DETERMINAÇÃO DE ZONAS PLÁSTICAS USANDO A MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA E O MÉTODO HÍBRIDO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Alexandre Antonio de Oliveira Lopes
Rafael Araujo de Sousa
Luiz Fernando Campo Ramos Martha
Jaime Tupiassú Pinho de Castro
Ney Augusto Dumont
alexol@tecgraf.puc-rio.br
rflsousa@tecgraf.puc-rio.br
lfm@tecgraf.puc-rio.br
jtcastro@puc-rio.br
dumont@puc-rio.br
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil

Abstract. *Neste trabalho propõe-se a utilização do Método Híbrido dos Elementos de Contorno (MHEC) para determinação de Zonas Plásticas (ZP) em estruturas trincadas. Um dos principais objetivos deste artigo é verificar a influência da relação entre a tensão nominal e a tensão de escoamento (SnSe), assim como da geometria e do comportamento do material no tamanho e forma de zonas plásticas. Para validar a formulação do MHEC para a mecânica da fratura, são utilizadas funções de tensão de Westergaard analíticas para o caso de placas finitas e infinitas com trincas perpendiculares ao carregamento. Tradicionalmente, a ZP é determinada através da utilização do Fator de Intensidade de Tensão (FIT), parâmetro introduzido por Irwin a partir da função de tensão complexa de Westergaard. O FIT é o principal parâmetro da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE), que tem aplicabilidade condicionada ao tamanho das zonas plásticas em torno das pontas das trincas. Este trabalho mostra as diferenças no tamanho e forma das zonas plásticas quando se obtém o campo de tensões a partir do FIT ou a partir da formulação do MHEC que utiliza a função de tensão complexa de Westergaard.*

Keywords: *Mecânica da Fratura, Zona plástica, Função de tensão de Westergaard e Método Híbrido dos Elementos de Contorno.*

1 INTRODUÇÃO

A Mecânica da Fratura (MF) é a ciência que permite qualificar e quantificar os efeitos de trincas sobre o comportamento mecânico de componentes estruturais e que teve seu estudo iniciado com Charles Edward Inglis (1913), que mostrou que em uma placa infinita com um furo elíptico o Fator de Concentração de Tensões tende a infinito $(K_t \to \infty)$ quando o raio de ponta tende a zero $(\rho \to 0)$, mas explicou o motivo dessas peças não romperem. Foi então que Alan Arnold Griffith (1920) resolveu o problema da singularidade, evocando um princípio mais fundamental de todos, de tal forma que mesmo que o modelo matemático tenha a presença da singularidade, a propagação da trinca só poderá ocorrer se obedecer à lei da conservação de energia.

A MF pode ser dividida em duas partes: uma denominada Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) e outra, Mecânica da Fratura Elastoplástica (MFEP). A diferença entre as duas consiste no fato que a MFLE só é válida quando apenas uma "pequena" quantidade de material à frente da ponta de trinca (zona plástica) não tem comportamento elástico (Dowling, 1977). Caso contrário, é necessário adotar a MFEP, que tem como parâmetros representativos a integral *J* e a abertura de ponta de trinca (CTOD).

O que separa a aplicação de ambas (MFLE e MFEP) é a proporção entre a quantidade de material elástico e plástico. A porção de material, não linear, plastificada, a frente da trinca, dá-se o nome de zona plástica. Dowling (1999) afirma que é justamente a boa estimativa do tamanho da zona plástica que garante a possibilidade de aplicação da MFLE.

Westergaard (1939), analisando problemas de contato, identificou uma função complexa de tensão (Z_1) para representar o campo de tensões no caso de uma trinca em placa infinita. Os trabalhos de Carothers (1920) e Nádai (1921), de forma independente, expressaram funções harmônicas complexas em termos de funções analíticas. O trabalho de MacGregor (1935) usou outros tipos de funções analíticas como funções de tensão. Rodriguez (2007) chamou essa equação como a solução de Westergaard completa.

Foi então que em 1956 e 1957 Irwin, partindo do trabalho de Westergaard e usando as relações descritas acima, entre o campo de tensões e a função complexa de tensão, apresentou o parâmetro denominado de Fator de Intensidade de Tensão (FIT). Ele foi determinado de forma independente por Williams (1957). Segundo Anderson (1995) este parâmetro caracteriza a severidade da singularidade do campo de tensão em torno da ponta de uma trinca. Quando o FIT ultrapassa o valor crítico do material de uma peça estrutural (K_{IC}) a trinca irá propagar, o que provocará, conseqüentemente, sua ruptura.

Há três tipos de FIT: K_I (Abertura), K_{II} (Cisalhamento) e K_{III} (Rasgamento). As zonas plásticas tradicionais, mostradas em livros textos sobre a MF, usam o campo de tensão determinado pelo FIT.

Eftis e Liebowitz (1972) apresentaram a função de tensão que resolve o caso da placa finita com uma trinca centrada de comprimento "2a" sob carregamento uniaxial uniforme (Z_2).

Após o desenvolvimento do conceito do FIT para o caso da placa infinita e finita, foram realizados muitos experimentos laboratoriais para definir os FIT's para outras geometrias e carregamentos. Outro enfoque, mais econômico, para determinar os FIT's é uso de métodos numéricos, dentre eles, destacam-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

Lopes (2002) usando o método híbrido de elementos de contorno determina o fator de intensidade de tensão para vários problemas planos diferentes. Na formulação desenvolvida neste trabalho, utilliza-se a solução de Westergaard como solução fundamental.

Rodriguez (2007), estudando apenas o caso da placa infinita, mostra que as zonas plásticas apresentadas na literatura que dependem unicamente do FIT estão subavaliadas, pois não avaliam corretamente a influência da relação entre a tensão nominal e a tensão de escoamento $(SnSe)$. Para tanto ele usou a solução de Williams, Westergaard e Inglis. Sendo que neste último caso, Rodriguez relaciona o raio da ponta da trinca (ρ) com o CTOD.

Neste trabalho, partindo do trabalho de Rodriguez, avaliam-se os efeitos da relação *SnSe*, da relação entre o tamanho da trinca e do comprimento da placa (a/W) no tamanho e forma das zonas plásticas. Além disso, este trabalho mostra a aplicação do Método Híbrido dos Elementos de Contorno MHEC para a determinação destas zonas plásticas.

2 FORMULAÇÕES DE ZONAS PLÁSTICAS NA MFLE

Irwin e Williams, ao determinarem o FIT para o caso da placa infinita com uma trinca de comprimento "2a", possibilitaram a determinação do campo de tensões, Eq. (1), para o modo I (abertura) em peças com material linear-elástico, isotrópico e homogêneo.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{Bmatrix} 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{Bmatrix} \tag{1}$$

Irwin chegou a essas equações partindo das seguintes relações complexas:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathrm{Re}(Z(z)) - y\,\mathrm{Im}(Z'(z)) \\ \mathrm{Re}(Z(z)) + y\,\mathrm{Im}(Z'(z)) \\ -y\,\mathrm{Re}(Z'(z)) \end{Bmatrix}, \tag{2}$$

sendo $Z(z)$ uma função analítica e z um número complexo ($z = x + iy$).

A Eq. (1) representa apenas o primeiro termo da decomposição em série da Eq. (2), e só é válida em uma pequena zona à frente da ponta da trinca. Para que a MFLE seja válida é necessário que a zona plástica seja pequena, cuja definição para tamanho característico é subjetiva. Assim, vários ensaios de fraturamento em corpos de prova (CP's), com diversas geometrias e dimensões, resultaram no desenvolvimento da norma ASTM E399 que trata de ensaios de tenacidade.

A tenacidade é chamada de K_{IC} para valores de $K_C(t)$ com espessuras t acima da espessura mínima (t_{min}) prescrita pela ASTM E399). A propagação de uma trinca pode ser prevista para $K_I = K_{IC}$ se a zona plástica for pequena em relação às dimensões da peça. Outro ponto importante é a dependência de K_{IC} com relação à espessura (t) da peça. Para peças muito delgadas, K_{IC} não poderia ser considerado uma propriedade mecânica, pois passa a depender do valor de t. A Fig. 1 mostra o comportamento de $K_C(t)$ e K_{IC} para uma liga de titânio (Ti) (Castro e Meggiolaro, 2002). Observa-se que $K_C(t)$ tende a crescer à medida que t diminui em relação à t_{min}.

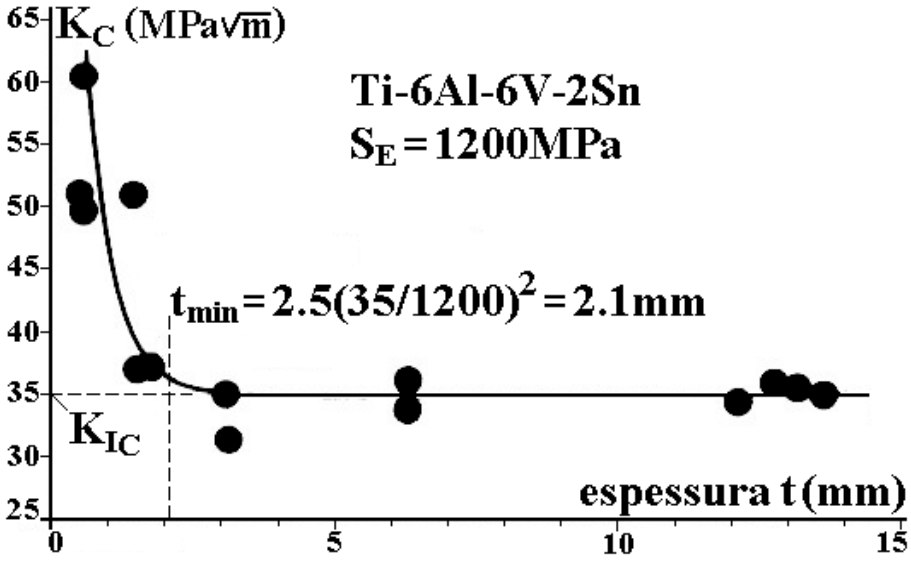


Figura 1 – Variação de K_C com a espessura *t* (Castro e Meggiolaro, 2002).

A norma ASTM E399 prescreve para espessura mínima $t_{min} = 2{,}5(K_{IC}/S_E)^2$. Assim, pode-se avaliar o que seria uma zona plástica pequena (crítica), (zp_c), que validaria a MFLE.

$$zp_c \approx \frac{t}{6} \tag{3}$$

As considerações anteriores mostram a importância da medição correta do tamanho e forma das zonas plásticas para a utilização da MFLE.

2.1 Estimativas clássicas do tamanho e forma das zonas plásticas

Expressando o campo de tensões em coordenadas polares, o tamanho da zona plástica pode ser avaliado, como primeira aproximação, pelo valor do raio (r) para $\theta = 0$ onde a componente de tensão normal na direção vertical (σ_{yy}) se iguala à tensão de escoamento do material (S_E). Dessa forma, tem-se:

$$\sigma_{yy}(r = Zp0, \theta = 0) = S_E \Rightarrow Zp0 = \frac{K_I^{\,2}}{2\pi S_E^{\,2}} \tag{4}$$

Assim, em uma primeira aproximação ($Zp0$), pode-se associar uma forma circular à zona plástica, conforme mostra a Fig. 2.

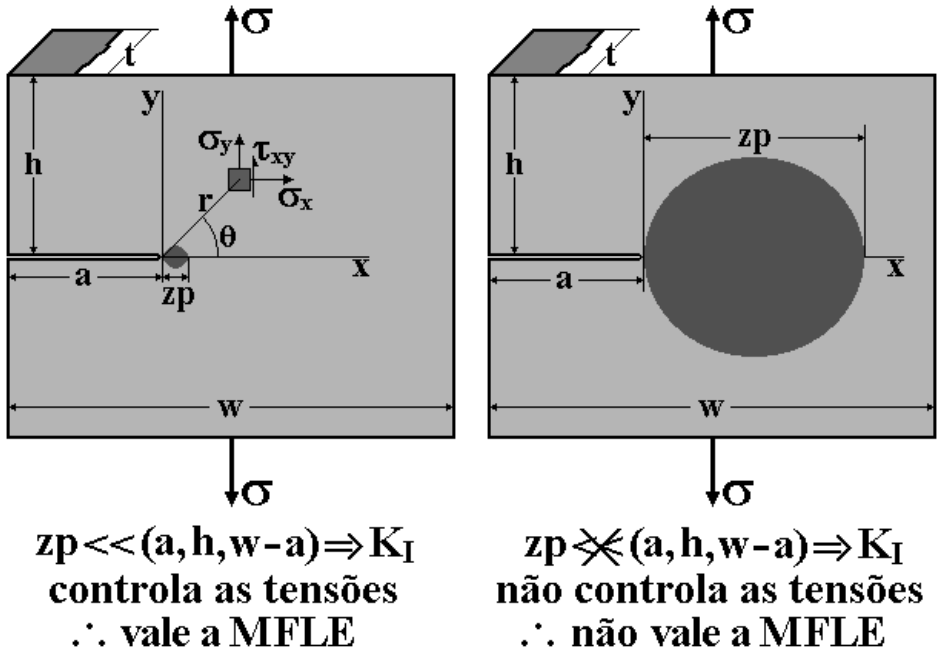


Figura 2 - Zonas plásticas circulares de "grandes" e "pequenos" tamanhos que validam ou não a MFLE (Castro e Meggiolaro, 2002).

A Eq. (4) mostra a relação entre a zona plástica e o FIT, que para o caso da placa infinita tracionada é $\left(K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\right)$.

Usando um critério de escoamento, por exemplo, Mises ou Tresca, pode-se obter zonas plásticas em função do raio $zp(r)$, fixando o valor de θ, ou seja, será obtido um valor de r para cada valor de θ.

Em seguida são apresentados todos os cálculos necessários para avaliar a fronteira elastoplástica variando o ângulo θ. Para facilitar o entendimento, o sistema polar de coordenadas é utilizado.

A função complexa de tensão varia com o ângulo θ, o raio r, e a tensão nominal σ_n. Dessa forma, é possível escrever, através do critério de escoamento, as tensões de Mises correspondentes aos estados planos de deformação e de tensão.

Quando a tensão de Mises for igual à tensão de escoamento, pode-se evidenciar a presença da relação entre tensão nominal e a tensão de escoamento.

$$Zp_{West} = \frac{\sigma_n}{S_E}\sigma_{Mises}(r,\theta) - 1 \tag{5}$$

As raízes dessa equação, para cada valor de θ, representam as zonas plásticas em coordenadas polares.

2.2 Correção da zona plástica para garantir equilíbrio

A determinação de zonas plásticas usando o processo descrito anteriormente não trata adequadamente a singularidade intrínseca do modelo matemático, já que as tensões em regiões próximas às pontas da trinca tendem para valores infinitos, não considerando que os materiais dúcteis escoam e os frágeis rompem. Como neste trabalho só são analisadas zonas plásticas para materiais dúcteis, as tensões que excedem o limite de escoamento do material devem ser redistribuídas. O problema que surge é como realizar essa redistribuição.

Irwin tratou esse problema apenas para materiais perfeitamente elasto-plásticos com o valor do ângulo fixo em $(\theta = 0)$, considerando uma equivalência de forças resultantes para a distribuição de tensões antes e depois da redistribuição. A Eq. (6) mostra a idéia de Irwin.

De acordo com a proposta de Irwin, as tensões lineares elásticas ao longo do eixo x em tensão plana, são $\sigma_y(x) = \sigma_x(x) = K_I/\sqrt{(2\pi x)}$ e $\sigma_z = 0$. Assim, ele obteve uma nova zona plástica, considerando a redistribuição de tensões dentro da zona plástica.

$$\int_0^{\infty} \frac{K_I \mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi x}} = \int_0^{zp_{Irw}} S_E \mathrm{d}x + \int_{zp_0}^{\infty} \frac{K_I \mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi x}} \therefore \int_0^{Zp0} \frac{K_I \mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi x}} = S_E zp_{Irw} \therefore zp_{Irw} = \frac{K_I^{\ 2}}{\pi S_E^{\ 2}} \tag{6}$$

Deslocando o campo de tensões de x_1 Irwin previu uma zona plástica que é o dobro da zona plástica original $(Zp0)$, mostrando que como o material não pode suportar tensões maiores que a tensão de escoamento, uma quantidade maior de material precisa ser plastificado.

2.3 Estimativas melhoradas das zonas plásticas

Rodriguez (2007), estudando uma placa infinita tracionada e considerando a função de Westergaard completa, sem considerar o FIT para determinar o campo de tensões, conseguiu avaliar a influência da relação entre a tensão nominal e a tensão de escoamento $(SnSe)$ na forma das zonas plásticas para estados de tensão e de deformação plana.

Rodriguez também considerou a redistribuição das tensões dentro da zona plástica. Para tanto, ele usou a solução de Westergaard completa e limitou a tensão de Mises à tensão de escoamento do material na ponta da trinca, ou seja, $\sigma_{Mises}(0 < r < Zp_{West}E, \theta) = S_E$ (vide Fig. 3). De acordo com Rodriguez, como o carregamento é uniaxial, foi considerado apenas o equilíbrio das forças geradas pela tensão σ_{yy}.

Pela segunda Eq. (2), tem-se

$$\sigma_{yy}(\sigma_n, Zp_{West}, \theta) = \mathrm{Re}[Z(\sigma_n, Zp_{West}, \theta)] + y(r,\theta)\mathrm{Im}[Z'(\sigma_n, Zp_{West}, \theta)] \tag{7}$$

onde $y(r,\theta) = r\sin(\theta)$.

Usando o argumento de Irwin para evitar singularidade e fixando o valor de θ, tem-se

$$\sigma_{yy}(\sigma_n, Zp_{West}, \theta) Zp_{West} E = \int_0^{Zp_{West}} \sigma_{yy}(\sigma_n, r, \theta)\mathrm{d}r \tag{8}$$

Rodriguez usou a Eq. (8) para determinar o valor da zona plástica considerando a relação entre a tensão nominal e a tensão de escoamento e também o equilíbrio de forças geradas pelas tensões singulares:

$$Zp_{West} E = \frac{1}{\sigma_{yy}(\sigma_n, Zp_{West}, \theta)} \int_0^{Zp_{West}} \sigma_{yy}(\sigma_n, r, \theta)\mathrm{d}r \tag{9}$$

A Fig. 3 mostra a idéia da redistribuição das tensões dentro da zona plástica feita por Rodriguez com θ variável, que se baseou na idéia de Irwin que analisou apenas o caso de $\theta = 0$.

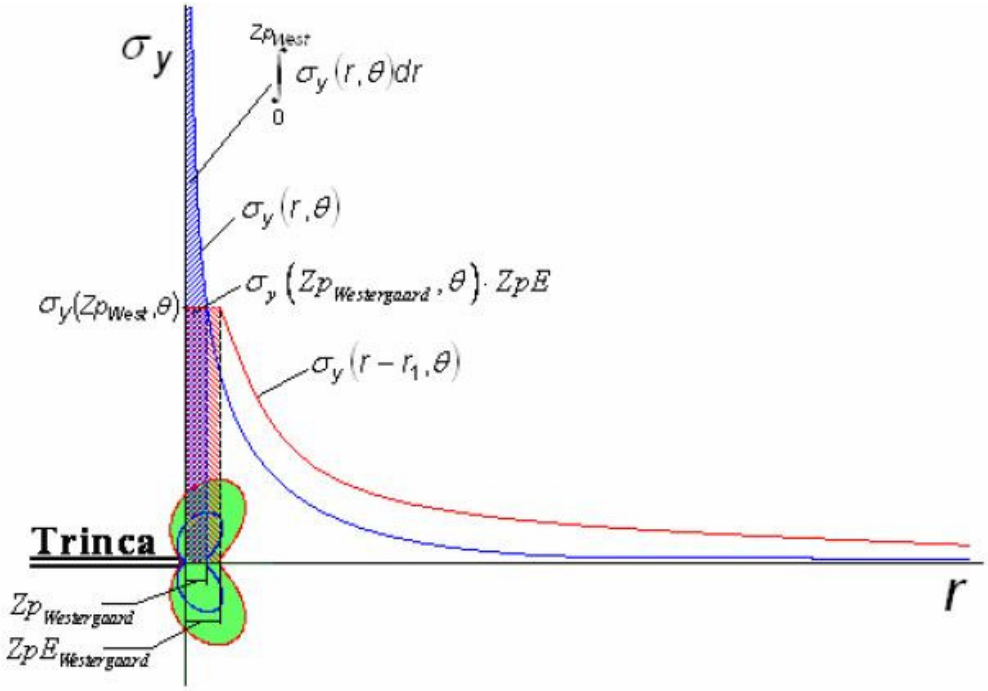


Figura 3 - Limitação da tensão dentro da zona plástica (Rodriguez, 2007).

3 MÉTODO HÍBRIDO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO A PROBLEMAS DA MECÂNICA DA FRATURA

O método híbrido dos elementos de contorno (MHEC) foi proposto em 1987 como uma contrapartida variacional do método convencional dos elementos de contorno (Dumont, 1987, 1989, 2003). O ponto de partida foi uma expressão generalizada da energia potencial total, em que hipóteses de compatibilidade de deslocamentos foram incluídas explicitamente. A formulação se revelou conceitualmente equivalente à proposta de implementação do potencial de Hellinger-Reissner feita por Pian (1964) para elementos finitos, mas com o uso de soluções fundamentais singulares para a representação do campo de tensões no domínio (suporte global). Os deslocamentos são aproximados de maneira independente no contorno em termos de funções polinomiais (suporte compacto). Desde sua proposição, o método vem sendo generalizado, com aplicações aos mais variados tipos de problemas estáticos e dinâmicos de engenharia.

Lopes (1998, 2002) desenvolveu várias formulações do MHEC para mecânica da fratura. Primeiramente foi comprovado que a formulação básica completa do método híbrido pode ser aplicada sem nenhuma modificação quando se usa a técnica de subdivisões na análise de estruturas trincadas. Esta comprovação é realizada pela utilização do método para análise de placas contendo uma trinca situada em um eixo de simetria.

Posteriormente, para estruturas com condições de contorno do tipo Neumann, foram desenvolvidas três formulações do método que permitem o cálculo do fator de intensidade de tensão. A primeira delas, denominada “Hipersingular”, tem a desvantagem de não permitir a obtenção do fator de intensidade de tensão de maneira satisfatória, porém, realizando-se uma comparação de curvas, utilizando-se a série de Williams, é possível obter K com boa precisão.

A segunda formulação, que utiliza a série de Williams como uma solução fundamental, permite o cálculo do fator de intensidade de tensão diretamente, introduzido-o no sistema de equações como incógnita primária do problema. Contudo, esta formulação não permite o

cálculo de fatores de intensidade de tensão para trincas internas, fato que decorre da introdução de uma descontinuidade no campo de tensões em uma linha tangente as pontas da trinca.

A terceira formulação, que é utilizada no presente artigo, também introduz os fatores de intensidade de tensão como incógnitas primárias do problema. Porém, ao invés da série de Williams, a função de tensão complexa de Westergaard é utilizada como solução fundamental.

A formulação que utiliza a função de tensão complexa de Westergaard propõe que uma trinca curva genérica seja aproximada por uma sucessão de elementos retos de trinca. Estes elementos devem se superpor para garantir que todas as regiões da trinca a ser modelada sofram o efeito de abertura de suas faces. A Fig 4 ilustra esta superposição, onde cinco elementos de trinca são utilizados para discretizar a trinca curva que passa pelos nós numerados de 0 a 6.

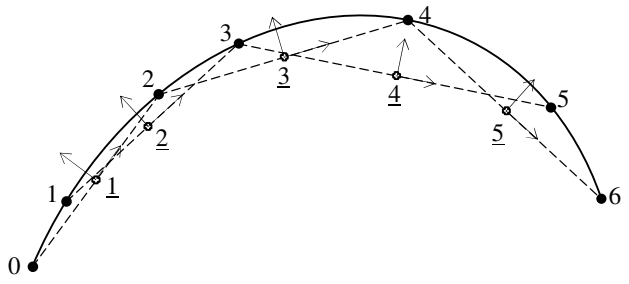
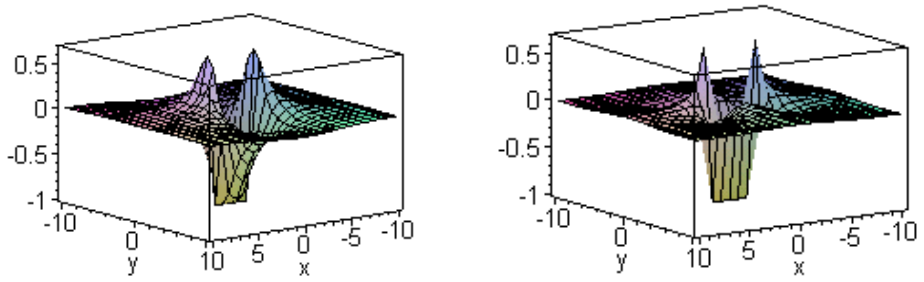


Figura 4 – Trinca curva genérica modelada como uma sucessão de elementos retos de trinca (Lopes, 2002).

A função de tensão que fornece as forças de superfície utilizadas para a superposição descrita na Fig. 4, é dada por

$$Z(z) = \sigma\left(\frac{\sqrt{z^2}}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1\right) \tag{10}$$

Nota-se que a Eq (10) é uma modificação da função de tensão de Westergaard. Esta modificação consiste em adicionar um termo constante para forçar um carregamento na trinca e zerar as solicitações em pontos distantes. Sendo assim, as componentes de tensão σyy e σxx são representadas na Figura 5.a e 5.b respectivamente.



(a) (b)

Figura 5 – Representação gráfica das componentes de tensão σ_{yy} e σ_{xx} (Lopes, 2002).

Esta formulação foi testada para determinar fatores de intensidade de tensão em diversos problemas clássicos da mecânica da fratura (Lopes, 2002) confirmando a boa representação do campo de tensões em pontos próximos à ponta da trinca.

3.1 Zonas plásticas obtidas pelo MHEC

O MHEC possui uma grande vantagem, quando comparado ao Método Tradicional de Elementos de Contorno (MEC), na determinação do campo de tensões em pontos do domínio: as tensões são calculadas através da aplicação direta da solução fundamental, não acarretando nenhuma integração adicional.

Este fator é bem explorado neste trabalho, onde o cálculo das zonas plásticas é feito em duas etapas:

1) Primeiramente faz-se uma busca incremental, para um determinado θ, a partir da ponta da trinca. Para cada incremento estabelecido, obtêm-se as tensões $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$ e $\sigma_{xy})$ e, conforme o estado plano que se quer analisar, determina-se a tensão equivalente de Mises. Essa primeira etapa termina quando $\sigma_{Mises}(\sigma_n, r, \theta) < S_E$ (vide Fig. 6).

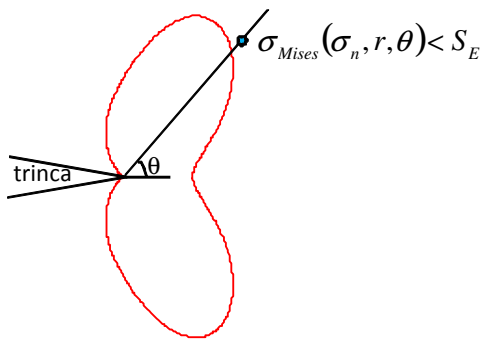


Figura 6 – Determinação do ponto que satisfaz a condição $\sigma_{Mises}(\sigma_n, r, \theta) < S_E$

2) Após a determinação, para um determinado θ, do raio onde $\sigma_{Mises}(\sigma_n, r, \theta) < S_E$, realiza-se, através do método da bisseção, a busca pelo ponto onde a seguinte equação é satisfeita:

$$\left|\sigma_{Mises}(\sigma_n, r, \theta) - S_E\right| < tol \therefore r = Zp_{West} \tag{11}$$

Conforme será visto na seção 4, o efeito de $SnSe$ só é percebido se não se usar o FIT para determinar o campo de tensão e sim a função completa de Westergaard. Porém, a determinação analítica destas funções é um processo complicado, tendo na literatura específica do assunto apenas duas funções conhecidas, que são as das placas infinita e finita com trinca interna, sendo esta válida apenas para determinados casos de a/W.

4 ESTUDOS DE CASO

Serão estudados três exemplos: os da placa infinita e finita tracionadas e o caso da placa finita sob flexo-tração. O caso da placa infinita é usado para mostrar a insensibilidade das zonas plásticas devido à relação $SnSe$, quando se usa o FIT para representar o campo de

tensões e também para mostrar a influência de *SnSe* quando se usa a função complexa de Westergaard, o que já estudado por Rodriguez. Neste caso se compara as zonas plásticas obtidas por Rodriguez e as obtidas usando o MHEC.

No caso da placa finita tracionada, usou-se a função completa de Westergaard apresentada por Eftis e Liebowtiz. As zonas plásticas obtidas nesse exemplo não foram normalizadas, já que a influência do tamanho da trinca (2a) no tamanho das zonas plásticas é indiferente quando se usa o FIT ou a função completa de Westergaard. Assim, esse exemplo mostra apenas a capacidade de estimar as zonas plásticas usando o MHEC.

Já no caso da placa finita sob flexo-tração se usa apenas o MHEC, já que não há função completa de Westergaard para esse caso se analisa a influência do estado de tensões no tamanho e forma das zonas plásticas.

Em todos os exemplos analisados usou-se a mesma idéia de Rodriguez para a correção das zonas plásticas.

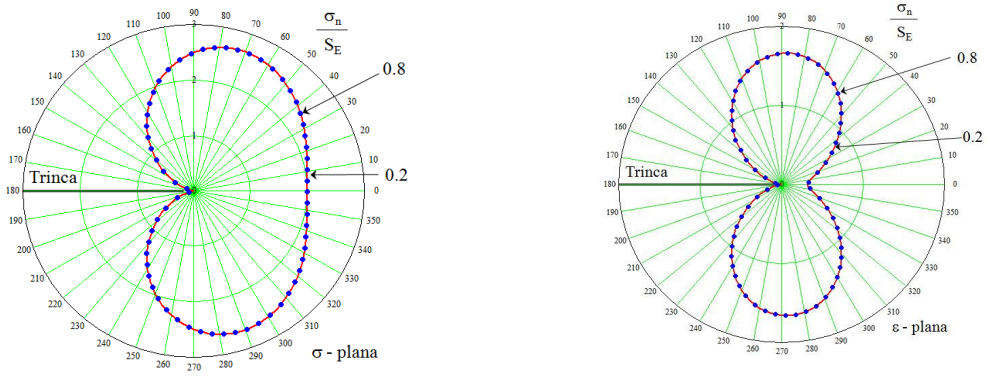
4.1 Placa Infinita Tracionada

A Eq. (12) mostra a função de tensão para o caso da placa infinita.

$$Z_1 = \frac{\sigma_n z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \tag{12}$$

Dois níveis de *SnSe* são considerados: 0,2 e 0,8 para os dois casos de estado plano. Independentemente do valor de *SnSe* as zonas plásticas são as mesmas quando normalizadas pela Eq. (4). Isso evidencia que apenas a variação do ângulo θ não é suficiente para mostrar a influência de *SnSe* quando comparada pela zona plástica de referência $(Zp0)$.

A Fig. 7.a mostra a insensibilidade das zonas plásticas à *SnSe* para o estado plano de tensão e a Fig. 7.b para o estado plano de deformação.

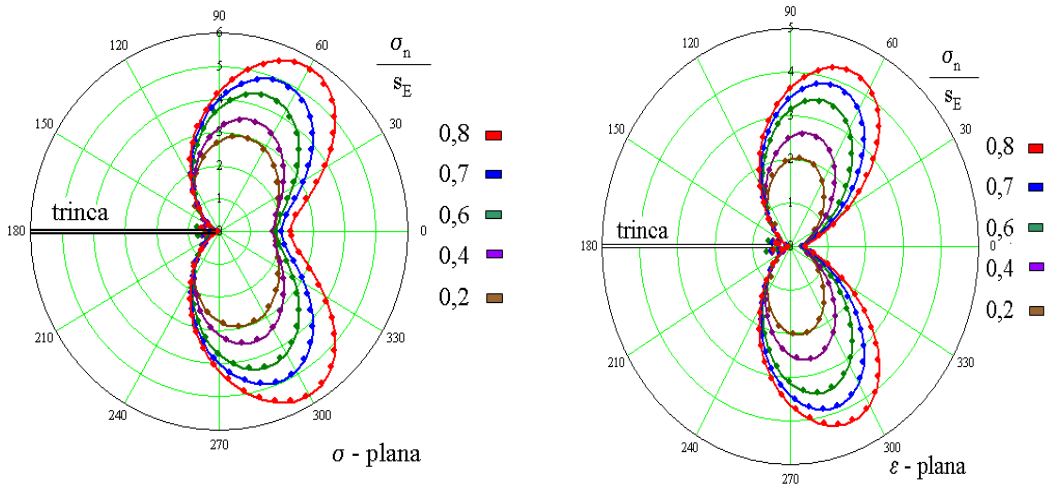


(a) (b)

Figura 7 - (a) Zonas plásticas insensíveis a relação *SnSe* em tensão plana e (b) Zonas plásticas insensíveis a relação *SnSe* em deformação plana.

A Fig. 8 compara os resultados obtidos por Rodriguez com os resultados obtidos pelo programa de Lopes, ratificando que o MHEC também consegue mostrar a influência de *SnSe* no tamanho e forma das zonas plásticas. Nessa figura, as linhas cheias são as zonas plásticas obtidas por Rodriguez, as linhas pontilhadas são as zonas plásticas obtidas pelo programa de Lopes. Na figura, pode-se ver que o resultado numérico das zonas plásticas é visualmente idêntico ao que se obteve no trabalho de Rodriguez, acontecendo uma pequena perturbação quando a distância onde se obtém as tensões está a uma distância menor ou igual ao tamanho

dos elementos usados na discretização da trinca. Nesse exemplo, cinco níveis de *SnSe* são avaliados: 0,2; 0,4, 0,6; 0,7 e 0,8.



(a) (b)

Figura 8 - (a) comparação dos resultados obtidos por Rodriguez, com as correções propostas e com os resultados obtidos pelo MHEC em tensão plana e (b) comparação dos resultados obtidos por Rodriguez, com as correções propostas e com os resultados obtidos pelo MHEC em deformação plana.

4.2 Placa Finita Tracionada

Este exemplo fornece informações adicionais ao caso da placa infinita, pois com dimensões finitas, a influência da geometria no tamanho e forma das zonas plásticas poderá ser estimada. A Eq. (13) mostra a função de tensão para o caso da placa finita.

$$Z_2 = \frac{\sigma_n \sin\left(\frac{z\pi}{W}\right)\left[\frac{a\pi}{W}\csc\left(\frac{a\pi}{W}\right)\right]^{0,5}}{\left[\sin^2\left(\frac{z\pi}{W}\right) - \sin^2\left(\frac{a\pi}{W}\right)\right]^{0,5}} \tag{13}$$

Pelo fato das dimensões serem finitas, outra análise deve ser feita, que é a competição entre a fratura e o colapso plástico como fenômenos de falha estrutural. O colapso plástico ocorrerá quando a tensão atuante dentro do ligamento residual for igual à tensão de escoamento, conforme mostra a equação a seguir:

$$\frac{\sigma}{S_E} = \left(1 - \frac{a}{W}\right) \tag{14}$$

Para se avaliar o problema do ponto de vista analítico, usou-se a Eq. (13), apresentada por Eftis e Liebowitz, atentando para o limite de validade da equação $(a\pi/W >> 0{,}3)$ recomendada pelos autores.

Serão avaliados 3 valores de (a/W), que obedecem o limite de aplicabilidade recomendado pelos autores:

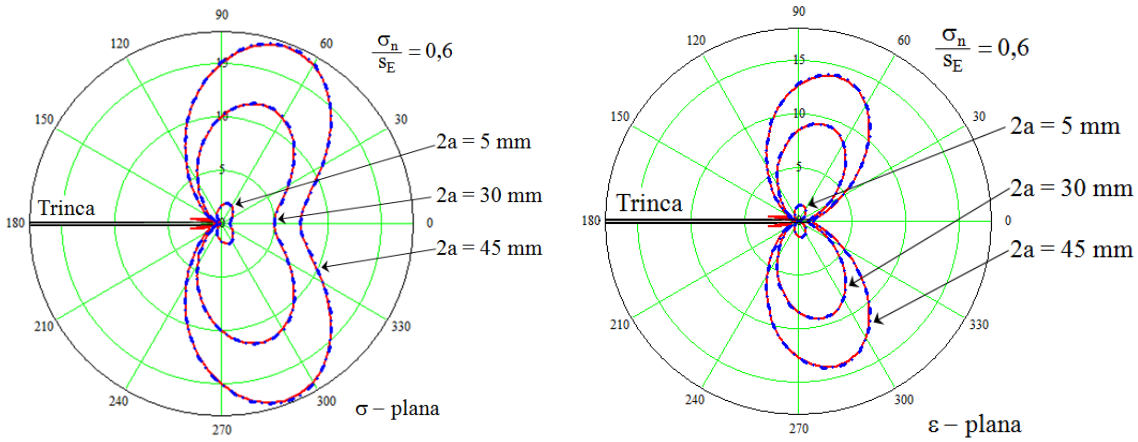
- Para $a/W = 0{,}005 \rightarrow SnSe_{CP} = 0{,}995$;

- Para $a/W = 0{,}030 \rightarrow SnSe_{CP} = 0{,}970$;
- Para $a/W = 0{,}045 \rightarrow SnSe_{CP} = 0{,}955$.

4.2.1 Efeito da geometria no tamanho e forma das zonas plásticas

Para se verificar apenas a influência da geometria, as medidas foram feitas para apenas um nível da relação entre a tensão nominal e a tensão de escoamento $(SnSe = 0{,}6)$ e com largura constante $(W = 3142\text{mm})$ com os seguintes valores do tamanho da trinca $(2a)$: 5, 30 e 45 mm,

O efeito da geometria só foi percebido quando não se normalizaram (dividiram) os valores obtidos pela Eq. (13) pelos valores da Eq. (4).



(a) (b)

Figura 9 – mostra a influência do tamanho da trinca para: (a) o estado plano de tensão e (b) o caso do estado plano de deformação.

Pela análise da Fig. 9.a e da Fig. 9.b, percebe-se não há diferença visual entre as zonas plásticas obtidas pelo MHEC e as obtidas pela função complexa de tensão da Eq. (13).

4.3 Placa Finita Fletida

Esse exemplo é importante para mostrar e influência do carregamento no tamanho e forma das zonas plásticas.

A configuração do modelo é mostrada na Fig. 10. As duas pontas da trinca estão sob estados de tensão diferentes, devendo ter, portanto, zonas plásticas diferentes.

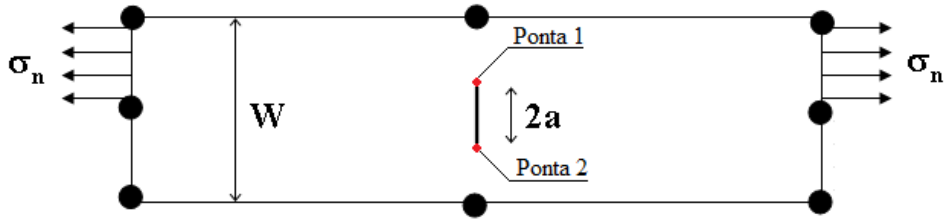
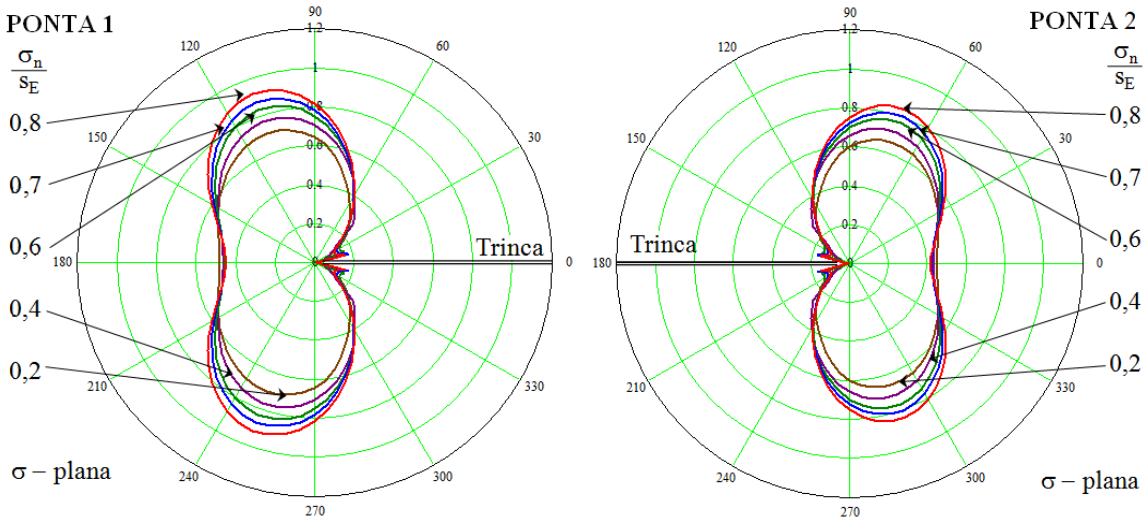


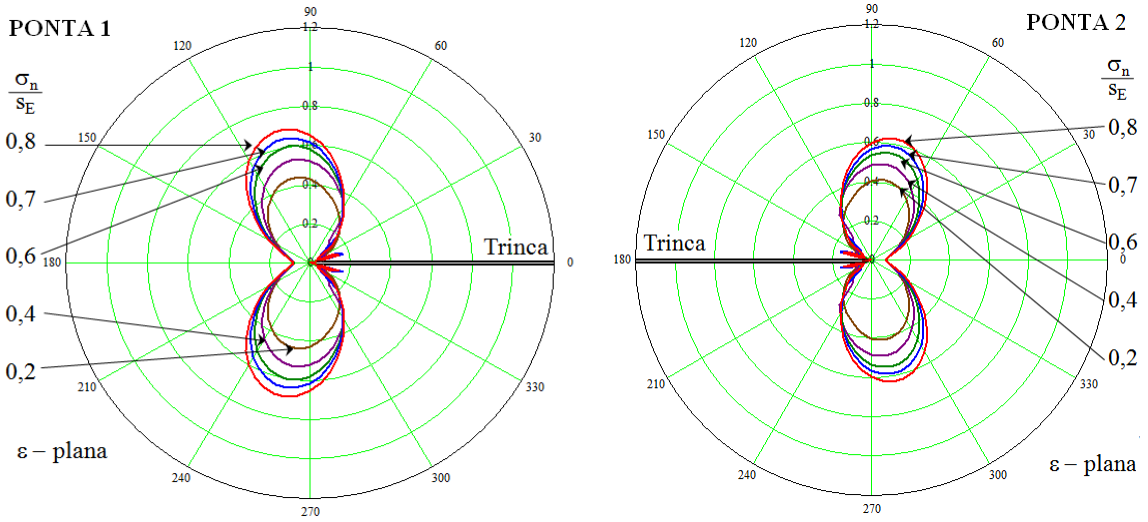
Figura 10 – Placa finita sob flexão.

A Fig. 11 mostra as zonas plásticas nas pontas 1 e 2 da trinca sob tensão plana. Já a Fig. 12 mostra as zonas plásticas nas pontas 1 e 2 da trinca sob deformação plana. Todas as zonas plásticas estão normalizadas (divididas) pela zona plástica de referência da Eq. (4).



(a) (b)

Figura 11 – (a) mostra a influência do tipo de carregamento no tamanho e forma das zonas plásticas sob tensão plana para a ponta 1 e (b) mostra a influência do tipo de carregamento no tamanho e forma das zonas plásticas sob tensão plana para a ponta 2.



(a) (b)

Figura 12 – (a) mostra a influência do tipo de carregamento no tamanho e forma das zonas plásticas sob deformação plana para a ponta 1 e (b) mostra a influência do tipo de carregamento no tamanho e forma das zonas plásticas sob deformação plana para a ponta 2.

Na figuras 11 e 12 percebe-se a influência da relação $SnSe$, como Rodriguez já havia mostrado. Mas a observação importante deste exemplo está no fato de que as zonas plásticas das duas pontas da trinca, tanto em tensão como em deformação plana, também são

diferentes, quando normalizadas pela zona plástica da Eq. (4). Assim, mostra-se que para estados de tensões diferentes as zonas plásticas também são diferentes.

5 CONCLUSÃO

A singularidade intrínseca da trinca, mostra que quando o raio de ponta tende a zero, as tensões tendem ao infinito, impossibilitando a análise de tensões tradicional, fazendo-se necessário o uso da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE), que tem como seu principal parâmtero o Fator de Intensidade de Tensões (FIT). A MFLE só é válida se a "maior parte" do material da peça estiver no regime linear, evidenciando a necessidade de se estimar mais precisamente as suas regiões plastificadas.

Usando um critério de escoamento, Mises por exemplo, mostrou-se a diferença no tamanho e forma das zonas plásticas quando se usa uma função complexa de tensão ou quando se usa o FIT para descrever o campo de tensões em volta da ponta da trinca. Utilizando o mesmo argumento usado por Irwin, Rodriguez (2007) conseguiu estimar o efeito da relação entre a tensão nominal e a tensão de escoamento no tamanho e forma das zonas plásticas, através da função completa de Westerggard (1939) para o caso de uma placa infinita.

Este trabalho mostrou a da geometria na estimativa das zonas plásticas e do tipo de carregamento. A influência da geometria foi verificada através do uso de função complexa apresentada por Eftis e Liebowitz (1972) para o caso da placa finita com uma trinca central de comprimento 2a. Já a influência do tipo de carregamento foi feita usando o programa de Lopes que é fundamentado no Método Híbrido de Elementos de Contorno (MHEC), que usa o método da Bisseção para determinar a fronteira elastoplástica e a integração de Gauss para equilibrar as forças geradas pelas tensões singulares nas proximidades de trincas, corrigindo as zonas plásticas. Essa é a mesma idéia usada por Irwin, porém ela não usa análise incremental, não-linear, para determinar as zonas plásticas.

Através da comparação das zonas plásticas nos diferentes exemplos: placa infinita e finita sob tração e placa finita sob flexão, mostrou-se que a formulação apresentada por Lopes consegue representar de forma bem precisa o campo de tensões de peças trincadas. Além disso mostrou-se que o uso exclusivo do FIT não é suficiente para estimar as zonas plásticas que validam o uso da MFLE.

REFERENCES

Anderson, T.L., 1995. Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications. 2th ed. CRC Press.

Carothers, S.D., 1920. Plane Strain: The Direct Determination of Stress. Proceedings of the Royal Society of London, series A, v.97, 110-123.

Castro, J.T.P e Meggiolaro, M.A, 2002. Fadiga sob cargas reais de serviço. Apostila do curso Mecanica da Fratura e Fadiga \ MEC2231. Departamento de Engenharia Mecanica. PUC-RIO. Brasil.

Dumont, N. A. (1987). "The hybrid boundary element method." Boundary Elements IX, C. A. Brebbia; W.Wendland and G. Kuhn, ed., vol. 1,Mathematical and Computational Aspects, Computational Mechanics Publications, Southampton. Springer-Verlag, 125–138.

Dumont, N. A. (1989). "The hybrid boundary element method: An alliance between mechanical consistency and simplicity." Applied Mechanics Reviews, 42(11, part 2), S54–S63.

Dumont, N. A. (2003). “Variationally-based hybrid boundary element methods.” Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 10, 407-430.

Eftis, J. e Liebowtiz, H., 1972. On the Modified Westergaard Equationsfor Certain Plane Crack Problems. International Journal of Fracture Mechanics, v.8, n4, 383-392.

Griffith,AA “The phenomenon of rupture and flow in solids”, Philosophical Trans-actions of the Royal Society series A, v.221, p.163-198, 1920.

Inglis,CE “Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners”, Transactions of the Institution of Naval Architects v.55, p.219-230, 1913.

Irwin, G.R., 1956. Onset of Fast Crack Propagation in High Strength Steel and Aluminum Alloys. Proceedings of 1955 Sagamore Conferencee on Strength Limitations of Metals, Syracuse University, N.Y., March, v.2, 289-305.

Irwin, G.R., 1957. Analysis of Stress and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. Journal of Applied Mechanics, v.24, 361-364.

Lopes, A. A. O., 1998, “O Método Híbrido dos Elementos de Contorno Aplicado a Problemas de Mecânica da Fratura”, dissertação de mestrado, PUC-Rio

Lopes, A.A.O., 2002. Determinação de fatores de intensidade de tensão com o método híbrido dos elementos de contorno. Tese de doutorado. Departamento de Engenharia Civil. PUC-RIO. Brasil.

MacGregor, C.W., 1935. The Potential Function for the Solution of Two-Dimensional Stress Problems. Trans. American Mathematical Society, vol. 38, n. 1, p. 117-186.

Nádai, A., 1921. Uber die Spannungsverteilung in einer durch eine Einzelkraft belasteten rechteckigen Platte. Der Bauingenieur, vol. 2, p. 11-16.

Norma E399 “Standard test method for plane-strain fracture toughness of metallic materials”, ASTM Standards, v. 03.01.

Pian, T. H. H. (1964). “Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution.” AIAA Journal, 2, 1333–1336.

Rodriguez, H.Z., 2007. Efeito da tensão nominal no tamanho e forma da zona plástica. Dissertação de mestrado, Departamento de Engenharia Mecanica. PUC-RIO. Brasil.

Sih, G.C., 1966. On The Westergaard Method of Crack Analysis. International. Journal Fracture Mechanics, v. 2, 628-640.

Westergaard, H.M., 1939. Bearing Pressures na Cracks. Journal of Applied Mechanics, 6, A49-A53.

Williams, M.L., 1957. On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack. Journal of Applied Mechanics, v.24, 109-114.