Proceedings of the XXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering
September 3 to 6, 2006 - Belém, Pará - BRAZIL.

A TECHNIQUE FOR COMPUTING INTERSECTION OF PARAMETRIC-SURFACE MESHES

William Wagner Matos Lira
william@ctec.ufal.br
Department of Structural Engineering, Center of Technology, Federal University of Alagoas
Campus A. C. Simões, BR 104, km 97, Tabuleiro do Martins, Cep 57072-970, Maceió – AL, Brazil
Antonio Carlos de Oliveira Miranda
Luiz Fernando Martha
amiranda@tecgraf.puc-rio.br
lfm@tecgraf.puc-rio.br
Computer Graphics Technology Group (Tecgraf) and Department of Civil Engineering,
Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro (PUC-Rio), Brazil

Abstract. *In many cases of geometric modeling applied to engineering problems, surface intersections are required in order to obtain an approximated model that represents the real structure as closely as possible. Usually, this model can be constructed with a set of boundary surfaces. However, in many situations, it is not possible to generate the final model using only single surfaces, and it becomes necessary to intersect some temporary surfaces to achieve the final boundary surfaces. To solve this challenge, this work presents a methodology for intersecting two parametric surfaces containing a mesh of triangles in their domains. The algorithm of this methodology is divided in three steps. First, the meshes of triangles are converted into a spatial-subdivision topological data structure. This data structure was chosen due to its efficiency in representing arbitrary topologies when two surface meshes are intersected. In the second step, a method similar to Newton's iterative scheme is used to project each intersection point over both parametric surfaces. Finally, a mathematical representation of each intersected curve segment is generated in each parametric space and Cartesian space. The embedded topological representation of each surface is also useful to identify patches of surfaces that result from the intersection. Then, a new mesh triangulation is generated in each resulting surface patch using a surface mesh generator specially designed to generate stretched meshes in parametric space, but which present a good-quality shape on the 3D surface. The proposed technique has been validated in an existing geometric modeler used in three-dimensional finite element mesh generation.*

Keywords: *Parametric Surfaces, Finite-Element Meshes, Surface Intersections*

1. INTRODUÇÃO

Modelagem Geométrica e análise usando elementos finitos são tópicos importantes no processo de simulação de problemas de Engenharia, especialmente quando a solução analítica é desconhecida ou de difícil obtenção (ver, por exemplo, Fig. 1).

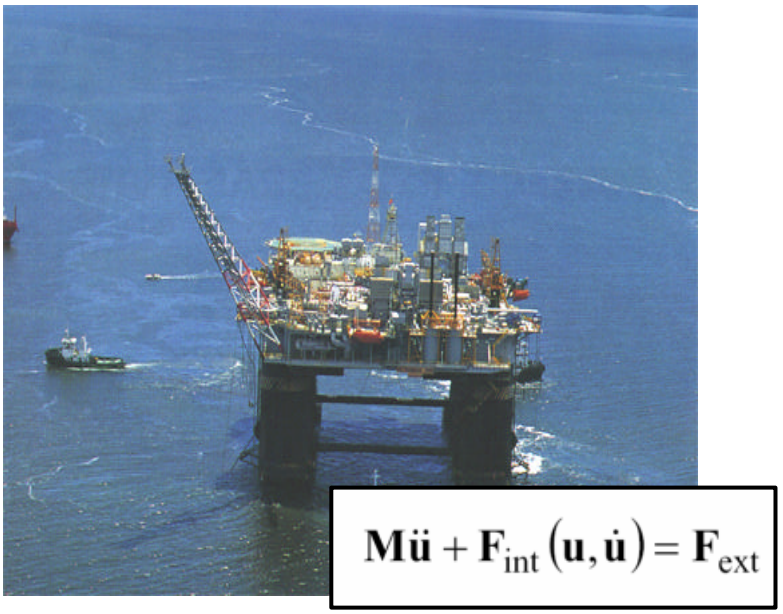

Figura 1 – Exemplo real de engenharia.

Em modelagem geométrica, uma forma de construir modelos complexos consiste em combinar várias retalhos de superfícies simples construídos individualmente. Isto requer a interseção entre esses retalhos de superfícies e a remoção de retalhos excedentes resultantes da interseção. Quando esta técnica de modelagem é adotada, o problema de interseção entre retalhos de superfícies torna-se um tópico importante e deve ser tratado de forma eficiente e robusta.

Em problemas reais de Engenharia, poucos casos de interseção entre superfícies podem ser resolvidos analiticamente. A solução prática é tratar essa interseção usando técnicas numéricas.

Existem basicamente dois tipos de técnicas numéricas para interseção entre superfícies: os métodos da subdivisão e da marcha. Os métodos de marcha, também conhecidos como métodos de continuação, encontram as curvas de interseção em três dimensões marchando na direção de seus vetores tangentes ou derivadas de alta ordem para obter os pontos sobre a curva (Barnhill et al, 1987; Barnhill et al, 1990; Stoyanov, 1992). Os métodos da subdivisão (ou decomposição) calcula as curvas de interseção no espaço paramétrico bidimensional (curvas de *trimming*) a partir do refinamento recursivo da solução em cada estágio (Hougthon et al, 1985).

No contexto da modelagem usando elementos finitos, não apenas a interseção de superfícies é importante, mas também a geração de malhas sobre as superfícies interceptadas deve ser considerada. Uma condição adicional e necessária é que as malhas de elementos finitos sejam compatíveis entre os diversos retalhos de superfícies. Isto significa que a malha gerada sobre um retalho de superfície deve ser conforme com as malhas geradas nos retalhos adjacentes. A Fig. 2 mostra um exemplo de uma malha de elementos finitos compatível que foi gerada usando a metodologia adotada neste trabalho.

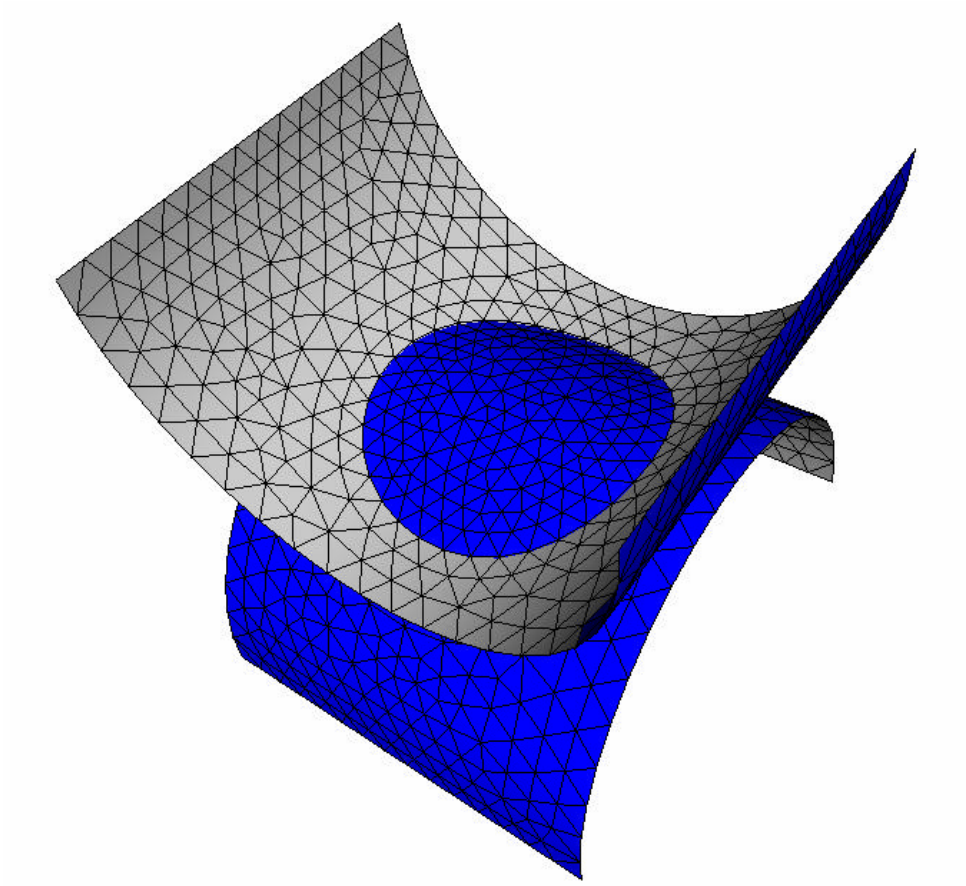

Figura 2 – Malha de elementos finitos compatível entre superfícies.

Várias soluções para o problema de interseção entre superfícies são encontradas na literatura, mas poucos resolvem o problema considerando essa compatibilidade entre as malhas. Uma Exceção é o trabalho de Lo (1995), que apresenta um algoritmo simples para interseção de malhas triangulares que redefine os triângulos automaticamente, adaptando-os às curvas de interseção detectadas. Entretanto, essa solução trabalha diretamente com as malhas interceptadas e não usa qualquer informação da representação paramétrica das superfícies. Isto significa que os pontos de interseção podem não estar localizados sobre as superfícies originais, sendo um sério problema, especialmente no caso de múltiplas interseções.

Em trabalhos recentes deste grupo de pesquisa (Coelho et al, 2000; Lira et al, 2002), foi apresentado um algoritmo para a interseção de malhas de superfícies que integra o problema de interseção de superfícies paramétricas com a compatibilidade de malhas nas curvas de interseção. Esse algoritmo gera elementos resultantes da interseção com boa qualidade geométrica necessárias para análises usando elementos finitos. Casos especiais de múltiplas interseções são tratados para resolver problemas críticos relacionados a geometria e a topologia dos problemas. No entanto, o tratamento de casos envolvendo problemas complexos de Engenharia ainda não estavam totalmente resolvidos com as técnicas apresentadas.

Neste sentido, o presente trabalho apresenta uma metodologia para determinação de interseções entre superfícies paramétricas voltadas para aplicações que utilizam elementos

finitos. Na metodologia adotada, cada retalho de superfície tem uma malha de elementos triangulares associada a ele, além da representação matemática da superfície.

O algoritmo para interseção entre duas superfícies é dividido em três passos, conforme pode ser visto na Fig. 3. No primeiro, a malha triangular de cada superfície é convertida em uma estrutura de dados topológica baseada em uma subdivisão espacial (Cavalcanti et al, 1997). Essa estrutura de dados é usada para representar eficientemente topologias arbitrárias resultantes da interseção de duas malhas de superfícies. Por exemplo, buscas locais são usadas para percorrer os pontos de interseção das duas malhas. Um procedimento para interseção entre faces (elementos finitos) planares é utilizado aqui, gerando pontos que formam uma aproximação inicial para as curvas resultantes da interseção entre superfícies. Esses pontos estão localizados exatamente sobre as malhas de elementos finitos interceptadas nesse estágio.

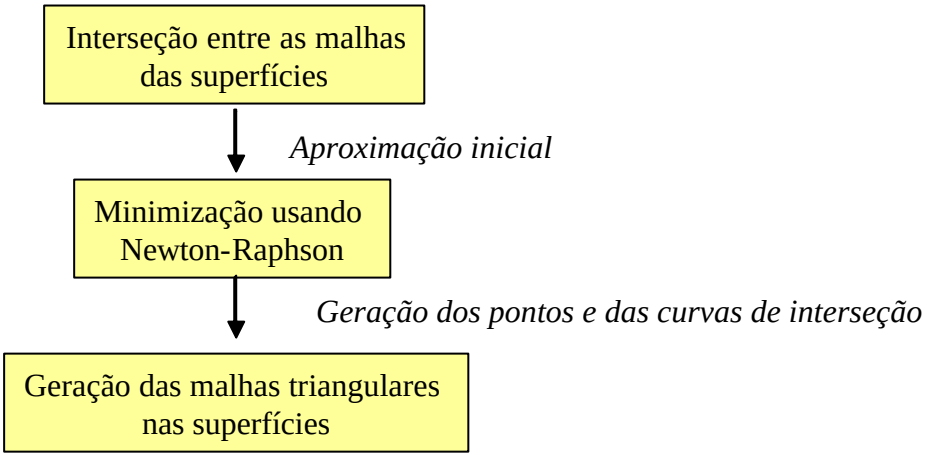

Figura 3 – Estratégia proposta.

No segundo passo, um esquema iterativo de Newton é usado para projetar cada ponto de interseção sobre os espaços paramétricos de ambas superfícies. Este processo resulta em pontos de interseção que estão exatamente sobre as superfícies interceptadas com suas respectivas representações paramétricas. Uma representação matemática de cada curva resultante da interseção é gerada em cada espaço paramétrico e no espaço cartesiano. Aqui, a representação topológica utilizada no estágio anterior também é útil para a identificação das curvas e dos retalhos de superfícies resultantes da interseção.

Finalmente, no último passo, uma nova malha com elementos triangulares é gerada em cada retalho de superfície resultante. Essa triangulação é gerada usando um algoritmo que trabalha no espaço paramétrico das superfície e que usa uma métrica entre os espaços paramétricos e cartesianos para definir um refinamento apropriado em locais da superfícies com elevadas curvaturas (Miranda et al, 2002).

O presente trabalho está organizado em 6 seções. A Seção 2 descreve o processo de conversão da malha em uma subdivisão espacial e o procedimento de interseção de faces planares que resultam em uma aproximação inicial para os pontos de interseção. A Seção 3 apresenta o esquema de Newton utilizado para geração dos pontos de interseção sobre as superfícies interceptadas e a estratégia adotada para geração de curvas interpolando os pontos obtidos. A Seção 4 descreve o procedimento usado para a geração das malhas sobre os retalhos de superfícies resultantes da interseção. A Seção 5 apresenta exemplos para validação da técnica proposta e algumas considerações sobre o trabalho são descritas na Seção 6.

2. APROXIMAÇÃO INICIAL PARA OS PONTOS DE INTERSEÇÃO

Na estratégia proposta, a primeira fase corresponde a determinação de uma aproximação inicial para os pontos de interseção das superfícies. Dentro do contexto do presente trabalho, essa aproximação é alcançada a partir da utilização de um procedimento que determina a interseção entre as malhas das superfícies.

A estratégia é baseada em três passos básicos (Fig. 4). Inicialmente, os elementos finitos de cada malha são convertidos em faces planares usando uma correspondência unívoca. Ou seja, cada elemento finito é representado exatamente por uma face planar. Na seqüência, um procedimento para determinação da interseção entre faces planares é utilizado, identificando os pontos de interseção das malhas consideradas. Finalmente, um procedimento para determinação das poligonais que interpolam linearmente esses pontos é usado, incluindo a determinação do possíveis componentes convexos resultantes da interseção.

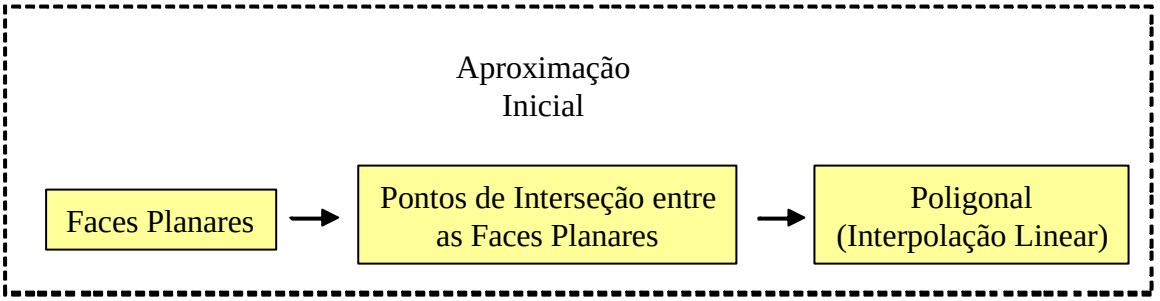

Figura 4 – Etapas usadas na determinação de uma aproximação inicial para os pontos de interseção.

2.1 Estrutura de dados

Para alcançar os objetivos estabelecidos no desenvolvimento dessa estratégia, a idéia é usar uma estrutura de dados especial baseada em subdivisão espacial que possa permitir a representação de forma eficiente de topologias arbitrárias resultantes da interseção de duas malhas de elementos finitos. Essa estrutura deve permitir também a sua utilização em buscas locais para percorrer os pontos resultantes da interseção entre as duas malhas.

Neste sentido, a estratégia utilizada é baseada em uma estrutura de dados conhecida como CGC (*Complete Geometric Complex*) (Rossignac et al, 1990) que permite a modelagem complexa de objetos adotando um esquema *non-manifold*. Essa representação CGC foi apresentada e implementada por Cavalcanti (1997), referindo-se a uma metodologia geral para criação e manutenção de uma subdivisão espacial em células de forma e geometria arbitrárias. Essa subdivisão espacial pode ser criada a partir da inserção de faces planares uma a uma, permitindo a criação de novas faces em tempo real. O objeto resultante da decomposição é classificada como uma CGC.

A implementação da CGC é baseada na estrutura de dados *Radial-Edge* (RED) proposta por Weiler (1986). Essa estrutura é conhecida como *Radial-Edge* porque armazena explicitamente a lista de faces ordenadas em torna de uma aresta. A RED foi concebida para modelagem *non-manifold* provendo a propriedade de completitude, que garante a obtenção de qualquer relação de adjacência a partir da sua representação. As entidades básicas dessa estrutura de dados são os vértices, arestas, faces e regiões. Além disso, a RED incorpora o conceito de uso de uma entidade topológica. Um uso pode ser visto como a ocorrência de uma

entidade topológica em uma relação de adjacência referente a uma entidade de ordem superior.

2.2 Construção da representação CGC

A construção da representação CGC é baseada na conversão dos elementos finitos das malhas associadas às superfícies envolvidas na interseção em faces planares na estrutura de dados CGC, onde cada malha é representada por uma subdivisão espacial. Na conversão, cada face na representação CGC corresponde unicamente a um elemento finito, como pode ser visto na Fig. 5.

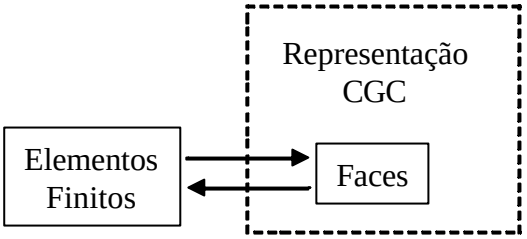

Figura 5 – Relação entre a malha de elementos finitos e a representação CGC.

Em linhas gerais, essas faces planares são descritas basicamente pela arestas que as delimitam. Por sua vez, tais arestas são representadas pelos vértices adjacentes cujas informações mais importantes são as coordenadas cartesianas do ponto correspondente. A Fig 6 exemplifica esta conversão. Nesse exemplo, o elemento M_1 da malha é convertido na face F_1 da representação CGC. Essa face é limitada pelas arestas E_1, E_2 e E_3, que também são criadas durante o processo de conversão. A aresta E_1 é formada pelos vértices V_3 e V_1, a aresta E_2 pelos vértices V_1 e V_2 e a aresta E_3 pelos vértices V_2 e V_3. Esses vértices possuem as mesmas coordenadas dos nós da malha N_1, N_2, e N_3, respectivamente. Todos os vértices também são criados automaticamente a medida que as faces correspondentes são criadas.

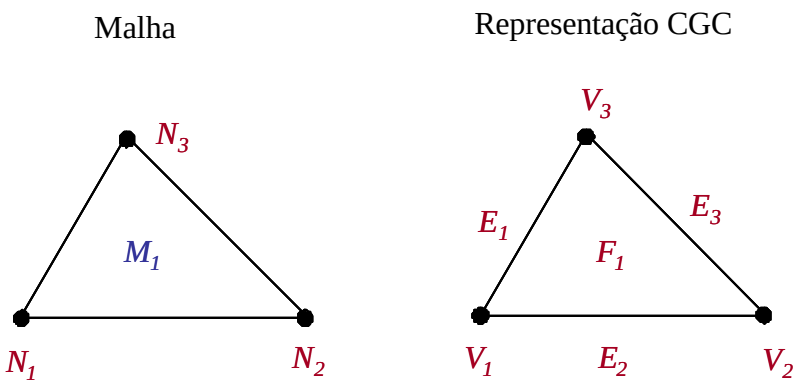

Figura 6 – Criação de faces na representação CGC a partir de elementos finitos.

Deve-se observar que não existe duplicidade de informações na CGC. Nós da malha compartilhados por elementos adjacentes não indicam a criação de novos vértices. Nestes casos, buscas internas são realizadas na CGC para identificar os vértices já inseridos anteriormente. A realização dessas buscas é feita utilizando-se estruturas especiais cujo

objetivo é diminuir o tempo necessário para execução do procedimento. A mesma idéia também é utilizada para o casos dos lados dos elementos e das correspondentes arestas.

A decomposição espacial é atualizada a medida que cada uma das faces planares associada aos elementos finitos é inserida na representação CGC. Neste procedimento, faces que se interceptam são tratadas apropriadamente, como será mostrado mais adiante.

Internamente, a inserção de uma face S na subdivisão espacial requer uma ordenação dos ciclos externos no sentido horário. Então, para a inclusão de S é necessário determinar quais vértices e arestas da subdivisão espacial serão ligadas ao bordo de S e para cada aresta, qual face deve suceder S no ciclo ordenado de faces ao redor da aresta. Os detalhes referentes a essa inserção podem ser encontrados em (Cavalcanti, 1992).

2.3 Interseção entre faces planares

Quando as duas subdivisões espaciais resultantes da conversão das malhas em representação CGC se cruzam, é necessário realizar a interseção entre essas subdivisões. Essa operação é executada repetidamente para cada par de faces que se interceptam e por isso a eficiência desta avaliação pode ser crítica. Normalmente, essas operações não são simples. No entanto, as subdivisões geradas no procedimento descrito acima são baseadas em geometrias simples, formadas por faces planas e arestas retilíneas.

A representação CGC utilizada neste trabalho incorpora um algoritmo computacional usado para calcular a interseção de faces planas que se interceptam. Como a geometria das entidades envolvidas nas subdivisões são planares e retilíneas, os algoritmos geométricos envolvidos neste processo de interseção são relativamente simples.

A idéia principal é inserir cada face planar de uma subdivisão espacial na outra. Assim, dadas duas faces A e B, o objetivo é determinar quais vértices devem ser criados em A e B e entre que pares de vértices devem ser criadas novas arestas, de forma a compatibilizar as faces.

Supondo, a princípio, que as duas faces não estão contidas em um mesmo plano, então todos os pontos de interseção estão contidos na reta A.suporte $\cap$ B.suporte, denotada por L. O primeiro passo é encontrar um plano P, que contém L, para projetar ambas as faces e montar a matriz de transformação que muda o sistema de coordenadas para um sistema ortogonal de eixos com o eixo x coincidindo com L, o eixo y contido em P e o eixo z perpendicular a P. Neste novo sistema de coordenadas, todas as interseções ocorrem no eixo x.

Aplicando o algoritmo descrito em (Cavalcanti, 1992) para resolver esse problema simplificado, determina-se para cada face dois conjuntos de informações. O primeiro contém todas as coordenadas de cada novo vértice que deve ser criado na face e, havendo necessidade de criar um vértice sobre uma aresta, qual a aresta correspondente. O segundo conjunto de informações especifica os pares de vértices que determinam as arestas a serem criadas. Os vértices são especificados como vértices já existentes ou como índices do conjunto anterior.

Quando as duas faces estão contidas em um mesmo plano, a interseção não mais ocorre sobre uma reta. Neste caso, interessa apenas criar vértices e arestas no interior de cada face, nos pontos de interseção.

Essas informações resultantes da interseção são utilizadas na atualização das faces planares das subdivisões espaciais. Ou seja, após o processo de interseção, novos vértices, arestas e faces são incorporados as subdivisões espaciais, gerando duas malhas consistentes topologicamente entre si. Detalhes desse algoritmo para interseção de faces planares usando a representação CGC podem ser visto em (Cavalcanti, 1992). A Fig. 7 mostra um exemplo com os pontos de interseção entre faces planares usando a representação CGC.

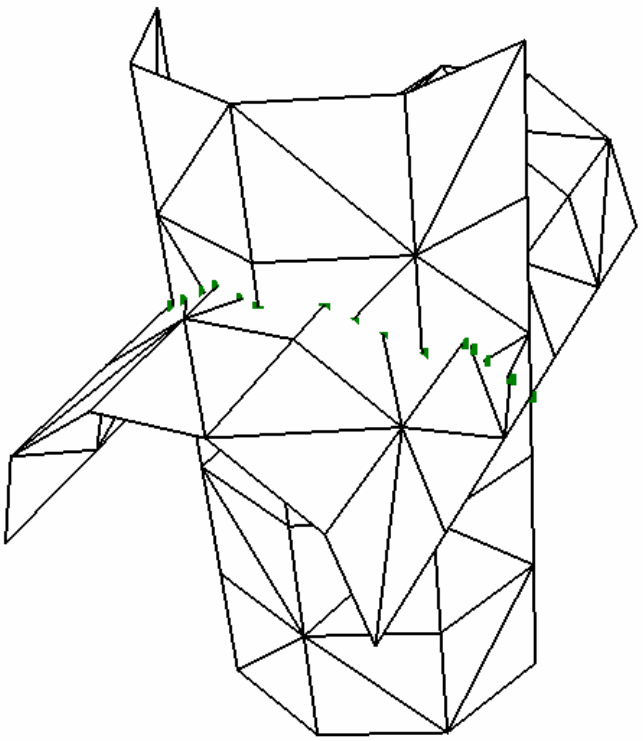

Figura 7 – Pontos de interseção entre faces planares.

2.4 Identificação das poligonais

Após a determinação dos pontos de interseção resultantes da interseção entre as malhas de superfícies, a idéia agora é identificar as poligonais que interpolam linearmente esses pontos. No esquema proposto, a mesma estrutura de dados da subdivisão espacial, representada pela CGC, é utilizada no processo para facilitar a identificação dessas poligonais, incluindo a determinação das componentes conexas obtidas (várias poligonais de interseção). Umas das vantagens alcançadas com a utilização dessa representação CGC está no fato da obtenção das poligonais utilizando apenas informações topológicas resultantes da interseção entre as subdivisões espaciais. Ou seja, nenhuma informação geométrica é requerida, reduzindo sensivelmente o surgimento de erros de modelagem típicos em problemas desta natureza.

Inicialmente, percorre-se todas as arestas e armazena-se aquelas novas resultantes da interseção. A identificação dessas novas arestas é relativamente simples, pois é necessário apenas observar na representação CGC se pelo menos um de seus vértices adjacentes é um ponto (vértice) resultante da interseção.

A partir dessas arestas resultantes da interseção, tenta-se encontrar aquela que possui um de seus vértices sem nenhuma outra aresta incidente. Se isto ocorre, então esse vértice representa a extremidade de uma poligonal e a aresta correspondente o primeiro segmento dessa poligonal.

Usando as informações topológicas armazenadas na representação CGC, é possível percorrer uma a uma as arestas adjacentes àquela inicialmente armazenada até encontrar o outro vértice da extremidade da poligonal desejada. Neste procedimento, as arestas já percorridas são marcadas para que elas não possam ser utilizadas novamente.

Um caso que deve ser observado refere-se ao problema onde um vértice para iniciar o procedimento não é encontrado. Neste caso, escolhe-se um vértice qualquer e significa que um poligonal fechada será encontrada.

A Fig. 8a-e ilustra o procedimento descrito acima. Na Fig. 8a são mostrados os vértices e arestas resultantes de uma interseção. O vértice V1 é identificado como um vértice que não possui nenhuma outra aresta adjacente além da E1. O vértice V1 e a aresta E1 são as entidades de partida do procedimento. Isto pode ser visto na Fig. 8b. A Fig. 8c-d mostra as etapas seguintes do procedimento usando o mesmo critério citado. A Fig.8e mostra a identificação do vértice que representa o final da poligonal desejada.

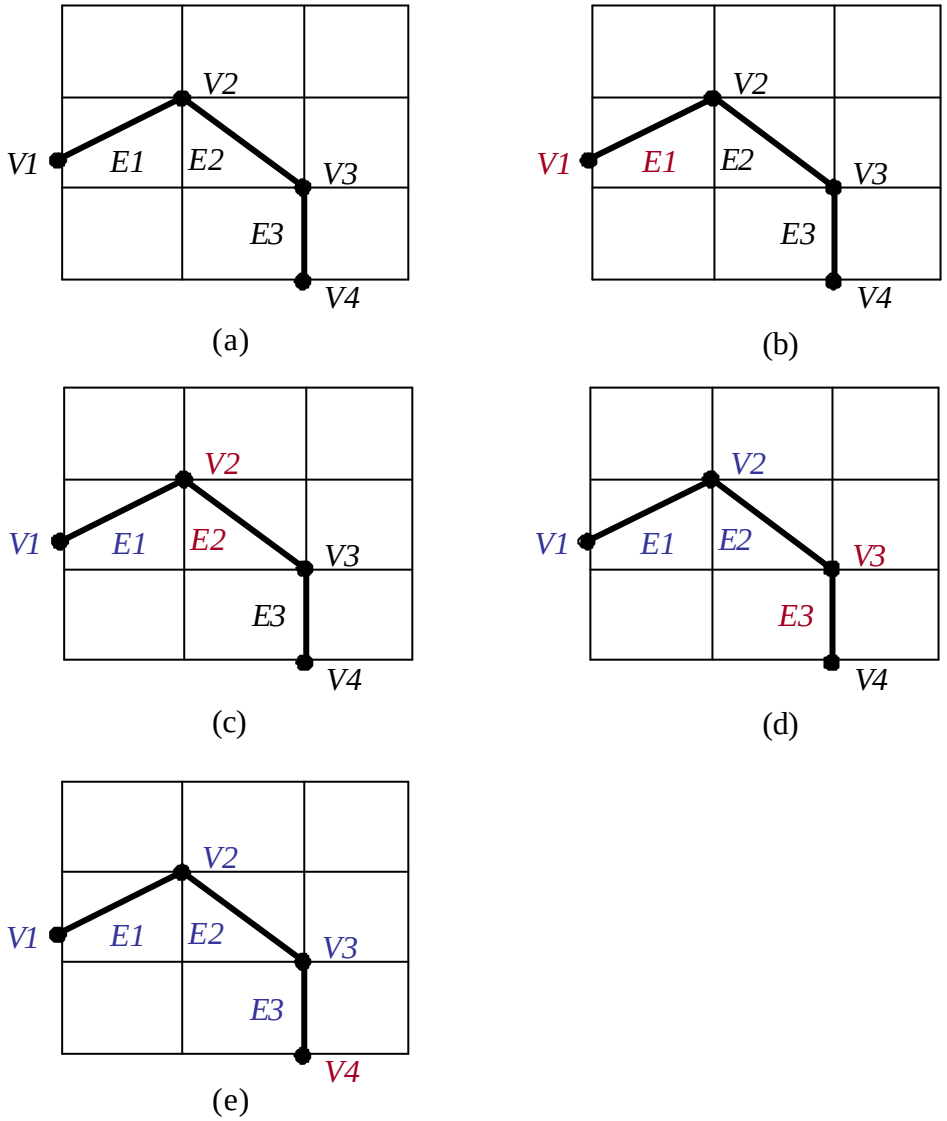

Figura 8 – Exemplo usando a representação CGC para identificação das poligonais.

O procedimento descrito é repetido até que todas as arestas de interseção tenham sido percorridas. Este critério garante a identificação de um ou mais componentes conexos.

A partir desses vértices e de suas coordenadas, traça-se poligonais interpolando linearmente os pontos encontrados, gerando as poligonais resultantes da interseção. A Fig. 9 mostra um exemplo de uma poligonal resultante da interseção entre faces planares encontradas a partir da utilização da técnica proposta.

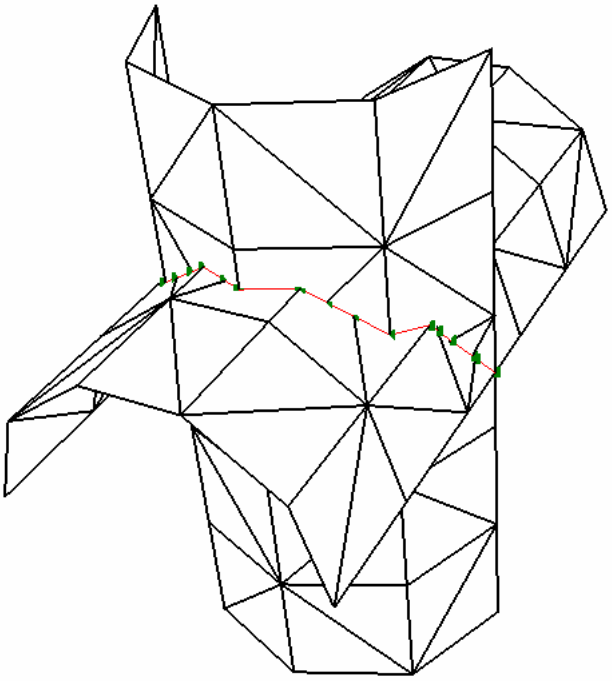

Figura 9 – Poligonal resultante da interseção entre faces planares.

3. DETERMINAÇÃO DOS PONTOS E DA CURVA DE INTERSEÇÃO

O cálculo das curvas de interseção entre duas superfícies pode ser visto como um problema de resolução de equações, normalmente não-lineares, simultâneas, ou como um problema de minimização, onde o quadrado da norma euclidiana entre pontos nas duas superfícies é minimizado com o ajuste das coordenadas paramétricas u e v. A obtenção da solução para esses problemas é alcançada a partir da utilização de técnicas avançadas de programação matemática como, por exemplo, Newton-Raphson e BFGS.

Neste trabalho, o esquema de Newton-Raphson é utilizado devido a sua robustez e qualidade de resultados obtidos, desde que o processo iterativo inicie com aproximações próximas a vizinhanças dos pontos desejados. Neste sentido, os pontos resultantes da interseção entre as malhas de superfícies são consideradas neste trabalho como aproximações iniciais locais adequadas para o processo iterativo de Newton-Raphson. Assim, cada ponto de interseção da malha vai representar um ponto de interseção entre as superfícies, sendo cada um deles ajustado pelo algoritmo de minimização.

A idéia aqui é usar o algoritmo para encontrar o ponto de interseção entre as superfícies próximo a um dado ponto usando o problema de minimização. O algoritmo termina quando a distância euclidiana do ponto avaliado em ambas superfícies for menor que uma dada tolerância. Essa tolerância corresponde a uma fração das superfícies envolvidas na interseção e deve ser definida a priori. Este procedimento é repetido para todos os pontos resultantes da interseção entre as malhas. A metodologia adotada aproxima a solução do problema de interseção de superfícies como um conjunto de interseções entre as superfícies.

A formulação matemática é obtida em função das coordenadas paramétricas nos dois retalhos de superfícies chegando a um sistema de quatro incógnitas (pares u,v em uma superfície e w,s na outra) e três equações, correspondentes aos três eixos do espaço

tridimensional. O vetor distância $\vec{F}$ é, em última análise, uma função dos parâmetros u,v,w e s, dado por:

$$\vec{F}(u,v,w,s) = \begin{Bmatrix} S_x(u,v) - R_x(w,s) \\ S_y(u,v) - R_y(w,s) \\ S_z(u,v) - R_z(w,s) \end{Bmatrix} \tag{1}$$

Para resolver o problema $\vec{F}(\vec{p}) = 0$, onde $\vec{p} = (u,v,w,s)$, usando o método de Newton-Raphson, o termo de correção $\Delta\vec{p}$ é dado por:

$$J^t \Delta\vec{p} = -\vec{F}(\vec{p}) \tag{2}$$

onde a matriz Jacobiana *J* é dada por:

$$J = \nabla\vec{F}(\vec{p}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_x}{\partial u} & \frac{\partial S_y}{\partial u} & \frac{\partial S_z}{\partial u} \\ \frac{\partial S_x}{\partial v} & \frac{\partial S_y}{\partial v} & \frac{\partial S_z}{\partial v} \\ \frac{\partial R_x}{\partial w} & \frac{\partial R_y}{\partial w} & \frac{\partial R_z}{\partial w} \\ \frac{\partial R_x}{\partial s} & \frac{\partial R_y}{\partial s} & \frac{\partial R_z}{\partial s} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Uma vez que a matriz jacobiana é composta pelas tangentes direcionais nos retalhos das superfícies, deve-se ter cuidado com o módulo dos vetores tangentes para garantir a convergência. Se as superfícies possuem parametrizações diferentes, por exemplo, uma normalização dos vetores é necessária antes de resolver a Eq. 2. A Fig. 10 mostra um exemplo com os pontos resultantes da interseção entre duas superfícies após a aplicação do esquema de Newton-Raphson. Deve-se observar que os pontos não mais estão exatamente sobre as arestas das faces planares.

As curvas de interseção são obtidas a partir da interpolação dos pontos resultantes da interseção utilizando *splines* cúbicas (Piegl et al, 1999). Essas curvas possuem controle local e são formadas por *n+1* pontos de controle e por um conjunto de funções básicas B-Splines (polinômios por partes) de grau *p* definidas por um vetor de nós não-periódico e não-uniforme com *m+1* valores. A representação matemática das curvas B-Splines é dada por:

$$C(u) = \sum_{i=0}^{N} N_{i,p}(u) P_i \ , \ 0 \le u \le 1 \tag{4}$$

onde *u* é a coordenada paramétrica da curva, P_i são os pontos de controle e N_i são as funções básicas B-Splines representadas por:

$$N_{i,0}(u) = \begin{Bmatrix} 1, & \text{se } u_i \le u \le u_{i+1} \\ 0, & \text{em outros casos} \end{Bmatrix} \tag{5}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \tag{6}$$

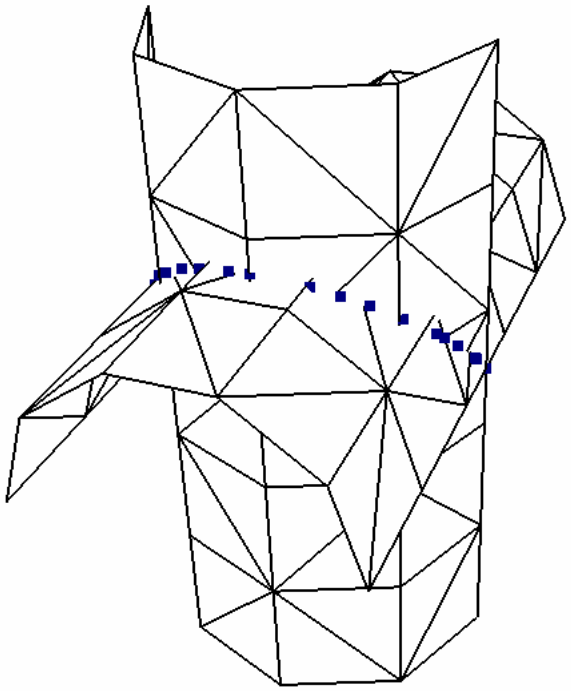

Figura 10 – Pontos de interseção após a utilização do esquema de Newton-Raphson.

A Fig. 11 mostra um exemplo com a curva resultante da interseção entre duas superfícies usando uma B-Splines para interpolar os pontos de interseção.

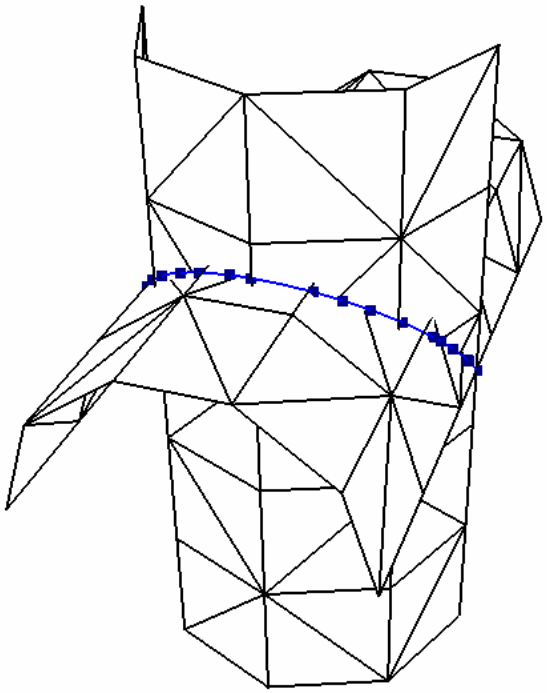

Figura 11 – Curva resultante da interseção entre duas superfícies.

4. GERAÇÃO DA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS

Na metodologia proposta, após a identificação das curvas de interseção, é necessário utilizar um procedimento numérico para geração das malhas de elementos finitos sobre os novos retalhos de superfícies resultantes da interseção. No entanto, a geometria e topologia dos retalhos resultantes da interseção normalmente são complexas e arbitrárias, inclusive com arestas soltas e/ou isoladas no interior desses retalhos. Então, o procedimento utilizado deve ser capaz de gerar malhas que atenda aos requisitos acima descritos.

Neste sentido, o presente trabalho utiliza um algoritmo, apresentado por Miranda (2002), para geração de malhas triangulares em domínios arbitrários de retalhos de superfícies paramétricas. O algoritmo considera restrições internas e a representação paramétrica é utilizada por ser mais comum. Nesse tipo de representação, é realizada uma triangulação bidimensional sobre o espaço paramétrico e as condições necessárias para realizar as correções de distorção da geometria da superfície são consideradas. Essa correção permite um maior refinamento em regiões com curvatura mais acentuada, como pode ser visto na Fig. 12.

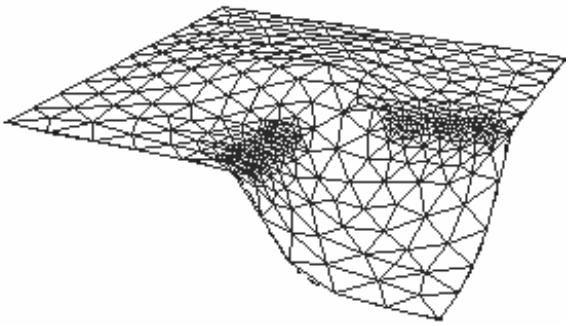

Figura 12 – Maior nível de refinamento em regiões com curvatura mais acentuada.

A estratégia em usar triangulação bidimensional com correção de distorção em geral é mais rápida em termos de tempo computacional que a geração diretamente no espaço real tridimensional, pois essa última requer maiores critérios para a validação dos elementos triangulares. A estratégia adotada utiliza o espaço paramétrico da superfície tridimensional, o que usualmente já se encontra disponível no modelador geométrico, para a geração de malhas triangulares bidimensionais com correções de distorção. A geração de elementos triangulares no espaço bidimensionais hoje em dia é bastante rápida. Em seguida, a malha resultante desta triangulação é reconduzida para o espaço tridimensional, o que é uma operação linear de transformação. Portanto, pode-se dizer que o conjunto de operações realizadas é bastante eficiente.

Os dados de entrada para geração de malhas de superfícies utilizando este algoritmo são descritos por uma lista de nós, definidos por suas coordenadas paramétricas, e uma lista com o número de arestas de cada circuito (porção conexa da fronteira) do modelo. O algoritmo é baseado em três passos: construção de uma árvore quaternária (*quadtree*), procedimento de avanço de fronteira e melhoria local da malha.

As finalidades principais da *quadtree* são desenvolver diretrizes locais usadas para definir o tamanho dos elementos triangulares e guardar valores das métricas da parametrização da superfície. A árvore serve como uma malha de pano-de-fundo que auxilia o avanço de fronteira em todas as etapas de construção, provendo valores necessários para fazer correção

de distorção de ângulos e distâncias que devido são devidas à parametrização do malha. A adoção da estratégia do uso da *quadtree* permite que o algoritmo seja bastante eficiente em termos de busca.

O procedimento de avanço da fronteira começa pelo contorno que limita o domínio a ser preenchido com uma malha triangular. Elementos triangulares são extraídos do domínio um por vez. Sempre que um elemento é extraído, o contorno limitante é atualizado e o processo é repetido. O procedimento termina quando o domínio inteiro contém apenas elementos triangulares. Nessa etapa, os elementos gerados no espaço paramétrico são distorcidos, mas de boa forma quando transportados para espaço tridimensional.

A melhoria local da malha é uma técnica de suavização usada para melhorar a qualidade da malha através de reposicionamento de nós dentro de um retalho (grupo de elementos adjacentes). Essa etapa é responsável pela eliminação dos elementos ruins da malha. Uma formulação desta técnica é definida a partir da forma genérica de uma função Laplaciana ponderada.

A Fig. 13 ilustra o uso do algoritmo aqui descrito no exemplo de interseção resultante entre superfícies da Fig. 12.

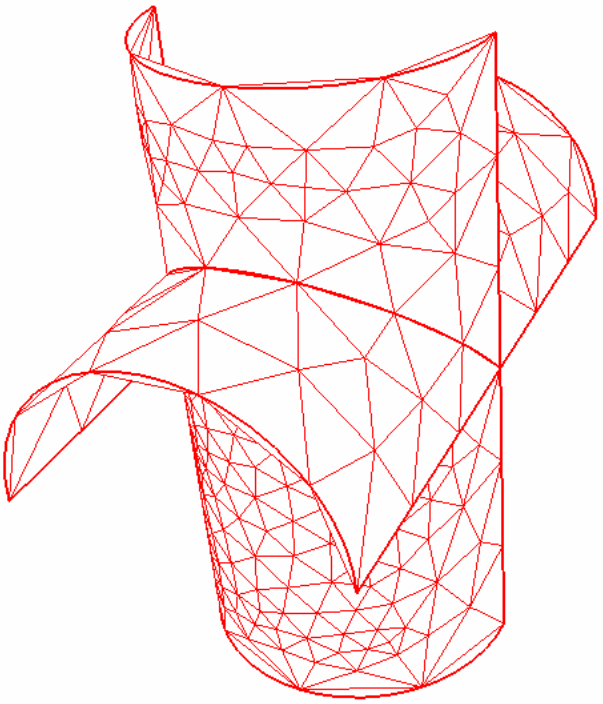

Figura 13 – Malha resultante da interseção entre superfícies.

5. EXEMPLOS

Para validar as idéias apresentadas e verificar a robustez e eficiência do procedimento para interseção entre superfícies descrito neste trabalho, a estratégia foi implementada em um modelador geométrico, denominado MG (Lira, 2002), aumentando a sua capacidade para modelagem de problemas complexos de engenharia. Para ilustrar essas novas capacidades, esta seção apresenta um exemplo de modelagem, focando no processo de interseção proposto.

Esse exemplo corresponde a interseção entre um semi-cilindro e uma superfície com geometria bem comportada, mas com representação matemática explícita indefinida. A Fig.

14 mostra as superfícies e suas respectivas malhas originais. A Fig. 15 mostra os pontos resultantes da interseção entre as faces planares geradas a partir da conversão dos elementos finitos de cada malha. Essa figura apresenta também a poligonal associada a esses pontos e geradas por interpolação linear. A Fig. 16 mostra os pontos de interseção após a aplicação do procedimento de Newton-Raphson para projeção de pontos em superfícies. A Fig. 17 ilustra a curva de interseção resultante, enquanto que a Fig. 18 mostra a malha final após a interseção. Nessa Fig. 18 pode-se observar que as malhas resultantes são compatíveis, atendendo aos critérios requeridos pelo método dos elementos finitos.

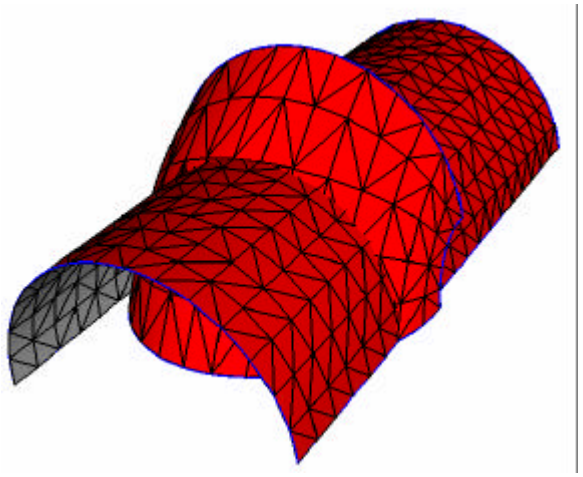

Figura 14 – Superfícies e malhas originais.

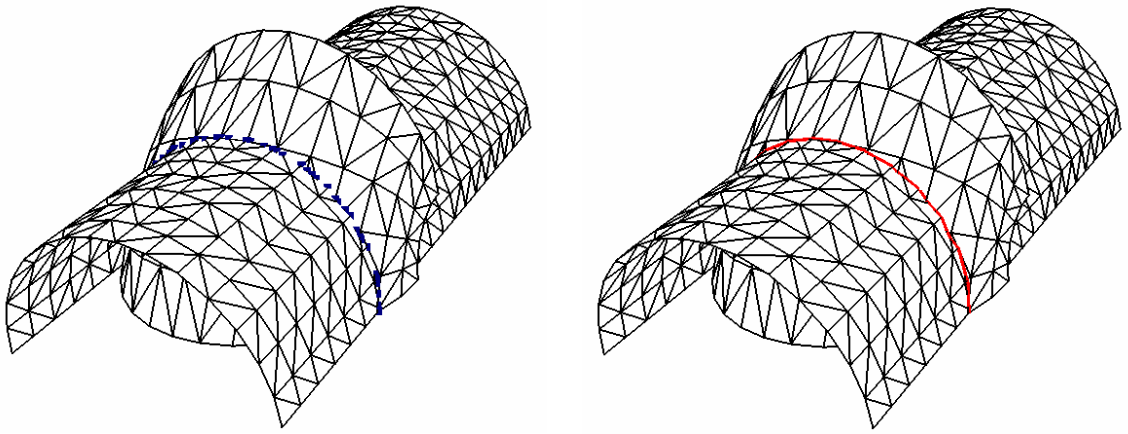

Figura 15 – Pontos resultantes da interseção entre as faces planares.

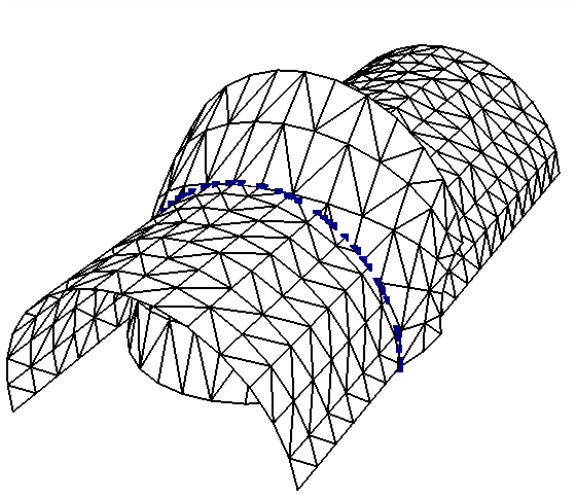

Figura 16 – Pontos de interpolação obtidos após a aplicação do esquema de Newton-Raphson.

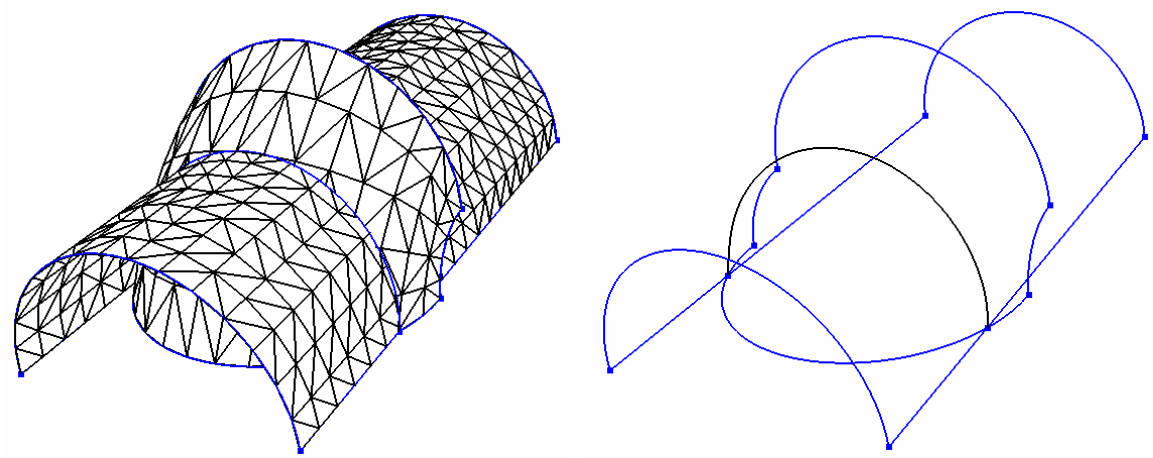

Figura 17 – Curva de interseção resultante.

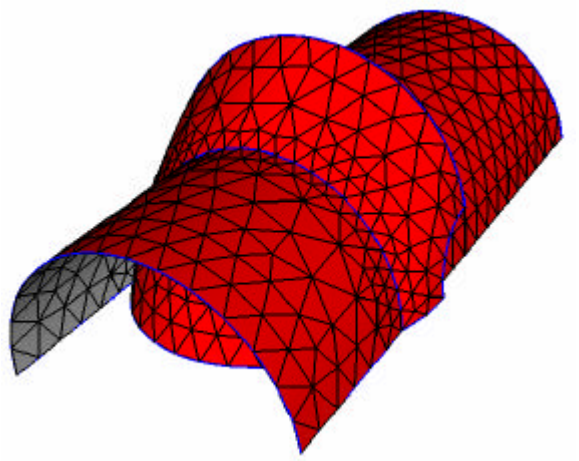

Figura 18 – Malhas finais resultantes após a interseção.

6. CONCLUSÕES

Este trabalho propõe um novo procedimento para o cálculo de interseções de superfícies paramétricas usadas em aplicações de elementos finitos.

O procedimento é baseado em três etapas. Na primeira, a malha triangular associada a cada superfície é convertida em uma estrutura de dados topológica baseada em uma representação espacial que representa de forma eficiente as topologias arbitrárias resultantes da interseção entre essas malhas. Essa representação permite a identificação dos pontos de interseção entre as malhas de superfícies. Esses pontos formam uma aproximação inicial para os pontos de interseção desejados.

Em um segundo passo, um esquema de Newton-Raphson é usado para projetar cada ponto de interseção em ambas superfícies paramétricas. Curvas de interseção são obtidas interpolando os pontos resultantes, Nesse procedimento, B-Splines cúbicas são usadas para representar matematicamente as curvas paramétricas resultantes.

O último passo corresponde a geração das novas malhas triangulares associadas a cada superfície resultante da interseção. Uma técnica para geração de triângulos em domínios arbitrários é utilizada.

O algoritmo é implementado em um modelador geométrico, onde testes numéricos são realizados com o objetivo de validar a metodologia proposta. Dentro do contexto deste trabalho, os resultados obtidos são satisfatórios.

Como trabalho futuro, deseja-se estudar e implementar um mecanismo para geração local da malha, mantendo a característica original da malha inicial, redefinindo-a apenas nas regiões influenciadas pela interseção.

REFERÊNCIAS

Barnhill, R.E, Farin, G., Jordan M., & Piper B.R., 1987. Surface/surface Intersection, *Computer Aided Geometric Design*, vol. 4, n. 1, pp 3-16.

Barnhill, R.E, & Kersey S., 1990. A Marching Method for Parametric Surface/surface Intersection, *Computer Aided Geometric Design*, vol. 7, n. 1, pp 257-280.

Cavalcanti, P.R., 1992. *Criação e Manutenção de Subdivisões do Espaço*, PhD Thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Cavalcanti, P.R., Carvalho, P.C.P., & Martha, L.F., 1997. Non-manifold Modeling: An Approach Based on Spatial Subdivision, *Computer-Aided Design*, vol. 29, n. 3, pp 209-220.

Coelho, L.C.G., Gattass, & M., Figueiredo, L.H., 2000. Intersecting and Trimming Parametric Meshes on Finite-Element Shells, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, n. 1, pp 777-800.

Hougthon, E., Emnett, E., Factor, R., & Sabharwal, L., 1985. Implementation of a Divide-and-Conquer-Method for the Intersection of Parametric Meshes, *Computer Aided Geometric Design*, vol. 2, n. 1, pp 173-184.

Lira, W.W.M., Coelho, L.C.G., & Martha, L.F., 2002. Multiple Intersections of Finite-Element Surface Meshes, *Proceedings of 11th International Meshing Roundtable*, pp 355-363.

Lira, W.W.M., 2002. *Modelagem Geométrica para Elementos Finitos Usando Multi-Regiões e Superfícies Paramétricas*, PhD Thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Lo, S.H., 1995. Automatic Mesh Generation over Intersecting Surfaces, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, n. 1, pp 943-954.

Miranda, A.C.O, & Martha, L.F., 2002. Mesh Generation on High-Curvature Surfaces based on a Background Quadtree Structure, *Proceedings of 11th International Meshing Roundtable*, pp 333-341.

Piegl, L., Tiller, W., 1999. *The Nurbs Book*, ed. 2, Springer.

Rossignac J.R., & O'Connor M.A., 1990. A Dimensional-independent Model for Point sets with Internal Structures and Incomplete Boundaries, *Geometric Modeling for Product Engineering*, pp 145-180.

Stoyanov, T.E., 1992. Marching Along Surface/surface Intersection Curves with an Adaptive Step Length, *Computer Aided Geometric Design*, vol. 9, n. 1, pp 485-489.

Weiler, K., 1986. Topological Structures for Geometric Modeling, *Geometric Modeling for Product Engineering*, PhD Thesis, Rensselear Polytechnic Institute.