Proceedings of the XXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering
September 3 to 6, 2006 - Belém, Pará - BRAZIL.

GERAÇÃO DE MALHA TRIDIMENSIONAL POR MAPEAMENTO

Antônio Carlos de Oliveira Miranda
Luiz Fernando Martha
amiranda@tecgraf.puc-rio.br
lfm@tecgraf.puc-rio.br
Grupo de Tecnologia em Computação Gráfica (Tecgraf) e
Departamento de Engenharia Civil,
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio),
Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea, Cep 22453-900,
Rio de Janeiro-RJ, Brasil.

Abstract. *The main purpose of this paper is to propose a original three-dimensional transfinite mapping that combines two previous techniques of literature. First, a work suggested by Gordon and Hall that uses Langragean transfinite mapping technique to generate meshes in transversal sections and spline curves to interpolate these sections in order to create solid finite elements between them. Second, a work introduced by Cook that uses edge curves from a super-element to generate mapping elements. Both cited techniques present a limitation in not considering all boundary curves of a model in mesh generation. To reduce this restriction, the proposed mapping considers all boundary curves and uses a trilinear average mapping to position interior points in the model domain. Besides, this paper details some procedures to obtain the boundary curves when the model is discrete and represented generically by a list of faces and nodes. Finally, some examples of modeling with complex geometries are shown to demonstrate some advantages of the proposed mapping.*

Keywords: *Structured Mesh Generation, Transfinite Mapping.*

1. INTRODUÇÃO

As técnicas de construção de malhas, usadas em muitas aplicações como no método dos elementos finitos, podem ser classificadas como malhas não-estruturadas e malhas estruturas (Owen 1998; Thompson, Soni et al. 1998). Uma malha não-estruturada é uma malha que tem uma ocupação espacial irregular de suas células e a conectividade de células adjacentes são definidas separadamente uma da outra. Para o propósito de geração de malhas não-estruturadas, existem vários algoritmos para geração de triângulos, quadriláteros, tetraedros, e hexaedros. Especial atenção tem sido dada na geração de hexaedros em domínios arbitrários e muitos trabalhos têm sido desenvolvidos nesse sentido (Perucchio, Saxena et al. 1988; Shephard and Georges 1991; Landertshamer 1994; Li, McKeag et al. 1995), mas todos apresentam restrições. Por outro lado, a malha estruturada apresenta uma ordenação regular de suas células com um arranjo espacial pré-definido. Apesar das restrições desse tipo de construção, a técnica é bastante usada em geradores de malhas comerciais devido a sua facilidade de implementação e aplicação. Usualmente, a geração de malhas estruturadas é aplicada em volumes simples. No caso de uma geometria complexa, esta é decomposta em volumes menores até que seja possível aplicada algum algoritmo de geração de malha estruturada. Em geral, três métodos são os mais empregados: mapeamento (Cook and Oakes 1982), submapeamento (White 1996) e sweep (arrasto) (Blacker 1996; Knupp 1998; Knupp 1999; Staten, Canann et al. 1999; Lai, Benzley et al. 2000).

Basicamente, as técnicas de mapeamento mais empregadas em geometrias bidimensionais e tridimensionais são as de mapeamento isoparamétrico (Zienkiewicz and Phillips 1971) e de mapeamento transfinito (Gordon and Hall 1973; Cook and Oakes 1982). Para um mapeamento ser aplicável, as arestas opostas de uma área a ser gerada uma malha devem ter o mesmo número de subdivisões. Para o caso tridimensional, cada face oposta de um cubo paramétrico unitário dever ter uma mesma malha de superfície. A idéia básica do mapeamento é a geração de uma malha em um sistema de coordenadas locais (ξ, η, γ) que pode ser mapeada para o domínio no sistema de coordenadas globais usando funções de mapeamento. No caso do mapeamento isoparamétrico, os pontos gerados para o domínio no sistema de coordenadas globais são obtidos a partir de um somatório de funções de forma pelas coordenadas dos vértices que definem elemento isoparamétrico. No caso do mapeamento transfinito tridimensional, as coordenadas do domínio são calculadas a partir das arestas ou faces do cubo paramétrico unitário usando uma formulação de mapeamento que é aplicada em regiões discretas.

As técnicas sugeridas por Gordon e Hall (1973) e por Cook (1982) são as duas técnicas mais utilizadas da literatura para geração de malhas estruturadas em domínios que possam sem representados por um cubo unitário em um sistema de coordenadas paramétricas. A primeira técnica pode ainda ser estendida para realização de sweep (arrasto), usando uma interpolação de seções transversais dispostas no espaço. Entretanto, ambas as técnicas apresentam uma restrição; não conseguem representar superfícies irregulares de um domínio. Portanto, para minimizar essa restrição, é proposto aqui um novo mapeamento transfinito tridimensional.

Em vista do que foi descrito anteriormente, esse trabalho tem como objetivo apresentar um mapeamento transfinito tridimensional onde todas as curvas que compõem o modelo são consideradas na geração dos pontos dentro do domínio do modelo. Essa consideração é de extrema importância em modelos que apresentam superfícies côncavas ou que sejam irregulares. Adicionalmente, um algoritmo é proposto para obtenção de todas as curvas do contorno, partido de uma lista de faces dispostas de forma genérica. A idéia básica do mapeamento proposto é usar a formulação de técnicas de mapeamento sofisticadas e de técnicas simplificadas, tornando assim um meio termo entre essas técnicas.

O presente trabalho apresenta inicialmente a base teórica que foi desenvolvida por Gordon e Hall (Gordon and Hall 1973) e também a formulação do mapeamento usando somente as arestas de um super-elemento hexaédrico. Baseado nas idéias apresentadas na base teórica, o mapeamento transfinito proposto é formulado. Além disso, alguns passos para obter as curvas do contorno do elemento discreto são propostos, partindo de uma entrada de dados genérica. Quatro exemplos de modelagem são mostrados. Por fim, são feitas as considerações finais na conclusão.

2. BASE TEÓRICA

Seja uma região sólida no espaço Euclidiano $\mathbf{E}^3$ e **C** o cubo unitário **[0,1]× [0,1]× [0,1]** no espaço paramétrico (ξ, η, γ), Figura 1. Então um mapeamento bijetivo **F:C→R** representa a distorção do cubo unitário do domínio **R**. Esse mapeamento introduz um sistema de coordenadas curvilíneas em **R**, isto é, cada ponto de **R** é associado com suas coordenadas generalizadas ξ, η, γ. Uma superfície de coordenada generalizada constante, por exemplo, $\gamma = \gamma'$ é uma imagem $\mathbf{F}(\xi, \eta, \gamma)$ da superfície plana $\gamma = \gamma'$ em **C**.

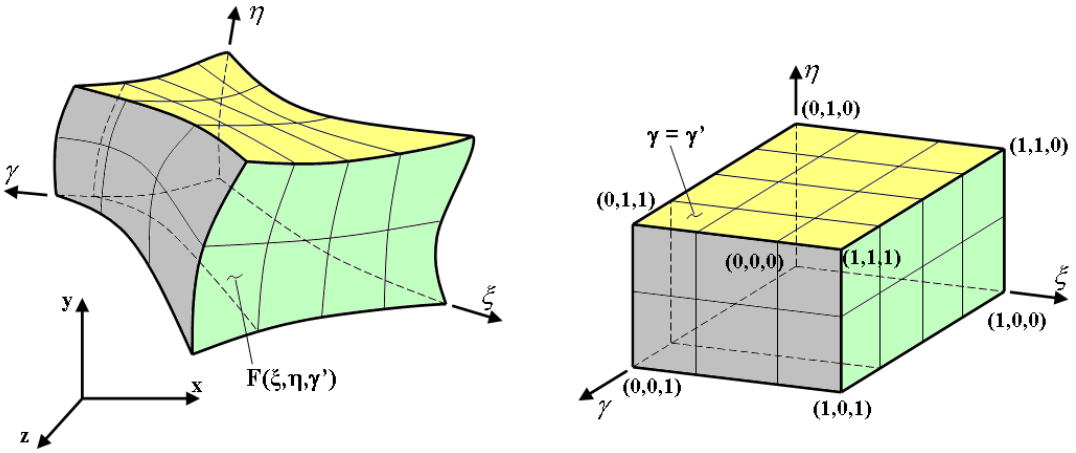

Figura 1 – Modelo definido por curvas no espaço Euclidiano $\mathbf{E}^3$ e **C** o cubo unitário **[0,1]× [0,1]× [0,1]** no espaço paramétrico (ξ, η, γ).

Deseja-se determinar o mapeamento **U:C→R** que coincide com **F** num conjunto de n+1 superfícies planas $\gamma = \gamma'$ onde $i = 0,n$, e $0 \leq \gamma_1 < ... < \gamma_n = 1$. Em outras palavras, **U** tem que igualar a **F** na superfície do contorno $\gamma = 0$ e $\gamma = 1$, isto é,

$$\mathbf{U}(\xi, \eta, 0) = \mathbf{F}(\xi, \eta, 0) \text{ e } \mathbf{U}(\xi, \eta, 1) = \mathbf{F}(\xi, \eta, 1) \tag{1}$$

e nas seções interiores $\gamma = \gamma_i$, isto é,

$$\mathbf{U}(\xi, \eta, \gamma_i) = \mathbf{F}(\xi, \eta, \gamma_i) \; ; \; i = 0,...,n \tag{2}$$

Considerando um conjunto de n+1 funções de um variável $\phi_i(\gamma)$ que satisfazem as condições de cardinalidade:

$$\phi_i = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \; ; \boldsymbol{i} = 0,...,n \tag{3}$$

Então, o projetor $\mathbf{P}_\gamma$ definido por:

$$\mathrm{P}_\gamma\left[\mathrm{F}\right] = \sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{n}} \phi_{\mathrm{i}}(\gamma)\mathrm{F}(\xi,\eta,\gamma_{\mathrm{i}}) \tag{4}$$

Interpola **F** entre as n+1 superfícies dadas por $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma_i}$, para $\boldsymbol{i} = 0,n$ e, então, o mapeamento **U:C→R** é o mapeamento transfinito de um sólido tridimensional.

As funções $\phi_i(\gamma)$ são chamadas funções combinadas ou de interpolação e podem ser tomadas como sendo "splines" cúbicas como sugerido por Gordon e Hall (Gordon and Hall 1973), pois fornecem uma interpolação mais suave quando várias superfícies intermediárias são especificadas a priori. Gordon e Hall sugeriram que cada função cardinal ϕ_i seja uma "spline" cúbica que satisfaz as condições de cardinalidade pela equação (2), e também as seguintes condições de contorno:

$$\phi_i''(\gamma_0) = \phi_i''(\gamma_n) = 0 \;\; ; \;\; \boldsymbol{i} = 0,...,n \tag{5}$$

Deve notar que a função **F:C→R** é somente uma notação simbólica conveniente, e a única informação disponível é a descrição geométrica de **R** em termos de seu contorno. O primeiro passo requerido é a geração das malhas nas seções transversais a partir das informações geométricas, o que pode ser feito com uso de mapeamento transfinito Lagrangeanos. Como definido em (Gordon and Hall 1973), cada mapeamento da seção transversal é determinado por:

$$\mathrm{F}(\xi,\eta,\gamma_{\mathrm{i}}) \cong \left(\mathrm{P}_{\xi_{\mathrm{i}}} \oplus \mathrm{P}_{\eta_{\mathrm{i}}}\right)\left[\mathrm{F}\right] \equiv \mathrm{P}_{\xi_{\mathrm{i}}}\left[\mathrm{F}\right] + \mathrm{P}_{\eta_{\mathrm{i}}}\left[\mathrm{F}\right] - \mathrm{P}_{\xi_{\mathrm{i}}}\mathrm{P}_{\eta_{\mathrm{i}}}\left[\mathrm{F}\right] \tag{6}$$

no qual

$$\mathrm{P}_{\xi_{\mathrm{i}}}\left[\mathrm{F}\right] = \sum_{\mathrm{j}=0}^{\mathrm{p}} \psi_{\mathrm{j}}\left(\xi\right)\mathrm{F}(\xi_{\mathrm{j}},\eta,\gamma_{\mathrm{i}}) \tag{7}$$

$$\mathrm{P}_{\eta_{\mathrm{i}}}\left[\mathrm{F}\right] = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{q}} \zeta_{\mathrm{k}}\left(\eta\right)\mathrm{F}(\xi,\eta_{\mathrm{k}},\gamma_{\mathrm{i}}) \tag{8}$$

$$\mathrm{P}_{\xi_{\mathrm{i}}}\mathrm{P}_{\eta_{\mathrm{i}}}\left[\mathrm{F}\right] = \sum_{\mathrm{j}=0}^{\mathrm{p}}\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{q}} \psi_{\mathrm{j}}\left(\xi\right)\zeta_{\mathrm{k}}\left(\eta\right)\mathrm{F}(\xi_{\mathrm{j}},\eta_{\mathrm{k}},\gamma_{\mathrm{i}}) \tag{9}$$

onde ψ_{j} e ζ_{k} são polinômios interpoladores de Lagrange:

$$\psi_{\mathrm{j}} = \prod_{\substack{\mathrm{r}=0 \\ \mathrm{r}\neq\mathrm{j}}}^{\mathrm{p}} \frac{\left(\xi - \xi_{\mathrm{r}}\right)}{\left(\xi_{\mathrm{j}} - \xi_{\mathrm{r}}\right)} \tag{10}$$

$$\zeta_{\mathrm{k}} = \prod_{\substack{\mathrm{s}=0 \\ \mathrm{s}\neq\mathrm{k}}}^{\mathrm{s}} \frac{\left(\eta - \eta_{\mathrm{s}}\right)}{\left(\eta_{\mathrm{k}} - \eta_{\mathrm{s}}\right)} \tag{11}$$

e $\mathbf{F}(\xi_0, \eta, \gamma_i)$, $\mathbf{F}(\xi_1, \eta, \gamma_i)$, $\mathbf{F}(\xi, \eta_0, \gamma_i)$ e $\mathbf{F}(\xi, \eta_1, \gamma_i)$ são as curvas do contorno da seção transversal $\mathbf{F}(\xi, \eta, \gamma_i)$.

Em resumo, o mapeamento transfinito tridimensional pode ser definido como um mapeamento transfinito Langrangeano na seção transversal $\xi\eta$, e uma interpolação usando "spline" cúbica na direção de γ. A idéia principal desse tipo de mapeamento foi utilizada por Peruchio (Perucchio, Ingraffea et al. 1982) para geração de "sweep" entre seções transversais (topologicamente iguais) dispostas sequencialmente no espaço. Entre essas seções, outras seções transversais intermediárias são obtidas usando interpolação de uma curva "spline" entres os pontos equivalentes das seções. E um outro trabalho (Miranda and Martha 1999), o problema é generalizado para uma seqüência de seções transversais que tenham tamanho, forma e orientações distintas, mas que sejam topologicamente idênticas.

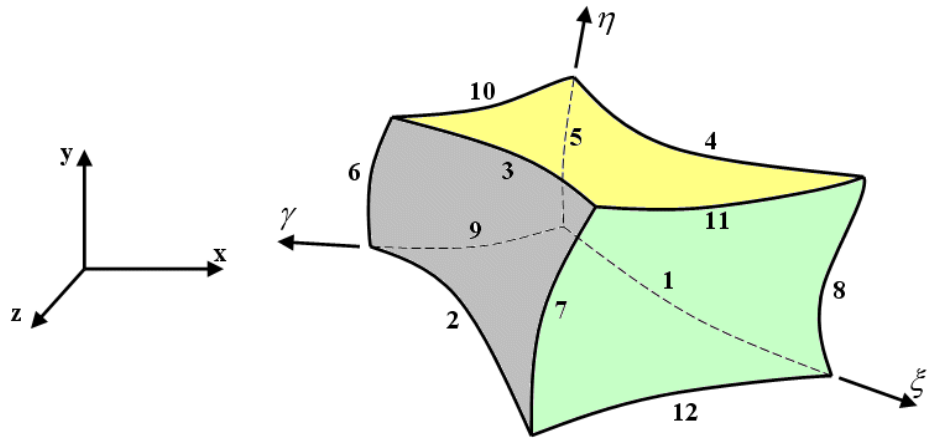

Figura 2 – Sistema de coordenadas cartesiano e local do cubo unitário e as arestas do contorno.

Pode-se ainda fazer um mapeamento transfinito tridimensional através de um super-elemento hexaédrico definido pelas suas 12 curvas (Cook 1974). Um típico super-elemento tridimensional no espaço Cartesiano é mostrado na Figura 2. O super-elemento é transferido de um cubo no sistema local (ξ, η, γ) pela seguinte formula:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\xi,\eta,\gamma) &= (1-\eta)(1-\gamma)\mathbf{h}_1(\xi) + (1-\eta)\gamma\mathbf{h}_2(\xi) + \eta\gamma\mathbf{h}_3(\xi) + \eta(1-\gamma)\mathbf{h}_4(\xi) \\
&+(1-\xi)(1-\gamma)\mathbf{h}_5(\eta) + (1-\xi)\gamma\mathbf{h}_6(\eta) + \xi\gamma\mathbf{h}_7(\eta) + \xi(1-\gamma)\mathbf{h}_8(\eta) \\
&+(1-\xi)(1-\eta)\mathbf{h}_9(\gamma) + (1-\xi)\eta\mathbf{h}_{10}(\gamma) + \xi\eta\mathbf{h}_{11}(\gamma) + \xi(1-\eta)\mathbf{h}_{12}(\gamma) + \mathbf{Q}(\xi,\eta,\gamma)
\end{aligned} \tag{12}$$

sendo

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}(\xi,\eta,\gamma) = -2\{ \; &(1-\xi)(1-\eta)(1-\gamma)\mathbf{v}(0,0,0) + (1-\xi)(1-\eta)\gamma\mathbf{v}(0,0,1) \\
&+(1-\xi)\eta(1-\gamma)\mathbf{v}(0,1,0) + (1-\xi)\eta\gamma\mathbf{v}(0,1,1) + \xi(1-\eta)(1-\gamma)\mathbf{v}(1,0,0) \\
&+\xi(1-\eta)\gamma\mathbf{v}(1,0,1) + \xi\eta(1-\gamma)\mathbf{v}(1,1,0) + \xi\eta\gamma\mathbf{v}(1,1,1) \; \}
\end{aligned} \tag{13}$$

e $\mathbf{P}(\xi, \eta, \gamma) = \{x(\xi, \eta, \gamma), y(\xi, \eta, \gamma), z(\xi, \eta, \gamma)\}$; $\mathbf{h_i}(s)$(i = 1 to 12; s = ξ, η, γ) são funções das arestas do contorno que especifica x, y e z ao longo do i-ésima aresta do contorno.

Considerando $\gamma = 0$, isto é, uma seção externa no super-elemento, e sabendo que $\mathbf{h_9}(0) = \mathrm{v}(0,0,0)$, $\mathbf{h_{10}}(0) = \mathrm{v}(0,1,0)$, $\mathbf{h_{11}}(0) = \mathrm{v}(1,1,0)$, $\mathbf{h_{12}}(0) = \mathrm{v}(1,0,0)$, a equação (12) é simplificada em

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\xi,\eta) &= (1-\eta)\mathbf{h}_1(\xi) + \eta\mathbf{h}_4(\xi) + (1-\xi)\mathbf{h}_5(\eta) + \xi\mathbf{h}_8(\eta) \\ &-(1-\xi)(1-\eta)\mathbf{v}(0,0,0) - (1-\xi)\eta\mathbf{v}(0,1,0) - \xi(1-\eta)\mathbf{v}(1,0,0) - \xi\eta\mathbf{v}(1,1,0)\end{aligned} \tag{14}$$

que é exatamente o mapeamento transfinito bilinear espacial (Haber, Shephard et al. 1981). Desse modo, todas as faces desse super-elemento são mapeamento bilineares. Consequentemente, qualquer seção transversal criado em qualquer direção ξ, η ou γ dentro do elemento é um mapeamento bilinear espacial.

O mapeamento apresentado nas equações (12-13) tem a restrição de considerar apenas as arestas do super-elemento para geração dos pontos do domínio. Em um caso mais geral, todas as curvas do contorno do volume, como apresentado na Figura 1, desse ser considerado para geração de elementos hexaédricos.

3. MAPEAMENTO PROPOSTO

Como foi mostrado na seção anterior, o mapeamento transfinito tridimensional pode ser definido como um mapeamento transfinito Langrangeano na seção transversal $\xi\eta$, e uma interpolação usando "spline" cúbica na direção γ. Também foi mostrado que um mapeamento pode ser realizado usando as 12 curvas de um super-elemento, e que pode ser interpretado como mapeamento transfinito bilinear espacial nas direções ξ, η e γ. Um outro modo de mapeamento é a combinação desses dois modos de mapeamento apresentados.

O mapeamento transfinito tridimensional proposto aqui combina as principais idéias dos mapeamentos apresentados anteriormente. A idéia básica do mapeamento proposto é semelhante ao realizado por Gordon e Hall, adicionando um pouco a formulação de Cook (Cook 1974), mas com algumas diferenças: primeiro, em vez de usar mapeamento transfinito Langrageano, equações (6-11), um mapeamento bilinear espacial é usado sem os multiplicadores de Lagrange; segundo, o mapeamento bilinear espacial é usado em todas as direções ξ, η e γ, em vez de somente uma direção γ. Além disso, cada seção transversal calcula um ponto diferente no domínio do modelo e, por fim, uma média simples é realizada nos pontos para obter o ponto final do domínio. A formulação do modelo é apresentada a seguir.

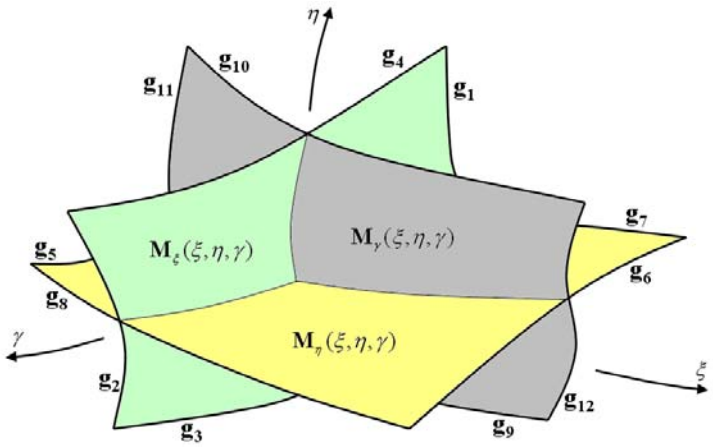

Figura 3 – Mapeamento transfinito bilinear espacial para cada direção dos eixos ξ, η e γ, e as curvas de contorno que definem cada mapeamento.

Considere a Figura 1, um modelo definido por curvas no seu contorno externo. Cada curva de contorno é definida pela coordenadas paramétricas (ξ, η, γ). Para cada direção dos eixos ξ, η e γ existem curvas de contorno que definem o mapeamento transfinito bilinear espacial, como mostra a Figura 3. O mapeamento $\mathbf{M}_\xi$ (ξ, η, γ), $\mathbf{M}_\eta$ (ξ, η, γ) e $\mathbf{M}_\gamma$ (ξ, η, γ) são os mapeamentos espaciais nas direções ξ, η e γ, respectivamente. O mapeamento $\mathbf{M}_\xi$ (ξ, η, γ) é definido pelas curvas $\mathbf{g_1}$, $\mathbf{g_2}$, $\mathbf{g_3}$ e $\mathbf{g_4}$. O mapeamento $\mathbf{M}_\eta$ (ξ, η, γ) é definido pelas curvas $\mathbf{g_5}$, $\mathbf{g_6}$, $\mathbf{g_7}$ e $\mathbf{g_8}$. O mapeamento $\mathbf{M}_\gamma$ (ξ, η, γ) é definido pelas curvas $\mathbf{g_9}$, $\mathbf{g_{10}}$, $\mathbf{g_{11}}$ e $\mathbf{g_{12}}$. $\mathbf{g_i}$(s)(i = 1 até 12; s = ξ, η, γ) são funções das curvas do contorno que especifica x, y e z ao longo do i-ésima curva do contorno. Considerando também as curvas da $\mathbf{h_i}$(s)(i = 1 to 12; s = ξ, η, γ), como apresentadas na Figura 2, o mapeamento proposto pode ser calculo como:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_\xi(\xi,\eta,\gamma) &= (1-\gamma)\mathbf{g_1}(\eta)+\gamma\mathbf{g}_2(\eta)+(1-\eta)\mathbf{g}_3(\gamma)+\eta\mathbf{g}_4(\gamma)\\ &-(1-\eta)(1-\gamma)\mathbf{h_1}(\xi)-(1-\eta)\gamma\mathbf{h}_2(\xi)-\eta\gamma\mathbf{h}_3(\xi)-\eta(1-\gamma)\mathbf{h}_4(\xi)\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_\eta(\xi,\eta,\gamma) &= (1-\xi)\mathbf{g_5}(\gamma)+\xi\mathbf{g}_6(\gamma)+(1-\gamma)\mathbf{g}_7(\xi)+\gamma\mathbf{g}_8(\xi)\\ &-(1-\xi)(1-\gamma)\mathbf{h_5}(\eta)-(1-\xi)\gamma\mathbf{h}_6(\eta)-\xi\gamma\mathbf{h}_7(\eta)-\xi(1-\gamma)\mathbf{h}_8(\eta)\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_\gamma(\xi,\eta,\gamma) &= (1-\eta)\mathbf{g}_9(\xi)+\eta\mathbf{g}_{10}(\xi)+(1-\xi)\mathbf{g}_{11}(\eta)+\xi\mathbf{g}_{12}(\eta)\\ &-(1-\xi)(1-\eta)\mathbf{h}_9(\gamma)-(1-\xi)\eta\mathbf{h}_{10}(\gamma)-\xi\eta\mathbf{h}_{11}(\gamma)-\xi(1-\eta)\mathbf{h}_{12}(\gamma)\end{aligned} \tag{17}$$

$$\mathbf{M}\ (\xi,\eta,\gamma) = \left(\mathbf{M}_\xi(\xi,\eta,\gamma)+\mathbf{M}_\eta(\xi,\eta,\gamma)+\mathbf{M}_\gamma(\xi,\eta,\gamma)\right)/3.0 \tag{18}$$

onde $\mathbf{M}(\xi, \eta, \gamma) = \{x(\xi, \eta, \gamma), y(\xi, \eta, \gamma), z(\xi, \eta, \gamma)\}$ é a equação que define um ponto no interior do modelo proposto.

Considerando $\gamma = 0$, isto é, uma seção externa na seção transversal $\xi\eta$, e sabendo que $\mathbf{h_9}(0) = \mathbf{v}(0,0,0)$, $\mathbf{h_{10}}(0) = \mathbf{v}(0,1,0)$, $\mathbf{h_{11}}(0) = \mathbf{v}(1,1,0)$, $\mathbf{h_{12}}(0) = \mathbf{v}(1,0,0)$, as equação (15,18) são simplificas em:

$$\mathbf{M}_\xi(\xi,\eta,\gamma) = \mathbf{g_1}(\eta) \tag{19}$$

$$\mathbf{M}_\eta(\xi,\eta,\gamma) = \mathbf{g}_7(\xi) \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_\gamma(\xi,\eta,\gamma) &= (1-\eta)\mathbf{g}_9(\xi)+\eta\mathbf{g}_{10}(\xi)+(1-\xi)\mathbf{g}_{11}(\eta)+\xi\mathbf{g}_{12}(\eta)\\ &-(1-\xi)(1-\eta)\mathbf{v}(0,0,0)-(1-\xi)\eta\mathbf{v}(0,1,0)-\xi\eta\mathbf{v}(1,1,0)-\xi(1-\eta)\mathbf{v}(1,0,0)\end{aligned} \tag{21}$$

As equações (15) e (26) se reduziram a uma curva no espaço, enquanto que a equação (18) se manteve um mapeamento transfinito bilinear espacial. As mesmas simplificações são obtidas quando se consideram as outras seções transversais que são externas. Isso significa que o modelo proposto pode ser interpretado como uma combinação de um mapeamento transfinito bilinear espacial em uma direção com duas correções de posição nas outras duas direções.

A equação (18), apesar de considerar todas as curvas externas do modelo nas três direções, pode apresentar problemas na geração de elementos perto do contorno quando essas curvas formam regiões côncavas. Nessa situação é comum que elementos sejam formados fora do domínio. Para minimizar esse problema, pode-se aplicar uma suavização na malha e

levar os elementos para dentro do domínio. Entretanto, essa suavização pode ser excluída do escopo realizando uma modificação na equação (18).

Em domínios onde existem regiões côncavas "severas", os autores propõem considerar apenas dois melhores pontos entre os três pontos obtidos das equações (15, 17). Esses dois melhores pontos podem ser aqueles que apresentam uma menor distância entre eles. Isto é, deve-se calcular a distância entre os pontos $\mathbf{M}_{\xi}(\xi, \eta, \gamma)$ e $\mathbf{M}_{\eta}(\xi, \eta, \gamma)$, $\mathbf{M}_{\xi}(\xi, \eta, \gamma)$ e $\mathbf{M}_{\gamma}(\xi, \eta, \gamma)$, $\mathbf{M}_{\eta}(\xi, \eta, \gamma)$ e $\mathbf{M}_{\gamma}(\xi, \eta, \gamma)$, então o ponto final é a soma desses dois pontos que fornecerem a menor distância divido por dois. Essa modificação se mostrou bastante eficiente para os exemplos com regiões côncavas, tornando assim parte do mapeamento proposto.

Em resumo, a vantagem do modelo proposto é o meio termo entre os dois mapeamentos apresentados anteriormente. De um lado, é bastante simplificado em relação ao apresentado por Gordon e Hall, equações (6,11). Por outro lado é mais sofisticado em relação ao apresentado por Cook, equações (12) e (13). Entretanto, para usar mapeamento proposto, é necessário obter as curvas do contorno. Esse tópico é apresentado na próxima seção.

4. OBTENÇÃO DAS CURVAS DO CONTORNO

As curvas de contorno $\mathbf{g}_i(s)$(i = 1 to 12; s = ξ, η, γ) e de arestas $\mathbf{h}_i(s)$(i = 1 até 12; s = ξ, η, γ), apresentadas nas seções anteriores, podem ser representadas pela forma continua ou discreta. A forma contínua representa o vetor posição de uma curva do contorno como uma função de alguma coordenada paramétrica. A parametrização pode ser obtida de várias maneiras, tais como comprimento de arco, radianos, coordenadas Cartesianas, etc. A representação contínua permite que uma posição arbitrária da curva possa ser obtida em qualquer ponto da mesma. A representação discreta consiste de listas finitas de pontos localizados na curva, com uma única tripa de coordenadas associada a cada ponto da lista. Uma posição na curva pode ser avaliada somente nos pontos contidos na lista e é indefinida nos demais pontos.

A forma discreta de representação é inteiramente geral e pode ser usada em curvas de qualquer forma. A representação contínua fornece uma definição mais completa da curva, mas não é geral. Por exemplo, diferentes representações são requeridas para descrever arcos circulares e curvas polinomiais de forma precisa, enquanto não existe representação matemática simples para todas as curvas. Entretanto, existem vários métodos, tais como modelos de "splines", que fornecem formas gerais que são apropriadas para aproximação e descrição de qualquer curva.

A abordagem de representação do contorno adotado nesse trabalho é baseada na separação entre o modelador geométrico e a geração da malha (Miranda, Cavalcante Neto et al. 1999; Miranda and Martha 1999; Miranda and Martha 2000; Cavalcante Neto, Wawrzynek et al. 2001). As representações de vértices, curvas, superfícies e volumes são de responsabilidade do modelador geométrico que interage com o usuário. Portanto, para realização da geração de uma malha, o modelador geométrico transforma a representação contínua do modelo em uma representação discreta que vai ser usada pelo gerador de malhas. Esse tipo de abordagem apresenta as seguintes vantagens (Miranda and Martha 2000): (a) geração de malha portável para diferentes modeladores sem modificação de código do gerador de malha; (b) padronização dos argumentos de entrada e saída dos algoritmos.

Considerando que cada modelador geométrico é responsável pela representação contínua do modelo, essa seção tem como objetivo identificar automaticamente as curvas do contorno na forma discreta partindo de um formato de entrada de dados bastante geral. Esses dados são: (a) lista (vetor) com as coordenadas dos nós; (b) lista (vetor) com as conectividades das faces do contorno externo da região onde se deseja gerar malha. Observar que esse modo de

representação do contorno não permite identificar nenhuma informação topológica de adjacências entre nós, arestas e faces.

Considere inicialmente um modelo discreto definido por curvas no espaço Euclidiano, como mostra a Figura 4. Para melhor entendimento, as curvas são identificadas como curvas de arestas e curvas de superfície. As curvas de arestas são as $\mathbf{h_i}(s)$(i = 1 até 12; s = ξ, η, γ) definidas anteriormente. As curvas de superfície são as outras curvas restantes que se situam na superfície externa do modelo. Os vértices $\mathbf{v_i}$ (i = 1 até 8) correspondem aos vértices do cubo paramétrico no sistema paramétrico. Nesses termos, o modelo discreto apresenta um número de seções transversais **k**, **m**, **n** nas direções ξ, η, γ, respectivamente. A principio esses valores são desconhecidos pelo formato de entrada de dados adotado. Esses dados e outras informações podem ser obtidos com os passos propostos nessa seção.

Os seguintes passos são propostos para obtenção das curvas de arestas, curvas de superfícies e vértices:

- Montagem de uma estrutura topológica;
- Orientação das faces do modelo discreto;
- Identificação dos vértices correspondentes ao cubo unitário no espaço paramétrico;
- Obtenção do posicionamento dos vértices e as curvas de aresta;
- Obtenção das curvas de superfície.

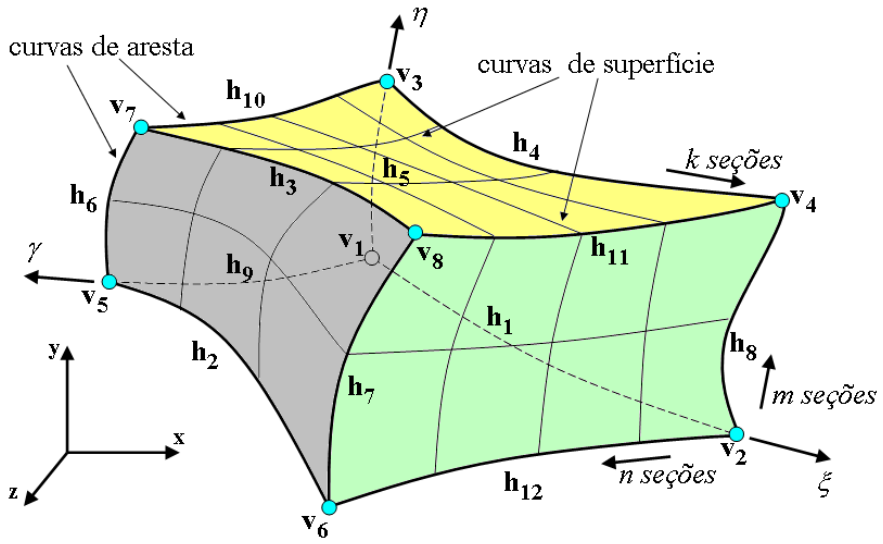

Figura 4 – Modelo discreto.

4.1 Estrutura topológica

Uma estrutura topológica é usada em todos os passos propostos, pois há a necessidade de realizar buscas das curvas de aresta, curvas de superfície, vértices e orientar as faces do modelo discreto. Basicamente, essa estrutura tem de satisfazer as seguintes operações:

- Identificar as faces adjacentes de uma dada aresta;
- Identificar as arestas adjacentes a uma face de modo orientado;
- Identificar a aresta próxima/anterior de uma aresta baseada em uma face;
- Contar o número de arestas adjacentes a um vértice.

Essas operações podem ser realizadas em uma estrutura topológica baseada em arestas como, por exemplo, estrutura de aresta aladas (Baumgart 1975), semi-aresta (Mäntylä 1988),

aresta radial (Weiler 1986), DCEL (Berg, Kreveld et al. 1997), etc. A estrutura utilizada na implementação desse trabalho foi uma estrutura de arestas aladas, porém simplificada.

4.2 Orientação das faces

Esse passo é realizado para que as buscas na estrutura topológica sejam consistentes, pois a entrada de dados das faces é genérica. Basicamente envolve dois passos. Primeiro, orientar as arestas adjacentes às faces em um só sentido. Deve-se considerar que uma face inicial seja o sentido de orientação a ser adotado, e orientar as faces adjacentes baseadas nessa face inicial. Em seguida, os mesmos procedimentos são realizados para todas as outras faces de modo recursivo. Segundo, calcular o volume do modelo discreto e, de acordo com o sinal do volume calculado, orientar todas as faces de modo que a normal de cada face aponte para dentro do modelo.

4.3 Identificação dos vértices

Os vértices correspondentes ao cubo unitário no espaço paramétrico são aqueles que apresentam exatamente três arestas adjacentes, ou três curvas de aresta adjacentes no espaço do modelo discreto. Nessas condições, apenas e somente oito vértices devem ser identificados. No caso de haver um número diferente de oito, o modelo apresenta erro na entrada de dados das faces, pois não existe um cubo com número diferente de oito vértices. Observar também que os outros pontos do modelo discreto têm de apresentar quatro arestas adjacentes.

4.4 Posicionamento dos vértices e as curvas de aresta

Inicialmente é atribuído o vértice $\mathbf{v_1}$ a qualquer vértice obtido no passo anterior. Em seguida, qualquer aresta adjacente a esse vértice é identificada e nomeada aqui como **aresta_base_0** (na direção de ξ), como mostra a Figura 5. A face **face_base_0** é a face que é adjacente ao vértice $\mathbf{v_1}$ e **aresta_base_0** e que tem a orientação da **aresta_base_0** saindo do vértice $\mathbf{v_1}$. Finalmente, através de operações topológicas, são identificadas as arestas **aresta_base_1** e **aresta_base2** das direções η e γ, respectivamente. A face **face_base_1** é adjacente a **aresta_base_1** e a **aresta_base_2**, enquanto que, a face **face_base_2** é adjacente a **aresta_base_0** e **aresta_base_2**. A Figura 5 mostra todas essas faces e arestas mencionadas. Com essas faces e arestas bases é possível identificar agora as curvas de aresta.

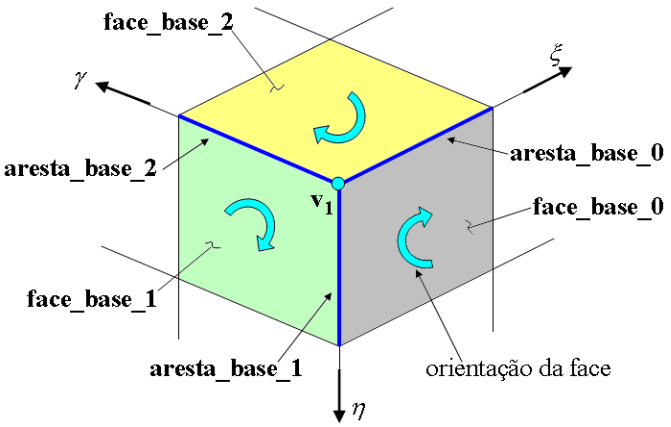

Figura 5 – Arestas e faces bases do modelo discreto.

A identificação das curvas de aresta é possível percorrendo a estrutura topológica. A operação topológica mais usada nessa busca é obter uma aresta destino, partindo de uma aresta origem adjacente a uma face base, nas condições topológicas que mostra a Figura 6. Essa operação é dominada aqui de **TP1** e envolve as seguintes operações: primeiro, deve ser obtida a próxima aresta da aresta origem em relação a orientação da face base, isto é, a aresta auxiliar na figura. Em seguida, é encontrada a face oposta a face base em relação a aresta auxiliar. Por fim, chega-se a aresta destino seguindo a próxima aresta a aresta auxiliar em relação a orientação da face oposta.

As curvas de contorno podem ser obtidas usando várias operações topológicas **TP1**. Por exemplo, a curva $\mathbf{h_1}$ é obtida partindo da **aresta_base_0** e **face_base_0** até chegar ao vértice $\mathbf{v_2}$. Desse vértice, podem-se chegar aos vértices $\mathbf{v_4}$, $\mathbf{v_3}$ e $\mathbf{v_1}$, obtendo as curvas $\mathbf{h_8}$, $\mathbf{h_4}$ e $\mathbf{h_5}$. Do mesmo modo para as outras curvas de contorno, partindo da **aresta_base_1** com a **face_base_1**, e também partindo da **aresta_base_2** com a **face_base_2**.

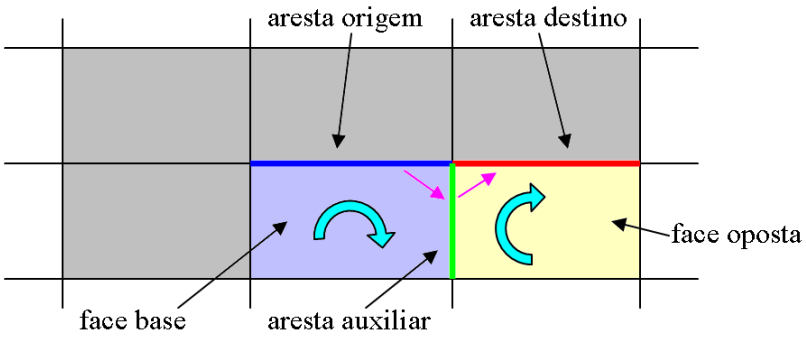

Figura 6 – Operação topológica 01 – **TP1**.

4.5 Curvas de superfície

O número de seções transversais **k**, **m**, **n** nas direções ξ, η, γ, respectivamente, é calculado percorrendo as curvas de contorno $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_5}$ e $\mathbf{h_9}$. Então, as curvas de superfície são obtidas com auxilio das curvas de contorno e da operação topológica **TP1**. Por exemplo, as curvas seguintes as curvas $\mathbf{h_5}$, $\mathbf{h_{10}}$, $\mathbf{h_6}$ e $\mathbf{h_9}$ na direção ξ: primeiro, a próxima aresta a **aresta_base_0** no sentido da **face_base_0** é identificada como aresta origem, em seguida, com operações **TP1**, o caminho de busca retorna uma lista de todas as arestas daquela seção transversal. De modo semelhante, é possível obter todas as curvas de superfície.

5. EXEMPLOS

Com a finalidade de mostrar a qualidade das malhas do mapeamento proposto, quatro exemplos são apresentados nessa seção. Eles ilustram a capacidade do algoritmo de gerar malhas válidas em modelos com geometrias que formam superfícies côncavas e geometrias complexas, apesar da restrição de cada face oposta de um cubo paramétrico unitário ter uma mesma malha de superfície. Essa restrição pode ser minimizada com a técnica de submodelagem para modelos de geometrias mais complexas, com ilustrado mais adiante.

O primeiro exemplo é um paralepípedo regular que tem uma das suas superfícies côncavas, como mostra a Figura 7. Usando as equações (12,13) nesse modelo, os elementos formariam uma superfície plana na superfície côncava. Usando a equação (18), ainda assim, alguns elementos seriam gerados fora do domínio do modelo. Apenas quando se considera os dois melhores pontos entre os três pontos obtidos das equações (15, 17), o resultado da malha

se mostra satisfatório, gerando todos os elementos válidos e dentro do domínio do modelo, como apresenta a malha final na Figura 7.

O segundo exemplo, Figura 8, todas as superfícies do modelo discreto são irregulares, contendo uma mistura de superfícies côncavas e convexas. Do mesmo modo como foi descrito no exemplo anterior, a malha final gerada apresentou melhores elementos quando foi aplicando a proposta de usar somente dois pontos mais próximos.

O terceiro exemplo é uma viga com uma seção transversal em forma de L, como mostra a Figura 9. Essa viga é torcida no eixo da seção em ângulo de noventa graus. Observar que a seção transversal tem a forma de L, mas pode ser mapeada por um espaço paramétrico bidimensional que se reduz a um elemento quadrado. Esse exemplo demonstra que o modelo discreto pode ter uma geometria bastante irregular, desde que seja topologicamente equivalente a um cubo unitário no espaço paramétrico.

Finalmente, Figura 10, o quarto exemplo representa um modelo de fundação onde uma estaca de ancoramento é cravada. Esse exemplo é bastante complexo, pois a estaca de ancoramento tem formas irregulares que torna trabalhosa a modelagem junto com o modelo de fundação. Entretanto, usando sub-modelagem, o modelo foi decomposto em várias sub-regiões que permitiram aplicar na integridade o mapeamento proposto. Isto é, o modelo proposto não se restringe a modelos de formas regulares e simples, mas também em modelos complexos, aplicando sub-modelagem.

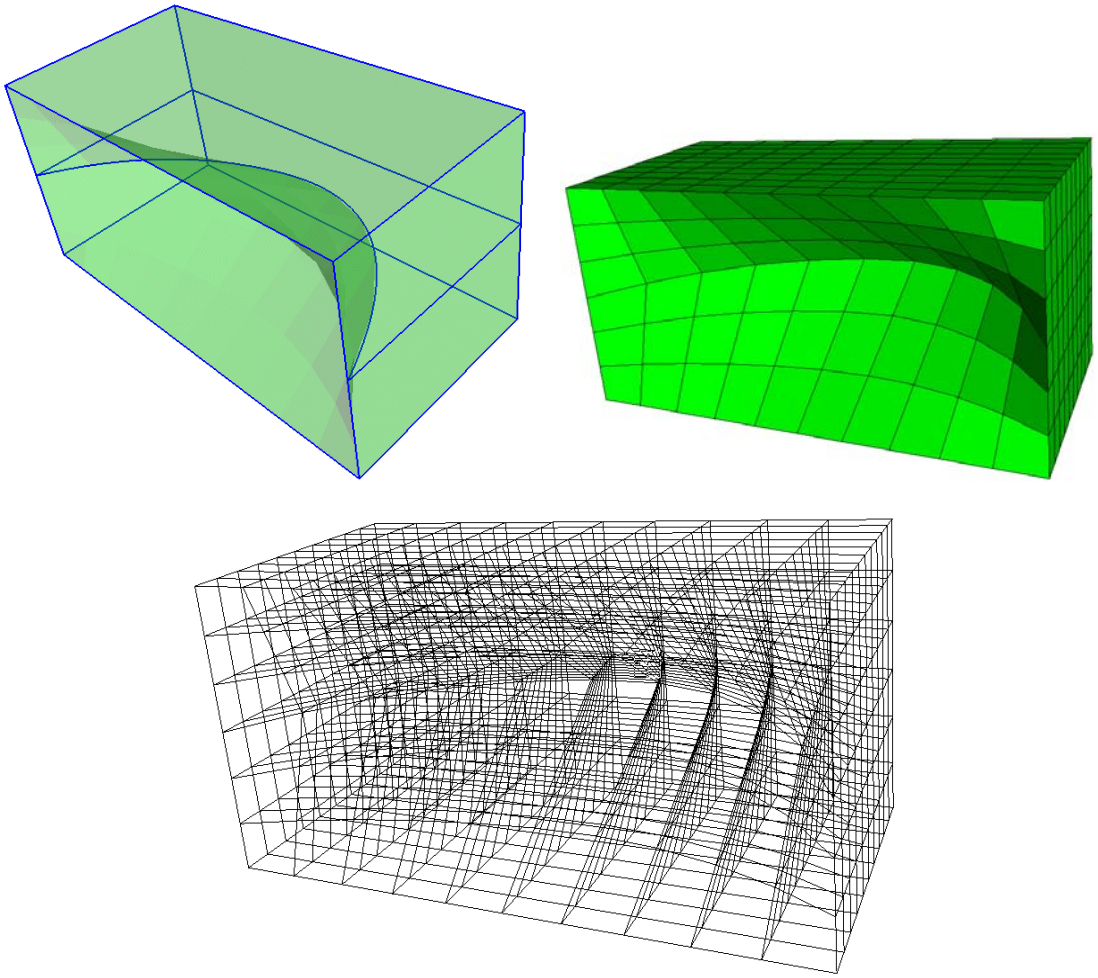

Figura 7 – Exemplo de um modelo com uma superfície côncava severa.

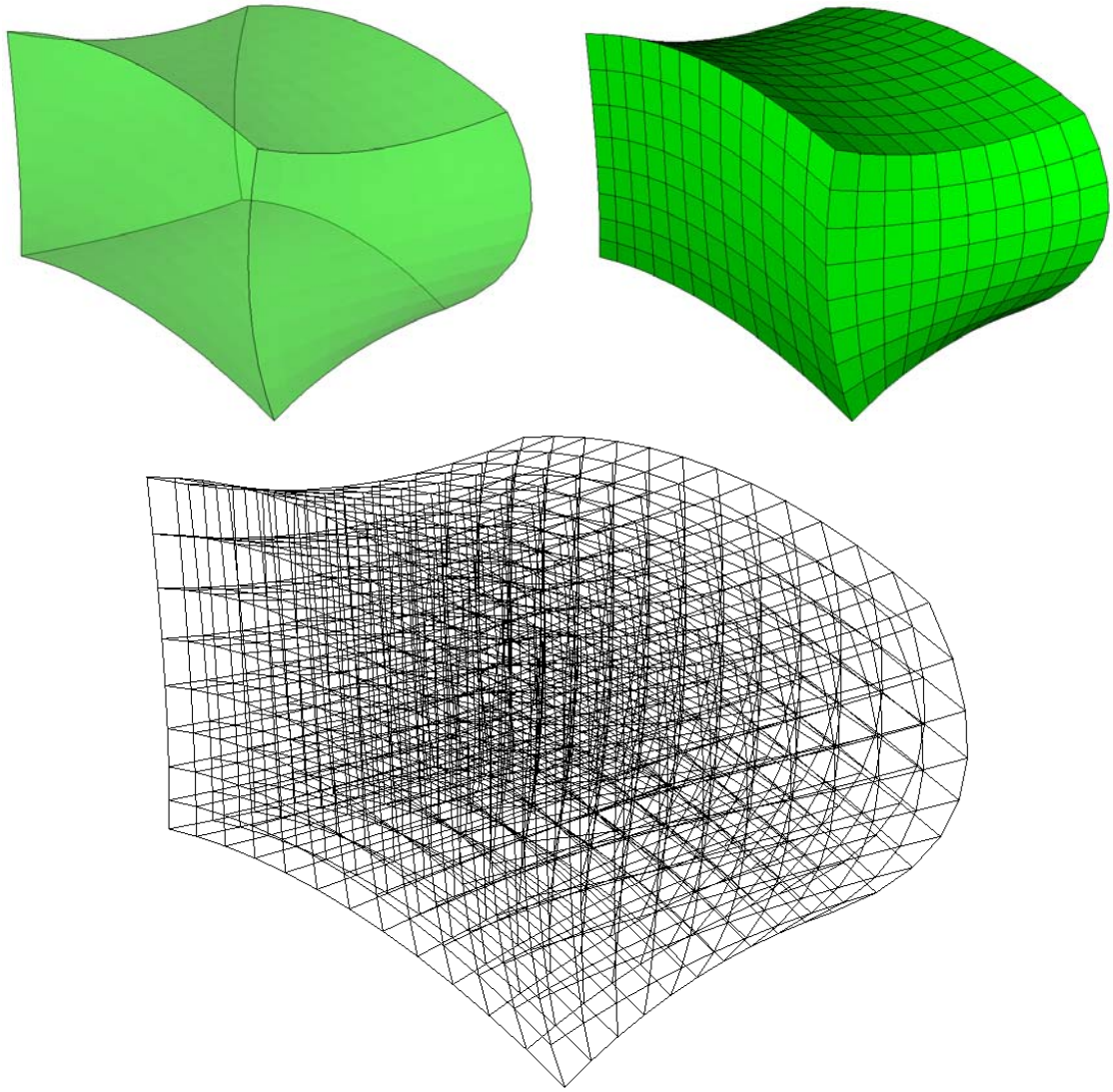

Figura 8 – Exemplo de um modelo com todas as superfícies externas irregulares.

6. CONCLUSÃO

Esse trabalho apresentou uma proposta para fazer mapeamento transfinito tridimensional que é uma combinação do mapeamento proposto por Gordon e Hall e o mapeamento proposto por Cook. A idéia básica do mapeamento proposto aqui é aplicar mapeamento transfinito espacial usando curvas de superfície nas três direções das coordenadas paramétricas do modelo. Então, escolhem-se dois pontos mais próximos, dentre os três pontos calculados em cada mapeamento, para representar o ponto final no interior do modelo.

Listas de faces e pontos foram consideradas para representar os dados de entrada para um modelo discreto. Portanto, foram apresentados alguns passos para obtenção e classificação dos dados do modelo, com uso de uma estrutura topológica baseada em arestas. Esses passos envolvem a classificação e orientação das faces, identificação dos vértices, classificação dos vértices e das curvas de arestas e de superfície. Com as curvas do contorno do modelo, então é possível obter a malha final.

Também foram apresentados quatro exemplos de modelos onde se utilizou o mapeamento proposto. Esses exemplos mostraram que o mapeamento consegue gerar malhas válidas em

situações onde a superfície do modelo é côncava ou irregular; situações onde outros mapeamentos falham, gerando elementos não válidos e fora do domínio do modelo. Os exemplos também mostraram que a geometria do modelo discreto pode ser bastante irregular, desde que seja topologicamente equivalente a um cubo unitário no espaço paramétrico. Adicionalmente, modelos ainda mais complexos podem usar o mapeamento proposto usando previamente a técnica de sub-modelagem.

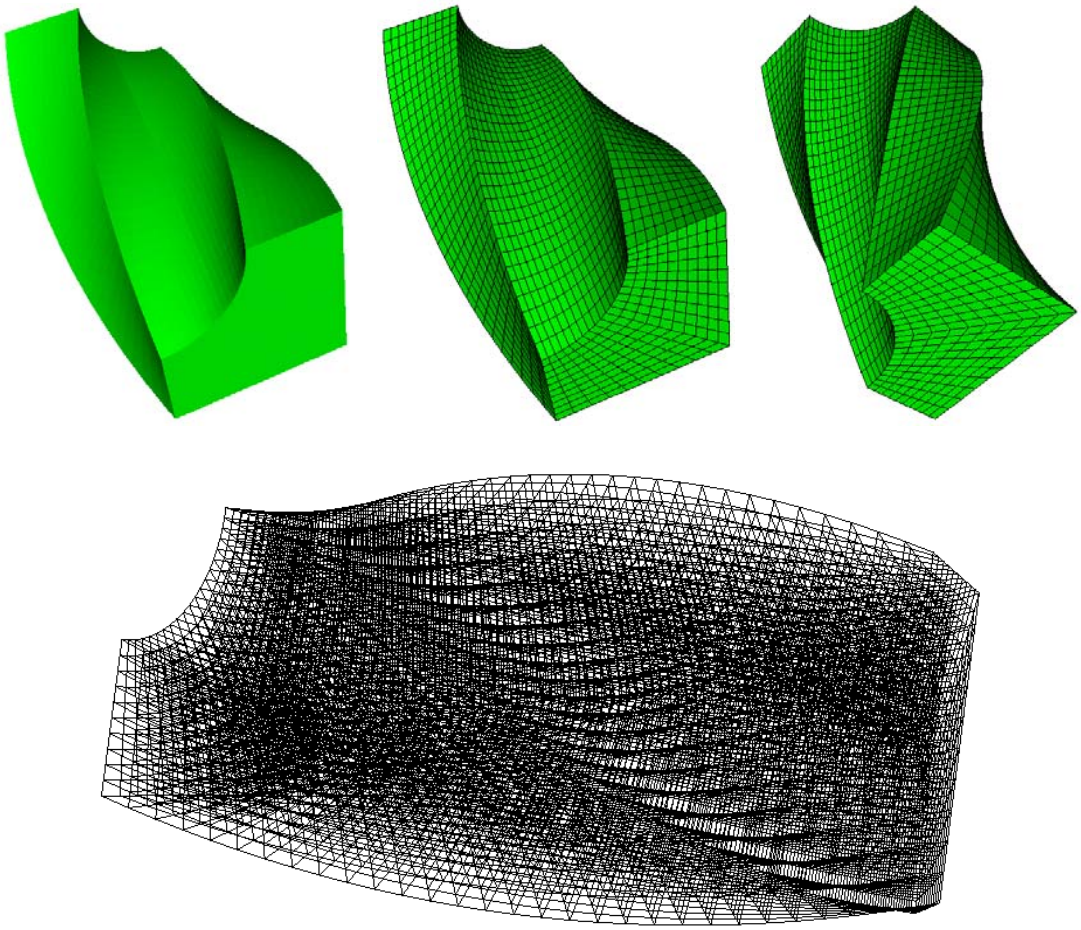

Figura 9 – Exemplo de uma viga com seção transversal torcida.

7. REFERÊNCIAS

Baumgart, B. G. (1975). "A Polyhedron Representation for Computer Vision." AFISPS **44**: 589-596.

Berg, M. d., M. v. Kreveld, et al. (1997). Computational Geometry - Algorithms and Applications, Springer.

Blacker, T. (1996). The Cooper Tool. 5th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories.

Cavalcante Neto, J. B., P. A. Wawrzynek, et al. (2001). "An algorithm for three-dimensional mesh generation for arbitrary regions with cracks." Engineering with Computers **17**(1): 75-91.

Cook, W. A. (1974). "Body Oriented (natural) Co-ordinates for Generating Three Dimensional Meshes." International Journal for Numerical Methods in Engineering **8**: 27-43.

Cook, W. A. and W. R. Oakes (1982). "Mapping Methods for Generation Three-Dimensional Meshes." Computer In Mechanical Engineering: 67-72.

Gordon, W. J. and C. A. Hall (1973). "Contruction of Curvilinear Co-ordinate Systems and Aplications to Mesh Generatio." International Journal for Numerical Methods in Engineering **7**: 461-477.

Knupp, P. M. (1998). Next-Generation Sweep Tool: A Method For Generating All-Hex Meshes on Two-And-One-Half Dimensional Geometries. 7th International Meshing Roundtable, Sandia National Lab.

Knupp, P. M. (1999). "Applications of Mesh Smoothing: Copy, Morph, and Sweep on Unstructured Quadrilateral Meshes." International Journal for Numerical Methods in Engineering **45**(1): 37-45.

Lai, M., S. Benzley, et al. (2000). "Automatic Hexahedral Mesh Generation by Generalized Multiple Source ro Multiple Target Sweeping." International Journal for Numerical Methods in Engineering **49**(1-2): 261-275.

Landertshamer, F. (1994). "Method to Generate Complex Computational Mesh Efficiently." Communications in Numerical Methods in Engineering **10**: 373-384.

Li, C. G., R. M. McKeag, et al. (1995). "Hexahedral Meshing Using Midpoint Subdivision and Integer Programing." Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **124**: 171-193.

Mäntylä, M. (1988). An Introduction to Solid Modeling, Computer Science Press.

Miranda, A. C., J. B. Cavalcante Neto, et al. (1999). "An algorithm for two-dimensional mesh generation for arbitrary regions with cracks." XII Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing (Cat. No.PR00481): 29-38.

Miranda, A. C. O. and L. F. Martha (1999). Mapeamento Transfinito Tridimensional. XX CILAMCE, Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, São Paulo, SP.

Miranda, A. C. O. and L. F. Martha (2000). Uma Biblioteca Computacional para Geração de Malhas Bidimensionais e Tridimensionais de Elementos Finitos. XXI Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Rio de Janeiro-Brazil.

Owen, S. J. (1998). A Survey of Unstructured Mesh Generation Technology. Proceedings 7th International Meshing Roundtable, Dearborn, MI.

Perucchio, R., A. R. Ingraffea, et al. (1982). "Interative Computer Graphics Preprocessing for Three-Dimensional Finite Element Analysis." International Journal for Numerical Methods in Engineering **18**(909-926).

Perucchio, R., M. Saxena, et al. (1988). "Automatic Mesh Generation from Solid Models Based on Recursive Spatial Decomposition." International Journal for Numerical Methods in Engineering **24**: 2135-2159.

Shephard, M. S. and M. K. Georges (1991). Automatic Three-dimensional Mesh Generation by Finite Octree Technique. SCOREC Report no. 1.

Staten, M. L., S. A. Canann, et al. (1999). "BM-Sweep: Locating Interior Nodes During Sweeping." Engineering with Computers **15**(3): 212-218.

Thompson, J. F., B. Soni, et al. (1998). Handbook of Grid Generation, CRC Press.

Weiler, K. J. (1986). Topological Structures for Geometric Modeling. Troy, New York, Rensselaer Polytechnic Institute.

White, D. (1996). Automatic, Quadrilateral and Hexahedral Meshing of Pseudo-Cartesian Geometries Using Virtual Subdivision, Brigham Young University.

Zienkiewicz, O. C. and D. V. Phillips (1971). "An Automatic Mesh Generation Scheme for Plane and Curves Surfaces by Isoparametric Coordinates." International Journal for Numerical Methods in Engineering **7**: 461-477.

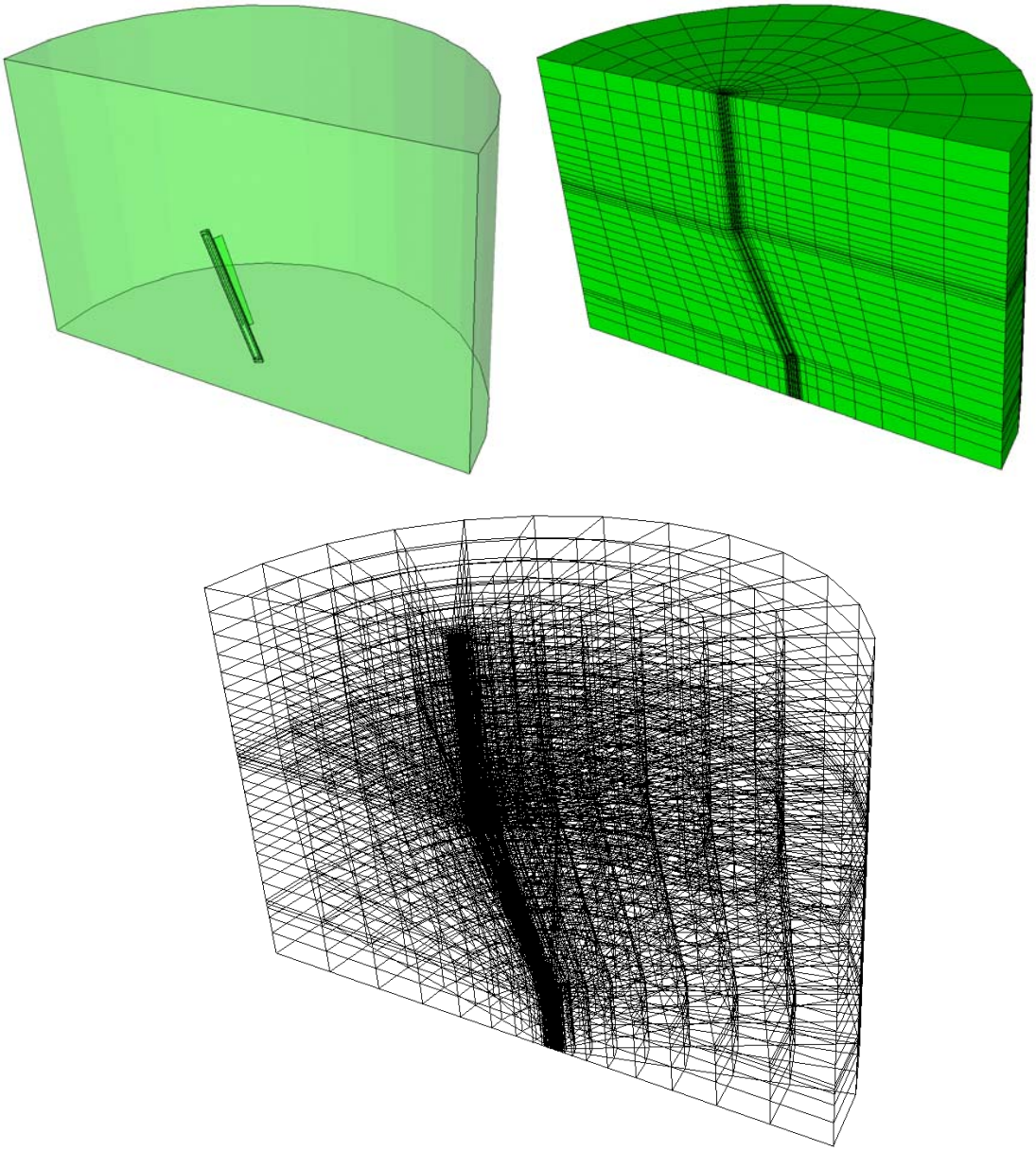

Figura 10 – Exemplo de um bloco geológico com uma estaca de ancoragem cravada.