



CONSTRUÇÃO DE PADRÕES PARA GERAÇÃO DE MALHAS POR DECOMPOSIÇÃO HIERÁRQUICA DE DOMÍNIO

Edgar Quispe Ccapacca

edgar.edqc@gmail.com

Luiz Fernando Martha

lfm@tecgraf.puc-rio.br

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Instituto Tecgraf de Desenvolvimento de Software Técnico-Científico da PUC-Rio

R. Marquês de São Vicente, 225 - Gávea, 22451-900, RJ, Rio de Janeiro, Brasil

Abstract. Neste trabalho aborda-se a geração de malha quadrilateral sobre domínios delimitados por três e quatro curvas de bordo usando padrões de decomposição de domínio, os quais são aplicados sobre domínios que satisfazem um conjunto de condições chamadas de essenciais que permite a geração de malha sobre eles. No entanto, a metodologia desenvolvida pode ser estendida para ser aplicada sobre outras topologias de domínio. A ideia é decompor um domínio em subdomínios, cada subdomínio é decomposto de forma independente até que todos os subdomínios permitam gerar malha usando diretamente o algoritmo de mapeamento transfinito bilinear. A decomposição é feita pela criação de curvas internas fictícias que delimitarão os subdomínios. Estas curvas podem intersectar-se em pontos cujas coordenadas são chamadas de parâmetros geométricos e podem ser variados para mudar a geometria dos subdomínios. Cada subdomínio é delimitado por curvas que terão um número definido de subdivisões, isto será chamado de parâmetros topológicos e de cujos valores dependerá o tipo de decomposição aplicada em cada um deles. Os padrões de decomposição foram projetados dando lugar aos padrões de geração de malha, os quais têm valores definidos para seus parâmetros geométricos e topológicos, desta forma é possível conhecer a topologia e o nível de decomposição hierárquica a priori. Os parâmetros topológicos podem ser variados dinamicamente para encontrar a topologia de malha de melhor qualidade sobre um domínio. Foram incluídos exemplos que mostram a aplicabilidade da metodologia proposta.

Keywords: Padrões de decomposição de domínio, Padrões de geração de malha, Parâmetros geométricos, Parâmetros topológicos, Condições essenciais, Condição de realizabilidade.

1 INTRODUÇÃO

O método de “mapeamento transfinito bilinear” permite gerar malhas quadrilaterais mas ele apresenta a desvantagem de que o domínio deve estar delimitado por quatro curvas de bordo. Além disso o número de subdivisões sobre curvas de bordo que são opostas devem ser iguais e só permite gerar “malhas quadrilaterais estruturadas”.

Neste trabalho é apresentado um conjunto de padrões que permitem decompor hierarquicamente um domínio em subdomínios. A ideia é conseguir que os subdomínios obtidos pela decomposição hierárquica, permitam a geração de malha quadrilateral usando o algoritmo de mapeamento transfinito bilinear. A decomposição é feita pela criação de curvas internas fictícias que delimitarão os subdomínios.

Este trabalho tenta abordar o problema de um modo formal, para isto foram necessários incluir alguns termos que são exclusivos para o método descrito e não pretende-se contradizer e/ou dar definições gerais sobre outras teorias existentes na literatura.

Faz-se distinção entre dois termos, “padrões de decomposição de domínio” e “padrões de geração de malha”. Os padrões de decomposição de domínio apenas mostram a topologia de decomposição de um domínio com certos parâmetros associados a eles simbolicamente mas não definidos com valores. No entanto, os padrões de geração de malha têm valores definidos para esses parâmetros. O procedimento de definir valores a esses parâmetros é chamado de “projeto do padrão de geração de malha”. Neste trabalho é apresentado um projeto associado a cada padrão de decomposição. No entanto, existem diversas maneiras de projetar padrões de geração de malha, baseado em diversos critérios. Informação detalhada sobre critérios para definir esses parâmetros são encontrados no trabalho de Ccapacca (2015).

Na literatura existem alguns métodos de geração de malha baseadas em decomposição de domínio. Por exemplo, o método de “subdivisão de ponto médio”, decompõe um domínio em subdomínios quadrangulares. Cada subdomínio é mapeado com interpolação transfinita. No entanto, o método limita-se a domínios cujas curvas de bordo têm igual número de subdivisões. Outras técnicas baseadas em decomposição de domínio, são mencionados em Owen (1998).

No trabalho de (Miranda et al., 2013), foi abordado a geração de malhas quadrilaterais por decomposição hierárquica e onde foram apresentados “templates” para geração de malha. No entanto, este trabalho tem um enfoque mais geral e são apresentadas algumas contribuições:

- São incluídos alguns termos com o propósito de apresentar o método de modo formal.
- A metodologia proposta permite projetar padrões de geração de malha e abordar a geração de malha sobre outras topologias de domínio.
- São definidos parâmetros que permitem variar a topologia da malha gerada, bem como controlar o refinamento da malha.
- São explicadas as condições necessárias para garantir a geração de malha sobre uma topologia de domínio.
- São apresentados os procedimentos seguidos no projeto de padrões de geração de malha.
- Apresenta-se um método de geração dinâmica de malhas que permite gerar diversas topologias de malha sobre um domínio por variação dos parâmetros definidos neste trabalho.

2 BASE TEÓRICA

O objetivo desta seção é descrever os termos que foram incluídos e a teoria desenvolvida para abordar o método de modo formal.

2.1 Domínio base

Domínio onde é possível usar diretamente o algoritmo de mapeamento transfinito bilinear para a geração de malha sobre ele. Portanto, este tipo de domínio não precisa ser decomposto pois já o número de subdivisões das curvas de bordo opostas são iguais. A decomposição hierárquica de um domínio chega a o seu fim quando todos os seus subdomínios são subdomínios base. O nome “domínio base” foi dado porque faz referência ao “caso base” ou fim de uma decomposição hierárquica.

2.2 Domínio realizável e irrealizável

Domínio realizável é aquele onde é possível gerar malha, normalmente isto tem a ver com a existência de um número mínimo de subdivisões sobre o domínio. Domínios onde não é possível gerar malha são considerados irrealizáveis. Por exemplo, é impossível gerar malha quadrilateral sobre um domínio triangular cujas curvas de bordo tem subdivisões (1,1,1), ou sobre domínios triangulares cujas curvas de bordo são todas linhas retas com subdivisões (1,1,2), (1,1,4), (1,1,6). No entanto, estes últimos podem ser realizáveis. Por exemplo, o domínio com subdivisões (1,1,2), é realizável só se a curva que tem as duas subdivisões não é uma linha reta. A “Fig. 1” mostra estes casos. Neste trabalho, evitar-se-á gerar domínios que dependem da geometria das curvas de bordo para serem realizáveis.

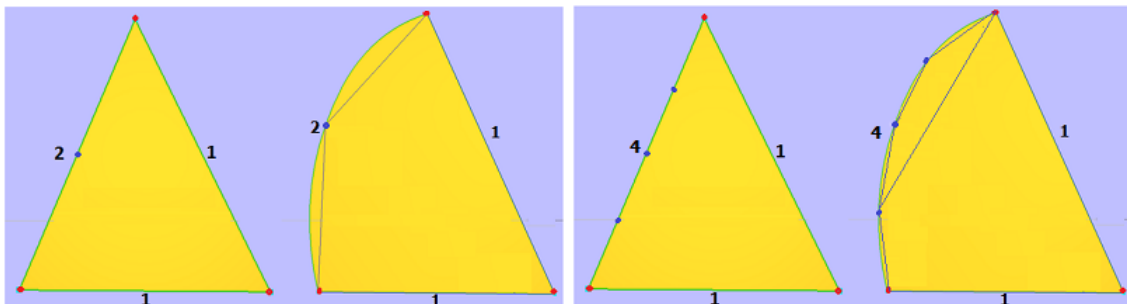


Figure 1: Exemplo de domínios que dependem da geometria da curva de bordo para serem realizáveis

2.3 Condições de paridade e realizabilidade

Uma malha quadrilateral tem um número par de arestas ao redor do seu contorno (Murdoch et al., 1997). Portanto, só é possível gerar malha sobre domínios cuja soma do número de subdivisões das suas curvas de bordo é par, esta condição será chamada de *condição de paridade* sobre domínios.

No projeto de um padrão, a “paridade” deve ser testada nos subdomínios gerados pela decomposição inicial. Este teste pode ser feito algebricamente, usando simples axiomas como *a soma de números pares é par, o resto de dividir um número par por 2 é zero*, etc. As variáveis

são o número de subdivisões sobre as curvas que delimitam os subdomínios e não há número de subdivisões iguais a zero. Subdomínios projetados para serem “base” sempre cumprem a paridade, por terem curvas de bordo opostas com igual número de subdivisões. A “paridade”, deve-se garantir principalmente em subdomínios projetados para terem decomposição hierárquica.

A *condição de realizabilidade* tem a ver com a existência de um número mínimo de subdivisões sobre as curvas de bordo de um domínio para que seja possível a decomposição do mesmo. A “Fig. 2” mostra alguns exemplos de domínios com o menor número de subdivisões possíveis onde foi possível a decomposição. No entanto, podem existir alguns outros, mas neste trabalho serão considerados como mínimo os mostrados na “Fig. 2”.

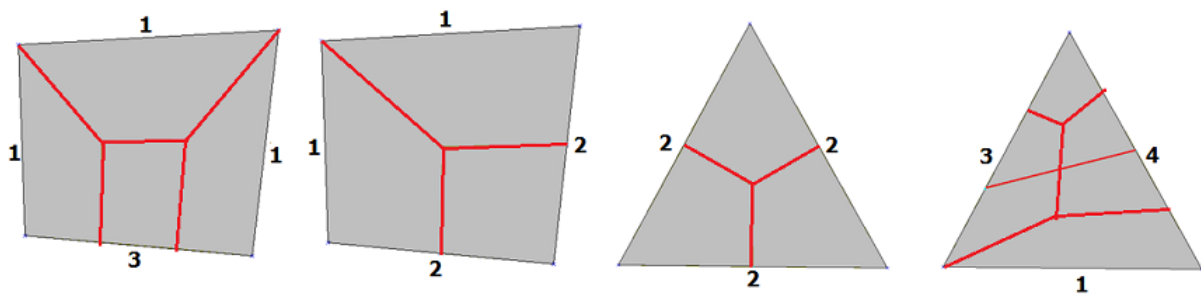


Figure 2: Domínios com o menor número de subdivisões onde foi possível a decomposição

2.4 Condições essenciais sobre domínios

Definem-se um conjunto de condições sobre os domínios baseado em relações de igualdade, desigualdade e proporcionalidade entre o número de subdivisões das curvas de bordo. Estas condições são consideradas essenciais porque não existe domínio que não verifique nenhuma delas e sobre um domínio apenas uma delas pode ser verificada.

Condições essenciais sobre domínios delimitados por quatro curvas

Seja um domínio quadrilateral com curvas de bordo e número de subdivisões A, B, C, D respectivamente. Sendo a curva A oposta à curva B e a curva C oposta à curva D .

1. *Primeira condição.* $A = B$ e $C = D$. Este caso é considerado o caso base, pois este domínio não é decomposto.
2. *Segunda condição.* $A = B$ e $C \neq D$ ou $C = D$ e $A \neq B$.
3. *Terceira condição.* $A \neq B$ e $C \neq D$.

Condições essenciais sobre domínios delimitados por três curvas

Um domínio triangular pode ser decomposto em três subdomínios quadrilaterais. Portanto, para gerar malha sobre estas, seria suficiente com as condições essenciais para domínios quadrilaterais. No entanto, com o intuito de melhorar a qualidade de malha sobre domínios que apresentam grandes diferenças entre o número de subdivisões das suas curvas de bordo, definem-se um conjunto de condições baseadas em relações de proporcionalidade entre o número de subdivisões das curvas de bordo. O grau de proporcionalidade é medido por um fator k . Neste

trabalho foi adotado o valor $k = 2$. Por exemplo, se $A \geq kC$, isto quer dizer que A é pelo menos k vezes C .

Seja um domínio triangular com curvas de bordo e número de subdivisões A, B, C respectivamente. Onde cumpre-se que $A \geq B \geq C$.

1. *Primeira condição.* $B < kC$.
2. *Segunda condição.* $A \geq kC$ e $B \geq kC$. O domínio que satisfaz esta condição será chamado de “alongado”.

2.5 Padrões de decomposição de domínio

Apresenta-se um conjunto de padrões que permitem decompor domínios delimitados por três e quatro curvas de bordo. São apresentados quatro padrões de decomposição de domínio, cada um deles será usado segundo a condição essencial verificada sobre um domínio. No caso de domínios que verifiquem a primeira condição essencial para domínios quadrilaterais, por ser este o caso base, não há um padrão de decomposição de domínio, mas sim um padrão de geração de malha chamado de “padrão base” e denotado por “Padrão P_0 ”. A “Fig. 3” mostra os padrões de decomposição tratados neste trabalho.

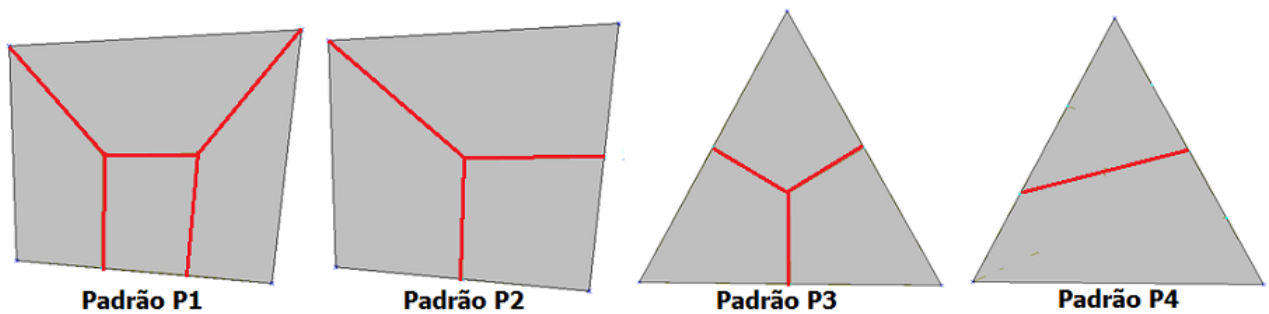


Figure 3: Padrões de decomposição de domínio

A “Tabela 1” mostra o padrão de decomposição a ser usado quando o domínio em estudo satisfaz alguma condição essencial das definidas neste trabalho.

Table 1: Padrão de decomposição usado sobre um domínio que satisfaz qualquer condição

Padrão de decomposição	Condição essencial sobre domínio	Topologia de domínio
Não há decomposição	Primeira condição	Limitado por 4 curvas de bordo
Padrão P_1	Segunda condição	Limitado por 4 curvas de bordo
Padrão P_2	Terceira condição	Limitado por 4 curvas de bordo
Padrão P_3	Primeira condição	Limitado por 3 curvas de bordo
Padrão P_4	Segunda condição	Limitado por 3 curvas de bordo

Estes padrões têm dois tipos de parâmetros associados cujos valores podem variar dinamicamente. Variar dinamicamente quer dizer mudar os valores dos parâmetros após ter gerado a malha sobre um domínio com valores padrão.

Os **parâmetros geométricos** definem a geometria dos subdomínios, pois definem os pontos de interseção entre as curvas internas fictícias que delimitam os subdomínios (se houver interseção). A variação dinâmica, muda a geometria dos elementos da malha gerada, isto pode ser usado como critério de qualidade de malha. Estes parâmetros têm valores entre zero e um.

Os **parâmetros topológicos**, definem o número de subdivisões que terão as curvas de bordo dos subdomínios. Definem-se dois tipos: os *parâmetros topológicos internos* definem o número de subdivisões das curvas internas fictícias que delimitam os subdomínios. A variação destes parâmetros é usado como critério de refinamento de malha. Os *parâmetros topológicos de bordo* definem o número de subdivisões consecutivas, subcurvas tomadas sobre as curvas de bordo para delimitar os subdomínios. A variação destes parâmetros muda a extensão geométrica dos subdomínios. De forma geral a variação dos parâmetros topológicos, muda a orientação e o tipo de padrão de decomposição a ser aplicado sobre os subdomínios, isto permite gerar topologias de malha diferentes para um mesmo domínio. A “Figura 4” mostra os valores mínimos e máximos para os parâmetros topológicos de bordo. Para o caso dos parâmetros topológicos internos o mínimo valor é 1 exceto para o caso de P_4 onde o mínimo é 2 porque este padrão gera um subdomínio triangular.

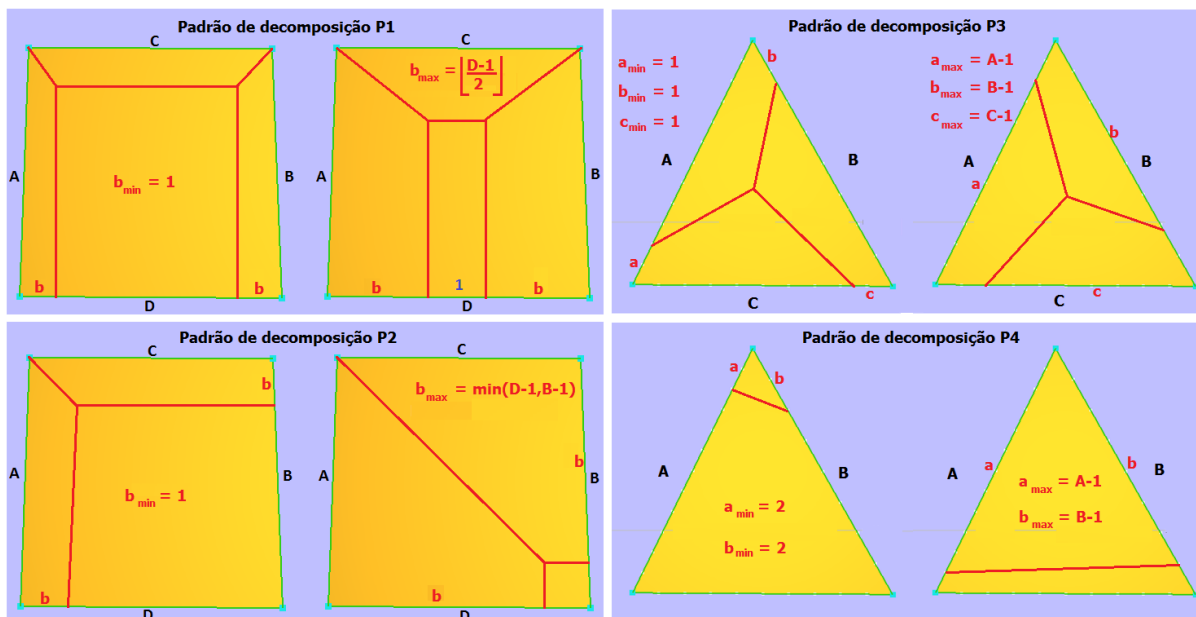


Figure 4: Valores mínimo e máximo dos parâmetros topológicos de bordo associados aos padrões

3 PROJETO DE PADRÕES DE GERAÇÃO DE MALHA QUADRILATERAL

Os padrões de decomposição de domínio serão projetados para gerar padrões de geração de malha. Aqui são definidos valores numéricos para os parâmetros geométricos e topológicos.

Padrão de geração de malha P_0

O padrão P_0 , não precisa ser projetado pois corresponde diretamente ao algoritmo de mapeamento transfinito bilinear.

Padrão de geração de malha P_1

Este padrão está baseado no proposto em (Miranda et al., 2013). No entanto, aqui é apresentado usando a metodologia proposta neste trabalho. O domínio é decomposto em 4 subdomínios base. A “Fig. 5” mostra o esquema de decomposição hierárquica, os parâmetros topológicos e os parâmetros geométricos.

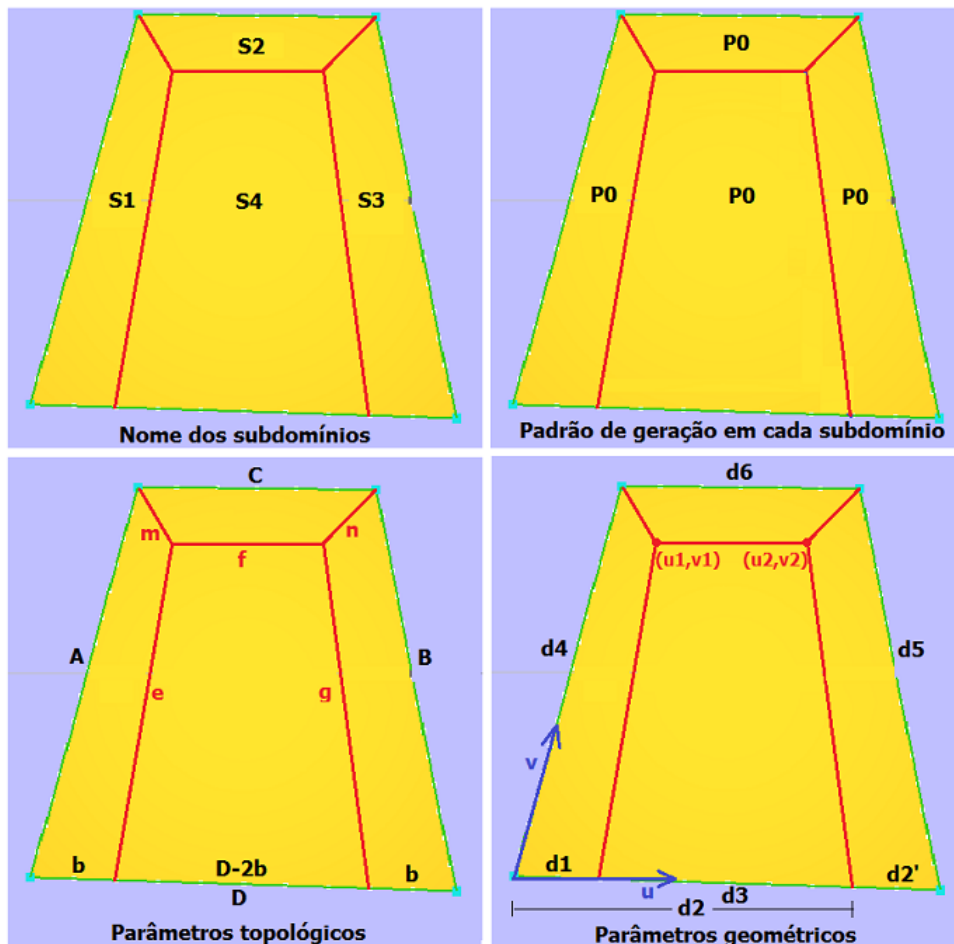


Figure 5: Padrão de geração P_1

Notação:

A, B, C, D : Número de subdivisões das curvas de bordo.

b : Parâmetro topológico de bordo.

e, f, g, m, n : Parâmetros topológicos internos.

$d_1, d_2, d_2', d_3, d_4, d_5, d_6$: Comprimento entre dois pontos das curvas de bordo.

u_1, u_2, v_1, v_2 : Coordenadas em espaço paramétrico.

Condições de domínio:

$$\begin{aligned} (A + B + C + D) \bmod 2 &= 0 \\ A = B, C < D \end{aligned} \tag{1}$$

Cálculo dos parâmetros topológicos internos:

As curvas internas são subdivididas com um número de subdivisões igual que as curvas de bordo opostas com a finalidade de fazer que os subdomínios S_1, S_2 e S_3 sejam base e, se houver decomposição hierárquica, seja só na região S_4 .

$$e = A, f = C, g = B, m = b, n = b \tag{2}$$

Cálculo do parâmetro topológico de bordo:

O parâmetro topológico b é calculado com a finalidade de fazer a região S_4 domínio base. Já duas curvas opostas de S_4 têm igual número de subdivisões ($e = g$). Agora precisa-se que $f = D - 2b$. Isolando b obtém-se:

$$b = \frac{D - C}{2} \tag{3}$$

Condições de subdomínio:

O valor do parâmetro topológico de bordo não permite decomposição hierárquica em S_4 . A região S_4 irá conter o padrão base P_0 .

$$e = g, f = D - 2b \tag{4}$$

Teste de paridade no subdomínio S_4 :

$$\begin{aligned} [e + f + g + (D - 2b)] \bmod 2 &== [A + C + B + (D - 2b)] \bmod 2 \\ &== [(A + B + C + D) - 2b] \bmod 2 \\ &== [par - par] \bmod 2 \\ &== [par] \bmod 2 \\ &== 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Os parâmetros geométricos são calculados em função dos comprimentos das curvas de bordo, tal como são feitos em (Miranda et al., 2013), mas neste caso será considerado um fator de correção que permite melhorar a qualidade da malha em situações onde a geometria é muito irregular. Este fator é uma relação entre os comprimentos das curvas de bordo C e D , e tem por objetivo diminuir os valores de v_1 e v_2 quando d_6 é muito maior que d_3 , e aumentar os valores de v_1 e v_2 em caso contrário. No caso em que as curvas C e D sejam aproximadamente iguais em comprimento, o fator de correção está cerca de 1, e portanto, v_1 e v_2 são praticamente os mesmos que os apresentados em (Miranda et al., 2013).

Parâmetros geométricos:

$$\begin{aligned} u_1 = u_b = \frac{d_1}{d_3}, v_1 = \frac{d_4}{d_4 + d_1 * factor}, factor = \frac{d_6}{d_3} \\ u_2 = u_{D-b} = \frac{d_2}{d_3}, v_2 = \frac{d_5}{d_5 + d_2 * factor} \end{aligned} \tag{6}$$

A “Fig. 6” mostra um exemplo de malha gerada por este padrão. A “Fig. 7” mostra um exemplo com geometria muito irregular, a qual foi melhorada usando os parâmetros geométricos propostos neste trabalho. Neste caso, o fator de correção fez com que os valores de v_1 e v_2 diminuam proporcionalmente à distância geométrica do domínio.

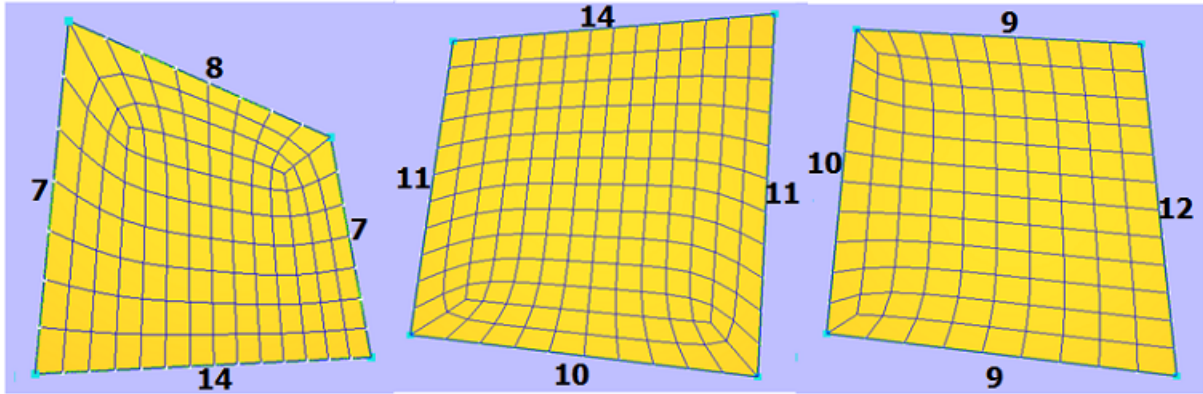


Figure 6: Exemplos de malha gerada por P_1

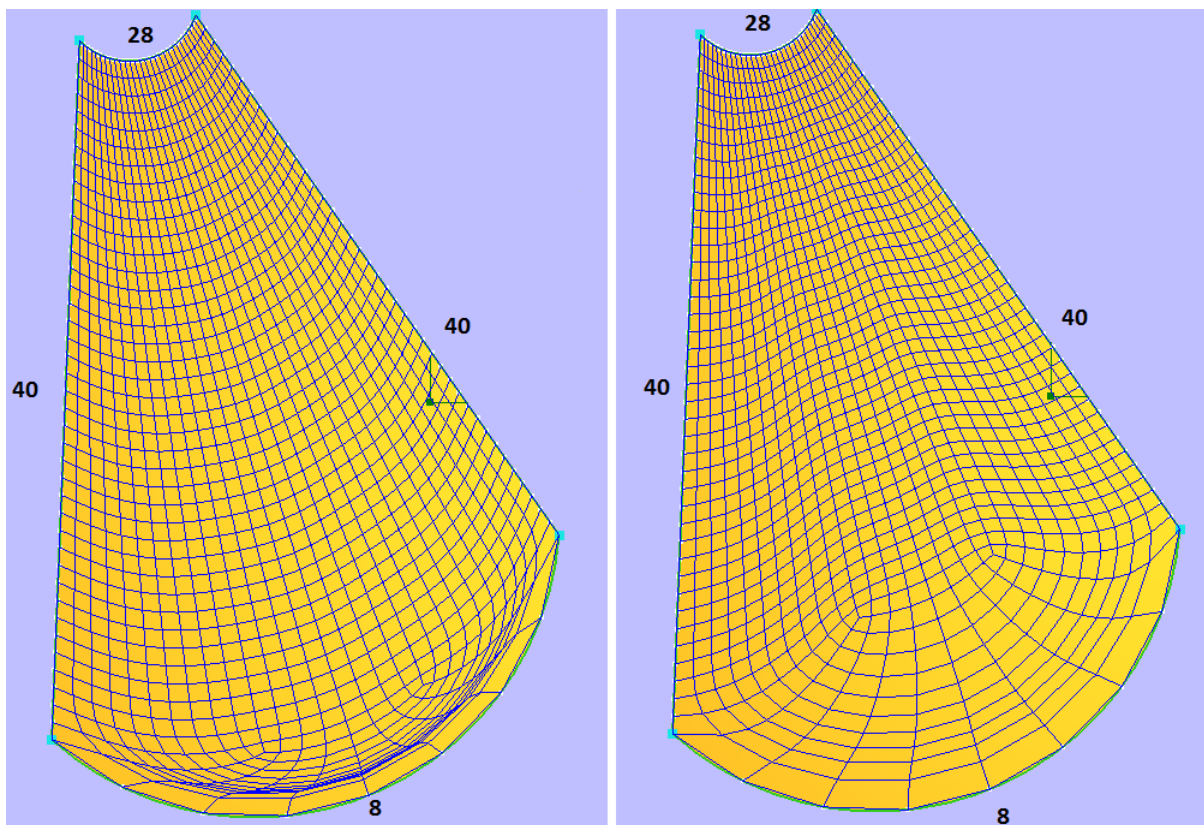


Figure 7: Melhora da malha com os parâmetros geométricos propostos para o padrão P_1

Padrão de geração de malha P_2

Este padrão foi projetado para ser “autorrecursivo”. Isto quer dizer que ele mesmo pode ser incluído para formar parte de algum subdomínio. O domínio é decomposto em 3 subdomínios

quadrilaterais, sendo que no subdomínio $S3$ ele pode ser aplicado novamente. Este padrão tem duas possibilidades de decomposição hierárquica no subdomínio $S3$ (ver as condições de subdomínio). A “Figura 8” mostra a distribuição dos padrões de geração de malha nos subdomínios, os parâmetros topológicos e os parâmetros geométricos.

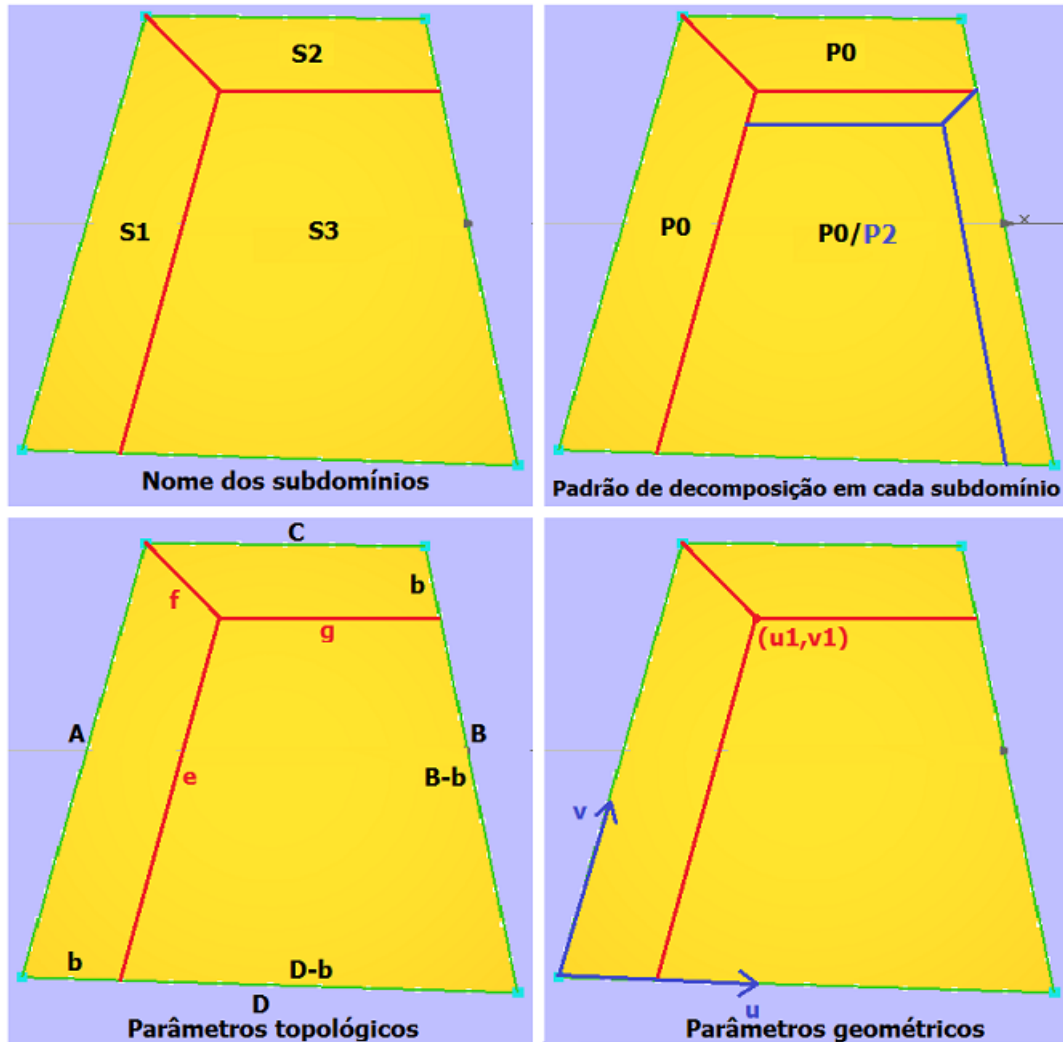


Figure 8: Padrão de geração P_2

Notação:

A, B, C, D : Número de subdivisões das curvas de bordo.

b : Parâmetro topológico de bordo.

e, f, g : Parâmetros topológicos internos..

u_1, v_1 : Coordenadas em espaço paramétrico.

Condições de domínio:

$$(A + B + C + D) \bmod 2 = 0$$

$$A < B, C < D$$

(7)

Cálculo do parâmetro topológico de bordo:

Da condição de subdomínio $A > B - b$ e $C < D - b$. Então $b > B - A$ e $b < D - C$. Sendo $B - A < D - C$, um valor de b que cumpre esta condição é a média destas diferenças. Portanto, toma-se o valor médio das diferenças do número de subdivisões das curvas de bordo opostas.

$$b = \frac{(B - A) + (D - C)}{2} \quad (8)$$

Deve-se garantir que o mesmo padrão é gerado novamente na subregião $S3$ e agora é convergente. Sendo $b = \frac{(B-A)+(D-C)}{2}$ avalia-se o número de subdivisões restantes no subdomínio $S3$.

$$\begin{aligned} B - b &= B - \frac{B}{2} + \frac{A}{2} - \frac{D}{2} + \frac{C}{2} \\ &= \frac{A + B}{2} - \frac{D - C}{2} \\ D - b &= D - \frac{B}{2} + \frac{A}{2} - \frac{D}{2} + \frac{C}{2} \\ &= \frac{A - B}{2} + \frac{C + D}{2} \end{aligned} \quad (9)$$

Avalia-se a diferença do número de subdivisões nas curvas opostas do subdomínio, resultando o mesmo. Isto leva à “condição de subdomínio (segunda possibilidade)” e portanto, o padrão em $S3$ converge.

$$\begin{aligned} A - (B - b) &= A - \left(\frac{A + B}{2} - \frac{D - C}{2} \right) \\ &= \frac{A - B}{2} + \frac{D - C}{2} \\ (D - b) - C &= \frac{A - B}{2} + \frac{C + D}{2} - C \\ &= \frac{A - B}{2} + \frac{D - C}{2} \end{aligned} \quad (10)$$

Cálculo dos parâmetros topológicos internos:

Subdivide-se as curvas internas igual que às curvas de bordo opostas com a finalidade de gerar a decomposição hierárquica só na região $S3$.

$$e = A, f = b, g = C \quad (11)$$

Condições de subdomínio:

Primeira possibilidade. Quando $B - A \neq D - C$, é gerado novamente o padrão P_2 no subdomínio $S3$.

$$e > B - b, g < D - b \quad (12)$$

Segunda possibilidade. Quando $B - A = D - C$, o padrão gerado no subdomínio $S3$ é o padrão base P_0 .

$$e = B - b, g = D - b \quad (13)$$

Teste de paridade no subdomínio S_3 :

$$\begin{aligned}
 [e + (B - b) + (D - b) + g] \bmod 2 &== [A + (B - b) + (D - b) + C] \bmod 2 \\
 &== [(A + B + C + D) - 2b] \bmod 2 \\
 &== [par - par] \bmod 2 \\
 &== [par] \bmod 2 \\
 &== 0
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Parâmetros geométricos:

$$u_1 = u_b, v_1 = v_{A-b} \tag{15}$$

A “Fig. 9” mostra um exemplo de malha gerada por este padrão.

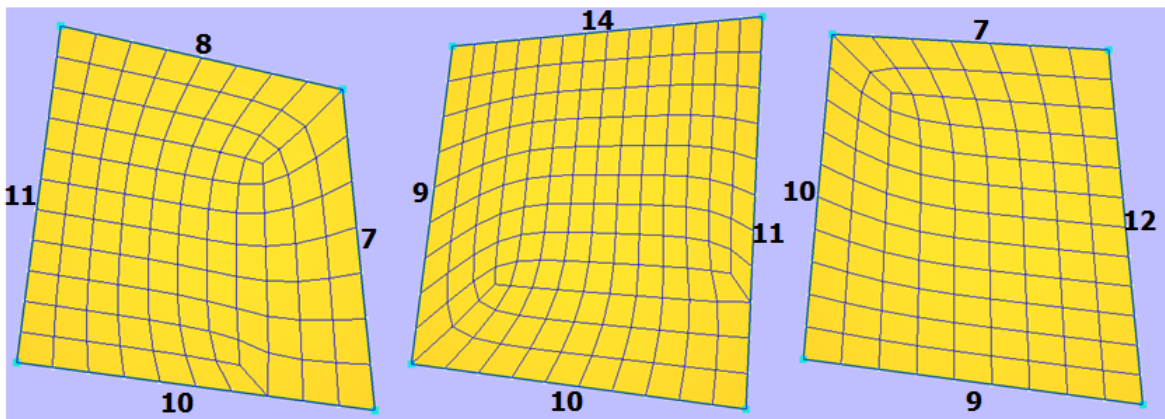


Figure 9: Exemplo de malha gerada por P_2

Padrão de geração de malha P_3

A decomposição inicial gera 3 subdomínios quadrilaterais. As condições de domínio impostas, baseado no critério das condições essenciais para domínios delimitados por três curvas de bordo, garantem uma boa qualidade de malha.

Define-se a *condição de tripla mapeamento bilinear* sobre domínios triangulares, como uma relação entre o número de subdivisões das curvas de bordo, que permite encontrar parâmetros topológicos de bordo que geram só subdomínios base. Isto só é possível quando cumpre-se que $A < B + C$, $B < A + C$ e $C < A + B$, com valores de A, B, C que satisfazem a condição de paridade. Além disso os parâmetros topológicos internos devem tomar valores iguais ao número de subdivisões das subcurvas opostas a eles.

O termo “tripla mapeamento bilinear” é usado sobre domínios triangulares que são decompostos em três subdomínios quadrilaterais e faz referência à possibilidade de gerar malha em cada um destes subdomínios usando diretamente o algoritmo de “mapeamento transfinito bilinear”.

Neste trabalho, tem-se preferência por gerar diretamente malhas estruturadas em cada um dos subdomínios por estas apresentarem sempre boa qualidade. Por isso primeiramente será testada a condição de tripla mapeamento bilinear e depois definir os parâmetros topológicos de

bordo. No entanto, quando não for possível será usado outro critério para definir os parâmetros topológicos de bordo.

Este padrão tem duas possibilidades de decomposição hierárquica no subdomínio $S3$ (ver condições de subdomínios). A “Fig. 10” mostra a decomposição hierárquica nos subdomínios, os parâmetros topológicos e geométricos.

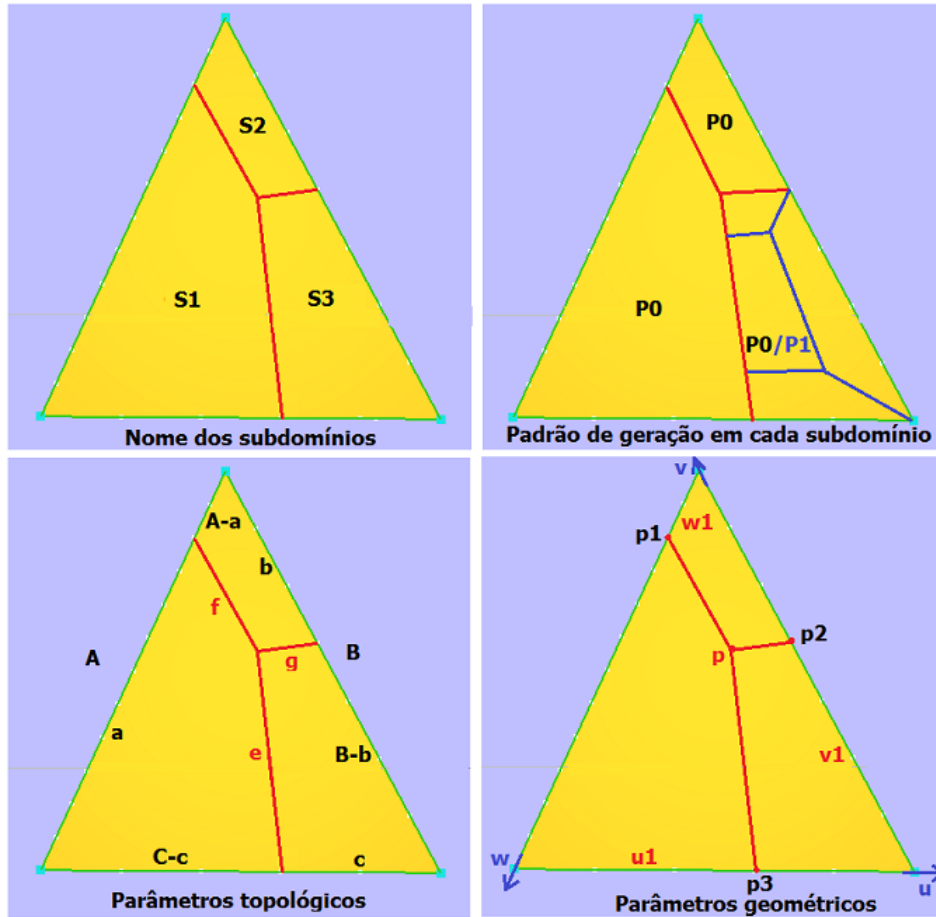


Figure 10: Padrão de geração P_3

Notação:

A, B, C : Número de subdivisões das curvas de bordo.

a, b, c : Parâmetros topológicos de bordo.

e, f, g : Parâmetros topológicos internos..

u_1, v_1, u_2, v_2 : Coordenadas em espaço paramétrico.

p_1, p_2, p_3, p : Pontos em espaço paramétrico.

k : Fator de proporcionalidade. Foi adotado $k = 2$.

Condições de domínio:

$$(A + B + C) \bmod 2 = 0$$

$$B \leq A, C \leq A, C \leq B < kC$$

(16)

Condições de domínio realizável:

$$A \geq 2, B \geq 2, C \geq 2 \quad (17)$$

Cálculo dos parâmetros topológicos de bordo:

Estes parâmetros são calculados baseados na ideia de que é satisfeita a condição de “triplo mapeamento bilinear”.

$$a = \frac{A + B - C}{2}, b = \frac{B + C - A}{2}, c = \frac{C + A - B}{2} \quad (18)$$

Se o domínio não satisfaz a condição de “triplo mapeamento bilinear”, os valores dos parâmetros topológicos são inválidos (zero ou negativo). Neste caso utiliza-se outro critério.

$$c = \lfloor \frac{C}{2} \rfloor, a = A - c, b = C - c \quad (19)$$

Cálculo dos parâmetros topológicos internos:

$$f = b = C - c, g = c = A - a, e = \max(a, B - b) \quad (20)$$

Condições de subdomínio:

Primeira possibilidade. Quando não cumpre-se a “condição de trimapping”, é gerado o padrão de geração P_1 no subdomínio S_3 .

$$a > B - b, b = C - c, c = A - a \quad (21)$$

Segunda possibilidade. Quando a “condição de trimapping” é satisfeita, é gerado o padrão de geração P_0 no subdomínio S_3 .

$$a = B - b, b = C - c, c = A - a \quad (22)$$

Teste de paridade no subdomínio S_3 : Sendo três curvas, o número de segmentos das curvas devem ser ou dois ímpares e um par ou todas pares.

CASO 1: Sejam A, B e C pares.

Sendo C par, então c, a, b, f e g são pares, também $B - b$ é par, portanto e é par. Cumpre-se então a paridade. $[c + e + g + (B - b)] \bmod 2 = 0$.

CASO 2: Sejam A e B ímpares e C par.

Sendo C par, então c e $C - c$ são pares, e dado que $A - a = c$ e $b = C - c$, daí a é ímpar e b é par, e portanto $B - b$ é ímpar. Dado que $e = B - b$, e é ímpar. Dado que $f = b = C - c$ e $g = c = A - a$, f e g são pares. Portanto $[c + e + g + (B - b)] \bmod 2 = 0$.

Podem-se tomar outro par de curvas com número ímpar de subdivisões, chegando-se à mesma conclusão. Cumpre-se então a paridade no subdomínio.

Parâmetros geométricos: Foram adotados os propostos por (Miranda et al., 2013).

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{C-c}, v_1 = v_{B-b}, w_1 = w_{A-a} \\ p_1 &= (0, w_1), p_2 = (1 - v_1, v_1), p_3 = (u_1, 0) \\ p &= \frac{p_1 + p_2 + p_3}{3} \end{aligned} \quad (23)$$

A “Fig. 11” mostra um exemplo de malha gerada por este padrão.

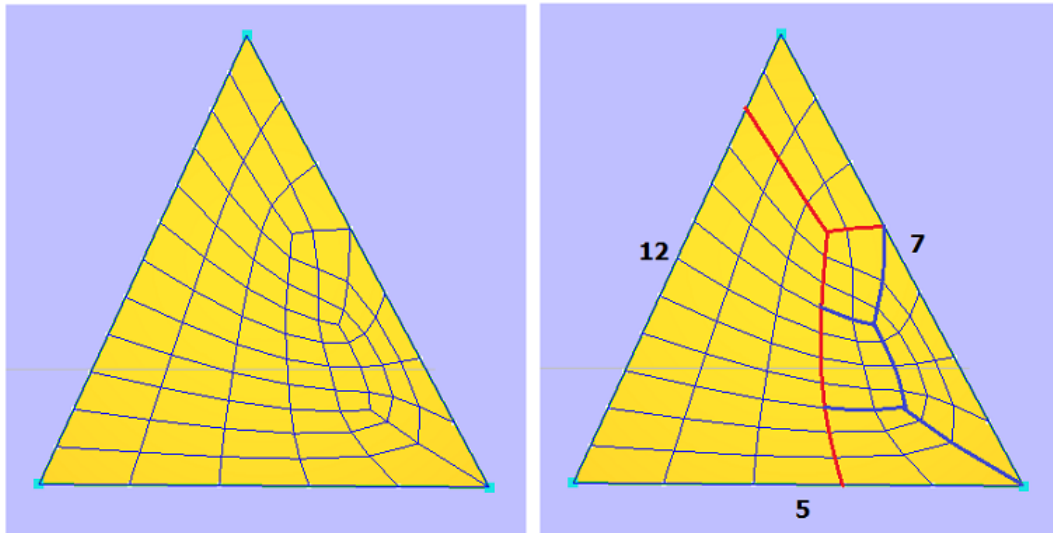


Figure 11: Exemplo de malha gerada por P_3

Padrão de geração de malha P_4

Este padrão foi concebido para ser “autorrecursivo”, pois ele mesmo será incluído para formar parte do subdomínio triangular gerado. O domínio é decomposto em 2 subdomínios, um subdomínio triangular que permite gerar malha usando este mesmo padrão e o outro quadrilateral. Este padrão tem duas possibilidades de decomposição hierárquica em $S1$ e três possibilidades de decomposição hierárquica em $S2$ (ver condições de subdomínio). A “Fig. 12” mostra um domínio triangular que verifica a segunda condição essencial com a distribuição dos padrões de geração de malha a serem aplicados nos subdomínios e os parâmetros topológicos.

Notação:

A, B, C : Número de subdivisões das curvas de bordo.

a, b : Parâmetros topológicos de bordo.

c : Parâmetro topológico interno.

k : Fator de proporcionalidade. Foi adotado $k = 2$.

Condições de domínio:

$$\begin{aligned} (A + B + C) \bmod 2 &= 0 \\ A \geq kC, B \geq kC, A \geq B \end{aligned} \quad (24)$$

Condições de domínio realizável:

$$A \geq 3, B \geq 3, C \geq 1 \quad (25)$$

Cálculo dos parâmetros topológicos de bordo:

Estabelece-se o mínimo para gerar uma decomposição P_3 em $S1$.

$$a = \lfloor \frac{A}{2} \rfloor$$

$$b = \begin{cases} 2, & \text{if } B = 3 \\ \lfloor \frac{B}{2} \rfloor, & \text{if } B > 3 \end{cases} \quad (26)$$

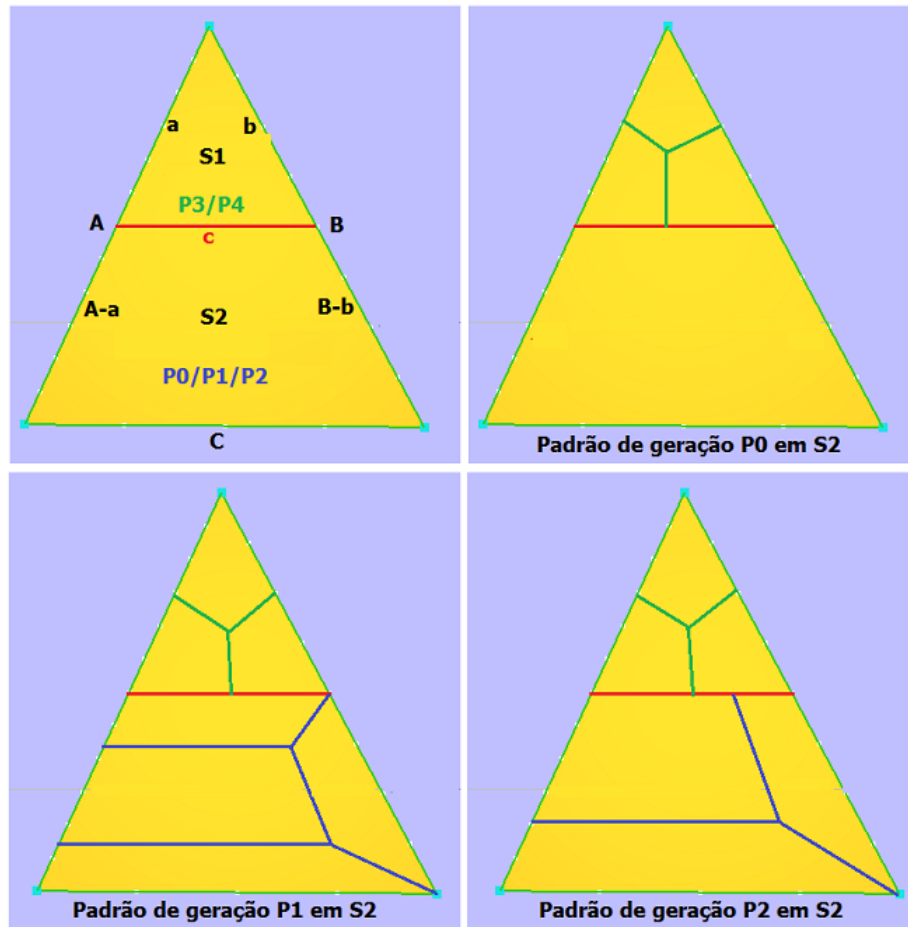


Figure 12: Padrão de geração P_4

Cálculo do parâmetro topológico interno:

Adota-se o critério de avaliar o parâmetro c com o intuito de tentar que em S_2 , a decomposição seja de tipo P_1 . No entanto, se $C = 1$, deve-se corrigir o parâmetro c , para permitir que o subdomínio S_1 seja realizável.

$$c = \begin{cases} 2, & \text{if } C = 1 \\ C, & \text{if } C > 1 \end{cases} \quad (27)$$

Faz-se o teste de paridade em S_1 . Se não cumpre, incrementa-se c em uma unidade.

$$\text{if } (a + b + c) \bmod 2 \neq 0 \Rightarrow c = c + 1 \quad (28)$$

Condições de subdomínio:

Primeira possibilidade. O subdomínio S_1 é gerado com padrão P_3 ou é chamado novamente P_4 . Quando $A = B$, o padrão P_0 é gerado no subdomínio S_2 . Também quando A é par

e $B = A - 1$.

$$A - a = B - b, c = C \quad (29)$$

Segunda possibilidade. O subdomínio $S1$ é gerado com padrão P_3 ou é chamado novamente P_4 . O padrão P_1 é gerado no subdomínio $S2$.

$$A - a > B - b, c = C \quad (30)$$

Terceira possibilidade. O subdomínio $S1$ é gerado com padrão P_3 ou é chamado novamente P_4 . O padrão P_2 é gerado no subdomínio $S2$, quando não se cumpre a paridade em $S1$ e c foi corrigido aumentando em uma unidade.

$$A - a > B - b, c > C \quad (31)$$

Teste de paridade nos subdomínios $S1$ e $S2$: Uma vez calculados os parâmetros topológicos, é feito um teste de paridade onde o parâmetro interno c é corrigido se for necessário, isto garante a paridade em ambos os subdomínios.

Parâmetros geométricos: Não há interseção de curvas internas dentro do domínio.

A “Fig. 13” mostra dois exemplos de malha gerada por este padrão.

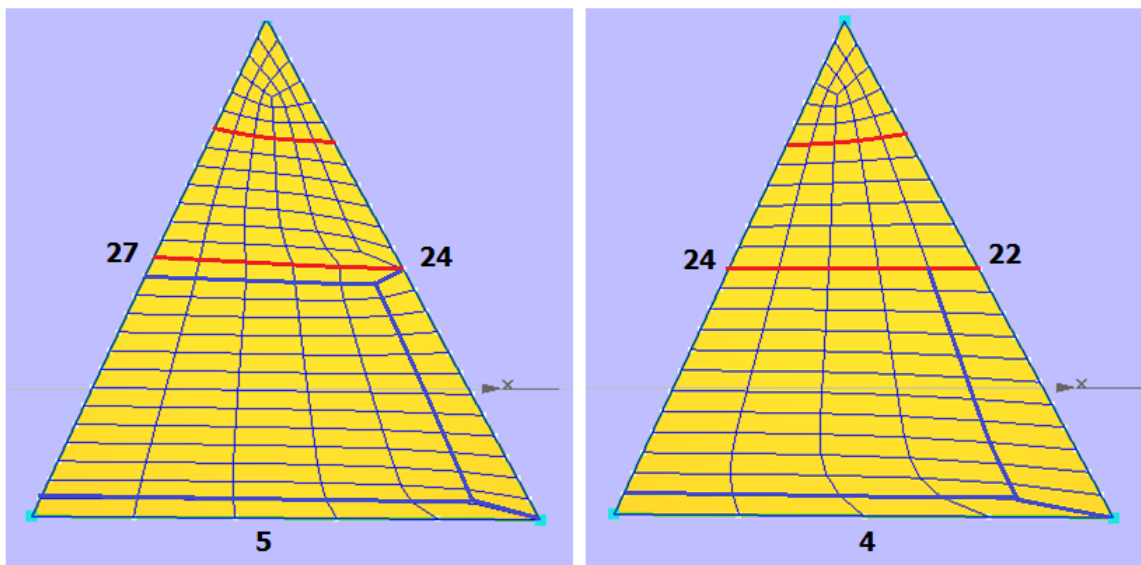


Figure 13: Exemplo de malha gerada por P_4

4 Geração dinâmica de malha quadrilateral

4.1 Geração baseada no padrão de decomposição P_1

O domínio é decomposto em quatro subdomínios quadrilaterais, a geração de malha nestes subdomínios está garantida pelo grupo de padrões P_0, P_1, P_2 para domínios quadrilaterais. Só será variado o parâmetro b , portanto, a decomposição hierárquica só será gerada no subdomínio $S4$. Para gerar decomposição hierárquica no resto de subdomínios, pode-se usar valores diferentes de b e/ou variar os parâmetros topológicos internos. Deve-se garantir a paridade em cada

subdomínio para assegurar que qualquer valor válido do parâmetro topológico de bordo b permite gerar malha em todos os subdomínios. A expressão que define a paridade no subdomínio recursivo $S4$ é: $A + B + C + (D - 2b)$, e é par para qualquer valor de b .

A “Fig. 14” mostra o diálogo implementado para permitir variar tanto os parâmetros topológicos e geométricos dinamicamente.

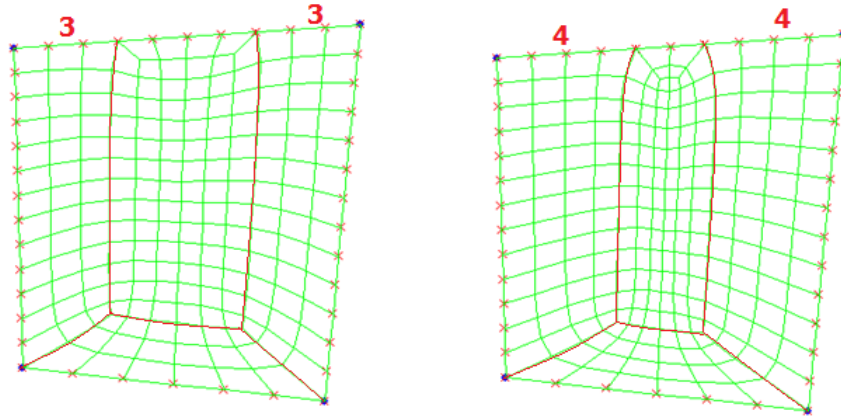


Figure 14: Geração dinâmica baseada no padrão de decomposição P_1

4.2 Geração baseada no padrão de decomposição P_2

O domínio é decomposto em três subdomínios quadrilaterais, a geração de malha nestes subdomínios está garantida pelo grupo de padrões P_0, P_1, P_2 para domínios quadrilaterais. A decomposição hierárquica só será gerada no subdomínio $S3$. Para gerar decomposição hierárquica no resto de subdomínios, pode-se usar valores diferentes de b e/ou variar os parâmetros topológicos internos. Deve-se fazer cumprir a paridade em cada subdomínio para garantir que qualquer valor válido do parâmetro topológico de bordo b permite gerar malha em todos os subdomínios. A expressão que define a paridade no subdomínio recursivo $S3$ é: $A + C + (B - b) + (D - b)$, e é par para qualquer valor de b .

A “Fig. 15” mostra um diálogo implementado que permite variar tanto os parâmetros topológicos e geométricos dinamicamente.

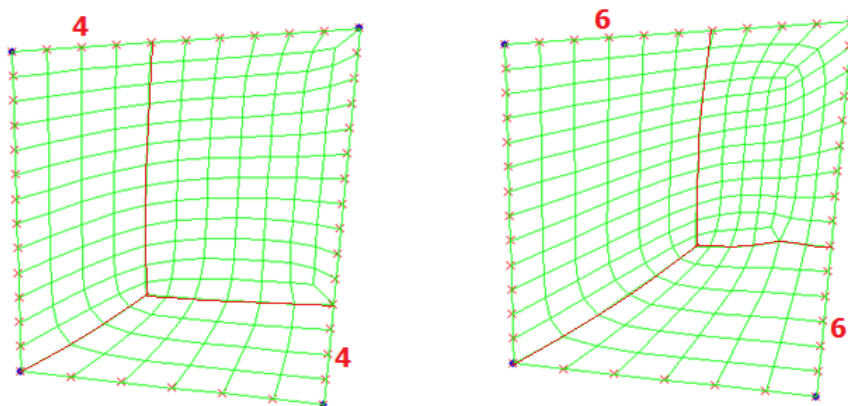


Figure 15: Geração dinâmica baseada no padrão de decomposição P_2

4.3 Geração baseada no padrão de decomposição P_3

O domínio é decomposto em três subdomínios quadrilaterais, a geração de malha nestes subdomínios está garantida pelo grupo de padrões P_0, P_1, P_2 para domínios quadrilaterais. A decomposição hierárquica será gerada nos três subdomínios. Deve-se fazer cumprir a paridade em cada subdomínio para assegurar que quaisquer valores válidos dos parâmetros topológicos de bordo a, b, c permitem gerar malha em todos os subdomínios. Caso não se cumpra a paridade em qualquer subdomínio, serão corrigidos os parâmetros internos e, f, g incrementados em uma unidade (alternativamente também poderiam ser decrementados em uma unidade). As expressões que definem a paridade nos subdomínios são:

$S1 : a + (C - c) + f + e$, é par para quaisquer valores de a, b, c com e corrigido ou não.

$S2 : e + c + (B - b) + g$, é par para quaisquer valores de a, b, c com g corrigido ou não.

$S3 : g + b + (A - a) + f$, é par para quaisquer valores de a, b, c com f corrigido ou não.

A “Fig. 16” mostra um diálogo implementado para permitir variar tanto os parâmetros topológicos e geométricos dinamicamente.

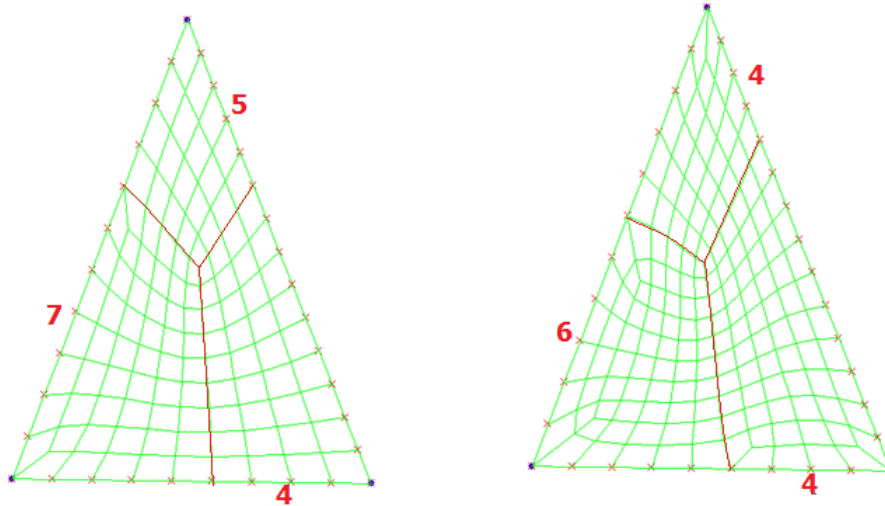


Figure 16: Geração dinâmica baseada no padrão de decomposição P_3

4.4 Geração baseada no padrão de decomposição P_4

O domínio é decomposto em dois subdomínios, um triangular e outro quadrilateral, a geração de malha nestes subdomínios está garantida pelos grupo de padrões P_3, P_4 em $S1$ e P_0, P_1, P_2 em $S2$. A decomposição hierárquica é realizada nos dois subdomínios. Neste caso, vai-se variar os parâmetros de bordo a, b e o parâmetro interno c . Deve-se fazer cumprir a paridade em cada subdomínio para assegurar que quaisquer valores válidos dos parâmetros topológicos a, b, c permitam gerar malha nos dois subdomínios. Caso não se cumpra a paridade em qualquer subdomínio, será corrigido o parâmetro topológico interno c incrementado em uma unidade (alternativamente também poderia ser decrementado em uma unidade). As expressões que definem a paridade nos subdomínios são:

$S1 : a + b + c$ é par para quaisquer valores de a, b, c com c corrigido ou não.

$S2 : (A - a) + c + (B - b) + C$, é par para quaisquer valores de a, b, c com c corrigido ou não.

A “Fig. 17” mostra um diálogo implementado para permitir variar tanto os parâmetros topológicos e geométricos dinamicamente.

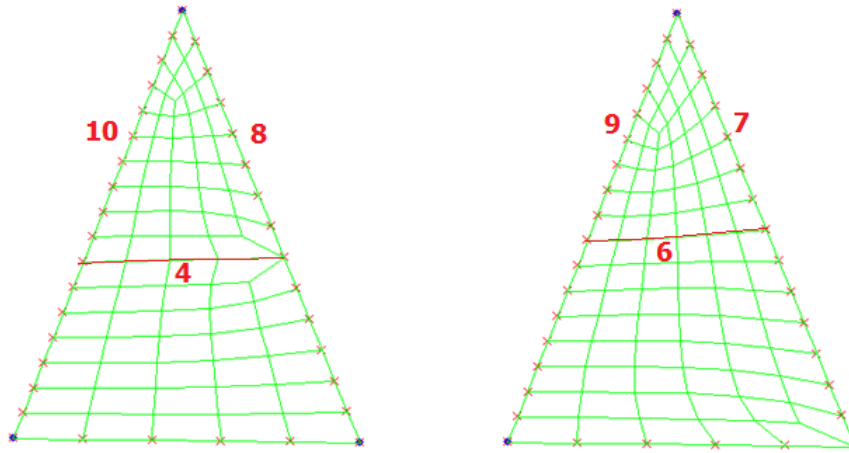


Figure 17: Geração dinâmica baseada no padrão de decomposição P_4

ACKNOWLEDGEMENTS

Os autores gostariam de agradecer ao Tecgraf da PUC-Rio pelos auxílios financeiros concedidos durante o desenvolvimento deste trabalho.

REFERENCES

- Ccapacca, E. Q., 2015. *Construção de padrões para geração de malhas por decomposição hierárquica de domínio*. Dissertação de mestrado, PUC-Rio.
- Miranda, A. O., & Martha, L. F., 2013. Hierarchical Template-based Quadrilateral Mesh Generation. *Engineering with Computers*.
- Murdoch, P., Benzley, S., Blacker, T., & Mitchell, S. A., 1997. The spatial twist continuum: A connectivity based method for representing all-hexahedral finite element meshes. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 28, pp. 137–149.
- Owen, S. J., 1998. *A Survey of Unstructured Mesh Generation Technology*.
- Schneiders, R., 2000. Algorithms for Quadrilateral and Hexahedral Mesh Generation. *Proceedings of the VKI Lecture Series on Computational Fluid Dynamic*.