GERAÇÃO DE MALHAS ESTRUTURADAS A PARTIR DE UM ESPAÇO PARAMÉTRICO DE TRIANGULAÇÕES NÃO ESTRUTURADAS

Antonio Carlos de Oliveira Miranda
Luiz Fernando Martha
amiranda@tecgraf.puc-rio.br
lfm@tecgraf.puc-rio.br
Departamento de Engenharia Civil e
Grupo de Tecnologia em Computação Gráfica (Tecgraf)
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea, Cep 22453-900, Rio de Janeiro-RJ, Brasil.

Abstract. *This paper presents an algorithm to generate structural plain meshes, or no-structural, from a parametric space of no-structural triangulations. Initially, the algorithm generates a parametric space in one given arbitrary triangulation. The algorithm needs of definition of four nodes in the edge model which are the corners of the parametric space, so that it is possible to map the region to a rectangular parametric space. The generation of the parametric space is based on the Floater's work, where three types of parametrizations are used: uniform, weighted least squares and shape-preserving. Numerical examples applied to triangulation show that the last type presents a few better results. Finally, the generation of the final mesh, using the parametric space, is made with an existing algorithm (Miranda, et al.) and bilinear map.*

Keywords: *Mesh Generation, Parameterization.*

1. INTRODUÇÃO

Superfícies paramétricas são usualmente utilizadas em modelagem geométrica com diversos tipos de aplicações. Por exemplo, diversos sistemas de modelagem para criação de modelos de elementos finitos trabalham com muitos tipos de superfícies paramétricas, tais como NURBS e COONS. Esses tipos de parametrização têm uma natural representação, e desse modo, não apresentam dificuldades de implementação em aplicações na mecânica computacional. O uso de superfícies paramétricas também traz benefícios na área de geração de malhas de elementos finitos, principalmente em análise adaptativa. O espaço paramétrico de uma superfície é utilizado para redefinição da malha em função de alguma estimativa do erro de discretização (Miranda & Martha, 2002).

Entretanto, superfícies paramétricas não são capazes de representar topologias mais arbitrárias, tais como superfícies com mais do que quatro lados, bordos internos, ou mesmo descontinuidades (fraturas). Tipos mais gerais de superfícies aparecem naturalmente em modelos de terrenos irregulares ou em modelos de sub-superfícies geológicas. Em geral, aplicações nestas áreas utilizam superfícies trianguladas. Pode-se argumentar que é possível representar certas superfícies usando simplificações, mas o resultado final pode ser indesejável.

Um dos problemas da utilização de superfícies arbitrárias trianguladas é que não existe em princípio uma parametrização natural da superfície. Isso limita a sua utilização em aplicações onde é necessário redefinir a malha na superfície.

Parametrização de superfícies também é bastante usada em computação gráfica para aplicação de texturas em modelos. Se a discretização da superfície é refinada suficientemente, é possível pintar os vértices diretamente. Entretanto, em muitos casos, a precisão desejável para as cores é menor que o detalhe da geometria. Assumindo que a superfície a ser pintada está provida com uma parametrização, é possível fazer o mapeamento da textura com uso do espaço paramétrico. Entretanto, para certas superfícies irregulares no seu contorno, como mostra a Figura 1 (Levy et al., 2002), o mapeamento da textura é não trivial. Nesse tipo de superfície é usada outra parametrização: o modelo é todo recortado em partes, então cada parte é representada por uma superfície paramétrica. Por fim, os triângulos são usados para fazer o mapeamento da textura. Assim como o trabalho de Levy et al. (2002), outros trabalhos recentes (Floater, 1997; Sheffer & Sturler, 2001) na área de computação gráfica abordam a criação de um espaço paramétrico em superfícies trianguladas.

Figura 1 – Parametrização e textura não trivial de um modelo virtual (Levy et al., 2002).

Este trabalho se baseia no referidos trabalhos para a criação de um espaço paramétrico em triangulações com o objetivo de geração de malhas em superfícies irregulares, onde a parametrização da superfície é desconhecida ou de difícil solução, ou ainda onde a simplificação da superfície não apresenta resultados desejáveis.

Inicialmente, o algoritmo proposto neste trabalho gera um espaço paramétrico em uma dada triangulação arbitrária, para que se possa mapear a região para um espaço paramétrico retangular. A criação do espaço paramétrico é baseada no trabalho de Floater (1997), onde três formas de parametrização podem ser usadas: uniforme, média ponderada do inverso da distância e preservação de forma. Finalmente, a geração da malha final é feita com auxílio de um algoritmo existente (Miranda, et al, 2003), usando o espaço paramétrico.

Desse modo, o propósito desse trabalho é descrever a implementação de espaço paramétrico de triangulações não estruturadas e não convencionais de malhas de superfícies, quando esta não tem uma descrição paramétrica precisa por métodos convencionais (NURBS, por exemplo).

A seção seguinte apresenta um conceito geral de parametrização de superfícies. Na seqüência, o trabalho aborda o algoritmo proposto para criação do espaço paramétrico. A metodologia proposta apresenta algumas inovações em relação aos trabalhos anteriores. Uma das vantagens é o tratamento a priori dos valores paramétricos na borda da superfície. Mais adiante, resultados aplicados à geração da malhas de superfícies são apresentados. Por fim, são apresentadas as conclusões.

2. PARAMETRIZAÇÃO DE TRIANGULAÇÕES

Dois métodos mais comuns para representar superfícies em modelagem geométrica são as formas implícitas e as equações paramétricas (Hoffmann, 1989). A forma implícita de uma superfície é dada pela equação $f(x,y,z) = 0$, onde x, y e z formam o sistema de eixos no espaço Euclidiano. Uma representação paramétrica de uma superfície é dada por $S(u_i) = (x(u_i), y(u_i), z(u_i))$ onde u_i formam o sistema de eixos no espaço paramétrico da superfície. A Figura 2 mostra o exemplo de uma superfície definida no espaço Euclidiano e o seu espaço paramétrico.

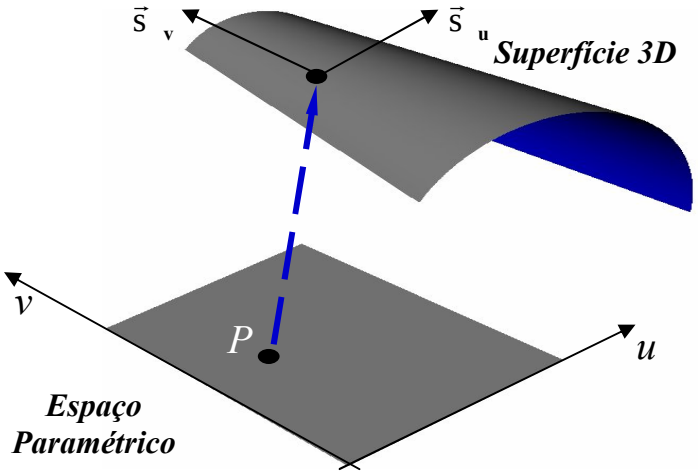


Figura 2 – Mapeamento de uma superfície 3D para um espaço paramétrico.

Apesar dos métodos apresentados de parametrização, existem situações que a superfície é uma triangulação arbitrária. Para esses casos, pode-se usar uma parametrização particular para

essas superfícies. A idéia básica dessa parametrização é gerar um espaço paramétrico *(u,v)* triangulado que é topologicamente igual à superfície original triangulada, mas de geometria distinta. Desse modo, cada triângulo da superfície tem um correspondente no espaço paramétrico, permitindo calcular a matriz jacobina para cada triângulo. Então, para manter continuidade entre triângulos, pode-se adotar um processo de suavização. A chave do problema esta na forma de construção da parametrização, e para isso, existem vários trabalhos na literatura.

A solução adotada neste trabalho se baseia em um trabalho apresentado Floater (1997), que propôs pesos específicos para melhorar a qualidade do mapeamento em termos das deformações da área e conformidade, e introduz parametrizações particulares: uniforme, média ponderada do inverso da distância e preservação de forma. O trabalho de Floater é baseado em um método apresentado por Tutte (1963) sobre teoria dos grafos. Muitos outros trabalhos são encontrados na literatura, com em Levy et al. (2002), e Sheffer e Sturler (2001), onde apresentam uma revisão bibliográfica mais detalhada sobre o assunto.

3. IMPLEMENTAÇÃO

Esta seção apresenta os detalhes da implementação da parametrização de superfícies triangulares baseado no trabalho de Floater. Como foi descrito na seção anterior, o que se pretende fazer é gerar um espaço paramétrico *(u,v)* triangulado que é topologicamente igual à superfície original triangulada, mas de geometria distinta, que permitira mapeamento via os triângulos equivalentes.

Essa implementação foi realizada em linguagem C, com uso de funções de entrada de dados e funções de execução de tarefas internas que realizam essa parametrização. Desse modo, uma determinada aplicação não precisa saber dos detalhes internos da implementação.

Inicialmente, devem ser inseridos no código as coordenadas dos nós da malha de superfície e os seus respectivos identificadores (índices). Em seguida, devem ser inseridas as conectividades dos elementos referenciados pelos correspondentes índices dos nós, no sentido anti-horário. Também, se houver explicitamente pela aplicação, podem ser inseridos os nós chamados de *Border Stones* (BS). Esses nós são identificados pela aplicação ou pelo o usuário com sendo nós que servirão de auxilio na definição do espaço paramétrico da malha. Usualmente, os BS são os nós que se localizam em cantos agudos do malha. No caso de não for inserido nenhum BS, a implementação os identifica automaticamente, como será descrito mais à frente. A Figura 3 mostra um exemplo de uma superfície com os possíveis BS.

Após a entrada de dados da malha de superfície, o passo seguinte é verificar se a malha está coerente topologicamente, para que não ocorram problemas na operação de parametrização. Também, são montadas estruturas auxiliares que permitirão uma execução mais rápida e eficiente da parametrização. Esses passos são:

- Calcular o vetor normal e o centro do elemento.
- Construir uma lista de adjacência nodal.
- Construir uma lista encadeada das arestas da malha.
- Calcular o vetor normal para cada nó da malha.
- Inserir automaticamente novos BS baseados no ângulo do contorno da malha em um determinado nó. Este é considerado um BS se o ângulo formado for menor que 135º.
- Construir uma lista dos nós do contorno.

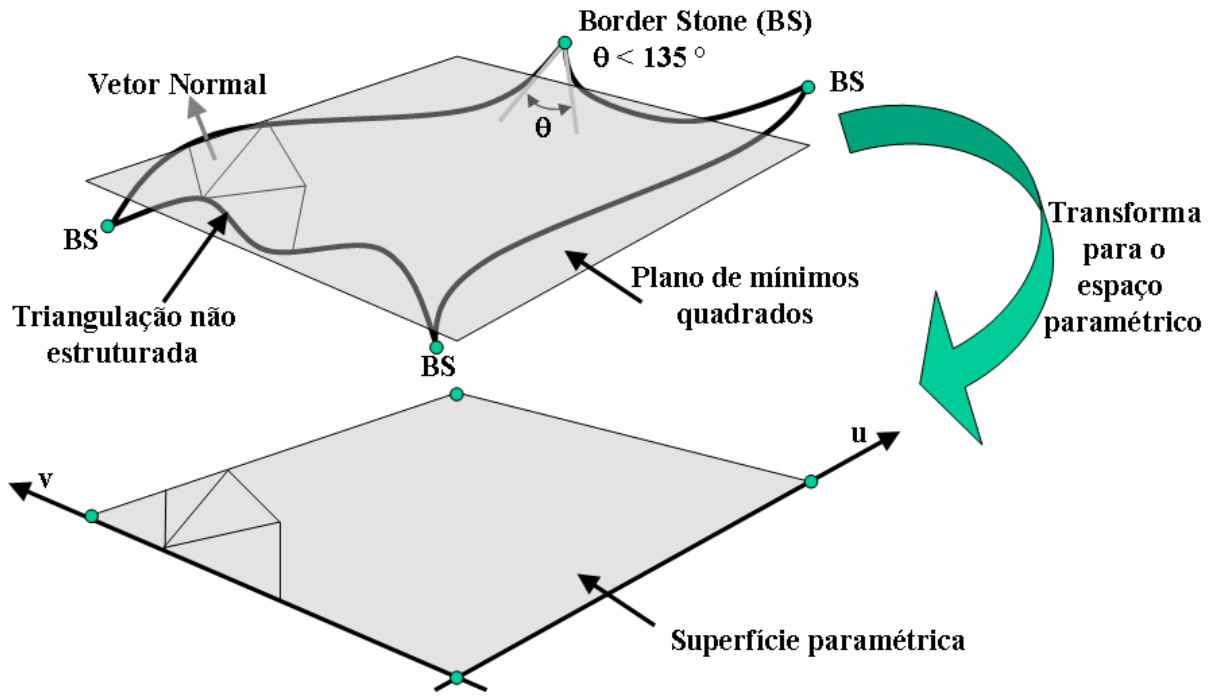


Figura 3 – Mapeamento de uma superfície triangular não estruturada em espaço paramétrico de triangulações.

Se a malha estiver correta, inicialmente os valores paramétricos do contorno são calculados, com os seguintes passos:

- Encontra-se um plano de mínimos quadrados com os BS da malha de superfície.
- Cria-se um sistema de coordenadas locais no plano de modo que o eixo *u* seja orientado do primeiro para o segundo BS. Então, os valores paramétricos dos BS são projetados no plano e mapeados para um sistema normalizado (no plano).
- Calculam-se os valores paramétricos de todos os nós do contorno a partir dos valores previamente calculados dos BS, considerando que cada curva de borda entre dois BS é uma linha reta no espaço paramétrico. Um detalhe importante é fazer que os valores paramétricos ao longo da curva sejam compatíveis com o comprimento de arco ao longo da curva.

Para finalizar a determinação inicial dos valores paramétricos dos nós, a implementação projeta e normalizada os pontos do interior da malha na superfície paramétrica. Esses valores inicialmente são apenas aproximados. O passo seguinte é determinar valores que venham representar a melhor parametrização.

Os valores paramétricos do interior da malha de superfície são determinados com uso de uma das três formas de parametrização: (1) uniforme, (2) média ponderada do inverso da distância e (3) preservação de forma. Essas três formas de parametrização estão detalhadamente descritas no trabalho de Floater (1997). Basicamente, a diferença entre as formas de parametrização está no modo de calcular fatores de ponderação relativos a um nó e seu nó adjacente. Na parametrização uniforme o fator de ponderação é calculado igualmente por 1/*grau*, onde o *grau* é o número de nós adjacentes do referente nó. No caso da média ponderada do inverso da distância, o fator de ponderação é proporcional ao inverso da distância entre o nó adjacente e o nó referente. Por fim, no caso de preservação de forma, o fator de ponderação assume uma forma mais complicada, mas que está descrito no trabalho de Floater (1997), seção 6.

Por fim, os valores paramétricos dos nós interiores são calculados por um método iterativo similar ao de Gauss-Seidel. Nesse método, os valores paramétricos vão se ajustando

iterativamente em cada processo de ajuste das coordenadas paramétricas e em cada número de iterações, com uso da expressão

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_j = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_{j,i}(\mathbf{u},\mathbf{v})_i \qquad (1)$$

onde $\mathbf{(u,v)_j}$ são as novas coordenadas paramétricas do nó, $\mathbf{a_{j,i}}$ é o fator de ponderação do nó adjacente **i** referente ao nó **j**, e $\mathbf{(u,v)_i}$ são as coordenadas do nó adjacente **i**.

Adicionalmente, a implementação calcula o paralelepípedo envolvente (*bounding box*) de cada elemento e a matriz Jacobiana de cada nó da malha, para facilitar a geração de malha que é descrita na seção seguinte. A matriz Jacobiana do nó é uma média das matrizes Jacobinas dos triângulos adjacentes daquele nó. Desse modo, é possível obter uma continuidade da matriz Jacobiana entre os triângulos.

4. GERAÇÃO DE MALHA

A implementação descrita na seção anterior foi utilizada no programa MG (Coelho et al., 2000; Lira et al., 2002), um programa que trata de modelagem geométrica tridimensional e é voltado para geração de modelos de elementos finitos. Nesta seção, este é usado para apresentar exemplos de geração de malhas estruturadas em superfícies a partir de uma outra malha de superfície, que é não-estruturada. O primeiro exemplo é uma triangulação irregular que representa uma superfície qualquer. O segundo exemplo é uma representação de um domo de sal, que é muito utilizada em modelagem geológica. Por fim, alguns comentários são feitos baseados nos resultados aqui apresentados e encontrados da literatura.

O MG (1996) é um pré-processador que foi originalmente desenvolvido para geração de superfícies (cascas) em modelos de elementos finitos, sendo, na seqüência, estendido para também considerar malhas sólidas. Neste contexto, é essencial que o MG também trabalhe com este tipo de geração de malhas descrito nesse trabalho. Para tornar a implementação mais rápida, uma R-Tree foi utilizada para acelerar a busca de elementos triangulares, e por conseguinte, calcular as informações necessárias para geração de malha. Por exemplo, com um elemento encontrado pela R-Tree, as derivadas de um ponto *(u,v)* são calculadas com base nas derivadas dos pontos que conectam o elemento, e com uso de uma média ponderada de coordenada de área.

O primeiro exemplo é uma superfície não planar triangulada, como mostra a Figura 4. Como mencionado na seção anterior, um dos passos é mapear e normalizar os pontos da superfície para um plano de mínimos quadrados, como mostra a Figura 5(a). Em seguida, a Figura 5(b) mostra resultado final dos pontos internos após a utilização do algoritmo iterativo de "suavização". Notar que alguns elementos na Figura 5(a) estão sobrepostos uns sobre os outros. Entretanto, esse comportamento se desfaz quando é aplicado o método iterativo. A seguir, a superfície e remalhada com elementos quadrilaterais usando um algoritmo de geração de malhas estruturadas, bilinear (Miranda, 1999). As Figuras 6, 7, e 8 mostram os resultados finais de malha usando as parametrizações uniforme, média ponderada do inverso da distância e preservação de forma, respectivamente. Observar que nesses exemplos há pouca diferença de forma dos elementos entre as três figuras.

O segundo exemplo é um modelo que representa a superfície de um domo de sal, como mostra a Figura 9. As Figuras 10(a) e 10 (b) mostram a superfície paramétrica antes de aplicar o método iterativo de cálculo dos pontos do interior e após o uso do método iterativo, respectivamente. Observar o mesmo comportamento de "suavização" do exemplo anterior. Em seguida, as Figuras 11, 12 e 13 mostram as malhas estruturadas geradas com uso das três formas de parametrização. Como anteriormente, as malhas finais não apresentam grandes

diferenças entre as formas dos elementos gerados, considerando as três formas de parametrização. Adicionalmente, neste exemplo foi aplicado um algoritmo de malha não-estruturada de superfície (Miranda & Martha, 2002), como mostra a Figura 14. Os resultados mostram claramente que há uma melhora significativa na qualidade da malha triangular em relação à malha original.

Ambos exemplos anteriores apresentaram qualidade final da malha diferente daquelas apresentadas por Floater (1997), no qual é baseado este trabalho. A fim de comparar ambos resultados, as malhas mostradas por Floater são copiadas aqui. A Figura 15 mostra o domo de sal apresentado por Floater, uma malha bastante irregular na forma dos elementos. As Figuras 16, 17, e 18 mostram os resultados finais de Floater usando as três formas de parametrização. Os resultados das duas primeiras triangulações (Figura 16 e 17) apresentam malhas bastante irregulares quando comparados com a malha na Figura 18. Este comportamento é bastante diferente dos apresentados neste trabalho, onde há pouca diferença entre as malhas finais.

A diferença de resultados está na metodologia proposta que apresenta algumas inovações. Por exemplo, o tratamento a priori dos valores paramétricos na borda da superfície que são calculados considerando que cada curva de borda entre dois BS é uma linha reta no espaço paramétrico. Além disso, os valores paramétricos ao longo da curva são compatíveis com o comprimento de arco ao longo da curva. Quando é realizado o calculo dos valores paramétricos do interior da malha de superfície, os valores paramétricos da borda contribuem para que uma melhor representação paramétrica da superfície. No trabalho de Floater, aparentemente, somente os valores paramétricos dos vértices dos cantos da borda são fixados a priori. Isso pode explicar os diferentes resultados que esse autor encontrou para os três tipos de parametrizações adotados.

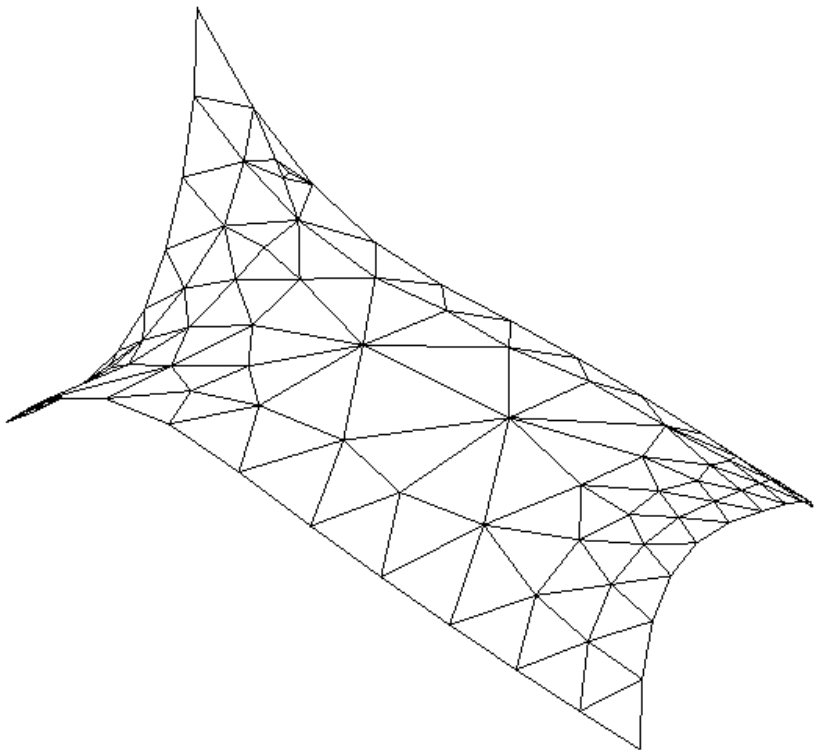
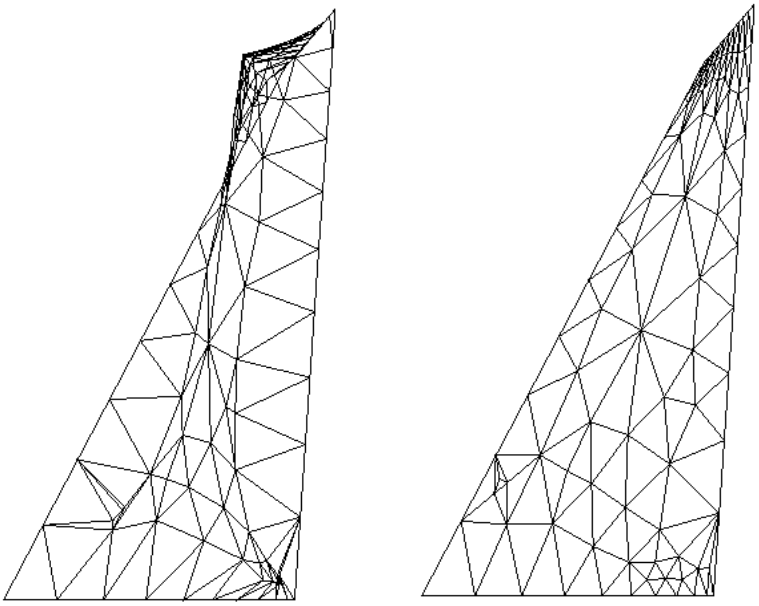


Figura 4 – Exemplo (1) de uma superfície irregular triangulada.



(a) **(b)**

Figura 5 – Superfície paramétrica do Exemplo (1), antes de aplicar o método iterativo de cálculo dos pontos do interior (a) e após o uso do método iterativo (b).

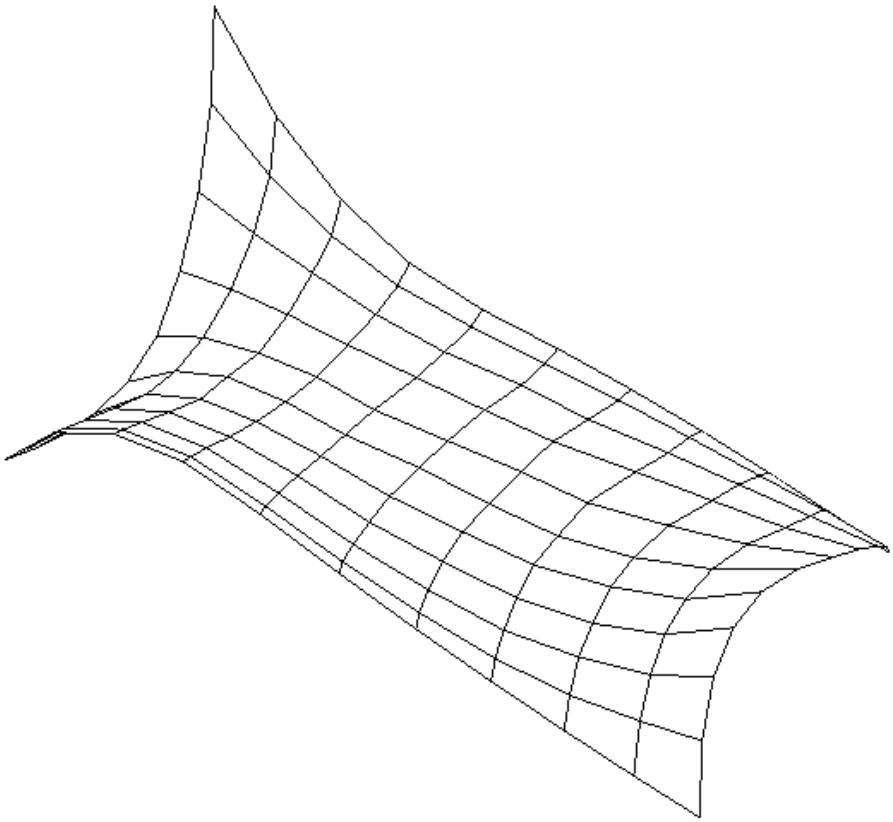


Figura 6 – Malha estruturada final do Exemplo (1) usando o método de parametrização uniforme.

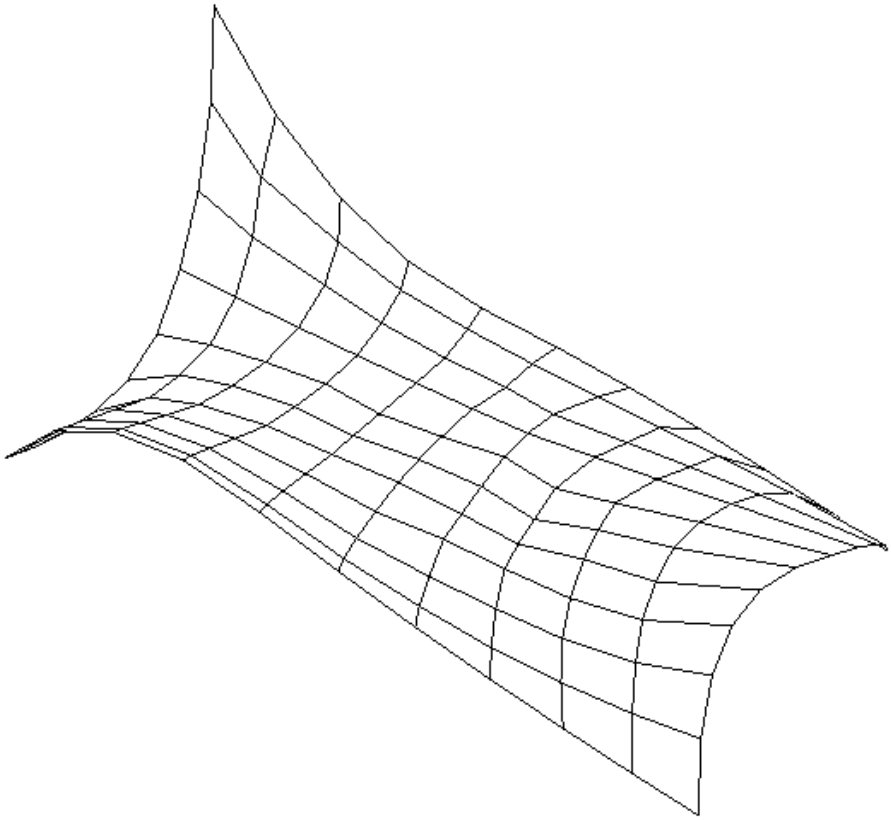


Figura 7 – Malha estruturada final do Exemplo (1) usando o método de parametrização média ponderada do inverso da distância.

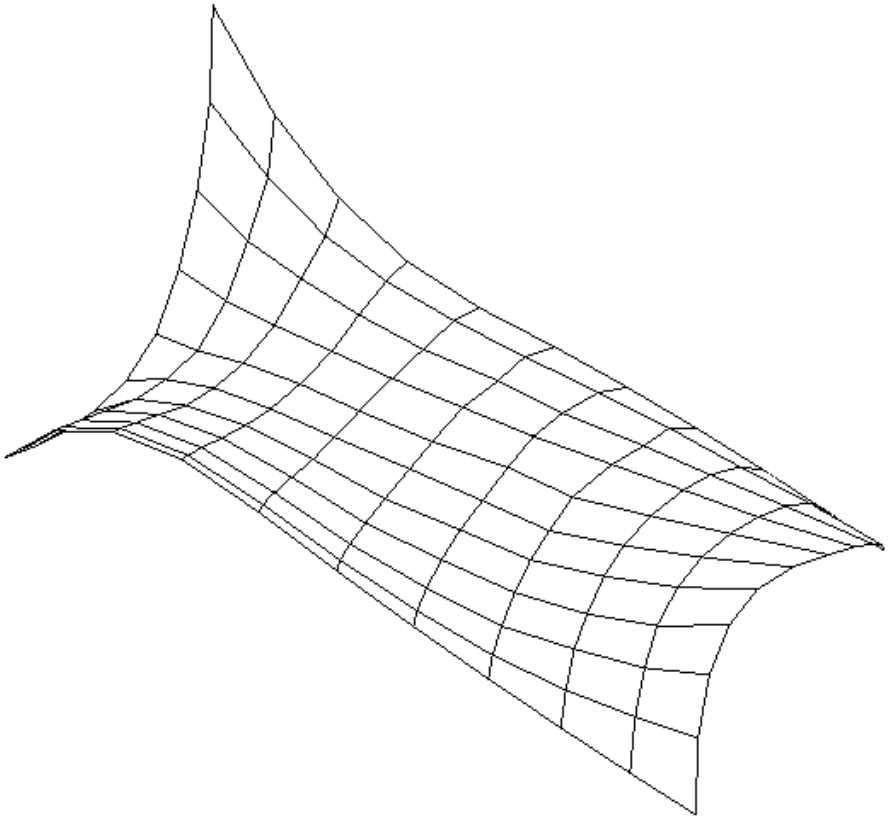


Figura 8 – Malha estruturada final do Exemplo (1) usando o método de parametrização preservação de forma.

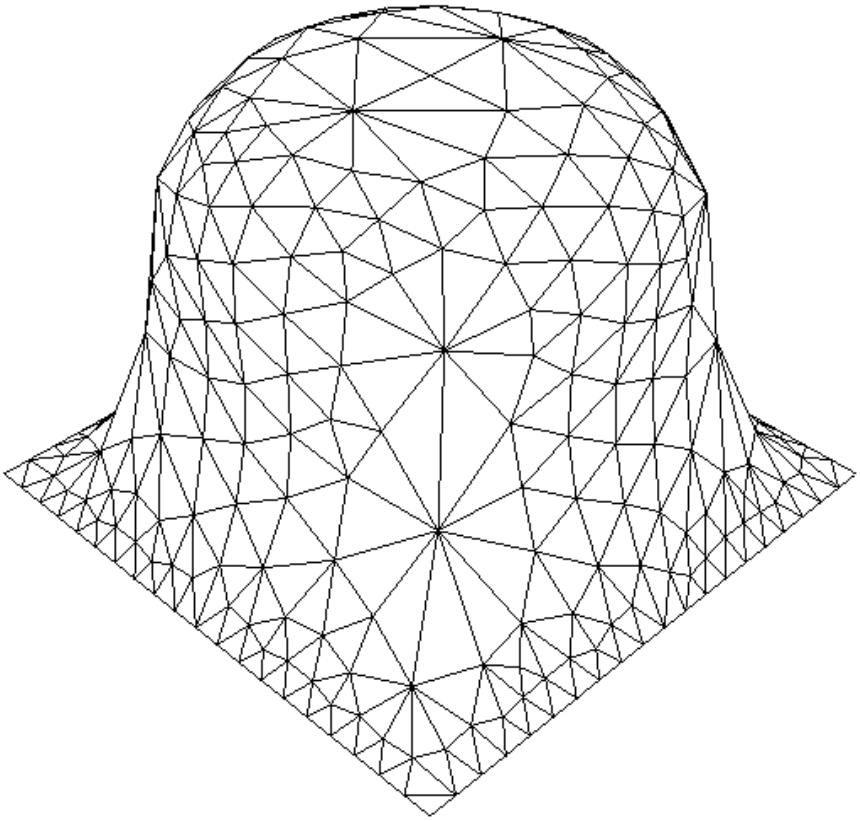
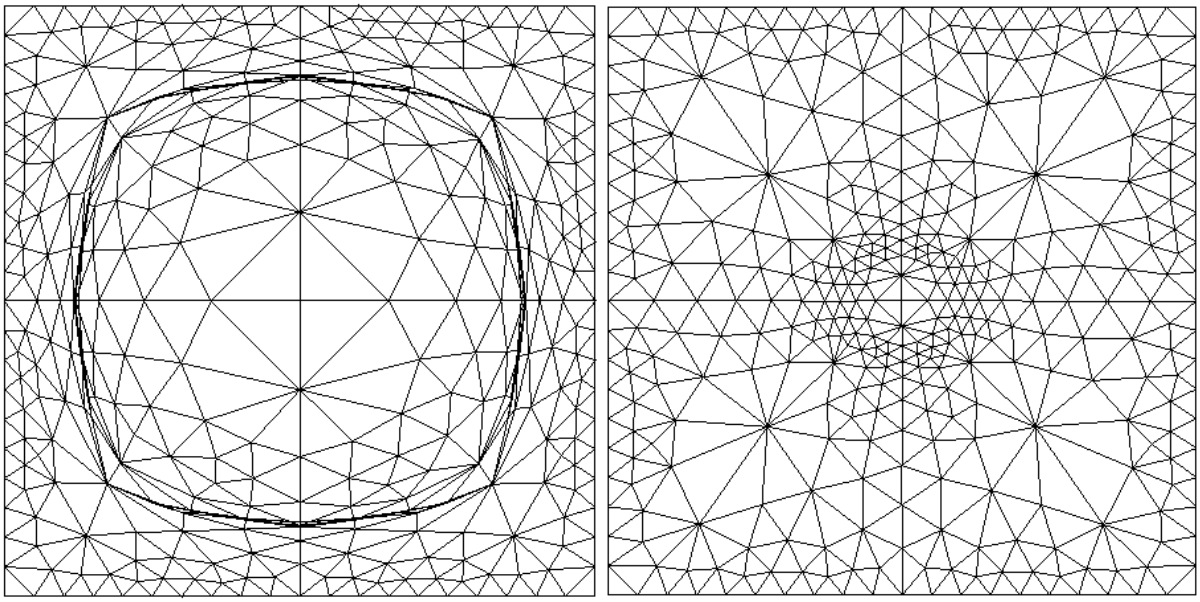


Figura 9 – Exemplo (2) de uma superfície irregular triangulada representando um domo de sal.



(a) **(b)**

Figura 10 – Superfície paramétrica do Exemplo (2), antes de aplicar o método iterativo de cálculo dos pontos do interior (a) e após o uso do método iterativo (b).

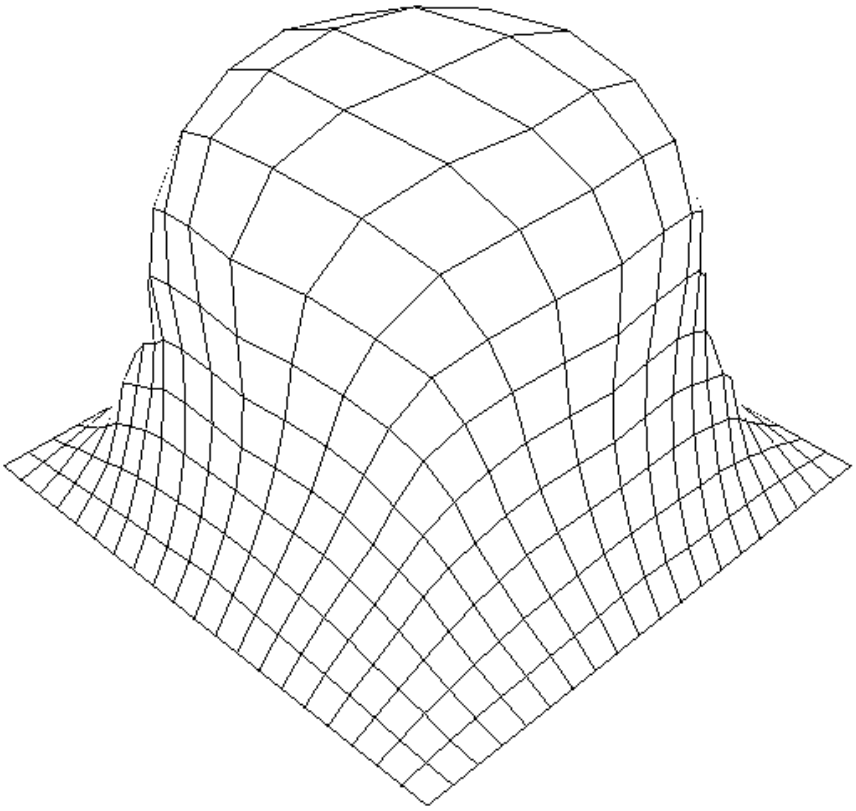


Figura 11 – Malha estruturada final do Exemplo (2) usando o método de parametrização uniforme.

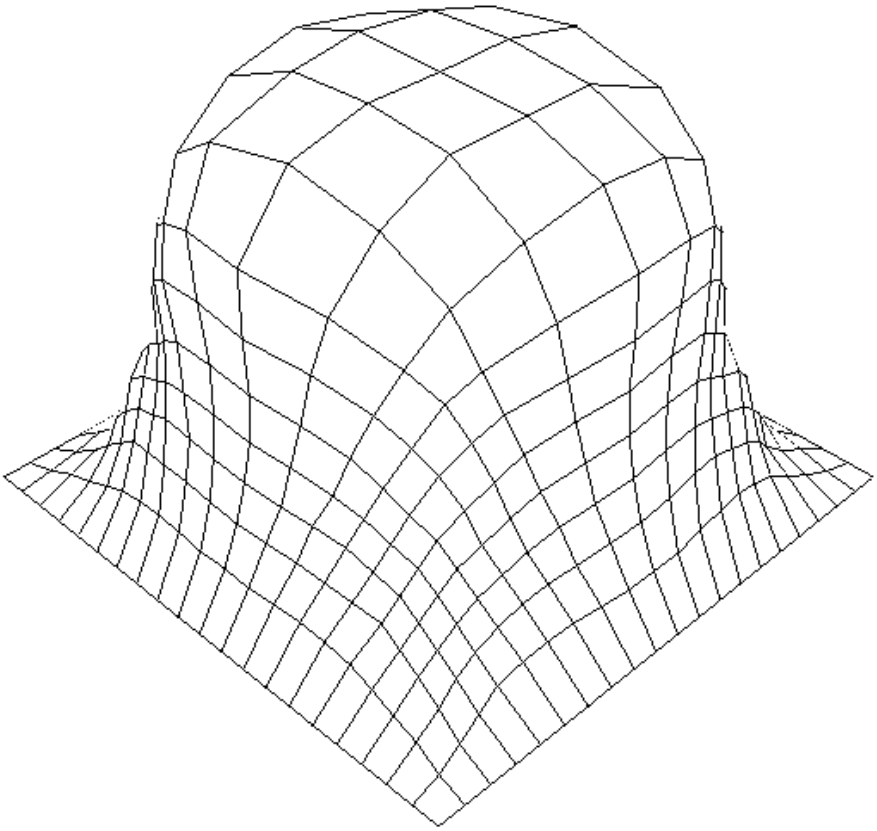


Figura 12 – Malha estruturada final do Exemplo (2) usando o método de parametrização média ponderada do inverso da distância.

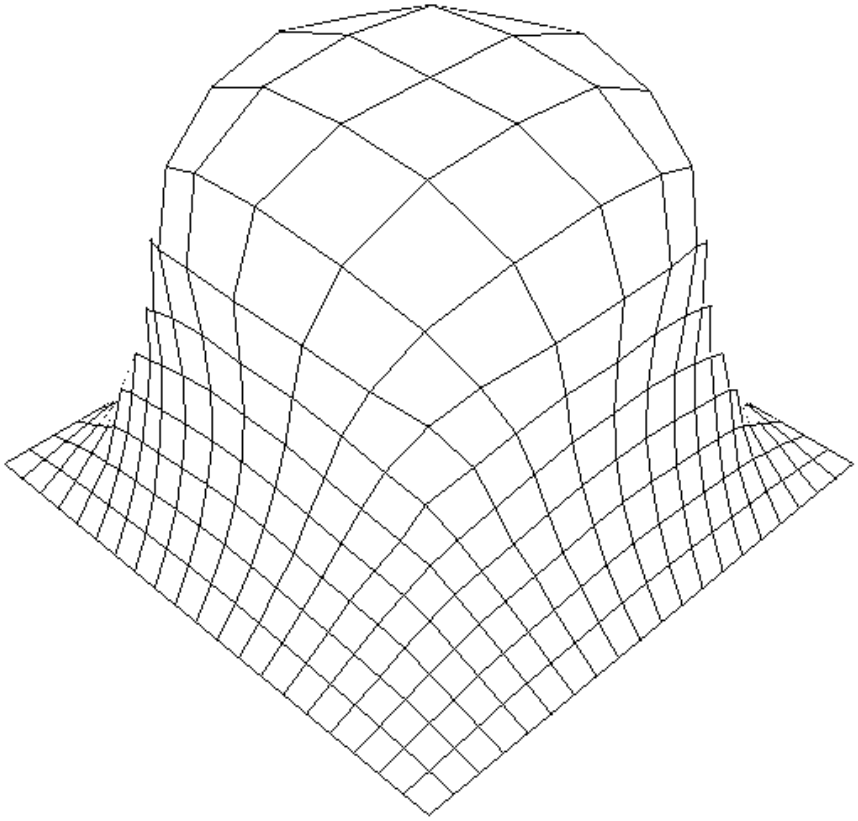


Figura 13 – Malha estruturada final do Exemplo (2) usando o método de parametrização preservação de forma.

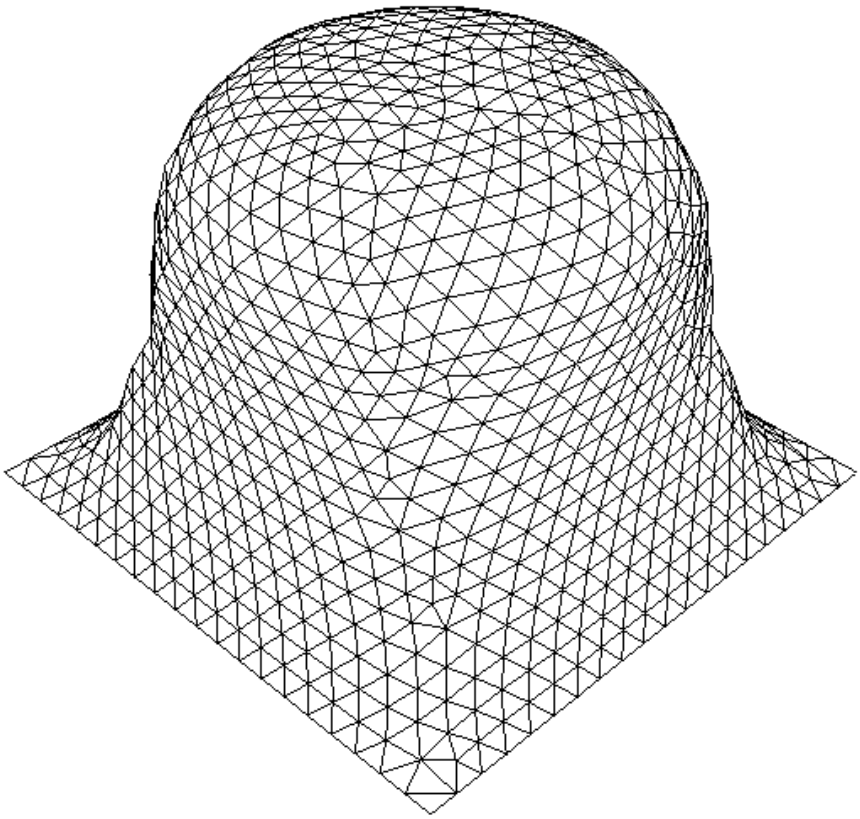


Figura 14 – Malha não-estruturada final do Exemplo (2) usando um algoritmo de triangulação de superfícies (Miranda & Martha, 2002).

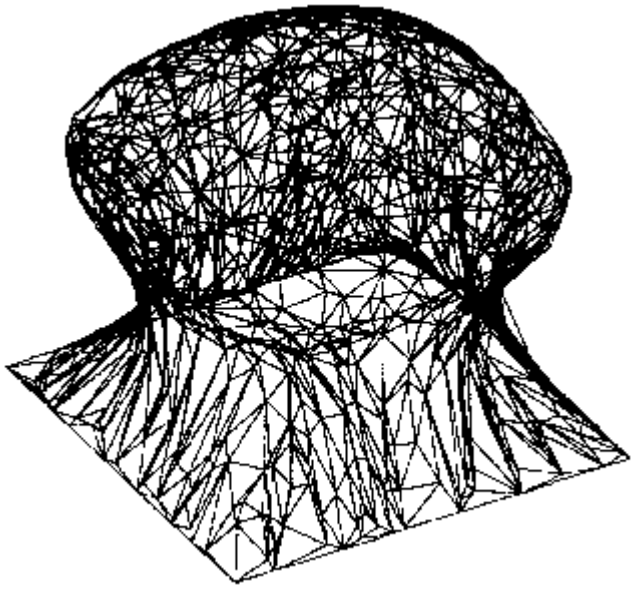


Figura 15 – Cópia original de um exemplo mostrado no trabalho de Floater (1997), que representa um domo de sal.

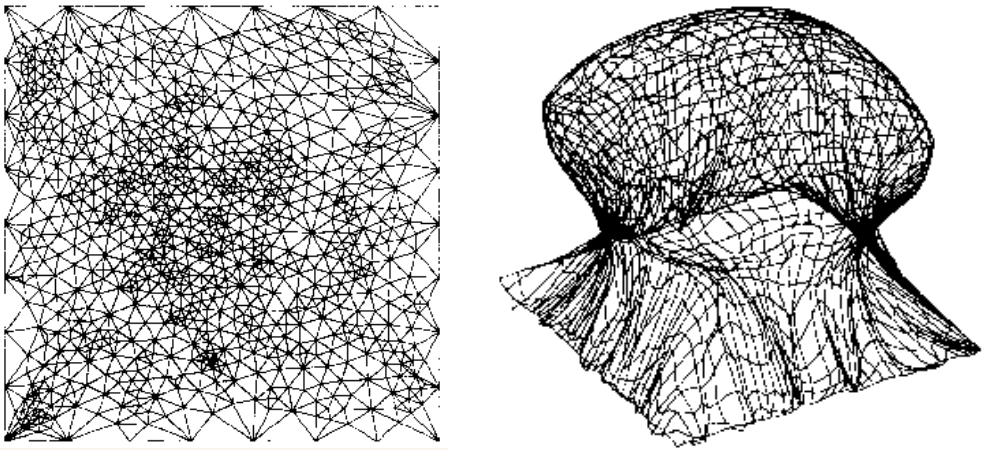


Figura 16 – Cópia original de um exemplo mostrado no trabalho de Floater (1997): (a) superfície paramétrica usando o método de parametrização uniforme e (b) malha final estruturada .

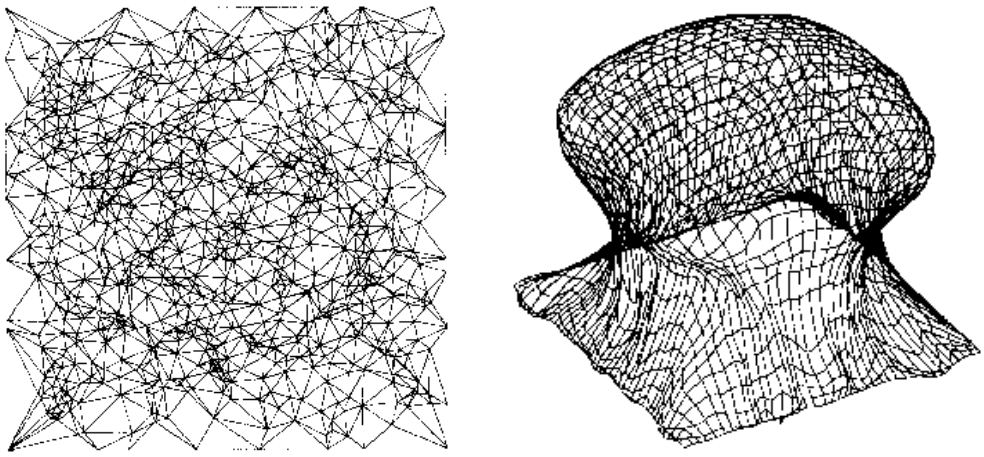


Figura 17 – Cópia original de um exemplo mostrado no trabalho de Floater (1997): (a) superfície paramétrica usando o método de parametrização média ponderada do inverso da distância e (b) malha final estruturada .

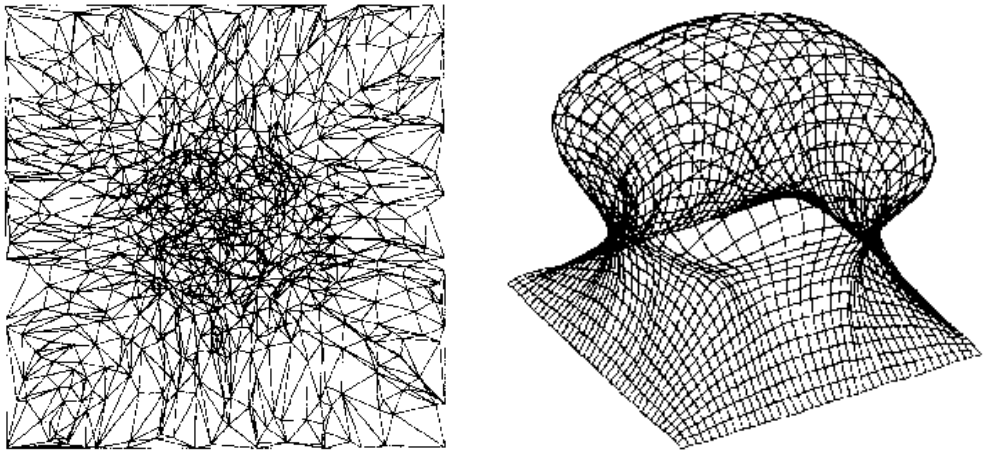


Figura 18 – Cópia original de um exemplo mostrado no trabalho de Floater (1997): (a) superfície paramétrica usando o método de parametrização preservação de forma e (b) malha final estruturada .

5. CONCLUSÃO

Superfícies com triangulação arbitrária podem ser parametrizadas com uso da implementação descrita neste trabalho, e então novas malhas podem ser geradas. Esse tipo de implementação, bastante usado na computação gráfica para aplicação de texturas em modelos virtuais não triviais, serve principalmente para superfícies onde não há informações sobre o tipo da superfície que a define.

Alguns passos são seguidos para a realização da parametrização:

- Entrada de dados, que são os nós e a conectividade dos elementos da malha.
- Verificação se a malha está coerente topologicamente e construção de estruturas auxiliares.
- Determinação dos *Border Stones*.
- Determinação de um plano de mínimos quadrados que suportará o espaço paramétrico.
- Projeção e normalização das coordenadas paramétricas dos nós do contorno da malha.
- Calculo dos fatores de ponderação com usos das parametrizações uniforme, média ponderada do inverso da distância ou preservação de forma.

- Calculo dos valores paramétricos dos nós do interior da malha com uso de um método similar ao de Gauss-Seidel.

Para validar a implementação, foram apresentados exemplos de modelos de superfície estruturadas que foram gerados a partir de superfícies arbitrarias triangular. As três formas de parametrizações apresentaram resultados com pouca diferença na forma e qualidade da malha, uma conclusão bastante diferente que apresentado por Floater. Os autores acreditam que esses resultados se devem as diferenças de cálculo dos valores paramétricos das curvas de bordo.

6. REFERÊNCIAS

Coelho, L. C. G.; Gattass, M.; Figueiredo, L. H., "Intersecting and Trimming Parametric Meshes on Finite-element Shells", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 47(4), pp. 777-800, 2000.

Floater, M., "Parametrization and Smooth Approximation of Surface Triangulations", Computer Aided Geometric Design, 14(3):231–250, April 1997.

Lévy, B., Petitjean, S., Ray, S., Maillot, J., "Least Squares Conformal Maps for Automatic Texture Atlas Generation", SIGGHAPH Proceedings, pp 362-371, 2002.

Lira, W. M.; Cavalcanti, P. R.; Coelho, L. C. G.; Martha, L. F., "A Modeling Methodology for Finite Element Mesh Generation of Multi-Region Models with Parametric Surfaces", Computers & Graphics, 26(6), 2002.

MG: Manual do Usuário – Versão 3.0, Grupo de Tecnologia em Computação Gráfica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, http://www.tecgraf.puc-rio.br/~lula/mg, Abril, 1996.

Miranda, A.C.O., Meggiolaro, M.A., Castro, J.T.P., Martha, L.F., Bittencourt, T.N., "Fatigue Life and Crack Path Prediction in Generic 2D Structural Components", Eng. Fracture Mechanics, v.70, pp.1259-79, 2003.

Miranda, A.C.O., Martha, L.F., "Mesh Generation on High-Curvature Surfaces Based on a Background Quadtree Structure", In: 11th International Meshing Roundtable, 2002, Ithaca, New York. 11th International Meshing Roundtable. Albuquerque, New Mexico: Sandia National Laboratories, 2002. v.11. p.333 - 341.

Miranda, A.C.O., Martha, L.F., "Uma Biblioteca Computacional para Geração de Malhas Bidimensionais e Tridimensionais de Elementos Finitos" In: XXI CILAMCE, 2000, Rio de Janeiro, RJ. Anais do XXI Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia. , 2000. v.1. p.1 - 10.

Sheffer, A., e de Sturler, E., "Parameterization of Faceted Surfaces for Meshing using Angle-Based Flattening", Engineering with Computers 17: 326–337, 2001.