe-se que a formulação proposta por SCHLAICH et al (1987) é a que mais se aproxima do valor referencial proposto sendo então a que possui uma probabilidade maior de estar segura, considerando-se a natureza aleatória das variáveis. A que apresentou os piores resultados foi à formulação do CEB-FIP Model Code (1993).

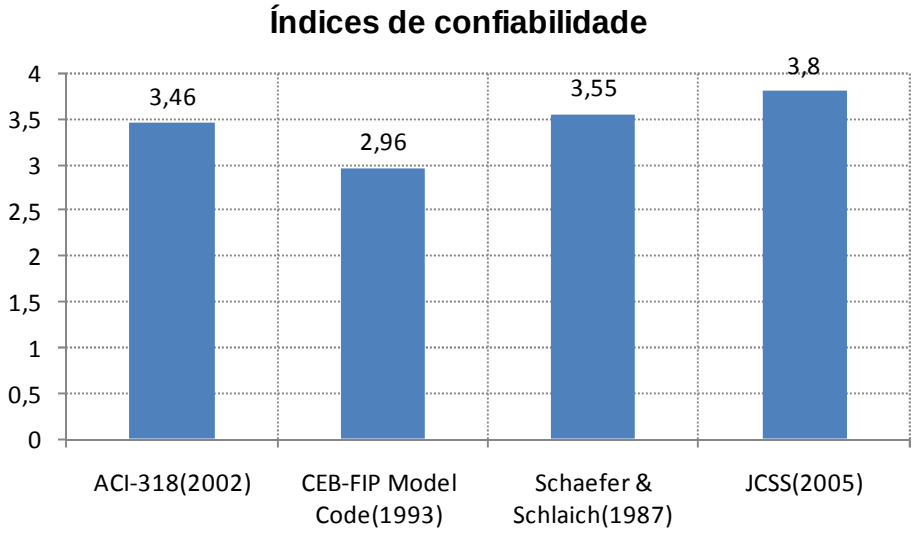

Figura 7 – Índice de confiabilidade obtido pelas diversas propostas

Considerando-se, no entanto, o aspecto de ductibilidade necessário ao funcionamento do modelo de bielas e tirantes através da tabela 1, nota-se que o modelo obtido via proposta do ACI-318(2002), conduz a uma probabilidade de falha alta no modo G2, o que significa uma ruptura frágil no nó inferior do modelo (nó CCT), apesar de um valor razoável para escoamento das armaduras. Também a proposta do CEB-FIP Model Code (1993) apresentou valores ruins de probabilidade de falha, o que ficou pior, uma vez que sua probabilidade de falha G4 foi bastante baixa. Das propostas apresentadas, novamente a de SCHLAICH et al (1987) foi a que obteve a melhor performance do ponto de vista da ductibilidade.

Tabela 1 - Comparação entre propostas

		Porcentagem da prob. de falha de cada modo(%)				
	Índ. Confiabilidade	G1	G2	G3	G4	G5
ACI-318(2002)	3,46	6,5	55,16	13,22	70,88	0
CEB-FIP Model Code(1993)	2,96	5,49	99,55	17,43	12,28	0
Schaefer & Schlaich(1987)	3,55	1,98	17,1	2,14	95,13	0

Em seguida uma modificação foi feita no algoritmo de variação das variáveis aleatórias, no sentido de melhorar o desempenho do modelo em estudo. Variações na resistência à compressão do concreto e na área de aço do modelo foram feitas no sentido de produzir um modelo que cumprisse com os dois critérios estabelecidos de segurança e ductilidade. A figura 8 mostra o comportamento do índice de confiabilidade para proposta do ACI-318(2002).

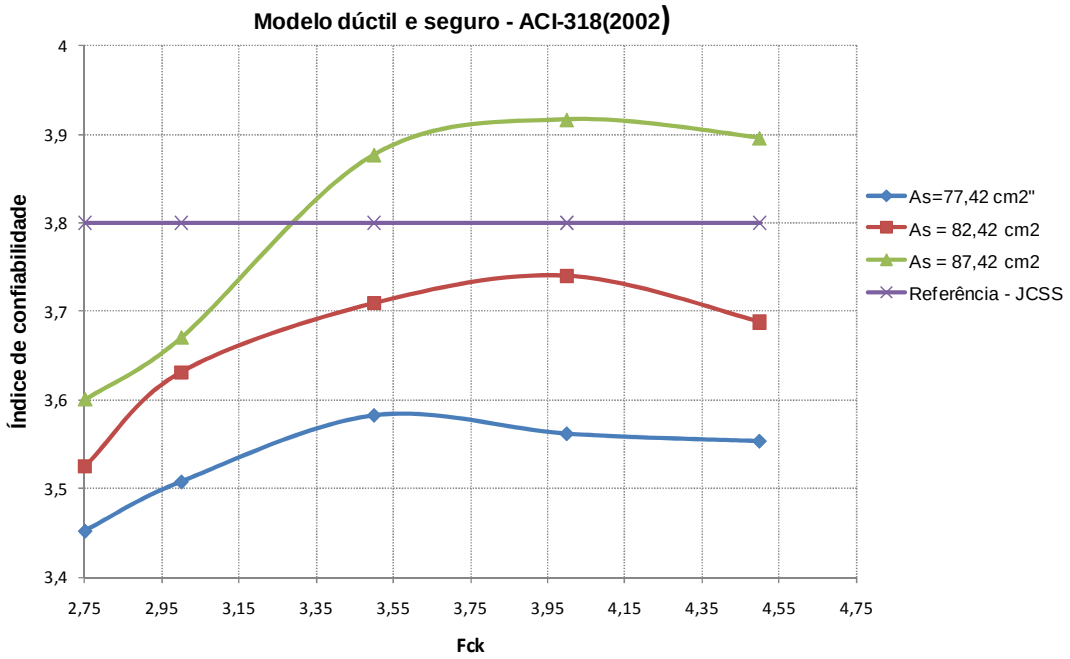

Figura 8 – Obtenção de um modelo correto pelo ACI-318(2002)

Com base no gráfico apresentado fica claro o não cumprimento do índice de confiabilidade de referência para os modelos de menor armadura. Isso se dá mesmo que estes modelos tenham cumprido o quesito de ductilidade devido ao aumento no valor do f_{ck}. O modelo considerado consistente, segundo a análise de confiabilidade, seria aquele com valores de resistência à compressão acima de $3{,}2\ MPa$ e armadura igual a $87{,}42\ cm2$. Valores diferentes do proposto pela análise determinística.

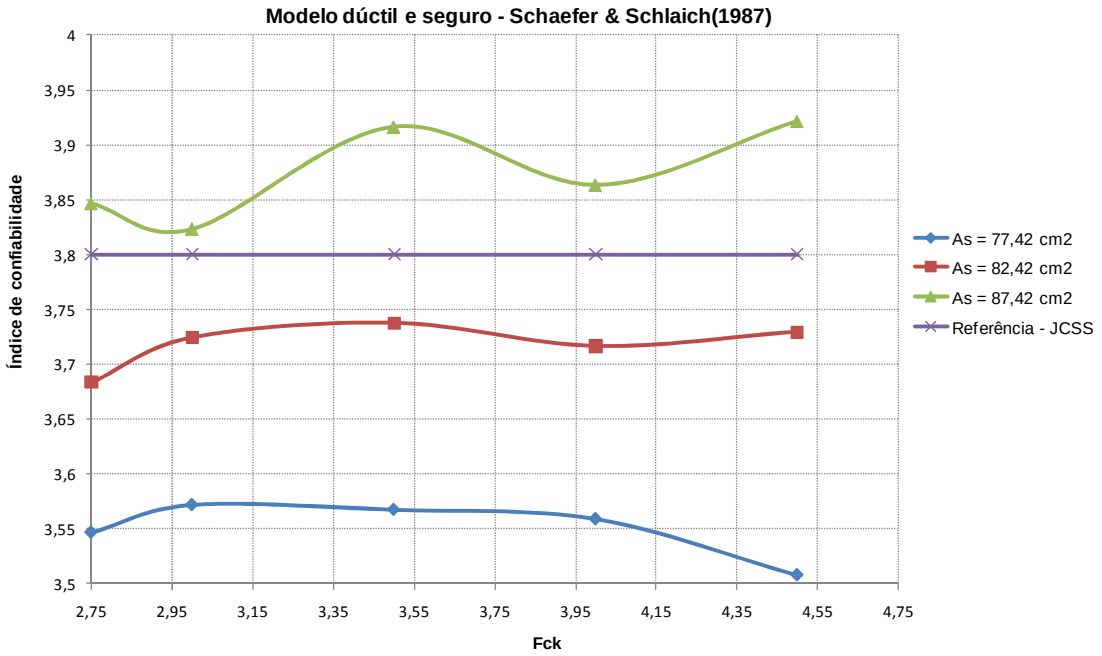

Figura 9 – Obtenção de um modelo correto pelo Schlaich et al (1987)

Também as mesmas variações foram aplicadas a proposta de SCHLAICH et al (1987) mostrada na figura 9. Nesse caso, os modelos com nenhum ou pouco aumento na área de aço não foram capazes de cumprir o índice de referência. No entanto, para o modelo com o maior aumento da área de aço, foi possível cumprir o índice de referência sem necessidade de aumento na variável referente à resistência à compressão do concreto. Isso demonstra ser essa proposta menos conservadora do que a anterior.

A última proposta analisada foi a do CEB-FIP Model Code (1993) com as mesmas variações para resistência à compressão e armadura. A figura 11 apresenta os resultados obtidos. Com base neles é possível perceber o não cumprimento do índice de confiabilidade de referência. Sendo assim, conclui-se ser essa proposta, a mais conservadora das analisadas, pois maiores valores para as variáveis aleatórias seriam necessários de forma a cumprir os quesitos de confiabilidade. A figura 10 mostra graficamente o desempenho desse modelo.

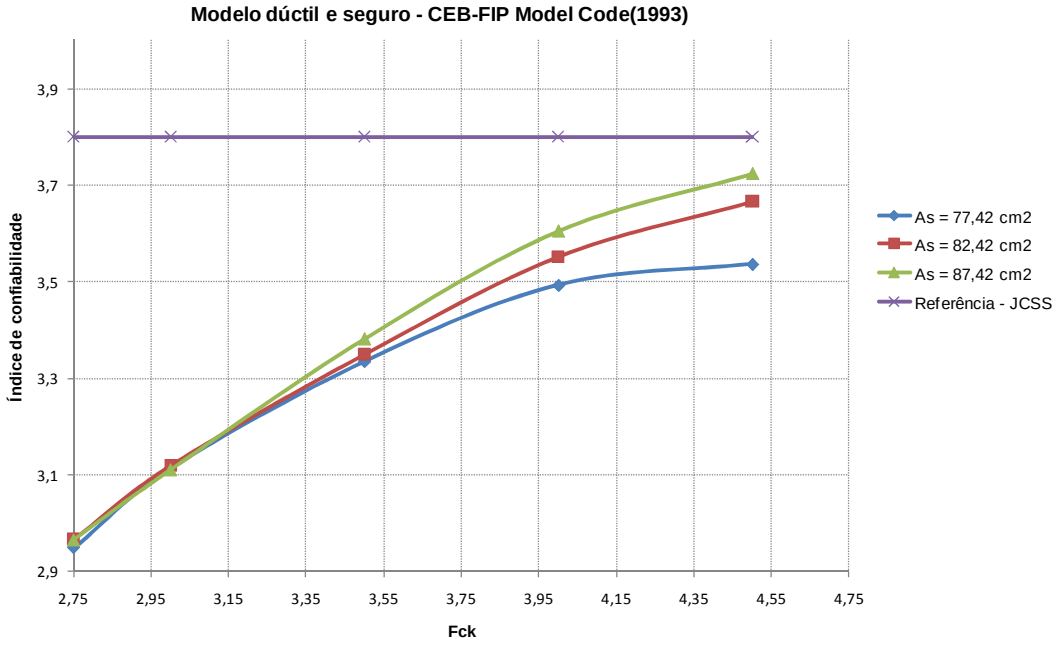

Figura 10 – Obtenção de um modelo correto pelo CEB-FIP Model Code (1993)

5 Considerações finais

Este trabalho apresentou um exemplo de viga parede dimensionado através do modelo de bielas e tirantes conforme a normativa do ACI e uma avaliação do modelo obtido através da análise de confiabilidade. Ficou clara a necessidade de uma alteração no modelo original de forma a cumprir os requisitos de ductilidade exigidos pelas hipóteses básicas do método. Sendo assim ficou mostrado ser possível alterar os valores exigidos para variáveis aleatórias de projeto de forma a cumprir tal exigência. Comparações entre três propostas diferentes, existentes na literatura corrente, foram feitas e seus resultados analisados. De acordo com os resultados obtidos, pode-se concluir que o modelo dimensionado de forma determinística não cumpriu os quesitos de segurança e ductilidade propostos pelo JCSS (2001). Com a variação dos parâmetros foi possível uma nova modelagem da estrutura. A modelagem feita com a utilização da proposta feita por SCHLAICH et al (1987) obteve uma melhor performance para a análise de confiabilidade feita, seguida pela proposta do ACI-318(2002). Não foi possível uma modelagem satisfatória pelo modelo probabilístico para proposta do CEB-FIP Model Code (1993). Sendo assim, ficou mostrado ser a análise de confiabilidade é uma alternativa viável e bastante eficaz na definição do nível de segurança e de ductilidade do modelo de bielas e tirantes.

Agradecimentos

Agradeço ao engenheiro Thiago Galindo Pecin pelas excelentes discussões e contribuições feitas durante a execução desse trabalho. Algumas de suas observações foram bastante importantes na implementação do algoritmo e posterior finalização dessa pesquisa.

6 Referências Bibliográficas

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. ACI-318 – Building Code Requirements for Structural Concrete. 2005.

CEB – Model Code: First Order Concepts for Design Codes. CEB Bulletin N. 112, Munich. 1976a

CEB – Model Code: Common Unified Rules for Different Types of Construction and Material. Vol.1. CEB Bulletin N. 116, Paris. 1976b

FU, C. C., The Strut and Tie Model of Concrete Structures. Presented to Maryland State Highway Administration. University of Maryland. 2001

GOMES, A. C., Análise de Confiabilidade Estrutural de uma Viga de Concreto Armado submetida à Ação Combinada de Cisalhamento e Torção pelo Método de Monte Carlo. Projeto de Final de Curso. UFRJ. Rio de Janeiro/RJ. 2008

GRAZIANO,F. P., Projeto e Execução de Estruturas de Concreto Armado. São Paulo. O Nome da Rosa Editora Ltda. 1ed. 2005

HART,G. C., Uncertainty Analysis Loads and Safety in Structural Engineering. Prentice Hall Inc. 1982

JCSS – Probabilistic model code. The Joint Commite on Structural Safety. The Probabilistic Model Code. 2001

LEONHARDT, F. & MÖNNIG, E. Construções de Concreto: Vol. 1,2,3. Rio de Janeiro. Interciência. 1978

PALIGA, C. M., Análise Probabilística de Vigas de Concreto Armado Recuperadas à Flexão, através do Método de Monte Carlo Utilizando um Modelo de Elementos Finitos. Tese de doutorado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul – URGS. Departamento de Engenharia Civil. Porto Alegre/RS. 2008

PANTOJA, J. C., Cálculo da Carga de Colapso Plástico de Vigas Paredes via Modelagem Numérica. Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília – UNB. Brasília/DF. 2003

PANTOJA, J. C.; Vaz, L. E.; Martha, L. F. 2009. Modelo de Bielas e Tirantes Gerados por Otimização Topológica e Elementos Indutores. Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais – XXX CILAMCE 2009. Búzios. Rio de Janeiro/RJ.

SANTOS, D., Análise de Vigas de Concreto Armado Utilizando Modelos de Bielas e Tirantes. Universidade de São Paulo. Escola de Engenharia de São Carlos. São Carlos/SP.2006

SANTOS, S. H. C. – Detalhamento de Estruturas de Concreto Armado. Apostila do curso da UFRJ. 2010

SCHÄFER, K. et al. Consistent Design of Structural Concrete using Strut and Tie Models. In: Colóquio sobre Comportamento e Projeto de Estruturas, PUC Rio., Rio de Janeiro/RJ. 1988

SCHLAICH, J.; SCHÄFER, K.; JENNEWEIN, M., Towards a Consistent Design of Structural Concrete. PCI Journal, v.32, n.3, p.74-150. May-June. 1987

SILVA, R. C. & GIONGO J. S., Modelos de Bielas e Tirantes Aplicados a Estruturas de Concreto Armado. EESC USP. 2000

SILVA, R. C., Concreto Armado: Aplicações de Modelos de Bielas e Tirantes. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo. Escola de Engenharia de São Carlos/SP. 1991

SILVA, R. C. e GIONGO, J. S., Modelos de Bielas e Tirantes Aplicados a Estruturas de Concreto Armado. Livro. Editora EESC-USP. São Carlos/SP. 2000

SOUZA, R. A., Concreto Estrutural: análise e dimensionamento de elementos com descontinuidades. Tese de doutorado. USP – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia e Fundações. São Paulo/SP. 2004

SOUZA, R. A. & BITTENCOURT, T. N., Recomendações Práticas para a Aplicação do Método de Bielas e Tirantes. Publicação do IBRACON. 2008