UMA METODOLOGIA PARA ANÁLISE ADAPTATIVA 3D USANDO MODELAGEM GEOMÉTRICA COM MULTI-REGIÕES E SUPERFÍCIES PARAMÉTRICAS

William W. M. Lira
william@ctec.ufal.br
Departamento de Engenharia Estrutural, Universidade Federal de Alagoas
Campus A. C. Simões, BR 104, km 97, Tabuleiro do Martins, Maceió - AL – Brasil, CEP: 57072-970
Antonio C. O. Miranda
Luiz F. Martha
amiranda@tecgraf.puc-rio.br
lfm@tecgraf.puc-rio.br
Departamento de Engenharia Civil e Grupo de Tecnologia em Computação Gráfica (Tecgraf), Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro - RJ – Brasil
Joaquim B. Cavalcante-Neto
joaquimb@lia.ufc.br
Departamento de Computação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza - CE – Brasil

Abstract. *This work presents a methodology for adaptive generation of 3D finite-element meshes using geometric modeling with multi-regions and parametric surfaces. The adaptive strategy adopted in this methodology is based on independent refinements of curves, surfaces and solids. Initially, the model's curves are refined using a binary-partition algorithm in parametric space. The discretization of these curves is used as input for the refinement of adjacent surfaces. Surface discretization is also performed in parametric space and employs a quadtree-based refinement coupled to an advancing-front technique for the generation of an unstructured triangulation. These surface meshes are used as input for the refinement of adjacent volumetric domains. Volume discretization combines an octree refinement with an advancing-front technique to generate an unstructured mesh of tetrahedral elements. In all stages of the adaptive strategy, the refinement of curves, surface meshes, and solid meshes is based on estimated numerical errors associated to the mesh of the previous step in the adaptive process. In addition, curve and surface refinement takes into account metric distortions between parametric and Cartesian spaces and high curvatures of the model's geometric entities. The adaptive strategy is implemented in a modeler, called MG, which is responsible for the creation of a geometric model with multi-regions, in which curves and surfaces are represented by NURBS, and for the interactive and automatic finite-element mesh generation associated to surfaces and solid regions. Numerical examples of the simulation of engineering problems are presented in order to validate the methodology proposed in this work.*

Keywords: *Finite Element Method, Mesh Generation, Adaptive Analysis, Geometric Modeling*

1. INTRODUÇÃO

Em simulações numéricas usando o Método dos Elementos Finitos (MEF), dois importantes aspectos que devem ser considerados são a geração automática da malha de elementos finitos do modelo e a definição do grau de refinamento associado a essa malha. Esse refinamento deve ocorrer de modo que a densidade dos elementos gerados varie com o gradiente da solução obtida. Neste contexto, técnicas adaptativas são procedimentos úteis que auxiliam na definição de tais aspectos.

Algumas estratégias têm sido propostas para considerar esses aspectos de uma forma eficiente. Em trabalho anterior apresentado pelos autores (Cavalcante-Neto et al., 1998), foi proposta uma estratégia auto-adaptativa bidimensional capaz de realizar simulações envolvendo geração de malhas e métodos adaptativos de forma automática. Outros trabalhos também foram propostos para considerar o mesmo problema usando diferentes enfoques como, por exemplo, o grupo de Mark Shephard (Baehmann & Shephard, 1989), do Instituto Politécnico de Rensselaer, Estados Unidos. Em três dimensões, entretanto, o desenvolvimento de análises adaptativas é mais complicado porque a geração de malhas volumétricas e a obtenção dos estimadores de erros são tarefas muito mais complexas. Pesquisas têm sido realizadas em ambas as áreas para desenvolver métodos e algoritmos capazes de tratar este problema em 3D. Outro trabalho anterior relacionado com os autores (Cavalcante-Neto, 1998) propôs uma técnica de geração de malhas volumétricas de elementos tetraédricos, para domínios de região arbitrária, que, juntamente com a implementação de estimadores de erro em três dimensões, também mostrados nesse trabalho, definiram um protótipo de um ambiente para geração adaptativa em três dimensões. Entretanto, esse trabalho não gerava todo o processo automaticamente, isto é, a malha era gerada independentemente da estimativa de erro, que tinham que ser combinadas separadamente. Além disso, apesar de tratar multi-regiões, não o fazia de forma totalmente eficiente e não tratava superfícies paramétricas, essencial em vários tipos de simulações.

O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma metodologia para a geração adaptativa de malhas de elementos finitos tridimensionais usando modelagem geométrica com multi-regiões e superfícies paramétricas. A estratégia adaptativa adotada é baseada no refinamento independente de curvas, superfícies e sólidos.

Inicialmente, as curvas do modelo são refinadas usando um algoritmo de subdivisão binária no seu espaço paramétrico. A discretização dessas curvas é usada como dado de entrada para o refinamento das superfícies adjacentes.

A discretização das superfícies também é feito no seu espaço paramétrico e usa refinamento baseado em *quadtrees* acoplados a uma técnica de avanço de fronteira para a geração de malhas triangulares não-estruturadas (Miranda & Martha, 2002). Essas superfícies são usadas como dado de entrada para o refinamento dos domínios volumétricos adjacentes.

A discretização do volume combina uma técnica de decomposição espacial recursiva, usando uma *octree* como estrutura auxiliar, com uma técnica de avanço de fronteira (Cavalcante-Neto et al., 2001) para obter uma malha não-estruturada de elementos tetraédricos.

Em todos os estágios da estratégia adaptativa apresentada, o refinamento das curvas, malhas de superfícies e malhas sólidas é baseado em erros numéricos estimados associados à malha do passo anterior do processo adaptativo. Além disso, o refinamento de curvas e superfícies também consideram distorções métricas entre os espaços paramétricos e Cartesiano e grandes curvaturas das entidades geométricas do modelo.

Os erros numéricos são armazenados em uma estrutura auxiliar de composição espacial recursiva, denominada *octree*, cujo objetivo principal é aumentar a performace na realização de buscas nas suas folhas internas.

A estratégia adaptativa é implementada em um modelador, chamado MG (Coelho et al, 2000; Lira et al., 2002), que é responsável pela criação do modelo geométrico com multi-regiões, onde as curvas e superfícies são representadas por NURBS (Piegl & Tiller, 1999), e pela geração da malha de elementos finitos associadas a essas superfícies e aos sólidos do modelo.

A Seção 2 deste trabalho apresenta os detalhes da estratégia adaptativa desenvolvida. A geração da *octree* global é apresentada na Seção 3. A Seção 4 trata do refinamento das curvas, enquanto que as Seções 5 e 6 abordam o processo de discretização das superfícies e sólidos do modelo. A Seção 7 apresenta exemplos numéricos usados para validar a metodologia proposta, simulando problemas de engenharia. Por fim, a Seção 8 descreve as conclusões deste trabalho.

2. ESTRATÉGIA

A estratégia adaptativa, proposta neste trabalho, para análise de modelos tridimensionais pelo MEF é resultante da aplicação de técnicas para geração de malhas não estruturadas em superfícies e regiões, combinadas com erros numéricos associados à discretização. Os estimadores de erros numéricos são implementados a partir de procedimentos desenvolvidos para modelos bidimensionais (Paulino et al., 1999) e estendidos para três dimensões (Cavalcante-Neto, 1998). Esses estimadores de erros numéricos baseiam-se em técnicas de estimativa de erro bem difundidas na literatura, chamadas *Superconvergent Recovery Technique* (SPR) (Zienkiewicz & Zhu, 1992a; Zienkiewicz & Zhu, 1992b; Zienkiewicz & Zhu, 1994) e *Recovery by Equilibrium in Patches* (REP) (Boroomand & Zienkiewicz, 1997). Os estimadores de erros numéricos foram implementados em um programa para análise numérica por elementos finitos (Martha & Parente Jr., 2002) em cujo desenvolvimento os autores estiveram envolvidos. Vale a pena ressaltar que a troca dessas técnicas de estimativa de erro por qualquer outra técnica mais recente ou mais eficiente pode ser feita de maneira fácil e direta, facilitada pela organização orientada a objetos do programa de análise. A Fig. 1 ilustra o processo de refinamento adaptativo proposto neste trabalho.

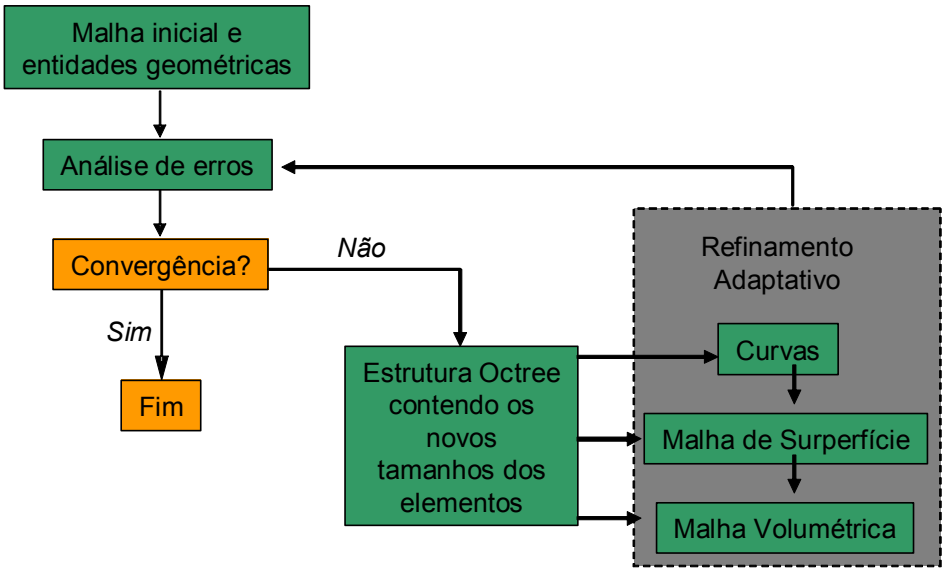

Figura 1 – Processo de refinamento adaptativo proposto.

A estratégia tem como dado inicial a malha volumétrica do problema correspondente e as entidades geométricas (curvas e superfícies) associadas ao modelo. Em um primeiro instante, essa malha é analisada numericamente, fornecendo as informações necessárias para o início do procedimento adaptativo. Essas informações são basicamente os erros numéricos associados à cada elemento volumétrico da discretização. A partir desses erros, verifica-se a necessidade ou não da realização do refinamento adaptativo. Se houver uma convergência dos resultados alcançados, o processo adaptativo é encerrado.

Se a convergência não é obtida, os tamanhos de novos elementos são calculados com base nos erros numéricos da análise de erro. Todos os dados dos novos tamanhos são armazenados em uma estrutura auxiliar de composição espacial recursiva, uma árvore octária (*octree*), que tem a vantagem de realizar busca rápida nas folhas internas. Essa estrutura tem também a vantagem de representar o tamanho desejado do elemento com aproximadamente o mesmo tamanho das folhas internas. Por esses motivos, a estrutura *octree* é utilizada para auxiliar na discretização da curvas, malhas de superfície e também da malha volumétrica.

Primeiramente, as curvas são refinadas com base na estimativa de erros dos elementos armazenados na *octree* e que são adjacentes às curvas em questão, obtidos na análise numérica da malha do passo anterior, e com o auxílio de uma estrutura de dados de árvore binária. Esse refinamento vai subdividir as curvas em segmentos cujos tamanhos são consistentes com os tamanhos da análise de erro. Isto é mostrado na Seção 4.

Após o refinamento das curvas, é realizada a discretização das malhas associadas a cada uma das superfícies do modelo. No refinamento dessas malhas, é utilizada uma estrutura de decomposição espacial recursiva, auxiliando a sua construção. Nesta fase, dois importantes detalhes são considerados. O primeiro refere-se à utilização de erros numéricos associados aos elementos volumétricos adjacentes a uma dada superfície na discretização da sua malha, gerando elementos de superfície compatíveis com os erros utilizados. O segundo detalhe refere-se à utilização, no refinamento, de critérios geométricos para garantir uma malha mais discretizada em locais com acentuadas curvaturas. Esses detalhes provêm características numéricas e geométricas no refinamento das malhas de superfícies do modelo. Isto é mostrado na Seção 5.

A última fase (Seção 6) do processo de refinamento adaptativo relaciona-se à discretização dos domínios das regiões do modelo. Essa discretização é realizada a partir das malhas de elementos finitos associadas às superfícies do contorno dessas regiões, considerando também os erros numéricos associados aos elementos das malhas volumétricas do passo anterior do processo adaptativo. Mais uma vez, por se tratar de uma metodologia que permite tratar multi-regiões, cada região somente leva em consideração os elementos à ela associados.

Ao final, nova análise de erros é realizada para verificar a qualidade dos resultados alcançados. Todo o processo adaptativo é repetido caso a convergência não tenha sido obtida.

3. GERAÇÃO DA OCTREE GLOBAL

São dois os objetivos principais da *octree* auxiliar. O primeiro é desenvolver diretrizes locais usadas para definir a discretização das curvas e malhas de superfície. O segundo é definir os tamanhos dos elementos tetraédricos a serem gerados durante o procedimento de avanço da fronteira.

A geração da *octree* envolve dois passos. Em um primeiro passo, a *octree* é inicializada baseada nos dados de entrada, que são os novos tamanhos dos elementos resultantes da análise de erro. Em um outro passo, a *octree* é refinada para se obter uma melhor transição dos tamanhos dos elementos gerados no avanço da fronteira no refinamento das superfícies.

3.1 Geração da octree baseada nos novos tamanhos dos elementos

Inicialmente, um cubo envolvente é criado baseado no máximo intervalo de qualquer uma das três coordenadas cartesianas dos nós dos dados de entrada. Este cubo é a célula raiz da *octree.* No primeiro passo de refinamento da *octree*, cada resultado de erro do elemento da malha de contorno fornecida é usado para determinar a profundidade local da subdivisão. As coordenadas dos pontos de integração de Gauss de cada elemento e a razão de erro são determinados. Com auxílio de técnicas de estimativa de erros, são determinados novos tamanhos dos elementos para cada ponto de Gauss. A célula da *octree* contendo a coordenada do ponto de Gauss é determinada. Se a área da face da célula é maior do que o tamanho dado, então esta célula é subdividida em oito células menores. Este processo é repetido recursivamente e acaba quando a área da face da célula é menor do que um fator do tamanho dado. Nesta implementação, um fator de 0,4 foi usado. O uso deste fator é recomendado em alguns trabalhos baseados em *octree* encontrados na literatura (Shephard e Georges, 1991), para evitar o excessivo refinamento quando da construção da *octree*. Este processo é repetido para todas as faces do contorno do modelo fornecidas. O resultado é ilustrado na Fig. 2 para o exemplo bidimensional, usando uma *quadtree*.

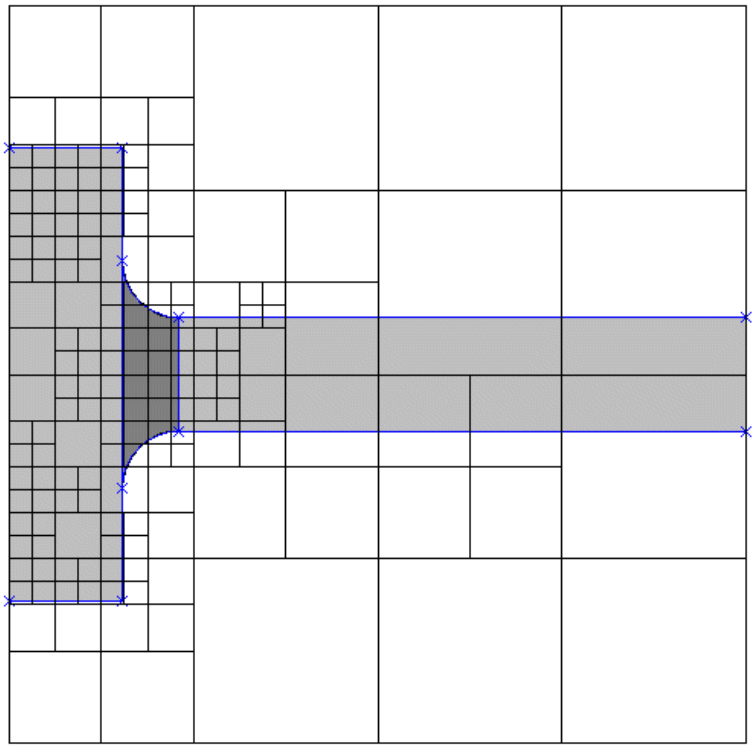

Figura 2 – Geração da *octree*, mas exemplificada com uma *quadtree*, baseada nos novos tamanhos dos elementos.

3.2 Refinamento da octree para forçar disparidade de tamanho mínima

A *octree* é posteriormente processada para forçar um único nível de diferença entre células vizinhas. Isto força uma transição natural entre regiões com diferentes graus de refinamento. Esta operação é realizada percorrendo a *octree* e examinando o nível de

refinamento entre células adjacentes. Se a diferença é mais do que um nível, as células apropriadas são refinadas até que o critério seja satisfeito. A Fig. 3 mostra a *quadtree* gerada para o exemplo bidimensional após a aplicação desse procedimento.

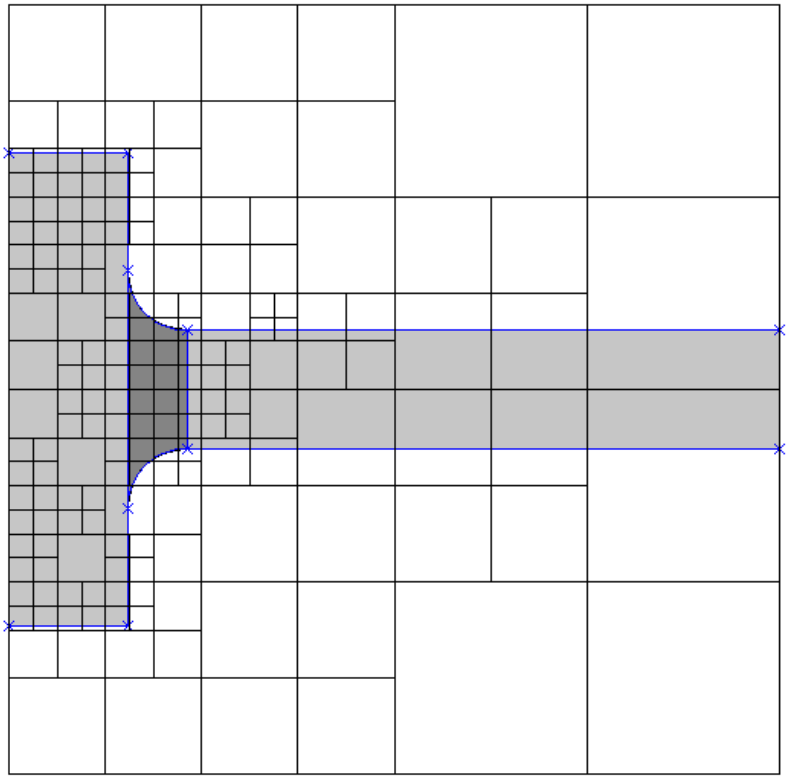

Figura 3 - Geração da *octree*, mas exemplificada com uma *quadtree*, para forçar disparidade de tamanho mínima.

4. REFINAMENTO DAS CURVAS

A metodologia utilizada no refinamento das curvas do modelo é uma versão unidimensional do procedimento utilizado para discretizar as superfícies. O refinamento de cada curva utiliza uma técnica de enumeração espacial recursiva baseada em uma estrutura de dados de árvore binária (*binary tree*). A idéia é gerar uma discretização nas curvas em função de suas curvaturas e dos tamanhos característicos (análise de erro) dos elementos adjacentes a essas curvas. Esses tamanhos característicos são calculados com base na estimativa de erro numérico de cada elemento no passo anterior do processo adaptativo.

No início do processo, o comprimento e o ponto médio da curva são obtidos. A partir do ponto médio é obtido a célula na *octree* global onde o ponto se encontra. Faz-se então a comparação para saber se a curvatura no ponto atende um critério de curvatura máxima e se o tamanho do segmento é menor que o tamanho da célula correspondente. Se os dois critérios forem atendidos, o processo é interrompido e prossegue para o passo de obtenção do pontos sobre a curva. Caso contrário, a curva é subdividida em duas partições e cada partição é testada, de mesmo modo como foi descrito para toda a curva, até que atenda os dois critérios em todos os pontos. As subdivisões da curva em partições são subdivisões na árvore binária, como mostra o exemplo da Fig. 4. Cada folha da árvore (célula que não possui filho) vai gerar uma aresta na curva refinada.

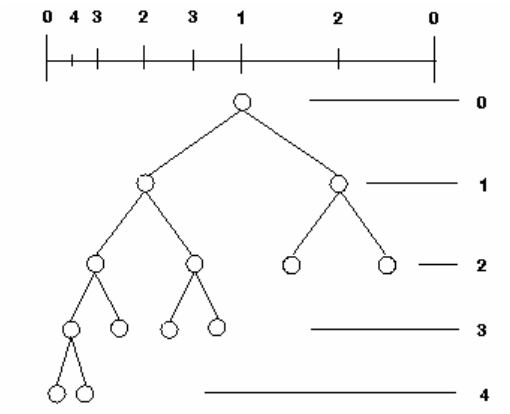

Figura 4 – Curva discretizada e sua árvore binária correspondente.

5. DISCRETIZAÇÃO DAS SUPERFÍCIES

A discretização da malha em cada superfície é baseada no algoritmo apresentado pelos autores (Miranda & Martha, 2002). Esse algoritmo é aplicado na geração de malhas triangulares em superfícies com geometria arbitrária utilizando a sua descrição paramétrica. Essa descrição paramétrica é utilizada por ser mais comum e eficiente, pois a geração da malha é realizada a partir da utilização de técnicas de triangulação bidimensional, com correções de distorção da geometria da superfície. Utilizando o seu espaço paramétrico, a superfície 3D é mapeada para uma superfície 2D e, então, a triangulação é realizada com correção de distorções. Em seguida, a malha resultante dessa triangulação é reconduzida ao espaço 3D. Tal processo pode ser visualizado na Fig. 5.

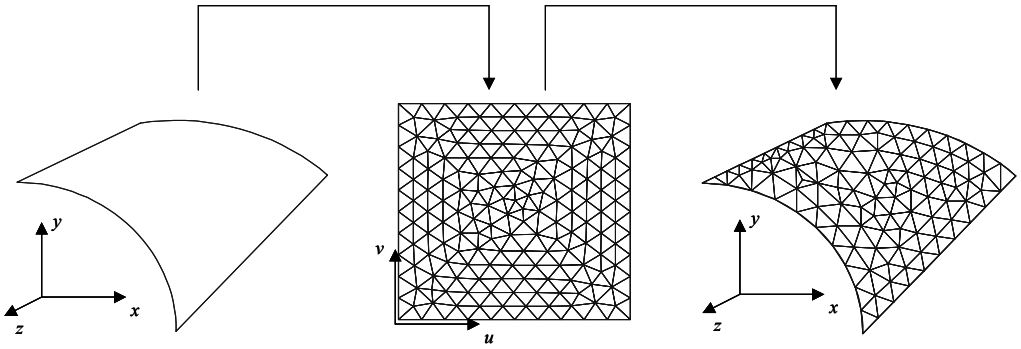

Figura 5 – Geração de malhas em superfícies.

Esse algoritmo utilizado na geração de malhas em superfícies é baseado na combinação de técnicas de avanço de fronteira com decomposição espacial recursiva. Essa decomposição é realizada utilizando-se uma árvore quaternária (*quadtree*) para armazenar métricas e desenvolver diretrizes locais usadas na definição do tamanho dos elementos que serão gerados.

A geração da *quadtree* possui quatro etapas. A primeira refere-se à sua construção inicial que é baseada na discretização do contorno fornecida. No entanto, essa construção inicial pode deixar células no interior do domínio com tamanho bem maior que as células localizadas

na proximidade do contorno. A segunda etapa é usada para refinar a *quadtree*, garantindo que nenhuma célula no interior seja maior que a maior célula no contorno. Na seqüência, faz-se um novo refinamento forçando um único nível de diferença entre células vizinhas. Essa operação garante uma transição natural e suave entre regiões com diferentes graus de refinamento. Depois, outra etapa é responsável pelo refinamento das células em locais com acentuada curvatura na superfície tridimensional. Essa etapa é importante, pois evita que aspectos pontiagudos sejam visíveis em células adjacentes, apresentando uma transição ainda mais suave da curvatura entre células. Finalmente, os tamanhos provenientes da análise de erro, armazenados na *octree* global, são utilizados no refinamento final da *quadtree*. Desse modo, a geração dos novos elementos triangulares irão refletir os tamanhos resultantes da análise de erro. Essa seqüência descrita na geração e refinamento da quadtree é ilustrada na Fig. 6. Já a Fig. 7 ilustra um exemplo de geração de malha em uma superfície considerando os aspectos relacionados à acentuadas curvaturas.

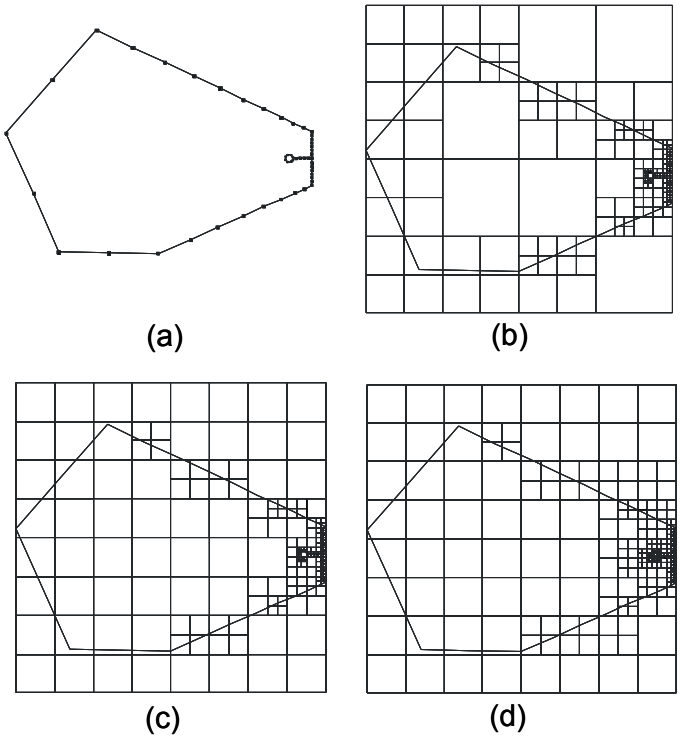

Figura 6 - Geração da quadtree: (a) Modelo 2D e seu refinamento no contorno; (b) *Quadtree* inicial; (c) *Quadtree* após o primeiro refinamento; (d) *Quadtree* após o segundo refinamento.

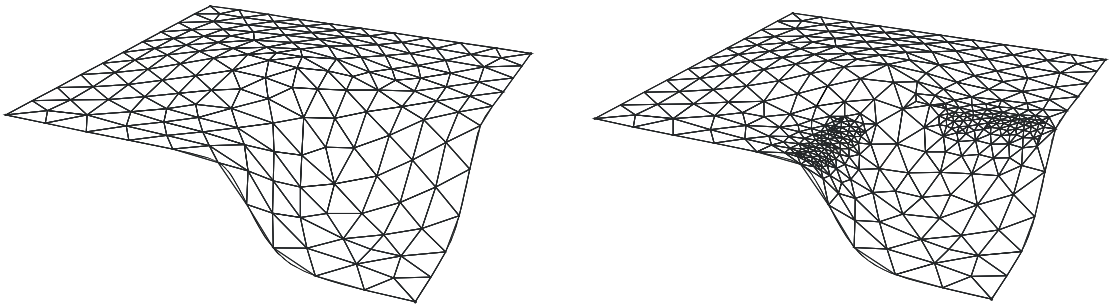

Figura 7 – Malha em uma superfície 3D.

A técnica de avanço de fronteira é baseada em um procedimento padrão encontrado na literatura, com pequenas modificações (Miranda & Martha, 2002). Esse procedimento inicia-se pelo contorno que delimita o domínio a ser preenchido com uma malha triangular. O processo de avanço de fronteiras é dividido em duas fases. Na primeira, tenta-se gerar elementos com forma ótima baseados em geometria. Idealmente, a malha do domínio deve ser inteiramente gerada nesta fase. No entanto, isso depende principalmente da discretização do domínio fornecida. Essa fase inicia-se com a criação de uma fronteira de avanço inicial. Essa fronteira é formada pelos segmentos discretizados no contorno fornecidos como dados de entrada. Esse contorno avança tentando-se formar triângulos baseados principalmente em considerações geométricas. Se, após a realização dessa fase inicial, elementos ótimos não forem mais criados, inicia-se a segunda fase do procedimento. Nessa nova fase, elementos válidos são criados a partir da topologia, não garantindo que cada elemento gerado irá possuir uma boa forma.

Após as etapas de decomposição esparcial recursiva e avanço de fronteira, uma técnica de suavização é aplicada para melhorar a qualidade da malha através do reposicionamento de nós dentro de um retalho (grupo de elementos adjacentes). Uma formulação deste procedimento é descrito a partir da forma genérica de uma Função Laplaciana Ponderada (Miranda & Martha, 2002).

6. DISCRETIZAÇÃO DOS VOLUMES

A discretização da malha em cada região fechada do modelo é baseada em uma técnica utilizada para a geração de elementos tetraédricos em domínios arbitrários apresentado pelos autores (Cavalcante-Neto et al., 2001). Assim como o procedimento usado na geração de malhas em superfícies, este é baseado na técnica de avanço de fronteira combinado com uma técnica de decomposição espacial recursiva. Neste caso tridimensional, a decomposição é realizada com o auxílio da árvore *octree* global apresentada na Seção 4.

A partir da *octree* global, é aplicada a técnica de avanço de fronteira. Essa técnica é baseada em um procedimento padrão encontrado na literatura, com duas fases adicionais (Cavalcante-Neto et al., 2001), utilizadas para garantir a geração de malhas volumétricas válidas para quaisquer domínios. Esse procedimento é dividido em três fases. A primeira refere-se a geração de elementos e é realizada baseando-se apenas em informações geométricas. Nessa fase, tenta-se gerar elementos tetraédricos com formas ótimas.

A segunda fase é aplicada quando não é mais possível gerar elementos baseados em geometria. Então, utiliza-se as informações topológicas para criar elementos válidos, mas não necessariamente com boa forma.

O processo de avanço de fronteira encerra-se com a aplicação de um procedimento de "volta-passo" (*back-tracking*), onde algumas faces dos elementos que estão impedindo o avanço do algoritmo são eliminadas.

Após as técnicas de decomposição espacial recursiva e avanço de fronteira serem aplicadas, um procedimento de suavização convencional é utilizado para tentar gerar elementos com formas ótimas. Esse procedimento consiste, basicamente, na relocação de nós baseado na média das coordenadas nodais, com testes de validação.

A estratégia utilizada para o refinamento adaptativo das malhas volumétricas usam a mesma árvore *octree* global descrita anteriormente, gerando células cujos tamanhos são baseados nos erros numéricos obtidos na análise de erros.

7. EXEMPLOS

Esta seção apresenta exemplos que servem para ilustrar e validar a estratégia adaptativa que está sendo proposta no presente trabalho. Dois problemas bidimensionais de engenharia são utilizados como exemplos. Modelos tridimensionais, como os mostrados na Fig. 8, não são ilustrados, pois a estratégia adaptativa proposta neste trabalho ainda está fase de desenvolvimento.

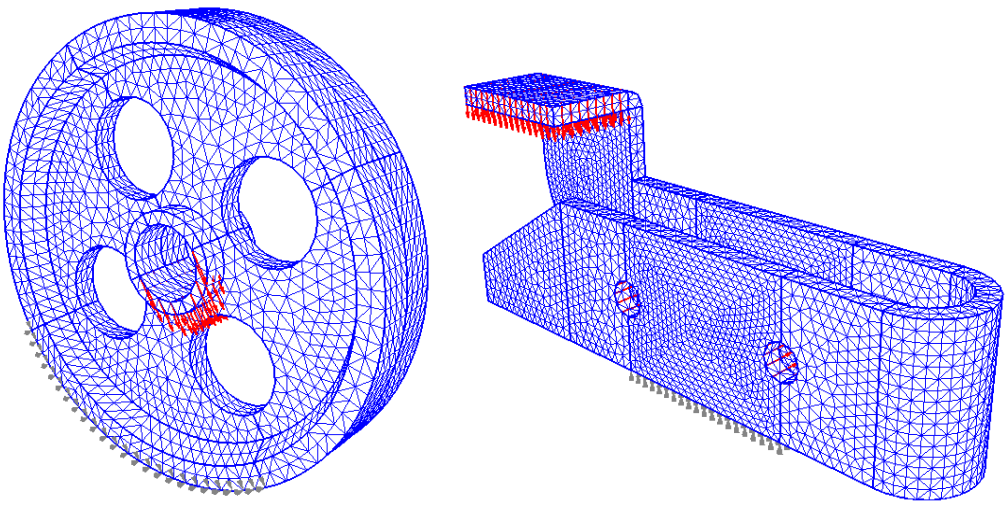

Figura 8 – Exemplos de modelos tridimensionais.

Os exemplos abordam desde a descrição geométrica do problema, até a obtenção dos resultados finais de malha e tensões. A malha inicial é gerada a partir da subdivisão das curvas do contorno, que podem ser quaisquer, sem consideração de tamanho e forma dos elementos. Com a análise de erro, obtêm-se os parâmetros necessários para o refinamento adaptativo e, por conseguinte, uma melhor qualidade da malha de elementos finitos.

O exemplo 1 representa uma ligação submetida à tração cujas condições de contorno impostas e a geometria do modelo são mostradas na Fig. 9. A Fig. 10 ilustra a seqüência de refinamento adaptativo da malha. A Fig. 10(a) mostra a malha inicial cuja qualidade dos elementos não foi considerada na sua geração. Por exemplo, pode-se observar que na extremidade direta do modelo existem elementos bastante distorcidos e alongados. Isso gerou uma descontinuidade muito grande entre os resultados dos elementos, conforme apresentado na Fig. 10(b). Esses resultados foram utilizados para o cálculo de novos tamanhos de elementos, que por sua vez, foram utilizados na geração de uma nova discretização adaptativa das curvas de bordo e malha do domínio (Fig. 10(c)). O mesmo processo foi novamente realizado resultando na malha da Fig. 10(d). Finalmente, a Fig. 11 representa as tensões horizontais provenientes de análise com o uso da malha final. Esses resultados ficaram mais suavizados em relação aos mostrados na Fig. 10(b).

Alguns comentários podem se obtidos a partir do exemplo 1. Observa-se que na Fig. 10(d) houve um desrefinamento da malha na extremidade direita em relação à Fig. 10(c). Esse comportamento é uma característica dessa estratégia: os elementos são refinados ou desrefinados de acordo com os resultados da análise adaptativa. Outro comportamento importante é a transição de tamanho entre elementos da malha que é aproximadamente igual à transição proveniente da *quadtree*. Por isso, a importância de se utilizar o passo descrito na Seção 3.2, onde o refinamento da quadtree força uma disparidade de tamanho mínima.

Observa-se ainda que apesar da geometria do modelo e de suas condições de contorno serem simétricas, não existe uma simetria na malha final obtida. Isso ocorre porque os elementos da malha inicial não estão dispostos simetricamente ao longo do modelo, provocando tal efeito.

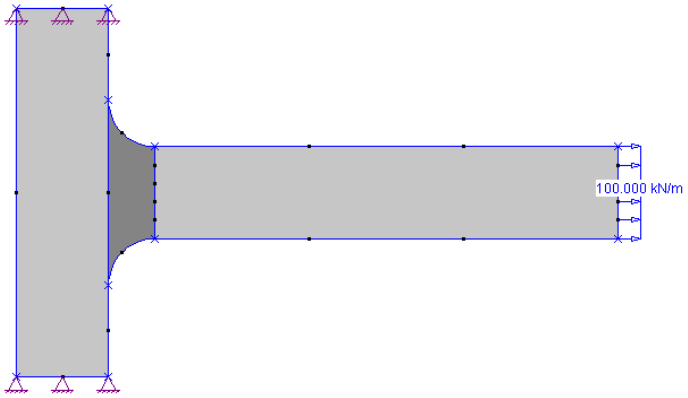

Figura 9 – Geometria e condições de contorno do exemplo 1.

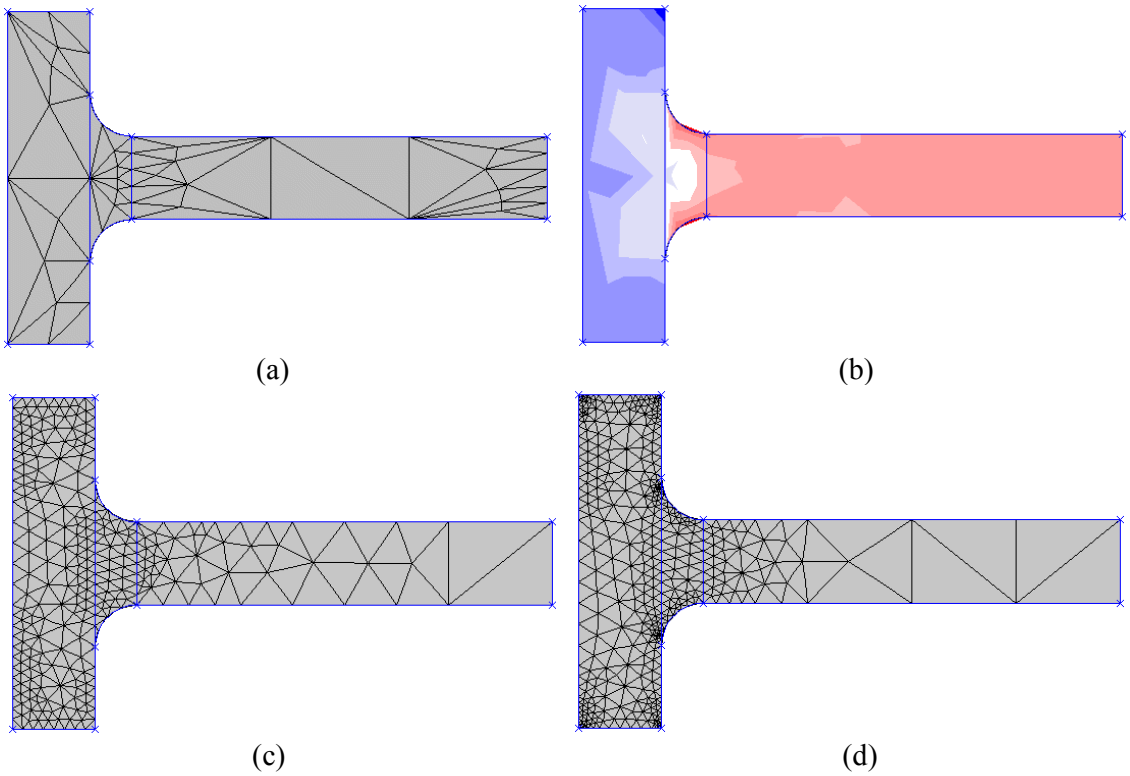

Figura 10 – (a) Malha inicial qualquer do exemplo 1; (b) Resultados associados à malha inicial: tensão na direção horizontal; (c) Malha após um passo de refinamento; (d) Malha final obtida após dois passos de refinamento.

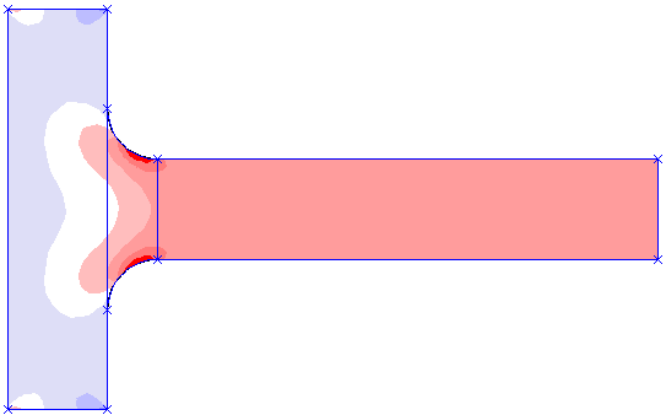

Figura 11 – Resultado associado à malha final do exemplo 1: tensão na direção horizontal.

A mesma análise adaptativa foi realizada em uma viga simétrica entalhada e bi-apoiada sob carregamento horizontal constante, de acordo com a Fig. 12. A Fig. 13 mostra o processo adaptativo de refinamento: (a) malha inicial sem nenhuma consideração de qualidade dos elementos; (b) resultados de tensões horizontais provenientes da malha inicial (notar uma não simetria nos resultados); (c) malha após um primeiro passo de refinamento adaptativo; (d) malha após dois passos de refinamento adaptativo. Nota-se um refinamento maior no canto do entalhe, pois há uma concentração de tensões bastante acentuada neste local. Finalmente, as tensões horizontais da malha final (Fig. 14) apresentam simetria, que é um resultado bastante diferente dos iniciais (Fig. 13(b)). Observa-se novamente que a não simetria da malha final obtida é provocada pela não simetria da malha inicial utilizada no processo de refinamento.

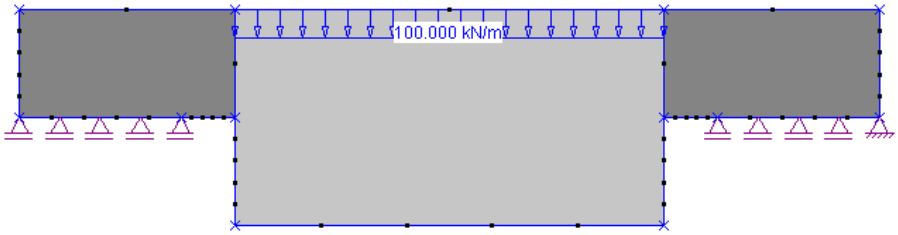

Figura 12 – Geometria e condições de contorno do exemplo 2.

Deve-se observar que em todos os exemplos mostrados acima foram utilizados elementos triangulares quadráticos para a obtenção dos estimadores de erros usados no refinamento adaptativo da malha de elementos finitos.

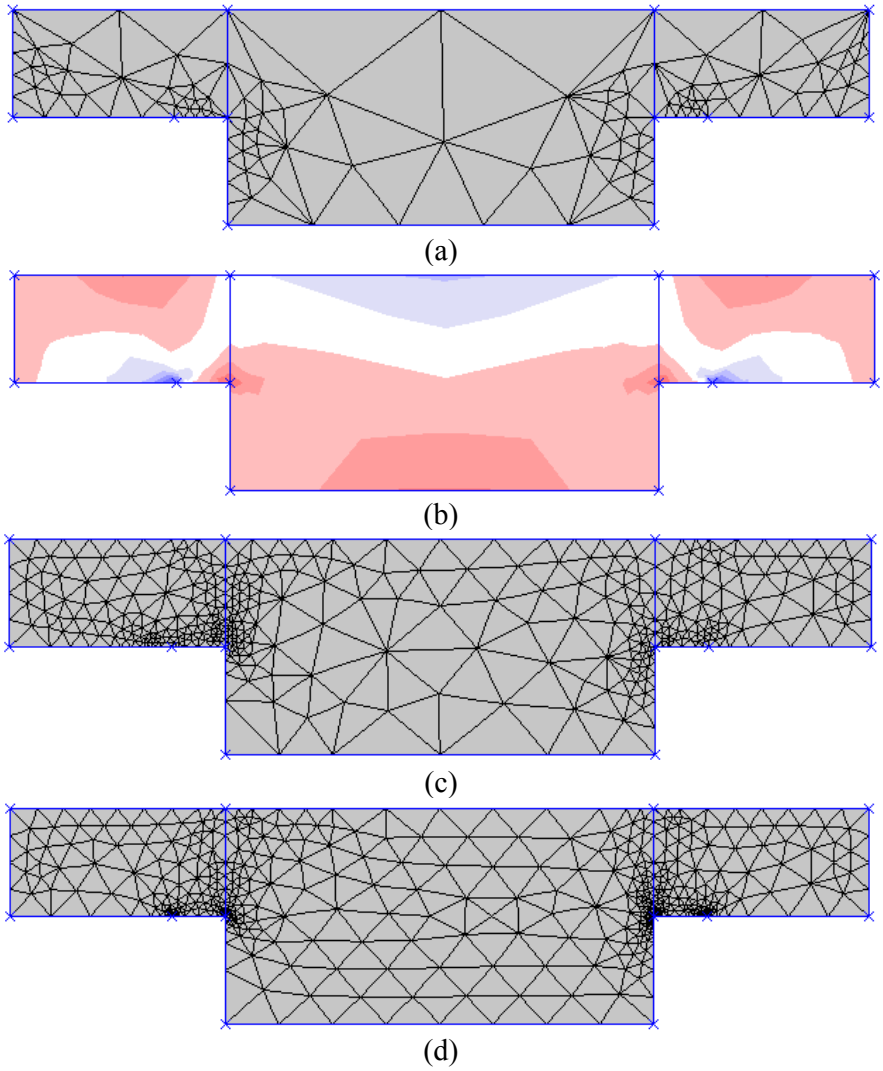

Figura 13 – (a) Malha inicial qualquer do exemplo 2; (b) Resultados associados à malha inicial: tensão na direção horizontal; (c) Malha após um passo de refinamento; (d) Malha final obtida após dois passos de refinamento.

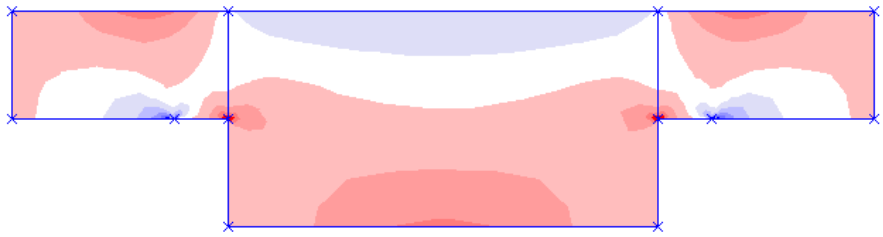

Figura 14 – Resultado associado à malha final do exemplo 2: tensão na direção horizontal.

8. CONCLUSÃO

Este trabalho propõe uma metodologia para geração adaptativa de malhas tridimensionais de elementos finitos usando modelagem geométrica com multi-regiõs e superfícies paramétricas.

A estratégia adaptativa adotada nessa metodologia é baseada no refinamento independente das curvas, superfícies e regiões do modelo. Esses refinamentos usam erros numéricos estimados associados à malha do passo anterior do processo adaptativo.

Esses erros numéricos são armazenados em uma estrutura auxiliar de composição espacial recursiva, denominada *octree*, cujo objetivo principal é aumentar a performace na realização das buscas necessárias no processo adaptativo proposto. A utilização dessa estrutura é uma das vantagens apresentadas pelo presente trabalho, pois permite a utilização da estratégia de uma forma rápida e eficiente, evitando buscas exaustivas nas estruturas de dados dos módulos adaptativos.

Os refinamentos das curvas e superfícies consideram também as distorções métricas entre os espaços paramétricos e Cartesiano e grandes curvaturas das entidades geométricas do modelo.

A estratégia adaptativa proposta é implementada em um modelador, denominado MG, o qual é responsável pela criação do modelo geométrico com multi-regiões e curvas e superfícies paramétricas do tipo NURBS. O modelador também é responsável pela geração, tanto em superfícies quanto em sólidos, das malhas de elementos finitos usadas no processo adaptativo.

Dois exemplos numéricos de simulação de problemas de engenharia são apresentados para validar a metodologia proposta neste trabalho. Esses exemplos são bidimensionais, pois a implementação computacional da presente estratégia ainda está em desenvolvimento.

Agradecimentos

O primeiro autor é bolsista recém-doutor e agradece ao apoio e suporte financeiro provido pela agência CNPq (processo número 305341/02-2). O presente trabalho é multi-departamental e parte dele foi desenvolvido no Tecgraf/PUC-Rio (Grupo de Tecnologia em Computação Gráfica).

REFERÊNCIAS

Baehmann, P.L. & Shephard, M.S., 1989. Adaptive Multiple-Level h-Refinement in Automated Finite Element Analysis. Engineers with Computers, vol. 5, pp. 235-247.

Boroomand B. & Zienkiewicz O.C., 1997. Recovery by Equilibrium in Patches (REP). International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 40, pp. 137-164.

Cavalcante-Neto, J.B., Martha, L.F., Menezes, I.F.M. & Paulino, G.H., 1998. A Methodology for Self-Adaptive Finite Method Analysis Using an Object Oriented Approach. Fourth World Congress on Computational Mechanics (IV WCCM), CD-rom, Buenos Aires, Argentina, pp 1-20.

Cavalcante-Neto, J.B., 1998. Mesh Generation and Error Estimative for Finite Element 3D Models with Crack. PhD Thesis, Pontifical University Catholic of Rio de Janeiro, Brazil (em português).

Cavalcante-Neto, J.B., Wawrzynek, P.A., Carvalho, M.T.M., Martha, L.F. & Ingraffea, A.R., 2001, An Algorithm for Three-dimensional Mesh Generation for Arbitrary Regions with Cracks, Engineering with Computers, vol. 17, n. 1, pp. 75-91.

Coelho, L.C.G., Gattass M. & Figueiredo L.H., 2000. Intersecting and Trimming Parametric Meshes on Finite-Element Shells. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 47, pp.777-800.

Lira, W.W.M., Coelho, L.C.G. & Martha, L.F., 2002. Multiple Intersections of Finite-Element Surface Meshes, Proceedings of 11th International Meshing Roundtable, Ithaca, NY, EUA, pp. 355-363.

Martha, L.F. & Parente Jr., E., 2002. An Object-Oriented Framework for Finite Element Programming, Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics, IACM, Vienna, Austria, Jul. 2002, on-line publication (ISBN 3-9501554-0-6), http://wccm.tuwien.ac.at, Paper-ID: 80480, pp. 10.

Miranda, A.C.O. & Martha, L.F., 2002, Mesh Generation on High-Curvature Surfaces based on a Background Quadtree Structure, Proceedings of 11th International Meshing Roundtable, Ithaca, NY, EUA, pp. 333-341.

Paulino, G.H., Menezes, I.F.M., Cavalcante-Neto, J.B. & Martha L.F., 1999. A Methodology for Adaptive Finite Element Analysis: Towards an Integrated Computational Environment, Computational Mechanics, vol. 23, pp. 361-388, Springer-Verlag.

Piegl, L. & Tiller, W., 1999. The Nurbs Book, Ottawa, Canada, Springer.

Shephard, M.S. & Georges, M.K., 1991. Automatic Three-Dimensional Mesh Generation by the Finite Octree Technique, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 32, n. 4, pp. 709-749.

Zienkiewicz O.C. & Zhu J.Z., 1992a. The Superconvergent Patch Recovery and a Posterior Error Estimates. Part 1: The Recovery Technique. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 33, pp. 1331-1364.

Zienkiewicz O.C. & Zhu J.Z., 1992b. The Superconvergent Patch Recovery and a Posterior Error Estimates. Part 2: Error Estimates and Adaptivity. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 33, pp. 1365-1382.

Zienkiewicz O.C. & Zhu J.Z., 1994. The SPR Recovery and Boundaries. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 37, pp. 3195-3196.