XXXVI JORNADAS SUL AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL
19 A 21 DE NOVEMBRO DE 2014 | MONTEVIDÉU - URUGUAI
"Estruturas para o Desenvolvimento, Integração Regional e Bem-Estar Social"

DIFERENÇAS NA CONSIDERAÇÃO DA DISTORÇÃO NO MODELO DE TIMOSHENKO DE UMA VIGA SUBMETIDA A CARREGAMENTO AXIAL

ALTERNATIVE FORMS OF CONSIDERING SHEAR DEFORMATION IN AXIALLY LOADED TIMOSHENKO BEAMS

Luiz F. Martha (P) (1); Rodrigo B. Burgos (2)

(1) PhD, Professor Associado, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil.
(2) D.Sc., Professor Adjunto, UERJ, Rio de Janeiro, Brasil.
Endereço para correspondência: lfm@tecgraf.puc-rio.br; (P) Apresentador

Resumo
O problema da viga submetida a carregamento axial tem sido objeto de estudo de diversos pesquisadores desde que Euler deduziu uma expressão para a carga de bifurcação de uma coluna simplesmente apoiada. O modelo de Euler-Bernoulli para vigas desconsidera distorções por cisalhamento e, como conseqüência, supõe que a derivada do deslocamento transversal seja igual à rotação da seção transversal. Quando o modelo de Timoshenko para uma viga é aplicado, considera-se normalmente a distorção por cisalhamento como uma rotação adicional, sendo esta incorporada ao problema, que, dessa forma, leva em conta a rotação da seção transversal e o deslocamento transversal como variáveis independentes. Entretanto, textos de Timoshenko e Gere apontam para uma maneira alternativa de se considerar a distorção por cisalhamento, porém na literatura esse fato tem sido negligenciado. Um razão para isso pode ser que, na maioria dos casos, a forma alternativa não leva a grandes diferenças nos resultados, embora haja situações específicas em que se verificam discrepâncias. O objetivo deste artigo é discutir, no contexto de uma análise de segunda ordem (não linearidade geométrica), as diferenças de resultados entre as duas alternativas para considerar a distorção por cisalhamento. Quando uma viga está submetida a uma carga axial, essa diferença na consideração da distorção por cisalhamento acarreta em valores completamente diferentes de cargas críticas, como é mostrado em exemplos numéricos de vigas-coluna com diferentes condições de contorno. A análise do pórtico de Roorda também apresenta resultados bastante diferentes.
Palavras-chave: Teoria de vigas de Timoshenko, carga crítica, cisalhamento.

Abstract
Buckling of beam-columns has been studied by many researchers since Euler derived an analytical expression for the limit bifurcation load of an axially loaded simply supported beam. The mathematical model of Euler-Bernoulli for beams neglects shear deformation and, as a consequence, assumes that the derivative of transversal displacements is equal to the rotation of the beam's cross-section. In Timoshenko's beam theory, shear deformation is usually considered as an additional cross-section rotation. Nonetheless, original texts of Timoshenko and Gere had already pointed out an alternative manner of considering shear deformation, although the great majority of literature articles neglect this fact. One reason for this could be that, usually, the alternative model does not lead to big differences in the results, although in some specific situations some discrepancies may be observed. The objective of this paper is to discuss, in the context of a second-order geometric non-linear analysis, the differences in results considering the two alternatives for shear deformation. For the case of an axially loaded beam, the two alternatives lead to different values for critical loads. This is shown in numerical examples of known models, such as beam-columns with various end conditions. The analysis of Roorda's frame also presents very different results.
Keywords: *Timoshenko beam theory, critical load, shearing.*

1. INTRODUÇÃO

O modelo clássico da teoria de vigas de Timoshenko considera a distorção por cisalhamento como uma rotação adicional da seção transversal (Timoshenko, 1921), resultando em uma formulação que leva em conta a rotação da seção transversal e o deslocamento transversal como variáveis independentes.

Entretanto, Timoshenko and Gere (1961) em seu livro Theory of Elastic Stability apresentam uma alternativa (não usualmente adotada) à formulação tradicional para considerar a deformação por cisalhamento, que a interpreta não como uma rotação adicional da seção transversal, mas como uma distorção cisalhante do elemento infinitesimal de viga.

Para uma análise de primeira ordem, em que a flexão da viga não é influenciada pela carga axial, as duas alternativas para a interpretação da distorção por cisalhamento resultam em formulações absolutamente iguais. Entretanto, será mostrado que a alternativa clássica apresenta uma inconsistência na relação de compatibilidade para deformações axiais. Além disso, quando são considerados efeitos de segunda ordem, existem discrepâncias na formulação matemática do problema, e conseqüentemente nos resultados.

O objetivo deste trabalho é discutir, no contexto de uma análise de segunda ordem (não-linearidade geométrica), as diferenças de resultados entre a forma clássica de considerar a distorção por cisalhamento (rotação adicional) e a forma alternativa (distorção cisalhante do elemento infinitesimal de viga). O artigo descreve a análise de uma viga submetida a uma carga axial de compressão, com diferentes condições de contorno, em que essa diferença na consideração da distorção por cisalhamento leva a valores completamente diferentes de cargas críticas. Outro exemplo analisado é o conhecido pórtico de Roorda.

2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Na Figura 1 mostra-se a configuração deformada do elemento infinitesimal de uma viga submetida a um carregamento transversal distribuído (q) e uma carga axial constante P. Levando em conta as forças apresentadas, a imposição do equilíbrio leva às seguintes expressões:

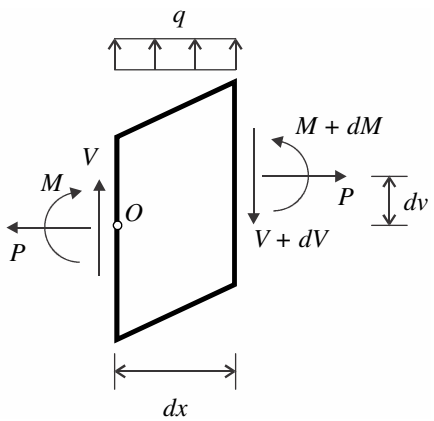

Figura 1. Equilíbrio de um elemento de viga deformado.

$$\sum F_y = 0 \;\rightarrow\; -dV + q(x)dx = 0 \;\rightarrow\; \frac{dV(x)}{dx} = q(x) \tag{1}$$

$$\sum M_O = 0 \;\rightarrow\; dM - (V + dV)dx - Pdv + q(x)\frac{dx^2}{2} = 0 \rightarrow \frac{dM(x)}{dx} = V(x) + P\frac{dv(x)}{dx} \tag{2}$$

onde:
$v(x)$ = deslocamento transversal
$q(x)$ = carga transversal distribuída
$V(x)$ = componente vertical do esforço na seção transversal
P = componente horizontal do esforço na seção transversal
$M(x)$ = momento fletor na seção transversal

Considerando a relação entre momento fletor e a curvatura $M(x) = EI\, d\theta/dx$, substituindo na Eq. (2) e derivando em relação a x:

$$\begin{aligned} EI \cdot \frac{d^2\theta(x)}{dx^2} - V(x) - P \cdot \frac{dv(x)}{dx} &= 0 \\ EI \cdot \frac{d^3\theta(x)}{dx^3} - \frac{dV(x)}{dx} - P \cdot \frac{d^2v(x)}{dx^2} &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

onde:
E = módulo de elasticidade do material
I = momento de inércia da seção transversal
$\theta(x)$ = rotação da seção transversal

Substituindo a expressão para a derivada do esforço transversal $dV/dx = q(x)$ da Eq. (1):

$$EI \cdot \frac{d^3\theta(x)}{dx^3} - P \cdot \frac{d^2v(x)}{dx^2} = q(x) \tag{4}$$

2.1. Teoria de vigas de Navier

No caso da teoria de vigas de Navier (Euler-Bernoulli), a rotação pode ser escrita como a derivada do deslocamento transversal $(\theta = dv/dx)$, resultando em:

$$\frac{d^4v(x)}{dx^4} - \frac{P}{EI} \cdot \frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{q(x)}{EI} \tag{5}$$

A equação diferencial acima representa a formulação de Euler-Bernoulli considerando uma carga axial constante, desprezando deformações por cisalhamento. Sua solução resulta no deslocamento transversal $v(x)$ e a rotação é obtida pela expressão $\theta(x) = dv/dx$.

2.2. Forma clássica da teoria de vigas de Timoshenko

No caso da teoria clássica de vigas de Timoshenko, a rotação não fica mais associada à derivada do deslocamento transversal, conforme ilustrado na Fig. 2.

Esta nova hipótese modifica as equações diferenciais mostradas anteriormente, pois torna-se necessário incluir o termo associado à distorção por cisalhamento provocada pelo esforço cortante (note que o sinal negativo vem das diferentes convenções de sinais entre o esforço cortante e a tensão de cisalhamento):

$$\gamma(x) = \frac{dv(x)}{dx} - \theta(x)$$
$$Q(x) = -\chi GA \cdot \gamma(x) = \chi GA \cdot \left(\theta(x) - \frac{dv(x)}{dx} \right) \tag{6}$$

onde:
G = módulo de cisalhamento do material
A = área da seção transversal
χ = fator que define a área efetiva para cisalhamento da seção transversal
$Q(x)$ = esforço cortante
$\gamma(x)$ = distorção por cisalhamento

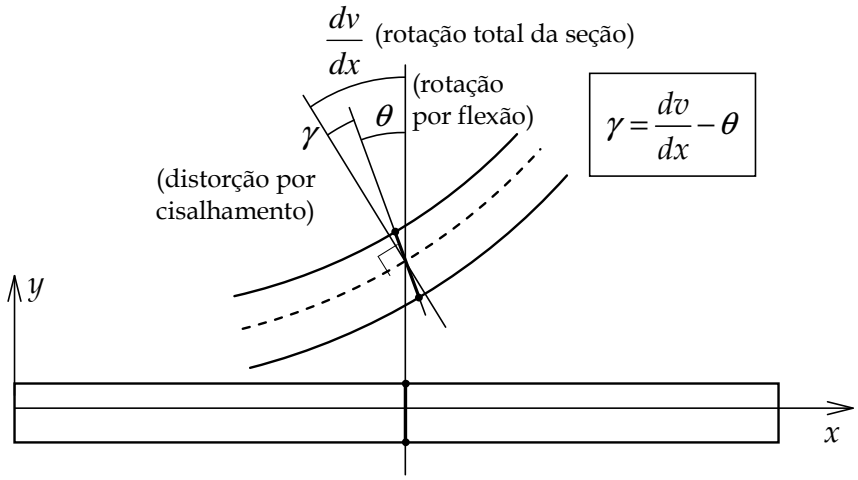

Figura 2. Consideração do cisalhamento na viga de Timoshenko.

A teoria clássica de vigas de Timoshenko considera a distorção por cisalhamento como uma rotação adicional da seção transversal (Reddy *et al.*, 1997), conforme mostra a Fig. 3. Nota-se que a projeção dos esforços é obtida usando a rotação total da seção e não apenas a rotação por flexão θ. Tal consideração leva às seguintes expressões para os esforços seccionais:

$$N(x) = P\cos(\theta+\gamma) - V(x)\sin(\theta+\gamma) = P - V(x)(\theta+\gamma) = P - V(x)\frac{dv(x)}{dx}$$
$$Q(x) = P\sin(\theta+\gamma) + V(x)\cos(\theta+\gamma) = P(\theta+\gamma) + V(x) = P\frac{dv(x)}{dx} + V(x) \tag{7}$$

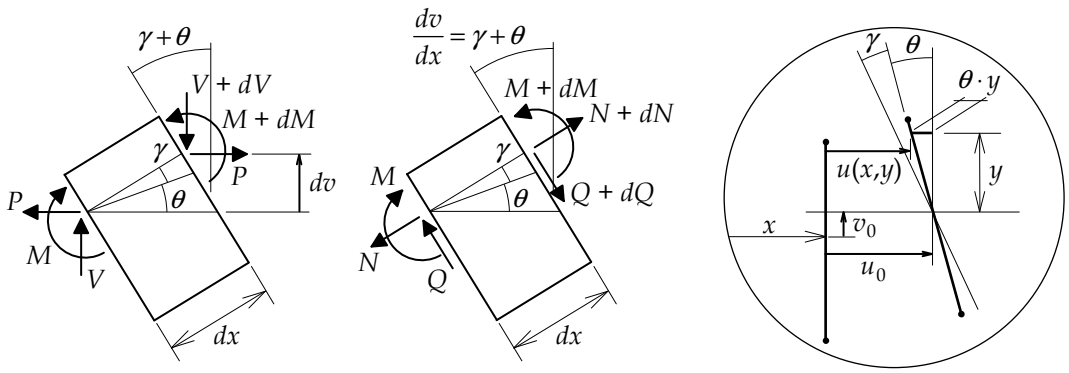

Figura 3. Esforços e deslocamentos na forma clássica da viga de Timoshenko.

É interessante notar que a hipótese mostrada na Fig. 3 supõe que o deslocamento axial (e, consequentemente, a deformação axial) depende apenas da rotação por flexão, em concordância com a expressão clássica da Teoria da Elasticidade (Boresi *et al.*, 2010):

$$\begin{aligned} u(x,y) &= u_0(x) - y\theta(x) \\ \varepsilon_x &= \frac{du_0(x)}{dx} - y\frac{d\theta(x)}{dx} \end{aligned} \tag{8}$$

Entretanto, ao observar a deformação da seção transversal, nota-se que o mais correto seria expressar o deslocamento axial como dependente tanto da rotação por flexão quanto da distorção por cisalhamento:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= u_0(x) - y\left[\theta(x) + \gamma(x)\right] \\ \varepsilon_x &= \frac{du_0(x)}{dx} - y\left[\frac{d\theta(x)}{dx} + \frac{d\gamma(x)}{dx}\right] \end{aligned} \tag{9}$$

A princípio, essa diferença entre as Eqs. (8) e (9) revela uma possível incoerência na formulação tradicional de Timoshenko. A hipótese de que a distorção por cisalhamento é constante ao longo do eixo da viga resolve tal incoerência. Tal hipótese é verdadeira para vigas sem carregamento transversal, isto é, com esforço cortante constante.

Outra constatação importante é obtida com a substituição da expressão para o esforço cortante da Eq. (7) na Eq. (2), corroborando consagrada a relação diferencial entre o momento fletor e o esforço cortante:

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) \tag{10}$$

Igualando as expressões para o esforço cortante $Q(x)$ nas Eqs. (6) e (10), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{dM(x)}{dx} &= \chi GA \cdot \left(\theta(x) - \frac{dv(x)}{dx}\right) \\ \frac{dv(x)}{dx} &= \theta(x) - \frac{EI}{\chi GA}\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} \end{aligned} \tag{11}$$

Substituindo a expressão da Eq. (11) na Eq. (4), tem-se:

$$\begin{aligned} EI\left(1 + \frac{P}{\chi GA}\right)\frac{d^3\theta(x)}{dx^3} - P\frac{d\theta(x)}{dx} &= q(x) \\ \frac{d^3\theta(x)}{dx^3} - \frac{P}{(1+\eta)EI}\frac{d\theta(x)}{dx} &= \frac{q(x)}{(1+\eta)EI}, \qquad \eta = \frac{P}{\chi GA} \end{aligned} \tag{12}$$

2.3. Forma alternativa da teoria de vigas de Timoshenko

Timoshenko e Gere (1961) apresentam uma alternativa (não usualmente adotada) à formulação tradicional para considerar a deformação por cisalhamento, que a interpreta não como

uma rotação adicional da seção transversal, mas como uma distorção do elemento infinitesimal de viga, conforme mostra a Fig. 4. Observa-se que, com essa interpretação, a decomposição dos esforços seccionais é feita utilizando apenas a rotação por flexão:

$$\begin{aligned} N(x) &= P\cos(\theta) - V(x)\sin(\theta) = P - V(x)\theta(x) \\ Q(x) &= P\sin(\theta) + V(x)\cos(\theta) = P\theta(x) + V(x) \end{aligned} \tag{13}$$

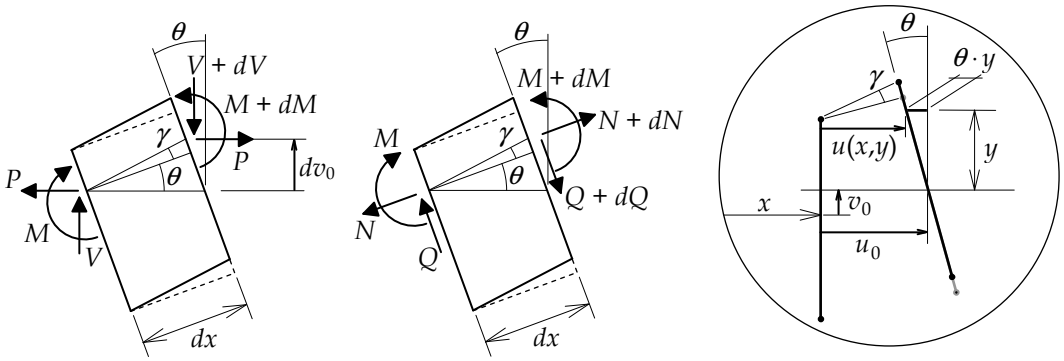

Figura 4. Esforços e deslocamentos na forma alternativa da viga de Timoshenko.

Nota-se que a hipótese mostrada na Fig. 4 é coerente com a expressão clássica da Teoria da Elasticidade para o deslocamento axial conforme a Eq. (8). Substituindo a expressão para o esforço cortante da Eq. (13) na Eq. (2), chega-se a uma nova relação diferencial entre o momento fletor e o esforço cortante:

$$\begin{aligned} \frac{dM(x)}{dx} &= Q(x) + P\left[\frac{dv(x)}{dx} - \theta(x)\right] \\ \frac{dM(x)}{dx} &= Q(x) + P\gamma(x) = Q(x)\left(1 - \frac{P}{\chi GA}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

Igualando as expressões para o esforço cortante $Q(x)$ nas Eqs. (6) e (14), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{dM(x)}{dx} &= (\chi GA - P)\left(\theta(x) - \frac{dv(x)}{dx}\right) \\ \frac{dv(x)}{dx} &= \theta(x) - \frac{EI}{(\chi GA - P)}\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} \end{aligned} \tag{15}$$

Analisando as Eqs. (11) e (15), fica evidente que a diferença entre as duas considerações da teoria só existe quando é levada em conta a carga axial. Caso contrário, as duas formulações recaem na mesma equação diferencial. Substituindo a expressão da Eq. (15) na Eq. (4), tem-se:

$$\begin{aligned} EI\left(1 + \frac{P}{(\chi GA - P)}\right)\frac{d^3\theta(x)}{dx^3} - P\frac{d\theta(x)}{dx} &= q(x) \\ \frac{d^3\theta(x)}{dx^3} - \frac{P(1-\eta)}{EI}\frac{d\theta(x)}{dx} &= \frac{(1-\eta)q(x)}{EI}, \qquad \eta = \frac{P}{\chi GA} \end{aligned} \tag{16}$$

Para reforçar a diferença entre as equações diferenciais obtidas, ambas são reproduzidas abaixo em sua versão homogênea, mostrando como o parâmetro $\eta = P/\chi GA$ influencia na forma como a carga axial é considerada:

$$\frac{d^3\theta(x)}{dx^3} - \frac{1}{(1+\eta)}\frac{P}{EI}\frac{d\theta(x)}{dx} = 0 \quad ; \quad \frac{d^3\theta(x)}{dx^3} - (1-\eta)\frac{P}{EI}\frac{d\theta(x)}{dx} = 0 \tag{17}$$

3. SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Tanto a forma clássica quanto a alternativa da equação diferencial da viga de Timoshenko submetida a carga axial apresentam o mesmo padrão de solução. Num primeiro momento, resolve-se a equação homogênea para a função $\theta(x)$:

$$\begin{gathered} \frac{d^3\theta(x)}{dx^3} - \mu^2\frac{d\theta(x)}{dx} = 0 \\ \theta(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x} + c_3 \end{gathered} \tag{18}$$

onde:

$\mu = \sqrt{P/(1+\eta)EI}$ na forma clássica

$\mu = \sqrt{(1-\eta)P/EI}$ na forma alternativa

Em seguida, utilizando as Eqs. (11) e (15), resolve-se para $v(x)$, conforme mostrado abaixo:

$$\begin{gathered} \frac{dv(x)}{dx} = \theta(x) - \beta\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} \\ v(x) = \frac{(1-\beta\mu^2)}{\mu}\left[c_1 e^{\mu x} - c_2 e^{-\mu x}\right] + c_3 x + c_4 \end{gathered} \tag{19}$$

onde:

$\beta = EI/\chi GA$ na forma clássica

$\beta = EI/(\chi GA - P)$ na forma alternativa

Utilizando a constante $\Omega = EI/\chi GA\,L^2$ introduzida por Reddy (1997), pode-se reescrever o parâmetro β da forma alternativa da seguinte maneira:

$$\beta = \frac{\Omega L^2}{(1-\eta)} \tag{20}$$

3.1. Solução Trigonométrica

Quando a carga axial é de compressão, tradicionalmente utiliza-se a versão trigonométrica da Eq. (18) pela sua simplicidade. Como um dos objetivos deste trabalho é a obtenção de cargas críticas de flambagem para colunas e pórticos, a versão trigonométrica será adotada. Neste caso, deve-se lembrar que o sinal da carga axial é negativo:

$$\theta(x) = A\sin(\mu x) + B\cos(\mu x) + C$$
$$v(x) = \frac{(1+\beta\mu^2)}{\mu}\left[B\sin(\mu x) - A\cos(\mu x)\right] + Cx + D \tag{21}$$

onde:

$\mu = \sqrt{-P/(1+\eta)EI}$ na forma clássica

$\mu = \sqrt{-(1-\eta)P/EI}$ na forma alternativa

Caso o objetivo seja a obtenção de cargas críticas, impõem-se as condições de contorno na solução da equação diferencial e encontra-se o menor valor de μ (autovalor) que permite uma solução não trivial associada a uma configuração deformada (autofunção). Em pórticos planos, nem todas as barras estarão sujeitas a carregamentos axiais, sendo necessário considerar também a equação diferencial da viga de Timoshenko sem carga axial, cuja solução é amplamente conhecida:

$$EI\frac{d^3\theta(x)}{dx^3} = 0$$
$$\theta(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C \tag{22}$$
$$v(x) = A\left(x^3 - 6\Omega L^2 x\right) + Bx^2 + Cx + D, \quad \Omega = \frac{EI}{\chi GA\,L^2}$$

4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Buscando dar ênfase aos casos com solução analítica conhecida, primeiramente foram obtidas cargas críticas de flambagem para colunas com duas diferentes condições de contorno: biapoiada (coluna clássica de Euler) e biengastada. Posteriormente, a análise se estendeu ao pórtico de Roorda com dois tipos de carregamento, considerando carga axial apenas na barra vertical ou em ambas as barras.

4.1. Coluna de Euler (biapoiada)

A Fig. 5 mostra uma viga-coluna biapoiada submetida a uma carga axial de compressão. Sua menor carga crítica de flambagem é dada por $P_{cr} = -\pi^2 EI / L^2$.

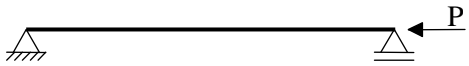

Figura 5. Viga biapoiada submetida a uma carga axial de compressão.

As condições de contorno desta coluna são o deslocamento e o momento fletor nulos nas extremidades:

$$v(0) = 0,\ M(0) = 0,\ v(L) = 0,\ M(L) = 0 \tag{23}$$

Aplicando-se as condições de contorno dadas pela Eq. (23), chega-se a uma condição para que a solução seja não trivial. Tal condição para o parâmetro de carga independe da forma utilizada (clássica ou alternativa):

$$\sin(\mu L) = 0 \tag{24}$$

O menor valor não nulo de μ que satisfaz a Eq. (24) é dado por $\mu = \pi / L$. Substituindo na expressão da forma clássica da teoria de vigas de Timoshenko, chega-se a:

$$\mu = \sqrt{-\frac{P_{cr}}{(1+\eta)EI}} = \frac{\pi}{L} \rightarrow P_{cr} = -\frac{\pi^2(1+\eta)EI}{L^2} = -\frac{\pi^2\left(1+\frac{P_{cr}}{\chi GA}\right)EI}{L^2}$$
$$P_{cr} = -\frac{\pi^2 EI}{L^2\left(1+\Omega\pi^2\right)}, \quad \Omega = \frac{EI}{\chi GA\, L^2} \tag{25}$$

Substituindo $\mu = \pi / L$ na expressão para a equação diferencial da forma alternativa da teoria de vigas de Timoshenko, chega-se a:

$$\mu = \sqrt{-\frac{(1-\eta)P_{cr}}{EI}} = \frac{\pi}{L} \rightarrow P_{cr} = -\frac{\pi^2 EI}{(1-\eta)L^2} = -\frac{\pi^2 EI}{\left(1-\frac{P_{cr}}{\chi GA}\right)L^2}$$
$$P_{cr} = \frac{\chi GA}{2}\left(1-\sqrt{1+4\pi^2\Omega}\right), \quad \Omega = \frac{EI}{\chi GA\, L^2} \tag{26}$$

O resultado da Eq. (26) é idêntico ao obtido por Timoshenko and Gere (1961). Reescrevendo os resultados para as duas cargas críticas em forma adimensional, pode-se obter uma relação com a carga de Euler de forma a poder comparar os resultados:

$$-\frac{P_{cr,c}L^2}{\pi^2 EI} = \frac{P_{cr,c}}{P_e} = \frac{1}{\left(1+\Omega\pi^2\right)}$$
$$-\frac{P_{cr,a}L^2}{\pi^2 EI} = \frac{P_{cr,a}}{P_e}\frac{1}{2\pi^2\Omega}\left(\sqrt{1+4\pi^2\Omega}-1\right) \tag{27}$$

onde:

$P_{cr,c}$ é a carga crítica utilizando a forma clássica

$P_{cr,a}$ é a carga crítica utilizando a forma alternativa

P_e é a carga crítica de Euler, $P_e = -\pi^2 EI / L^2$

No gráfico da Fig. 6 é mostrada a comparação entre as duas cargas críticas para valores usuais de Ω.

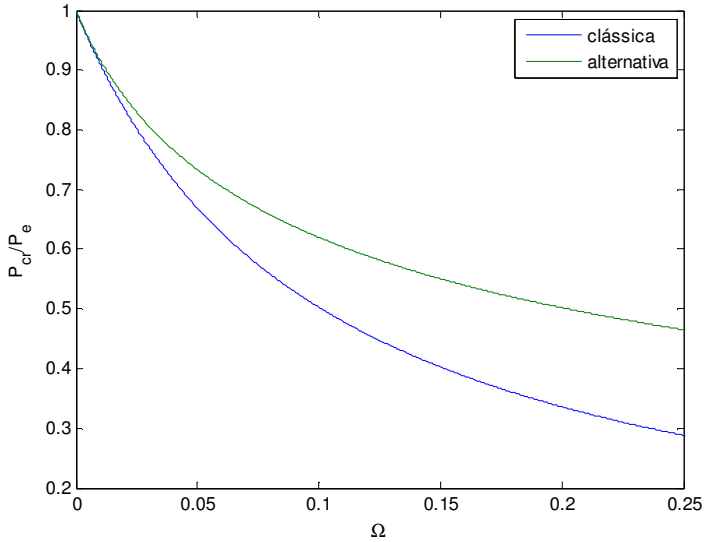

Figura 6. Carga crítica para a coluna de Euler em função do parâmetro $\Omega = EI/\chi GA\,L^2$.

4.2. Coluna Biengastada

A Fig. 7 mostra uma viga-coluna biengastada submetida a uma carga axial de compressão. Sua menor carga crítica de flambagem é dada por $P_{cr} = -4\pi^2 EI / L^2$.

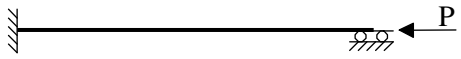

Figura 7. Viga biengastada submetida a uma carga axial de compressão.

As condições de contorno desta coluna são deslocamento e rotação nulos nas extremidades:

$$v(0) = 0,\ \theta(0) = 0,\ v(L) = 0,\ \theta(L) = 0 \tag{28}$$

Aplicando-se as condições de contorno dadas pela Eq. (28), chega-se a um sistema de equações cuja condição de determinante nulo (indeterminado) leva a:

$$2\left(1+\beta\mu^2\right)\left[1-\cos(\mu L)\right]-\mu L\sin(\mu L)=0 \tag{29}$$

Pode-se reescrever a Eq. (29) para cada forma da teoria de vigas de Timoshenko para uma melhor representação. No caso da forma clássica:

$$2\left(1+\Omega\mu^2 L^2\right)\left[1-\cos(\mu L)\right]-\mu L\sin(\mu L)=0 \tag{30}$$

No caso da forma alternativa, após algumas simplificações:

$$2\left(1-\eta\right)\left[1-\cos(\mu L)\right]-\mu L\sin(\mu L)=0 \tag{31}$$

A Eq. (31) não é de fácil solução, pois o parâmetro η é também dependente de μ. Desenvolvendo-se a relação entre μ e *P* para a forma alternativa, pode-se chegar a uma expressão para η que torna o problema dependente apenas da variável μ.

$$P=\frac{\chi GA}{2}\left(1-\sqrt{1+4\Omega\mu^2L^2}\right)\rightarrow\eta=\frac{P}{\chi GA}=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1+4\Omega\mu^2L^2}\right) \tag{32}$$

Substituindo o valor de η da Eq. (32) na Eq. (31), chega-se a :

$$\left(1+\sqrt{1+4\Omega\mu^2L^2}\right)\left[1-\cos(\mu L)\right]-\mu L\sin(\mu L)=0 \tag{33}$$

O menor valor não nulo de μ que satisfaz tanto a Eq. (30) quanto a Eq. (33) é dado por $\mu=2\pi/L$. Substituindo na expressão para a equação diferencial da forma clássica da teoria de vigas de Timoshenko, chega-se a:

$$\begin{gathered}\mu=\sqrt{-\frac{P_{cr}}{(1+\eta)EI}}=\frac{2\pi}{L}\rightarrow P_{cr}=-\frac{4\pi^2(1+\eta)EI}{L^2}=-\frac{4\pi^2\left(1+\frac{P_{cr}}{\chi GA}\right)EI}{L^2}\\ P_{cr}=-\frac{4\pi^2EI}{L^2\left(1+4\Omega\pi^2\right)},\quad \Omega=\frac{EI}{\chi GA\,L^2}\end{gathered} \tag{34}$$

Substituindo $\mu=2\pi/L$ na expressão para a equação diferencial da forma alternativa da teoria de vigas de Timoshenko, chega-se a:

$$\begin{gathered}\mu=\sqrt{-\frac{(1-\eta)P_{cr}}{EI}}=\frac{2\pi}{L}\rightarrow P_{cr}=-\frac{4\pi^2EI}{(1-\eta)L^2}=-\frac{4\pi^2EI}{\left(1-\frac{P_{cr}}{\chi GA}\right)L^2}\\ P_{cr}=\frac{\chi GA}{2}\left(1-\sqrt{1+16\pi^2\Omega}\right),\quad \Omega=\frac{EI}{\chi GA\,L^2}\end{gathered} \tag{35}$$

Reescrevendo os resultados para as duas cargas críticas em forma adimensional, pode-se obter uma relação com o valor analítico de forma a poder comparar os resultados.

$$\begin{gathered}-\frac{P_{cr,c}L^2}{4\pi^2EI}=\frac{P_{cr,c}}{P_{cr,0}}=\frac{1}{\left(1+4\Omega\pi^2\right)}\\ -\frac{P_{cr,a}L^2}{4\pi^2EI}=\frac{P_{cr,a}}{P_{cr,0}}=\frac{1}{8\pi^2\Omega}\left(\sqrt{1+16\pi^2\Omega}-1\right)\end{gathered} \tag{36}$$

onde:

$P_{cr,c}$ é a carga crítica utilizando a forma clássica

$P_{cr,a}$ é a carga crítica utilizando a forma alternativa

$P_{cr,0}$ é a carga crítica da coluna biengastada, $P_{cr,0}=-4\pi^2EI/L^2$

No gráfico da Fig. 8 é mostrada a comparação entre as duas cargas críticas para valores usuais de Ω. Nota-se que a consideração do cisalhamento influencia de forma mais acentuada na coluna biengastada do que na biapoiada.

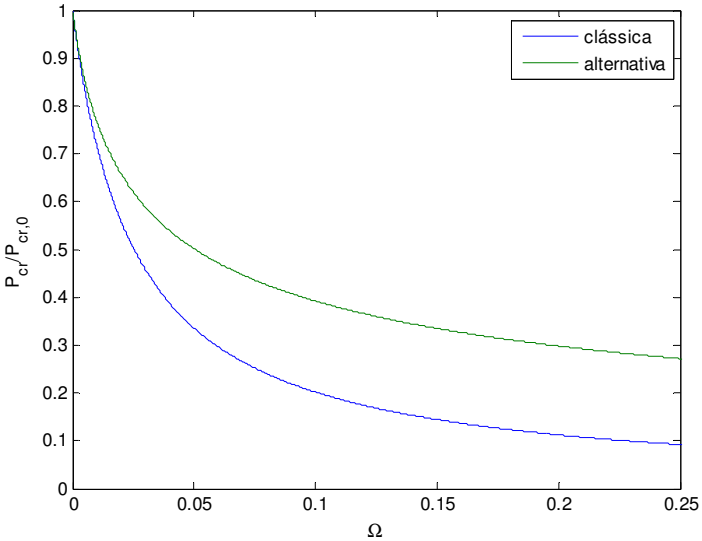

Figura 8. Carga crítica para a coluna biengastada em função do parâmetro $\Omega = EI/\chi GA\,L^2$.

4.3. Pórtico de Roorda

A Fig. 9 mostra o pórtico de Roorda submetido a dois tipos de carregamento: carga axial de compressão apenas na barra vertical e cargas axiais de compressão em ambas as barras. Para o primeiro caso, a menor carga crítica de flambagem é dada por $P_{cr} = -1.406\pi^2 EI/L^2$ e, para o segundo, $P_{cr} = -\pi^2 EI/L^2$ (Bazant and Cedolin 1991; Silvestre and Camotim 2005).

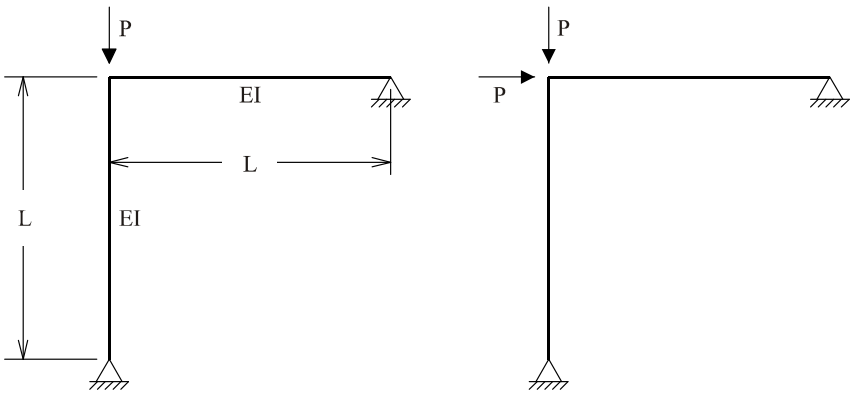

Figura 9. Pórtico de Roorda com dois tipos de carregamento.

4.3.1. Uma carga axial de compressão

No caso do primeiro carregamento, aplicando-se as condições de contorno e de compatibilidade entre as barras, chega-se à seguinte equação para que o sistema tenha solução não trivial:

$$\left[3\left(1+\beta\mu^2\right)+\mu^2\left(L^2+3\beta\right)\right]\sin\left(\mu L\right)-3\mu L\cos\left(\mu L\right)=0 \qquad (37)$$

Pode-se reescrever a Eq. (37) para cada forma da teoria de vigas de Timoshenko para uma melhor representação. No caso da forma clássica:

$$\left[3+\left(1+6\Omega\right)\mu^2L^2\right]\sin\left(\mu L\right)-3\mu L\cos\left(\mu L\right)=0 \tag{38}$$

No caso da forma alternativa:

$$\begin{gathered}\left[3\left(1-2\eta\right)+\mu^2L^2\right]\sin\left(\mu L\right)-3\mu L\cos\left(\mu L\right)=0\\ \downarrow\\ \left(3\sqrt{1+4\Omega\mu^2L^2}+\mu^2L^2\right)\sin\left(\mu L\right)-3\mu L\cos\left(\mu L\right)=0\end{gathered} \tag{39}$$

A solução em termos do parâmetro μ para as Eqs. (38) e (39) é obtida numericamente. No gráfico da Fig. 10 é mostrada a comparação entre as duas cargas críticas para valores usuais de Ω.

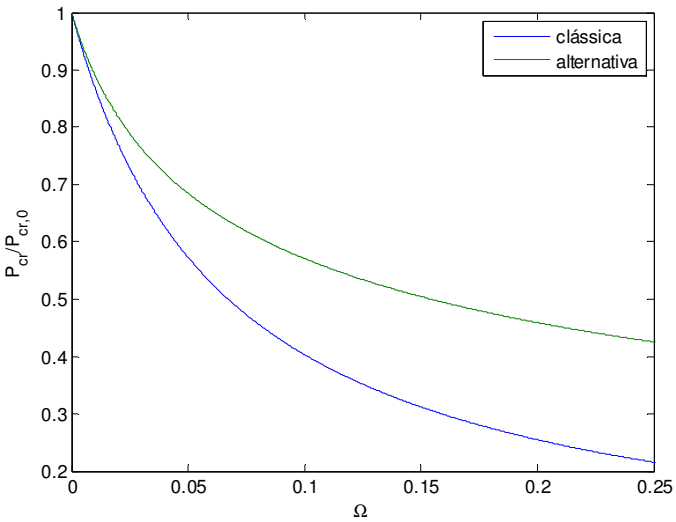

Figura 10. Carga crítica para o pórtico de Roorda em função do parâmetro $\Omega = EI/\chi GA\,L^2$.

4.3.2. Duas cargas axiais de compressão

No caso do primeiro carregamento, aplicando-se as condições de contorno e de compatibilidade entre as barras, chega-se às seguintes equações para que o sistema tenha solução não trivial utilizando a forma clássica da teoria de vigas de Timoshenko:

$$\begin{gathered}\left(1+\Omega\mu^2L^2\right)\sin\left(\mu L\right)-\mu L\cos\left(\mu L\right)=0\\ \sin\left(\mu L\right)=0\end{gathered} \tag{40}$$

No caso da forma alternativa, as equações ficam:

$$\begin{gathered}\left(1+\sqrt{1+4\Omega\mu^2L^2}\right)\sin\left(\mu L\right)-2\mu L\cos\left(\mu L\right)=0\\ \sin\left(\mu L\right)=0\end{gathered} \tag{41}$$

O menor valor não nulo de μ que satisfaz tanto as condições da Eq. (40) quanto as da Eq. (41) é dado por $\mu = \pi / L$. A menor solução da primeira condição tende assintoticamente para o valor da segunda condição, portanto para certos valores de Ω pode haver a superposição de modos de flambagem para uma mesma carga crítica. O gráfico da Fig. 11 ilustra a variação do parâmetro μL em função de Ω. Nota-se que para valores altos de Ω (o que não é comum), as soluções para a primeira e a segunda condições se aproximam, tendendo ao valor $\mu L = \pi$.

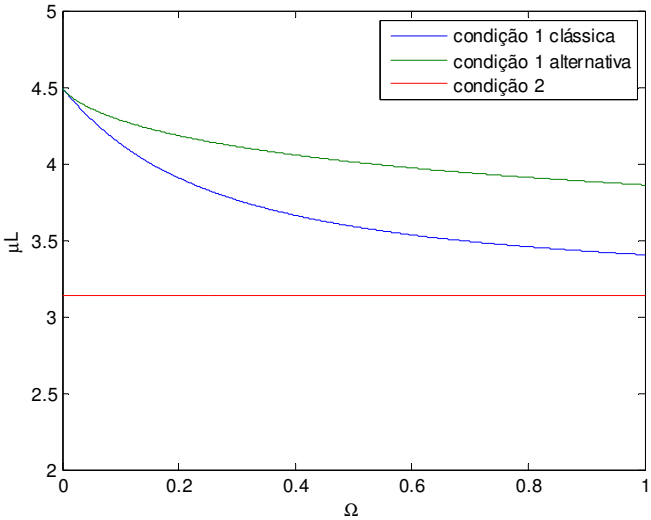

Figura 11. Variação das soluções para o parâmetro μL em função de Ω.

No caso da solução dada ($\mu = \pi / L$), vale o que foi exposto para a coluna de Euler, ou seja, as duas barras se comportam como colunas biapoiadas e as cargas críticas são dadas pela Eq. (27).

CONCLUSÕES

Normas de projeto de estruturas recentes prevêem a consideração de efeitos de não-linearidade geométrica na análise de estruturas. Em análise de pórticos, esses efeitos são geralmente considerados através de uma análise de estabilidade ou de segunda ordem. Além disso, programas de análise de estruturas modernos levam em consideração, além das deformações axiais e de flexão nos elementos estruturais, distorções por cisalhamento (teoria de vigas de Timoshenko), embora estas distorções nos casos usuais de barras esbeltas sejam pequenas.

A análise de estabilidade de colunas delgadas considerando efeitos de segunda ordem é um problema bastante conhecido, com soluções analíticas disponíveis, e a análise de segunda ordem para pórticos com colunas esbeltas tem sido estudada por inúmeros engenheiros e pesquisadores dada sua importância no projeto de estruturas.

Por outro lado, a análise de estabilidade de estruturas com efeitos de segunda ordem considerando distorções por cisalhamento tem poucas soluções disponíveis na literatura (Onu 2008; Areiza-Hurtado *et al.* 2005), pois geralmente é considerado que o efeito de cisalhamento não é importante para vigas-colunas delgadas. Entretanto, existem situações em que, mesmo com uma relação comprimento *vs.* altura de uma barra relativamente pequena, a combinação de efeitos de segunda ordem com distorção por cisalhamento pode ser importante. No mínimo, os efeitos dessa combinação devem ser investigados. Este foi justamente o objetivo deste artigo.

O artigo discutiu a influência de duas alternativas de interpretação da teoria de vigas de Timoshenko para considerar deformações por cisalhamento em vigas submetidas ao efeito axial de compressão em uma análise de segunda ordem. A alternativa clássica interpreta a distorção por

cisalhamento como uma rotação adicional da seção transversal e a teoria menos usual (também apresentada por Timoshenko) considera deformação por cisalhamento como uma distorção cisalhante do elemento infinitesimal de viga.

Além disso, foi mostrado que a alternativa clássica da teoria de Timoshenko apresenta uma inconsistência na relação de compatibilidade para deformações axiais. Essa inconsistência não aparece para vigas com esforço cortante e distorção por cisalhamento constantes.

Os resultados mostram que, quando uma viga está submetida a uma carga axial, essa diferença na consideração da distorção por cisalhamento acarreta em valores completamente diferentes de cargas críticas. O pórtico de Roorda também foi analisado com efeitos de segunda ordem considerando uma carga de compressão e duas cargas de compressão, levando a resultados bastante diferentes para as duas formulações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Areiza-Hurtado, M., Vega-Posada, C. and Aristizábal-Ochoa, D. (2005). Second-order stiffness matrix and loading vector of a beam-column with semi rigid connections on an elastic foundation. Journal of Engineering Mechanics, v. 131, n. 7, p. 752-762.

Bazant, Z. P. and Cedolin, L. (1991). Stability of structures. Dover Pub., New York, USA.

Boresi, A.P., Chong, K. and Lee, J.D. (2010). Elasticity in Engineering Mechanics. Wiley.

Onu, G. (2008). Finite elements on generalized elastic foundation in Timoshenko beam theory. Journal of Engineering Mechanics, v. 134, n. 9, p. 763-776.

Reddy, J. N. (1997). On locking-free shear deformable beam finite elements. Computer methods in applied mechanics and engineering, v. 149, p. 113-132.

Reddy, J. N., Wang, C. M. and Lee, K. H. (1997). Relationships between bending solutions of classical and shear deformation beam theories. International Journal of Solids and Structures, v. 34, n. 26, p. 3373-3384.

Silvestre, N., Camotim, D. (2005). An asymptotic-numerical method to analyze the post-buckling behavior, imperfection sensitivity and mode interaction in frames. Journal of Engineering Mechanics, v. 131, n. 6, p. 617-632.

Timoshenko, S. P. (1921). On the correction factor for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section. Philosophical Magazine, p. 744.

Timoshenko, S. P., Gere, J. M. (1961). Theory of Elastic Stability. McGraw Hill, New York, USA.