Anais do 57º Congresso Brasileiro do Concreto
CBC2015
Outubro / 2015

@ 2015 - IBRACON - ISSN 2175-8182

Possíveis Inconsistências na Consideração da Distorção por Cisalhamento numa Viga Submetida a Carregamento Axial

Possible Inconsistencies when Considering Shear Deformation In Axially Loaded Beams

Luiz Fernando C. R. Martha (1); Rodrigo B. Burgos (2)

(1) PhD, Professor do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ, Brasil
(2) D.Sc., Professor do Departamento de Estruturas e Fundações da UERJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
lfm@tecgraf.puc-rio.br; rburgos@ig.com.br

Resumo

O problema da viga submetida a carregamento axial tem sido objeto de estudo de diversos pesquisadores desde que Euler deduziu uma expressão para a carga de bifurcação de uma coluna simplesmente apoiada. O modelo de Euler-Bernoulli para vigas desconsidera distorções por cisalhamento e, como consequência, supõe que a derivada do deslocamento transversal seja igual à rotação da seção transversal. Quando o modelo de Timoshenko para uma viga é aplicado, considera-se normalmente a distorção por cisalhamento como uma rotação adicional, sendo esta incorporada ao problema, que, dessa forma, leva em conta a rotação da seção transversal e o deslocamento transversal como variáveis independentes. Entretanto, textos de Timoshenko e Gere apontam para uma maneira alternativa de se considerar a distorção por cisalhamento, porém na literatura esse fato tem sido pouco estudado. Em situações usuais, a forma alternativa não leva a grandes diferenças nos resultados, embora haja casos específicos em que se verificam discrepâncias. Além disso, quando não há carga axial as duas formulações levam aos mesmos resultados. O objetivo deste artigo é discutir, no contexto de uma análise de segunda ordem (efeito P-Δ), as diferenças e inconsistências entre as duas alternativas para considerar a distorção por cisalhamento. São utilizados exemplos numéricos de vigas-coluna com diferentes condições de contorno, tanto para o cálculo de cargas críticas quanto de efeitos de segunda ordem.
Palavra-Chave: Teoria de Timoshenko, Carga crítica, Cisalhamento, Análise de segunda ordem

Abstract

Buckling of beam-columns has been studied by many researchers since Euler derived an analytical expression for the limit bifurcation load of an axially loaded simply supported beam. The mathematical model of Euler-Bernoulli for beams neglects shear deformation and, as a consequence, assumes that the derivative of transversal displacements is equal to the rotation of the beam's cross-section. In Timoshenko's beam theory, shear deformation is usually considered as an additional cross-section rotation. Nonetheless, original texts of Timoshenko and Gere had already pointed out an alternative manner of considering shear deformation, although the great majority of literature articles neglect this fact. For usual situations, the alternative model does not lead to big differences in the results, although in some specific cases some discrepancies may be observed. Besides, when the beam is not axially loaded, both formulations provide the same results. The objective of this paper is to discuss, in the context of a second-order analysis, the differences in results considering the two alternatives for shear deformation. This is done using some numerical examples of known models, such as beam-columns with various end conditions, for which critical loads and second order effects are obtained.
Keywords: Timoshenko beam theory, Critical load, Shear, Second order analysis

@ 2015 - IBRACON - ISSN 2175-8182

1 Introdução

O modelo clássico da teoria de vigas de Timoshenko considera a distorção por cisalhamento como uma rotação adicional da seção transversal (Timoshenko, 1921), resultando em uma formulação que leva em conta a rotação da seção transversal e o deslocamento transversal como variáveis independentes.
Entretanto, Timoshenko and Gere (1961) apresentam uma alternativa (não usualmente adotada) à formulação tradicional para considerar a deformação por cisalhamento, que a interpreta não como uma rotação adicional da seção transversal, mas como uma distorção cisalhante do elemento infinitesimal de viga.
Para uma análise de primeira ordem, em que a flexão da viga não é influenciada pela carga axial, as duas alternativas para a interpretação da distorção por cisalhamento resultam em formulações absolutamente iguais. Entretanto, será mostrado que a alternativa clássica apresenta uma inconsistência na relação de compatibilidade para deformações axiais. Além disso, quando são considerados efeitos de segunda ordem, existem discrepâncias na formulação matemática do problema, e consequentemente nos resultados.
O objetivo deste trabalho é discutir, no contexto de uma análise de segunda ordem (não linearidade geométrica), as diferenças de resultados entre a forma clássica de considerar a distorção por cisalhamento (rotação adicional) e a forma alternativa (distorção cisalhante do elemento infinitesimal de viga). O artigo descreve a análise de uma viga submetida a uma carga axial de compressão, com diferentes condições de contorno, em que essa diferença na consideração da distorção por cisalhamento leva a valores completamente diferentes de cargas críticas. Outro exemplo analisado é o conhecido pórtico de Roorda.

1.1 Equações Diferenciais

Na figura 1 mostra-se a configuração deformada do elemento infinitesimal de uma viga submetida a um carregamento transversal distribuído *q* e uma carga axial constante *P*.

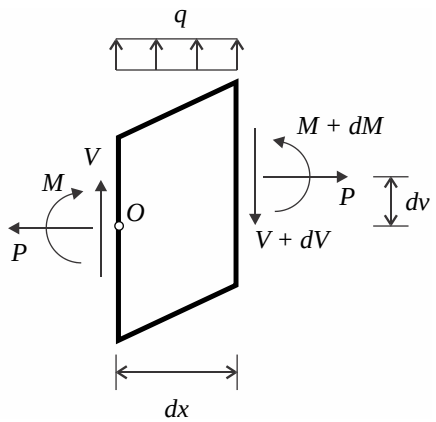

Figura 1 - Equilíbrio de um elemento de viga deformado.

Levando em conta as forças apresentadas, a imposição do equilíbrio leva às seguintes expressões:

$$-dV + q(x)dx = 0 \rightarrow \frac{dV(x)}{dx} = q(x) \qquad \text{(Equação 1)}$$

$$dM - (V + dV)dx - Pdv + q(x)\frac{dx^2}{2} = 0 \rightarrow \frac{dM(x)}{dx} = V(x) + P\frac{dv(x)}{dx} \qquad \text{(Equação 2)}$$

onde:
v(*x*) = deslocamento transversal
q(*x*) = carga transversal distribuída
V(*x*) = componente vertical do esforço na seção transversal
P = componente horizontal do esforço na seção transversal
M(*x*) = momento fletor na seção transversal

Considerando a relação entre momento fletor e a curvatura $M(x) = EI\, d\theta/dx$, obtém-se:

$$EI \cdot \frac{d^3\theta(x)}{dx^3} - \frac{dV(x)}{dx} - P \cdot \frac{d^2v(x)}{dx^2} = 0 \qquad \text{(Equação 3)}$$

onde:
EI = rigidez à flexão da viga
θ(*x*) = rotação da seção transversal

Substituindo a expressão para a derivada do esforço transversal $q(x) = dV/dx$, tem-se:

$$EI \cdot \frac{d^3\theta(x)}{dx^3} - P \cdot \frac{d^2v(x)}{dx^2} = q(x) \qquad \text{(Equação 4)}$$

1.1.1 Teoria de vigas de Navier

No caso da teoria de vigas de Navier (Euler-Bernoulli), a rotação pode ser escrita como a derivada do deslocamento transversal $(\theta = dv/dx)$, resultando em:

$$\frac{d^4v(x)}{dx^4} - \frac{P}{EI} \cdot \frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{q(x)}{EI} \qquad \text{(Equação 5)}$$

A equação diferencial acima representa a formulação de Euler-Bernoulli considerando uma carga axial constante, desprezando deformações por cisalhamento. Sua solução resulta no deslocamento transversal *v*(*x*) e a rotação é obtida por $\theta(x) = dv/dx$.

1.1.2 Forma clássica da teoria de Timoshenko

No caso da teoria clássica de vigas de Timoshenko, a rotação não fica mais associada à derivada do deslocamento transversal, conforme ilustrado na figura 2.

Esta nova hipótese modifica as equações diferenciais mostradas anteriormente, pois se torna necessário incluir o termo associado à distorção por cisalhamento provocada pelo esforço cortante (note que o sinal negativo vem das diferentes convenções de sinais entre o esforço cortante e a tensão de cisalhamento):

$$\gamma(x) = \frac{dv(x)}{dx} - \theta(x)$$
$$Q(x) = -\chi GA \cdot \gamma(x) = \chi GA \cdot \left(\theta(x) - \frac{dv(x)}{dx} \right) \qquad \text{(Equação 6)}$$

onde:
G = módulo de cisalhamento do material
A = área da seção transversal
χ = fator que define a área efetiva para cisalhamento da seção transversal
Q(*x*) = esforço cortante
γ(x) = distorção por cisalhamento

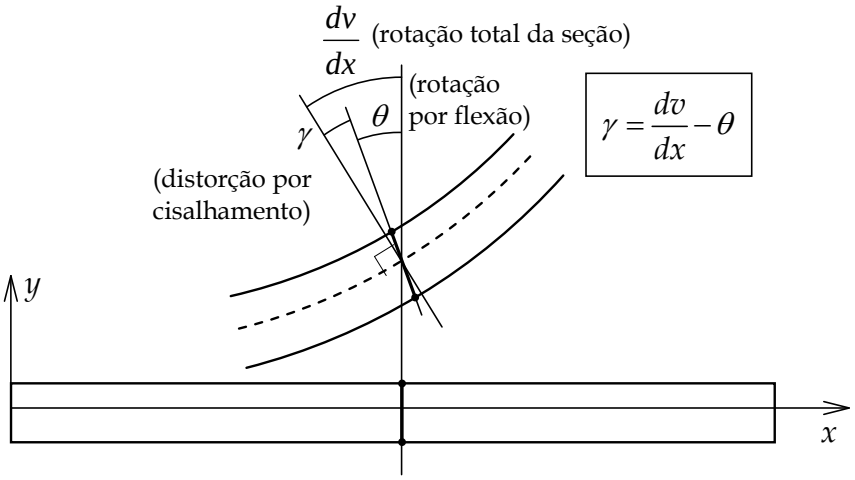

Figura 2 - Consideração do cisalhamento na viga de Timoshenko.

A teoria clássica de vigas de Timoshenko considera a distorção por cisalhamento como uma rotação adicional da seção transversal (Reddy et al., 1997), conforme mostra a figura 3. Nota-se que a projeção dos esforços é obtida usando a rotação total da seção e não apenas a rotação por flexão θ. Tal consideração leva às seguintes expressões para os esforços seccionais:

$$N(x) = P - V(x)(\theta + \gamma) = P - V(x)\frac{dv(x)}{dx}$$
$$Q(x) = P(\theta + \gamma) + V(x) = P\frac{dv(x)}{dx} + V(x) \qquad \text{(Equação 7)}$$

@ 2015 - IBRACON - ISSN 2175-8182

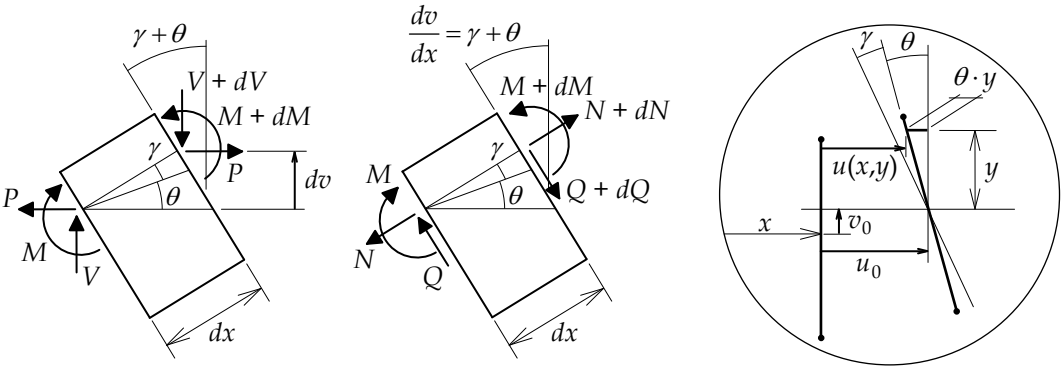

Figura 3 - Esforços e deslocamentos na forma clássica da viga de Timoshenko.

É interessante notar que a hipótese da Teoria da Elasticidade clássica supõe que o deslocamento axial (e, consequentemente, a deformação axial) depende apenas da rotação por flexão (Boresi et al., 2010):

$$u(x,y) = u_0(x) - y\theta(x)$$
$$\varepsilon_x = \frac{du_0(x)}{dx} - y\frac{d\theta(x)}{dx} \qquad \text{(Equação 8)}$$

Entretanto, ao observar a deformação da seção transversal na figura 3, nota-se que o mais correto seria expressar o deslocamento axial como dependente tanto da rotação por flexão quanto da distorção por cisalhamento:

$$u(x,y) = u_0(x) - y\left[\theta(x) + \gamma(x)\right]$$
$$\varepsilon_x = \frac{du_0(x)}{dx} - y\left[\frac{d\theta(x)}{dx} + \frac{d\gamma(x)}{dx}\right] \qquad \text{(Equação 9)}$$

A princípio, essa diferença entre as expressões revela uma possível incoerência na formulação tradicional de Timoshenko. A hipótese de que a distorção por cisalhamento é constante ao longo do eixo da viga resolve tal incoerência.
Outra constatação importante é obtida com a substituição da expressão para o esforço cortante das expressões anteriores, corroborando a consagrada relação diferencial entre o momento fletor e o esforço cortante:

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) \qquad \text{(Equação 10)}$$

Igualando as expressões para o esforço cortante $Q(x)$ nas equações acima, obtêm-se uma expressão para a derivada do deslocamento transversal:

@ 2015 - IBRACON - ISSN 2175-8182

$$\frac{dM(x)}{dx} = \chi GA \cdot \left(\theta(x) - \frac{dv(x)}{dx} \right)$$
$$\frac{dv(x)}{dx} = \theta(x) - \frac{EI}{\chi GA} \frac{d^2\theta(x)}{dx^2} \qquad \text{(Equação 11)}$$

Substituindo a expressão de (11) em (4), tem-se:

$$EI\left(1 + \frac{P}{\chi GA}\right)\frac{d^3\theta(x)}{dx^3} - P\frac{d\theta(x)}{dx} = q(x) \qquad \text{(Equação 12)}$$

1.1.3 Forma alternativa da teoria de Timoshenko

Timoshenko e Gere (1961) apresentam uma alternativa (não usualmente adotada) à formulação tradicional para considerar a deformação por cisalhamento, que a interpreta não como uma rotação adicional da seção transversal, mas como uma distorção do elemento infinitesimal de viga, conforme mostra a figura 4. Observa-se que, com essa interpretação, a decomposição dos esforços seccionais é feita utilizando apenas a rotação por flexão:

$$N(x) = P - V(x)\theta(x)$$
$$Q(x) = P\theta(x) + V(x) \qquad \text{(Equação 13)}$$

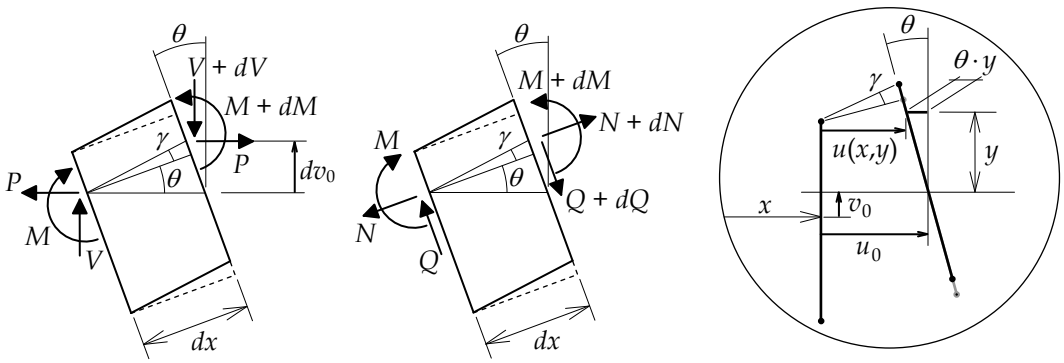

Figura 4 - Esforços e deslocamentos na forma alternativa da viga de Timoshenko.

Nota-se que a hipótese mostrada na figura 4 é coerente com a expressão clássica da Teoria da Elasticidade para o deslocamento axial. Substituindo a expressão para o esforço cortante, chega-se a uma nova relação diferencial:

@ 2015 - IBRACON - ISSN 2175-8182

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) + P\left[\frac{dv(x)}{dx} - \theta(x)\right]$$
$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) + P\gamma(x) = Q(x)\left(1 - \frac{P}{\chi GA}\right) \qquad \text{(Equação 14)}$$

Igualando as expressões para o esforço cortante $Q(x)$, obtém-se:

$$\frac{dM(x)}{dx} = (\chi GA - P)\left(\theta(x) - \frac{dv(x)}{dx}\right)$$
$$\frac{dv(x)}{dx} = \theta(x) - \frac{EI}{(\chi GA - P)}\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} \qquad \text{(Equação 15)}$$

Analisando as expressões, fica evidente que a diferença entre as duas considerações da teoria só existe quando há carga axial. Caso contrário, as duas formulações recaem na mesma equação diferencial. Substituindo a expressão (15) em (4), tem-se:

$$\frac{EI}{\left(1 - \frac{P}{\chi GA}\right)}\frac{d^3\theta(x)}{dx^3} - P\frac{d\theta(x)}{dx} = q(x) \qquad \text{(Equação 16)}$$

2 Solução das Equações Diferenciais

Tanto a forma clássica quanto a alternativa da equação diferencial da viga de Timoshenko submetida a carga axial apresentam o mesmo padrão de solução. Quando a carga axial é de compressão, tradicionalmente utiliza-se a solução trigonométrica da equação diferencial pela sua simplicidade. Neste caso, deve-se ter em conta que o sinal da carga axial é negativo, o que altera alguns parâmetros das equações, cuja solução encontra-se a seguir:

$$\frac{d^3\theta(x)}{dx^3} + \lambda^2\frac{d\theta(x)}{dx} = 0$$
$$\theta(x) = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) + C \qquad \text{(Equação 17)}$$
$$v(x) = \frac{(1 + \Omega\lambda^2 L^2)}{\lambda}\left[B\sin(\lambda x) - A\cos(\lambda x)\right] + Cx + D$$

onde:

$\lambda = \mu\sqrt{\frac{1}{1 - \Omega\mu^2 L^2}}$ = parâmetro de carga na forma clássica

$\lambda = \mu\sqrt{(1 + \Omega\mu^2 L^2)}$ = parâmetro de carga na forma alternativa

$\mu = \sqrt{P/EI}$ = parâmetro de carga sem cisalhamento

$\Omega = EI/\chi GAL^2$ = constante levar em conta o cisalhamento (Reddy, 1997)

Caso o objetivo seja a obtenção de cargas críticas, impõem-se as condições de contorno na solução da equação diferencial e encontra-se o menor valor de λ (autovalor) que permite uma solução não trivial associada a uma configuração deformada (autofunção).

3 Exemplos

Buscando dar ênfase aos casos com solução analítica conhecida, primeiramente foram obtidas cargas críticas de flambagem para colunas com duas diferentes condições de contorno: biapoiada (coluna clássica de Euler) e biengastada. Posteriormente, a análise se estendeu ao efeito P-Δ em uma coluna engastada e livre.

3.1 Coluna de Euler (biapoiada)

A figura 5 mostra uma viga-coluna biapoiada submetida a uma carga axial de compressão. Sua menor carga crítica de flambagem é dada por $P_{cr} = \pi^2 EI / L^2$.

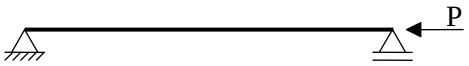

Figura 5 – Coluna de Euler

Aplicando-se as condições de contorno (deslocamento e o momento fletor nulos nas extremidades), chega-se a uma condição para que a solução seja não trivial. Tal condição para o parâmetro de carga independe da forma utilizada (clássica ou alternativa):

$$\sin(\lambda L) = 0 \quad \text{(Equação 18)}$$

O menor valor não nulo de λ que satisfaz a equação é dado por $\lambda = \pi / L$. Substituindo na expressão da forma clássica da teoria de vigas de Timoshenko, chega-se a:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2\left(1+\Omega\pi^2\right)}, \quad \Omega = \frac{EI}{\chi GA\,L^2} \quad \text{(Equação 19)}$$

Substituindo na expressão para a equação diferencial da forma alternativa da teoria de vigas de Timoshenko, chega-se a:

$$P_{cr} = \frac{\chi GA}{2}\left(\sqrt{1+4\pi^2\Omega}-1\right), \quad \Omega = \frac{EI}{\chi GA\,L^2} \quad \text{(Equação 20)}$$

Os resultados encontrados são idênticos aos obtidos por Timoshenko and Gere (1961). Reescrevendo os resultados para as duas cargas críticas em forma adimensional, pode-se obter uma relação com a carga de Euler de forma a poder comparar os resultados:

$$\frac{P_{cr,c}}{P_e} = \frac{1}{\left(1+\Omega\pi^2\right)}$$
$$\frac{P_{cr,a}}{P_e} = \frac{1}{2\pi^2\Omega}\left(\sqrt{1+4\pi^2\Omega}-1\right) \qquad \text{(Equação 21)}$$

onde:

$P_{cr,c}$ é a carga crítica utilizando a forma clássica

$P_{cr,a}$ é a carga crítica utilizando a forma alternativa

P_e é a carga crítica de Euler

No gráfico da figura 6 é mostrada a comparação entre as duas cargas críticas para valores usuais de Ω.

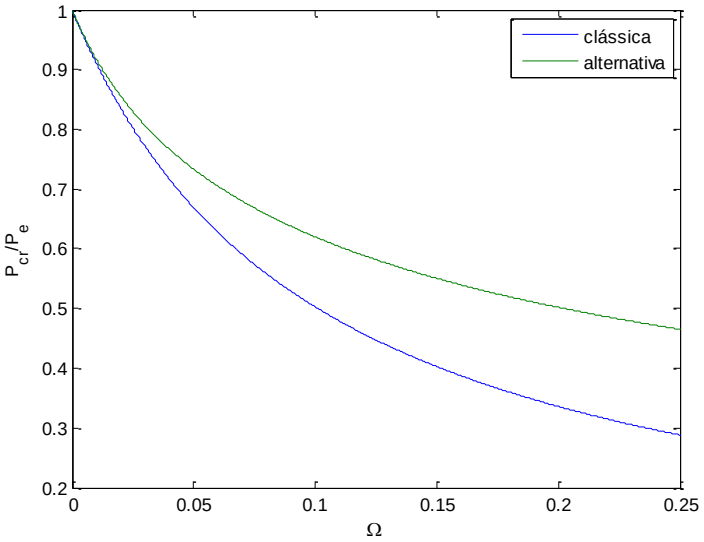

Figura 6 - Carga crítica para a coluna de Euler em função do parâmetro Ω.

3.2 Coluna Biengastada

A figura 7 mostra uma viga-coluna biengastada submetida a uma carga axial de compressão. Sua menor carga crítica de flambagem é dada por $P_{cr} = 4\pi^2 EI / L^2$.

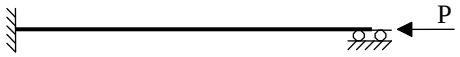

Figura 7 – Coluna biengastada

Aplicando-se as condições de contorno (deslocamento e rotação nulos nas extremidades), chega-se a um sistema de equações cuja condição de determinante nulo (indeterminado) leva, no caso da forma clássica, a:

$$2\left(1+\Omega\lambda^2L^2\right)\left[1-\cos(\lambda L)\right]-\lambda L\sin(\lambda L)=0 \qquad \text{(Equação 22)}$$

No caso da forma alternativa, após algumas simplificações:

$$\left(1+\sqrt{1+4\Omega\lambda^2L^2}\right)\left[1-\cos(\lambda L)\right]-\lambda L\sin(\lambda L)=0 \qquad \text{(Equação 23)}$$

O menor valor não nulo de λ que satisfaz tanto a Eq. (30) quanto a Eq. (33) é dado por $\lambda = 2\pi / L$. Substituindo na expressão para a equação diferencial da forma clássica da teoria de vigas de Timoshenko, chega-se a:

$$P_{cr}=\frac{4\pi^2EI}{L^2\left(1+4\Omega\pi^2\right)},\quad \Omega=\frac{EI}{\chi GA\,L^2} \qquad \text{(Equação 24)}$$

Substituindo na expressão para a equação diferencial da forma alternativa da teoria de vigas de Timoshenko, chega-se a:

$$P_{cr}=\frac{\chi GA}{2}\left(\sqrt{1+16\pi^2\Omega}-1\right),\quad \Omega=\frac{EI}{\chi GA\,L^2} \qquad \text{(Equação 25)}$$

Reescrevendo os resultados para as duas cargas críticas em forma adimensional, pode-se obter uma relação com o valor analítico de forma a poder comparar os resultados.

$$\frac{P_{cr,c}}{P_{cr,0}}=\frac{1}{\left(1+4\Omega\pi^2\right)}$$
$$\frac{P_{cr,a}}{P_{cr,0}}=\frac{1}{8\pi^2\Omega}\left(\sqrt{1+16\pi^2\Omega}-1\right) \qquad \text{(Equação 26)}$$

onde:

$P_{cr,c}$ é a carga crítica utilizando a forma clássica,

$P_{cr,a}$ é a carga crítica utilizando a forma alternativa,

$P_{cr,0}$ é a carga crítica da coluna biengastada.

No gráfico da figura 8 é mostrada a comparação entre as duas cargas críticas para valores usuais de Ω. Nota-se que a consideração do cisalhamento influencia de forma mais acentuada na coluna biengastada do que na biapoiada.

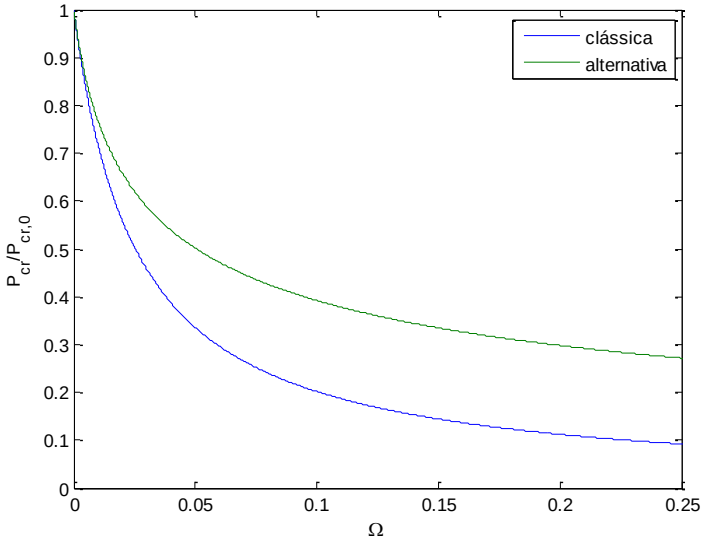

Figura 8 - Carga crítica para a coluna biengastada em função do parâmetro Ω.

3.3 Efeito P-Delta

Uma coluna engastada e livre submetida a uma carga axial *P* e uma carga transversal αP, tem um Fator de Amplificação de Momento (FAM) na base dado por (desconsiderando o cisalhamento):

$$\text{FAM} = \frac{\tan(\mu L)}{\mu L} \qquad \text{(Equação 27)}$$

Para a forma clássica, o fator é dado por:

$$\text{FAM} = \frac{\lambda^2}{\mu^2}\left(1-\Omega\mu^2 L^2\right)\frac{\tan(\lambda L)}{\lambda L} = \frac{\tan(\lambda L)}{\lambda L} \qquad \text{(Equação 28)}$$

No caso da forma alternativa:

$$\text{FAM} = \frac{\tan(\lambda L)}{\lambda L}\left(1+\Omega\mu^2 L^2\right) \qquad \text{(Equação 29)}$$

No gráfico da figura 10 é mostrada a comparação entre as duas cargas críticas (alternativa e clássica) para valores usuais de Ω, utilizando $P = P_{cr}/2$. Nota-se que, desconsiderando o cisalhamento, o fator é dado por *FAM* = 1.8168.

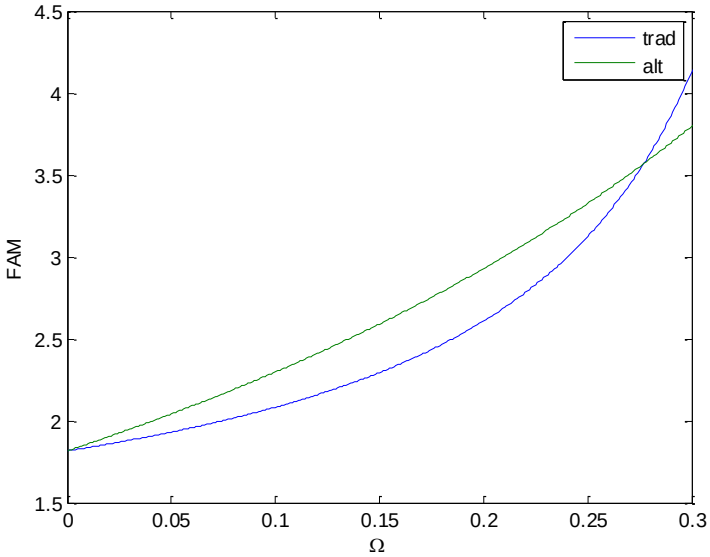

Figura 10 - FAM em função do parâmetro Ω.

4 Conclusões

Normas de projeto de estruturas recentes preveem a consideração de efeitos de não-linearidade geométrica na análise de estruturas. Em análise de pórticos, esses efeitos são geralmente considerados através de uma análise de estabilidade ou de segunda ordem. Além disso, programas de análise de estruturas modernos levam em consideração, além das deformações axiais e de flexão nos elementos estruturais, distorções por cisalhamento (teoria de vigas de Timoshenko), embora estas distorções nos casos usuais de barras esbeltas sejam pequenas.

A análise de estabilidade de colunas delgadas considerando efeitos de segunda ordem é um problema bastante conhecido, com soluções analíticas disponíveis, e a análise de segunda ordem para pórticos com colunas esbeltas tem sido estudada por inúmeros engenheiros e pesquisadores dada sua importância no projeto de estruturas.

Por outro lado, a análise de estabilidade de estruturas com efeitos de segunda ordem considerando distorções por cisalhamento tem poucas soluções disponíveis na literatura (Onu 2008; Areiza-Hurtado et al. 2005), pois geralmente o efeito de cisalhamento não é importante para vigas-colunas delgadas. Entretanto, existem situações em que, mesmo com uma relação comprimento/altura de uma barra relativamente pequena, a combinação de efeitos de segunda ordem com distorção por cisalhamento pode ser importante, merecendo uma maior investigação. Este foi o objetivo deste artigo.

Discutiu-se a influência de duas alternativas de interpretação da teoria de vigas de Timoshenko para considerar deformações por cisalhamento em vigas submetidas ao efeito axial de compressão em uma análise de segunda ordem. A alternativa clássica interpreta a distorção por cisalhamento como uma rotação adicional da seção transversal

e a teoria menos usual (também apresentada por Timoshenko) considera deformação por cisalhamento como uma distorção cisalhante do elemento infinitesimal de viga.
Além disso, foi mostrado que a alternativa clássica da teoria de Timoshenko apresenta uma inconsistência na relação de compatibilidade para deformações axiais. Essa inconsistência não aparece para vigas com esforço cortante e distorção por cisalhamento constantes.
Os resultados mostram que, quando uma viga está submetida a uma carga axial, essa diferença na consideração da distorção por cisalhamento acarreta em valores completamente diferentes de cargas críticas. O efeito P-Δ também foi investigado para uma coluna engastada e livre, levando a resultados bastante diferentes para as duas formulações.

5 Referências

AREIZA-HURTADO, M.; VEGA-POSADA, C.; ARISTIZÁBAL-OCHOA, D.. **Second-order stiffness matrix and loading vector of a beam-column with semi rigid connections on an elastic foundation.** Journal of Engineering Mechanics, v. 131, n. 7, p. 752-762, 2005.

BAZANT, Z. P.; CEDOLIN, L.. **Stability of structures**. Dover Pub., New York, USA, 1991.

BORESI, A.P.; CHONG, K.; LEE, J.D. **Elasticity in Engineering Mechanics**. Wiley, 2001.

ONU, G.. **Finite elements on generalized elastic foundation in Timoshenko beam theory.** Journal of Engineering Mechanics, v. 134, n. 9, p. 763-776, 2008.

REDDY, J. N.. **On locking-free shear deformable beam finite elements.** Computer methods in applied mechanics and engineering, v. 149, p. 113-132, 1997.

REDDY, J. N.; WANG, C. M.; LEE, K. H.. **Relationships between bending solutions of classical and shear deformation beam theories.** International Journal of Solids and Structures, v. 34, n. 26, p. 3373-3384, 1997.

TIMOSHENKO, S. P.. **On the correction factor for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section.** Philosophical Magazine, 1921.

TIMOSHENKO, S. P., GERE, J. M.. **Theory of Elastic Stability.** McGraw Hill, New York, USA, 1961.