Proceedings of the XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE 2005
Brazilian Assoc. for Comp. Mechanics (ABMEC) & Latin American Assoc. of Comp. Methods in Engineering (AMC),
Guarapari, Espírito Santo, Brazil, 19th – 21st October 2005

Paper CIL 0863

AVALIAÇÃO DE CARGAS CRÍTICAS E COMPORTAMENTO PÓS-CRÍTICO INICIAL DE PÓRTICOS PLANOS

Rodrigo B. Burgos
Raul R. Silva
Luiz F. C. R. Martha
rburgos@ig.com.br
raul@civ.puc-rio.br
lfm@tecgraf.puc-rio.br
Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Abstract. *The determination of buckling loads of plane frames undergoing small pre-buckling displacements is reviewed, with an aim towards automated design. Subdivision of members is avoided with the use of enriched finite elements, which have additional degrees of freedom processed internally in a program. Three such finite element models are formulated. Comparisons of linearized analyses using the developed elements to model columns with different boundary conditions are performed initially, providing classical critical loads and buckling modes. Based on the results obtained, the most accurate of the elements is implemented in a general program. The resulting system allows the computation of classical buckling loads and modes of a general planar structure, which constitute important design information. However, some structures may require consideration of additional nonlinearity. For instance, some load and geometry configurations may lead to imperfection sensitivity. In order to introduce such considerations into the program, yet maintaining it sufficiently simple for the occasional user, an approximate evaluation of the initial tangent to the post-buckling path has been implemented. Thus, the adequacy of a design with respect to buckling can be verified in two steps, the first leading to the calculation of classical buckling loads and modes, and the second to the evaluation of the remaining stiffness after buckling and the symmetric or asymmetric character of the post-buckling path. Some examples are presented to verify the accuracy of the implement procedure in obtaining critical loads of portal frames. Roorda´s classical simple frame, for which analytical and experimental results are available, is used as a benchmark test for the evaluation of the procedure for the evaluation of the initial post-buckling behavior.*

Keywords: *Structural stability, Critical loads, Frames, Bifurcation, Buckling*

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho utiliza-se a chamada linearização clássica do problema de estabilidade, em que as cargas de flambagem são obtidas através de uma análise de autovalor. Partindo da hipótese de que as deflexões e rotações que antecedem a perda de estabilidade podem ser desprezadas, toma-se como base a configuração indeformada da estrutura para a formulação das equações de equilíbrio.

No caso da análise de estruturas reticuladas pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), é desaconselhável o uso de um elemento de pórtico padrão por barra para a obtenção de cargas de flambagem pela solução do problema de autovalor, devido ao fato de as funções de forma desse elemento não levarem em conta a existência de uma força axial de compressão. Esta questão pode ser solucionada com a subdivisão de uma barra de pórtico em vários elementos para aumentar o grau de precisão do MEF. Outra solução possível para este problema é o uso de uma análise não-linear completa, que tem a desvantagem de ser muito exigente do ponto de vista computacional, além de envolver muitas tomadas de decisões, como os valores de incremento de carga ou de deslocamento, embora seja potencialmente mais realista.

Um problema apresenta-se então: como obter uma boa aproximação da carga crítica, utilizando uma análise linearizada, de quadros modelados por elementos de pórtico plano com apenas um elemento por barra ?

A solução encontrada foi utilizar graus de liberdade adicionais, no interior dos elementos, cujas funções de forma fossem formuladas de tal maneira que não alterassem os deslocamentos nodais. Esses graus de liberdade existem apenas para o cálculo da carga crítica e do modo correspondente, não aparecendo na estrutura de dados da análise estática linear. (Também poderiam ser mobilizados para o cálculo das freqüências e modos de vibração.) Como não há força associada, já que os graus de liberdade adicionais não pertencem a um nó do elemento, não há necessidade de se modificar a estrutura de dados de nós e carregamentos dos elementos finitos.

Foram testados vários modelos, com um e dois graus de liberdade adicionais, cujas funções de interpolação foram obtidas tanto pela formulação hierárquica, utilizando funções trigonométricas (Lages, 1992), quanto por polinômios de quinto grau.

2. ELEMENTOS FINITOS FORMULADOS

Dois elementos foram formulados: o elemento BSB2 (Waszczyszyn, 1994), no qual apenas um grau de liberdade (transversal ao eixo *x* local) é adicionado, e o elemento BSB3, com dois graus de liberdade adicionais. Este último foi formulado de duas formas distintas, a primeira utilizando polinômios de quinto grau como funções de interpolação e a segunda baseada na formulação hierárquica com o uso de funções trigonométricas (Lages, 1992).

2.1 Elemento BSB2

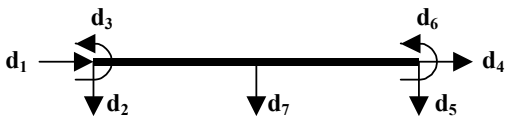


Figura 1 – Elemento BSB2

Para o elemento BSB2 não foi usada a formulação hierárquica para o grau de liberdade adicional, mas a sua idéia básica permaneceu, já que a função de interpolação utilizada para o grau de liberdade adicional é trigonométrica e satisfaz as condições de contorno.

A função de forma que descreve o grau de liberdade adicional é idêntica ao primeiro modo de flambagem de uma coluna bi-engastada, tornando o elemento BSB2 especialmente preciso na avaliação da carga crítica para essas condições de contorno.

$$N_7(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right] \tag{1}$$

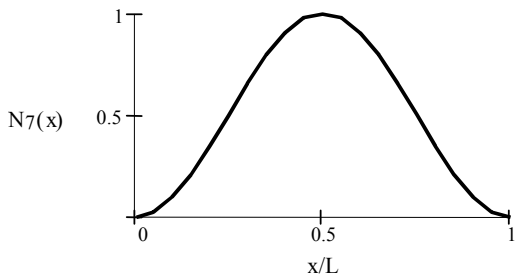


Figura 2 – Função de forma do grau de liberdade adicional

As matrizes de rigidez elástica e rigidez geométrica são bastante semelhantes às do elemento de pórtico padrão, acrescidas de uma linha e uma coluna, que correspondem à contribuição do grau de liberdade adicional.

$$\mathbf{k_E} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\pi^4 EI}{L^3} \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\mathbf{k}_G = P\begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2}{15L} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30L} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30L} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2}{15L} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\pi^2}{2L} \end{bmatrix} \tag{3}$$

2.2 Elemento BSB3

Este elemento, com dois graus de liberdade adicionais, foi formulado de duas formas distintas: a primeira utilizando-se uma interpolação com polinômios de quinto grau para os deslocamentos internos e a segunda combinando-se funções polinomiais e trigonométricas (formulação hierárquica). Deve-se lembrar que apenas no caso da interpolação polinomial pura os graus de liberdade adicionais têm posições fixas como é mostrado na Fig. 3. Para a formulação hierárquica, as funções de interpolação satisfazem as condições de contorno de deslocamentos e rotações nulos nas extremidades dos elementos, mas os graus de liberdade internos não têm posição definida.

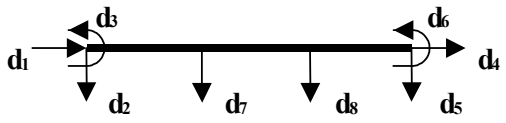


Figura 3 – Elemento BSB3

Formulação polinomial (BSB3-P). Com a inclusão de dois graus de liberdade adicionais, as funções de forma que os descrevem devem ser obtidas com polinômios de quinto grau, já que há a necessidade de serem estabelecidas seis condições de contorno.

$$N_7(x) = -\frac{243}{4}\left(\frac{x}{L}\right)^2\left(\frac{x}{L}-1\right)^2\left(\frac{x}{L}-\frac{2}{3}\right) \tag{4}$$

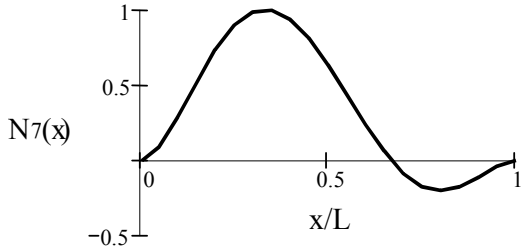


Figura 4 – Função de forma do grau de liberdade d_7

$$N_8(x) = \frac{243}{4}\left(\frac{x}{L}\right)^2\left(\frac{x}{L}-1\right)^2\left(\frac{x}{L}-\frac{1}{3}\right) \tag{5}$$

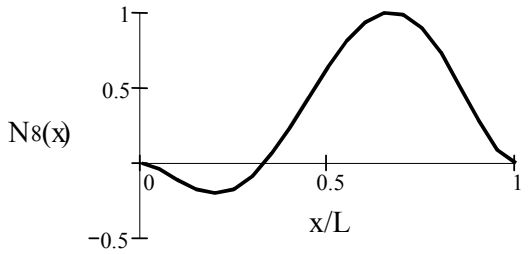


Figura 5 – Função de forma do grau de liberdade d_8

Formulação hierárquica (BSB3-H). Segundo a formulação hierárquica proposta, as funções de forma adicionais devem ser obtidas combinando-se polinômios de terceiro grau (no caso dos elementos de pórtico) com funções trigonométricas, da seguinte maneira:

$$N(x,n) = -\frac{n\pi}{L}x + \frac{n\pi}{L^2}\left[2+(-1)^n\right]x^2 - \frac{n\pi}{L^3}\left[1+(-1)^n\right]x^3 + \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{6}$$

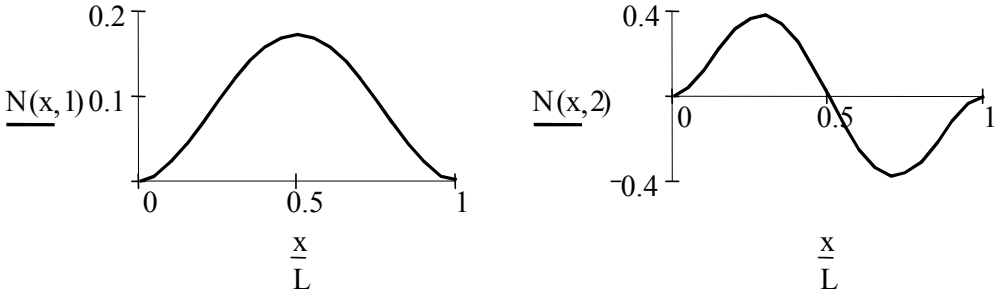


Figura 6 – Funções de forma adicionais para o elemento BSB3-H

3 ESTUDO DOS PONTOS DE BIFURCAÇÃO

No caso da estabilidade linear elástica clássica, todos os pontos críticos obtidos a partir do problema de autovalor são pontos de bifurcação. Pontos limites só podem ser obtidos através de uma análise não-linear completa, que foge ao escopo deste trabalho.

A caracterização do ponto de bifurcação permite avaliar a sensibilidade da estrutura às imperfeições. Sabe-se que, na prática, não há estruturas perfeitas, sendo muito importante determinar qual o comportamento pós-crítico do sistema caso haja imperfeições na sua geometria, na aplicação do carregamento ou em ambos.

Há diversas formas de se determinar o tipo de bifurcação de uma estrutura, sendo que a mais comum é verificar o sinal do determinante da matriz de rigidez tangente na vizinhança do ponto crítico, já que tal procedimento é análogo a verificar o sinal da forma quadrática da segunda variação da energia potencial (Parente, 2000). Essa metodologia é de fácil entendimento, porém implica em esforço computacional. Na literatura podem-se encontrar maneiras mais simples de caracterização de pontos de bifurcação a partir do problema de autovalor generalizado (Guimarães, 1999; Waszczyszyn, 1994).

De uma maneira intuitiva, podemos concluir que, se uma estrutura apresenta bifurcação simétrica estável, sua rigidez tangente aumenta com as deformações, fazendo com que a mesma suporte carga adicional após a flambagem. Sendo assim, é de se esperar que uma nova análise de autovalor, realizada na estrutura submetida a um certo nível de deformação, leve a um valor de carga crítica maior do que na estrutura indeformada. Analogamente, se a carga crítica diminui para o caso da estrutura deformada, o sistema apresenta bifurcação instável, sendo designada como simétrica se a redução independe do sinal da magnitude de deformação. Pode acontecer, ainda, de o valor da carga crítica aumentar para certo nível de deformação e diminuir para outro de sinal contrário; neste caso, o ponto crítico é caracterizado por uma bifurcação assimétrica instável, que também é instável. Tal raciocínio pode ser visto no esquema da Fig. 7, onde λ_{imp} é o autovalor para a estrutura deformada (imperfeita) e λ_{cr} é o autovalor da estrutura perfeita. Pode-se notar que no caso da Fig. 7a o valor de λ_{imp} aumenta qualquer que seja o parâmetro de deslocamento (bifurcação simétrica estável). No caso da Fig. 7b, o valor de λ_{imp} é menor do que λ_{cr} qualquer que seja δ (bifurcação simétrica instável) e no caso da Fig. 7c, λ_{imp} é maior do que λ_{cr} para valores positivos de δ e menor do que λ_{cr} para valores negativos de δ (bifurcação assimétrica). Deve-se lembrar que os gráficos da Fig. 7 representam uma linearização do caminho pós-crítico que, neste caso, é avaliado em apenas três pontos.

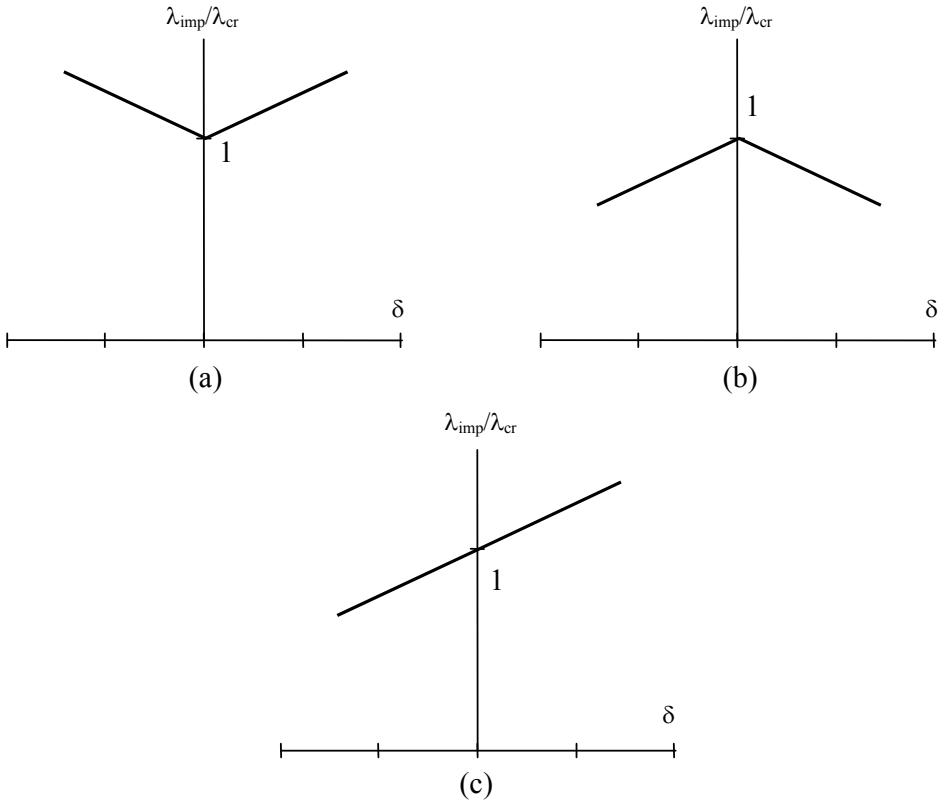


Figura 7 – Formas linearizadas de bifurcação

Avaliando-se a matriz tangente da estrutura no ponto de bifurcação e adicionando-se uma perturbação na direção do autovetor correspondente à primeira carga crítica pode-se facilmente avaliar o comportamento do ponto de bifurcação, da seguinte forma:

$$\mathbf{K_E}\,(\mathbf{q_B} + \xi\mathbf{v}) + \lambda^{+}_{imp}\,\mathbf{K_G}\,(\mathbf{q_B} + \xi\mathbf{v}) = \mathbf{0} \qquad (7)$$

$$\mathbf{K_E}\,(\mathbf{q_B} - \xi\mathbf{v}) + \lambda^{-}_{imp}\,\mathbf{K_G}\,(\mathbf{q_B} - \xi\mathbf{v}) = \mathbf{0} \tag{8}$$

Nas equações acima, q_B é o vetor dos deslocamentos da análise linear para a estrutura perfeita submetida ao carregamento crítico, v é o autovetor normalizado correspondente ao primeiro autovalor obtido da análise de estabilidade linearizada, λ^{+}_{imp} e λ^{-}_{imp} são os novos valores para os fatores de carga críticos, na vizinhança do ponto de bifurcação e ξ é um multiplicador escalar menor que a unidade.

Resolve-se o sistema de equações, usando a matriz de rigidez elástica original (estrutura perfeita) e, posteriormente, através dos deslocamentos obtidos, somados a um valor proporcional ao primeiro modo de flambagem, forma-se um novo campo de coordenadas nodais. Obtidas as coordenadas nodais da estrutura deformada, acrescidas de uma perturbação, utiliza-se o procedimento usual para formar as novas matrizes de rotação dos elementos. As novas matrizes de rigidez e geométrica da estrutura são então formadas a partir da nova geometria. Tal procedimento é análogo ao realizado por Guimarães (1999), com a ressalva de que as imperfeições neste caso são proporcionais ao modo de flambagem da estrutura, além do fato de o comprimento das barras ser recalculado após a modificação das coordenadas dos nós, resultando na modificação não apenas da matriz de rigidez, mas também da matriz geométrica, já que esta depende do comprimento da barra e do esforço axial na mesma, que também é modificado com a variação na geometria da estrutura.

4 TESTES NUMÉRICOS EM COLUNAS

Os elementos finitos propostos serão agora testados em termos de resultados numéricos. Os exemplos utilizados são condizentes com a hipótese de que as rotações anteriores à flambagem são suficientemente pequenas, podendo ser desconsideradas. Os valores apresentados na Tab. 1 estão normalizados em relação a EI/L^2.

Tabela 1. Cargas críticas obtidas

Condições de contorno	Valor analítico	BSB2	BSB3-H	BSB3-P
Engastada e livre	2.4674	2.469	2.4675	2.4674
Bi-apoiada	9.8696	9.9579	9.8696	9.8751
Bi-engastada	39.4784	39.4784	41.0652	42
Engastada e apoiada	20.0846	20.9711	20.2228	20.2858

5 TESTES NUMÉRICOS EM PÓRTICOS

Foi escolhido o elemento BSB3-H para a análise da estabilidade de pórticos, devido à sua maior precisão na obtenção de cargas críticas de colunas, como apresentado na seção anterior.

5.1 Obtenção de cargas críticas

São apresentados quadros planos formados por três barras: duas colunas e uma viga. As cargas verticais são aplicadas de forma concentrada na direção dos eixos das duas colunas, de modo que nenhum membro sofra flexão antes da perda de estabilidade, satisfazendo a hipótese de pequenas rotações no estágio pré-crítico.

Para a realização dos testes numéricos foi utilizado um quadro plano engastado sem e com restrição ao deslocamento horizontal (Waszczyszyn, 1994). O aspecto do primeiro modo de flambagem para cada caso é semelhante aos das Figs. 9b e 9a, respectivamente.

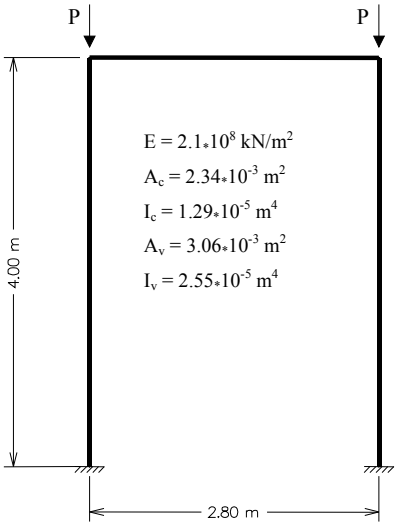
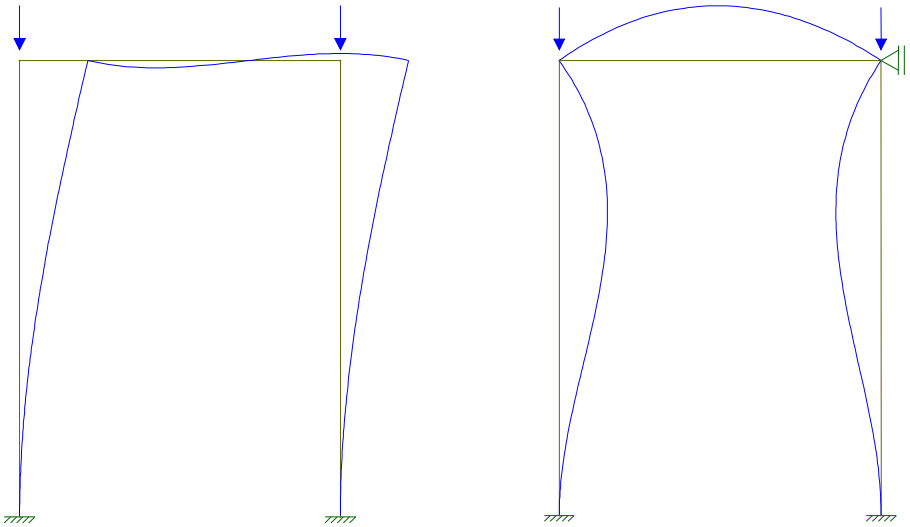


Figura 8 – Quadro plano testado



(a) (b)

Figura 9 – Modos de flambagem do quadro testado

Os resultados podem ser encontrados na Tab. 2, assim como os erros relativos aos valores analíticos. Foram incluídos também os valores limites obtidos para o caso de a rigidez da viga ser de grandeza muito superior ou muito inferior à rigidez da coluna.

Tabela 2 – Resultados para o quadro plano testado

	Deslocável			Indeslocável		
Inércia da viga (m^4)	0	$2.55*10^{-5}$	$\rightarrow\infty$	0	$2.55*10^{-5}$	$\rightarrow\infty$
Carga crítica (kN)	424	1492	1674	3484	5172	6667
Valor analítico (kN)	418	1492	1671	3420	5118	6684
% de erro	1.43 %	0 %	0.18 %	1.87 %	1.05 %	-0.25 %

5.2 Comportamento pós-crítico inicial

O modelo utilizado é mostrado na Fig. 10 e é conhecido como Pórtico de Roorda. O valor analítico para a primeira carga crítica é dado por $P_{cr} = 1.406\pi^2\ EI/L^2$ para valores de altura e comprimento iguais a L. O primeiro modo de flambagem do pórtico obtido pode ser visto na Fig. 11.

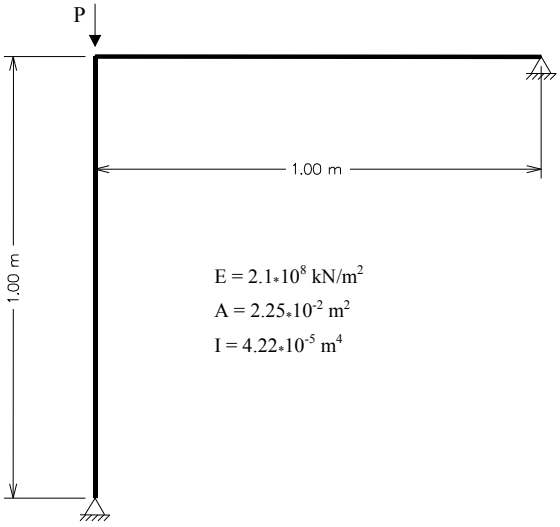


Figura 10 – Pórtico de Roorda

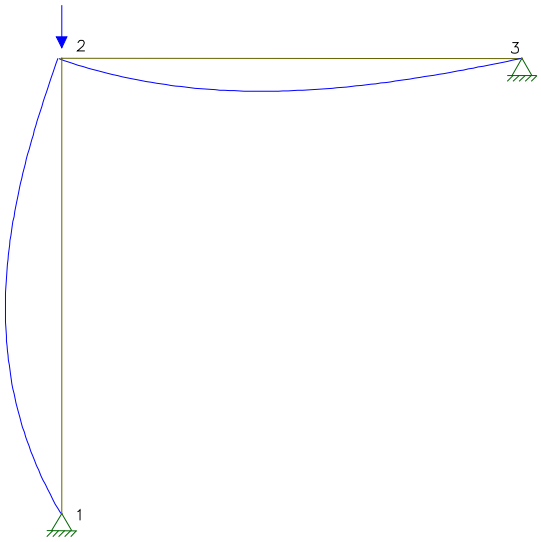


Figura 11 – Primeiro modo de flambagem do pórtico de Roorda

O valor encontrado para a carga crítica foi $P_{cr} = 129700\ kN$ que é equivalente a $P_{cr} = 1.483\pi^2\ EI/L^2$ (erro de *5.5 %*). Este valor foi então aplicado à estrutura para a obtenção dos deslocamentos estáticos no ponto de bifurcação. Somando-se os deslocamentos estáticos aos deslocamentos do modo de flambagem obtêm-se as novas coordenadas nodais para o cálculo da carga crítica da estrutura modificada, P^+_{imp}. Uma nova análise de autovalor é realizada e o valor obtido é $P^+_{imp} = 196700\ kN$.

Diminuindo-se os deslocamentos do modo de flambagem dos deslocamentos estáticos obtêm-se as novas coordenadas nodais para o cálculo da carga crítica da estrutura modificada, P^{-}_{imp}. Uma nova análise de autovalor é realizada e o valor obtido é $P^{-}_{imp} = 81750\ kN$.

A rotação do nó *2*, denominada rz_2, servirá como parâmetro de deslocamento. Esse ângulo será considerado positivo para o sentido anti-horário. A Fig. 12 mostra os resultados gráficos obtidos para o exemplo. Verifica-se que para, valores positivos de rz_2, a estrutura se mostra sensível à imperfeição, ou seja, o valor de P_{imp} é menor que o valor de P_{cr} da a estrutura perfeita, onde P_{imp} denota a carga crítica calculada para a estrutura imperfeita. O mesmo não ocorre para valores negativos de rz_2.

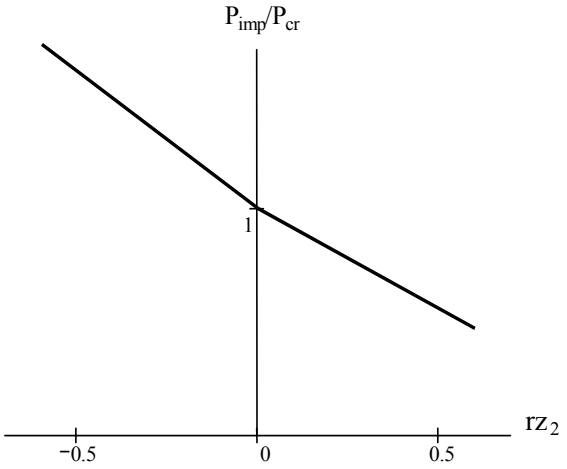


Figura 12 – Caminho pós-crítico linearizado para o pórtico de Roorda

Um outro tipo de carregamento foi utilizado para testar a previsão de uma bifurcação simétrica instável, como é mostrado na Fig. 13. Nesse caso, o valor analítico para a primeira carga é dado por $Pcr = \pi^2\ EI/L^2$ (Silvestre & Camotim, 2003). Os parâmetros do modelo são os mesmos do exemplo anterior.

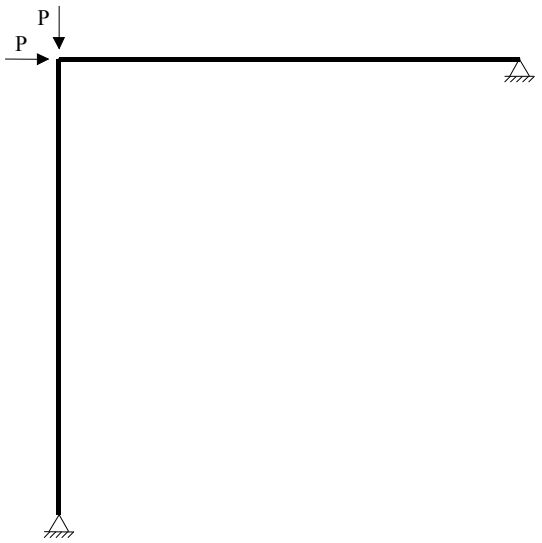


Figura 13 – Pórtico de Roorda com carregamento alternativo

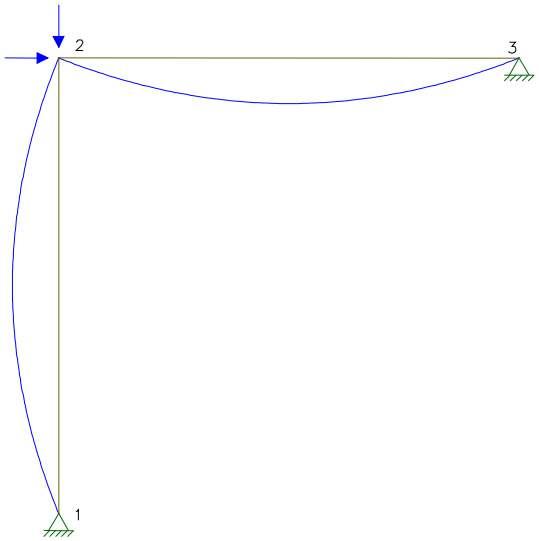


Figura 14 – Modo de flambagem para o Pórtico de Roorda
com carregamento alternativo

O valor encontrado para a carga crítica foi P_{cr} = *87930 kN*, que é equivalente a Pcr = 1.005 π^2 EI/L^2 (erro de *0.5 %*). O valor obtido tanto para P^+_{imp} quanto para P^-_{imp} foi de 70530 kN.

Verifica-se que, para valores positivos de rz_2, a estrutura se mostra sensível à imperfeição, ou seja, o valor de P_{imp} é menor que o valor de P_{cr} da a estrutura perfeita. O mesmo ocorre para valores negativos de rz_2, ficando caracterizada uma bifurcação simétrica instável.

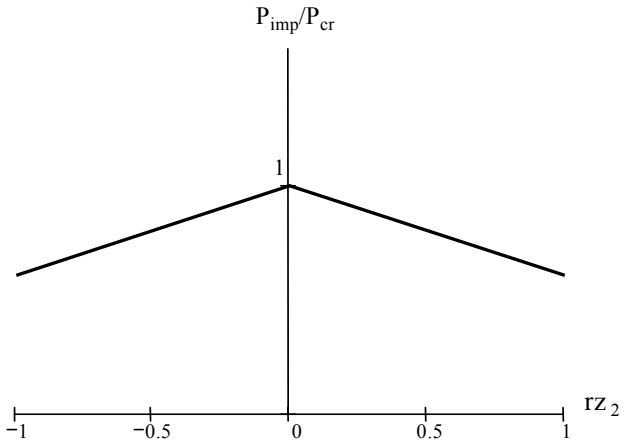


Figura 15 – Caminho pós-crítico linearizado para o pórtico de Roorda
submetido ao carregamento alternativo

6 CONCLUSÕES

Através deste trabalho é possível concluir que a implementação de um sistema automatizado capaz de calcular cargas críticas e prever o comportamento pós-crítico inicial de pórticos planos é perfeitamente viável, mesmo que se discretize cada barra da estrutura utilizando apenas um elemento finito, eliminando certos inconvenientes para o usuário. Este procedimento foi implementado no sistema FTOOL.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Guimarães, W. M., 1999. Avaliação do efeito das imperfeições sobre a flambagem de estruturas sob a ação de cargas dependentes dos deslocamentos. Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-RJ.

Lages, E. N., 1992. Formulação hierárquico-espectral de elementos finitos. Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-RJ.

Martha, L.F., 1999. "Ftool: A Structural Analysis Educational Interactive Tool", Proceedings of Workshop in Multimedia Computer Techniques in Engineering Education, Institute for Structural Analysis, Technical University of Graz, Áustria, pp. 51-65.

Parente, E. J, 2000. Análise de sensibilidade e otimização de forma de estruturas geometricamente não-lineares. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-RJ.

Silvestre, N & Camotim, D., 2003. An asymptotic-numerical method to analyze the post-buckling behavior, imperfection sensitivity and mode interaction in frames. Universidade Técnica de Lisboa.

Waszczyszyn, Z, Chichon, C & Radwanska, M., 1994. Stability of structures by finite element methods. Amsterdam: Elsevier.