



ANÁLISE LIMITE COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Guilherme Barros

Andre Pereira

Luiz Eloy Vaz

guilhermebarros@id.uff.br

andremaues@id.uff.br

Universidade Federal Fluminense (UFF) / Laboratório de Simulações Computacionais (LSC)

Rua Passo da Pátria 156 Bloco E Sala 244A, 24210-240, Niterói, Brasil

Luiz Fernando Martha

lfm@tecgraf.puc-rio.br

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio) / Depto de Engenharia Civil

Rua Marques de São Vicente 225, 22453-900, Rio de Janeiro, Brasil

Abstract. *Apresenta-se uma estratégia para formular problemas de Análise Limite (AL) com o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Na formulação de problemas de AL com o Método dos Elementos Finitos (MEF) se utiliza comumente o Princípio dos Trabalhos Virtuais, porém esse princípio não pode ser diretamente estendido para o MEC. Portanto, a estratégia proposta nesta pesquisa, vem viabilizar a formulação de problemas de AL com o MEC pelo teorema do limite inferior da plasticidade, baseando-se em um Princípio Variacional Híbrido, que é expresso pelo campo de deslocamentos e pelo campo de tensões de forma independentemente, sendo assim, variacionalmente consistente. Com o uso dessa técnica, pode-se considerar o comportamento do material como sendo rígido-plástico, hipótese sobre a qual se fundamenta a AL, o que não é possível com a formulação convencional do MEC.*

Keywords: *Análise Limite, Elementos de Contorno, Teorema do Limite Inferior, Plasticidade*

1 INTRODUÇÃO

O projeto e o dimensionamento de uma estrutura têm por objetivo garantir a segurança estrutural quanto ao colapso, mantendo, ao mesmo tempo, suas condições de funcionalidade para as cargas de serviço. As crescentes exigências de avaliação precisa da segurança e do comportamento das estruturas têm levado ao desenvolvimento de novos métodos de análise, dimensionamento e verificação estrutural.

A metodologia de projeto mais utilizada atualmente, o Método dos Estados Limites, possibilita ao projetista definir quão seguro está um elemento estrutural por si só. Ainda assim, é importante que o projetista faça uma avaliação da segurança da estrutura em sua totalidade. Estruturas hiperestáticas são capazes de resistir às solicitações ainda que tenha havido falha de um elemento estrutural. Isso se deve ao fato dessas estruturas serem capazes de redistribuir as solicitações. Desse modo, deve-se prever, na fase de verificação estrutural, a real segurança que a estrutura irá dispor a fim de analisar sua adequabilidade ao projeto.

1.1 Contextualização do Problema e Motivação

O colapso de uma estrutura pode se dar por diversas formas. Na engenharia de estruturas é muito comum se verificar o colapso por instabilidade elástica, provocado pela chamada carga crítica, por escoamento plástico, ocasionado pela carga de colapso plástico, ou por uma combinação das duas. Para definir a segurança da estrutura, pode-se, em modelo reduzido (experimental) e/ou numérico, aumentar gradativamente o carregamento, a partir do carregamento de projeto até o colapso, estudando o comportamento da estrutura durante esse processo, no caso de estruturas não esbeltas, a carga de colapso será menor que a carga crítica.

Surgem então, os projetos estruturais baseados no comportamento plástico dos materiais. Em tais procedimentos de projeto o objetivo principal não é determinar a distribuição de tensões na estrutura, mas sim, determinar a carga limite que a estrutura é capaz de suportar antes do colapso. Quando as cargas são aumentadas monotonicamente até o ponto em que a estrutura não consiga mais suportá-las, o corpo é dito haver atingido o colapso e a carga correspondente é chamada carga de colapso, carga limite ou carga última. A razão entre o carregamento último da estrutura e o inicialmente aplicado é denominado fator de colapso. Esse fator fornece uma medida da segurança estrutural, pois é uma estimativa de quão distante a estrutura está do colapso, mesmo após um elemento isolado ter esgotado sua resistência. Ao estado de deformação do corpo nesse instante dá-se o nome de mecanismo de colapso. Com as informações obtidas de uma análise como essa, pode-se realizar, por exemplo, plano de vistoria da estrutura, verificações quanto ao colapso progressivo, etc.

A estratégia mais adotada para realizar esse tipo de simulação é a análise elastoplástica, sobre a qual se encontram diversas referências na literatura (Carstensen & Klose, 2002; Chakrabarty, 2006; Jiang & Wang, 2006; Neto et al., 2008). Análises como essas necessitam dos mesmos dados informados em uma análise linear-elástica, assim como da tensão de escoamento do material e do critério de resistência. Em uma análise elastoplástica, aumenta-se gradativamente o carregamento até que a estrutura se torne instável. Essa estratégia, entretanto, apresenta o inconveniente de ter que resolver um sistema de equações não lineares a cada intervalo de carga. Desse modo, o processo torna-se computacionalmente custoso e bastante complexo, haja vista que o principal interesse, em nível de segurança estrutural, está somente na carga última (pois à medida que se aproxima desse limite, o sistema de equações fica instável e com difícil obtenção da carga última). Por conseguinte, seria mais interessante utilizar uma metodologia que forneça a carga de colapso de forma direta e automática.

Ademais, próximo ao colapso, a energia de deformação armazenada nas regiões de comportamento linear-elástico é desprezível em relação à energia das regiões de comportamento plástico, podendo ser relevada. Portanto, a verificação da segurança estrutural pode ser realizada recorrendo a um modelo de material rígido-plástico em detrimento do elástico-plástico.

A análise que fornece diretamente a carga limite, formulada a partir dos teoremas limites da plasticidade para materiais com comportamento rígido-plástico é conhecida como Análise Limite (AL) (Chakrabarty, 2006). Além disso, pode-se escrever um problema de AL na forma de programação matemática, na qual se pode utilizar algoritmos de otimização apropriados para solucionar o problema eficientemente.

1.2 Revisão da Literatura e Estado da Arte

A AL foi primeiramente formulada por Gvozdev (1938) e independentemente por Drucker et al. (1952). Prager (1972) e Martin (1975) também fizeram importantes avanços no desenvolvimento da AL. Essa técnica é aplicada a qualquer tipo de estrutura, e exemplos de sua aplicação podem ser encontrados na literatura para treliças planas (Petrovic et al., 2011; Kanno, 2012) e pórticos planos (Mijalkovic et al., 2008; Rossi, 2013). Além disso, também são encontrados trabalhos utilizando AL para meios contínuos, principalmente utilizando as bases do Método dos Elementos Finitos (MEF), aplicando-a para cascas e placas (Hodge, 1968; Save & Massonnet, 1972) e, também, para solos (Durand et al., 2006; Vicente Da Silva & Antão, 2007, 2008; Pachás et al., 2008).

Todavia, existem aplicações de engenharia em que o MEF não representa de forma apropriada o meio a ser analisado, como no caso de problemas geotécnicos, onde se trabalha usualmente com meios infinitos ou semi-infinitos. Por isso, outros métodos numéricos vêm sendo cada vez mais estudados e desenvolvidos. Um método numérico muito utilizado para análise em meios infinitos é o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Alguns trabalhos foram realizados no intuito de realizar avaliação da segurança estrutural via AL com o MEC, como Zhang et al. (2002) e Panzeca et al. (2013), porém nesses trabalhos são utilizadas formulações intrínsecas a materiais elásticos, enquanto que a AL se baseia em materiais rígido-plástico.

1.3 Originalidade e Contribuição

Os trabalhos realizados até então, propõem metodologias para determinação da carga de colapso pelo MEC intitulando-as de Análise Limite. Entretanto, como supracitado, a formulação de um problema de AL se dá pelos teoremas limites da plasticidade, nos quais é imposto ao material um comportamento rígido-plástico perfeito, o que não foi encontrado na literatura até então.

Desse modo, para se realizar AL consistentemente, não é possível utilizar a formulação convencional (de colocação) do MEC, nem sequer formulações alternativas como a simétrica de Galerkin (mesmo esta sendo variacionalmente consistente), sendo necessária uma formulação com base no equilíbrio das forças externas e internas, com consideração do comportamento rígido-plástico. Dado o exposto, a principal contribuição desse trabalho é a proposta de uma metodologia para se realizar consistentemente AL com o MEC, formulando o problema pelo teorema do limite inferior por meio de uma formulação variacional híbrida em tensões, com o funcional de Hellinger-Reissner.

1.4 Objetivos

O presente trabalho tem por objetivo propor uma nova técnica para AL com o MEC utilizando uma formulação variacionalmente consistente desse método, que permite formular o problema com a consideração do material rígido-plástico. Bem como, apresentar exemplos de sua aplicação que comprovem sua eficácia, principalmente na solução de problemas de meio infinito e semi-infinitos.

1.5 Organização do Texto

Para realizar o que fora proposto, o presente trabalho será dividido da seguinte forma: apresentar-se-á na seção 2 os fundamentos da AL; em seguida, na seção 3, apresentam-se as formulações variacionais para meios contínuos, com as quais se podem formular de diversas formas um método numérico, tais como o MEF ou o MEC, viabilizando a consideração do comportamento rígido-plástico. Discorre-se na seção 4 sobre duas possíveis estratégias para formular o problema de AL com o MEF, uma pelo difundido Princípio dos Trabalhos Virtuais e outra por uma formulação variacionalmente consistente que utiliza o Princípio Variacional de Hellinger-Reissner. Esse princípio é empregado numa formulação híbrida em tensões do MEC, apresentada na seção 5, que possibilita a realização do AL com o MEC. Por fim, apresentam-se exemplos de aplicação da metodologia proposta com os resultados obtidos.

2 PLASTICIDADE E ANÁLISE LIMITE

A Análise Limite (AL) de estruturas baseia-se num conjunto de teoremas fundamentais derivados da teoria da plasticidade: o teorema estático ou do limite inferior; o teorema cinemático ou do limite superior; e o teorema da unicidade. Os teoremas fundamentais da análise limite foram formulados primeiramente por Gvozdev (1938) e independentemente por Drucker et al. (1952) para corpos com comportamento rígido-plástico perfeito. Esses teoremas, como os próprios nomes sugerem, fornecem limites inferiores e superiores para a verdadeira carga de colapso.

O processo de busca da carga última pode ser realizado enquanto forem atendidas as condições de equilíbrio, para o teorema do limite inferior, ou compatibilidade, para o teorema do limite superior. Precisa-se atender também o critério de plastificação adotado para representar o material. Essa última restrição implica que, um elemento infinitesimal no sólido não pode suportar estado de tensões maior em magnitude do que aquele que o leva à plastificação.

2.1 Critérios de Plastificação

Supõe-se um ponto de um sólido constituído por determinado material, sujeito a um estado de tensões cuja magnitude aumenta monotonicamente. Inicialmente, para materiais com comportamento elástico, as deformações associadas serão puramente elásticas e a forma inicial será retomada após completo descarregamento. Já num material com comportamento rígido a configuração inicial não é alterada. Entretanto, para certa combinação de tensões atuantes o sólido passa a apresentar deformações plásticas, que, no caso do material rígido-plástico, serão as únicas. A lei que define o limite do comportamento rígido, ou elástico, do material sob ação de qualquer combinação de tensões é chamada Critério de Plastificação. A cada critério está associada uma função de plastificação $f(\sigma)$ cujos valores representam

$$f(\sigma) \begin{cases} < 0 \Rightarrow \text{rígido/elástico} \\ = 0 \Rightarrow \text{plástico} \\ > 0 \Rightarrow \text{impossível} \end{cases} \quad (1)$$

A Fig. 1 é uma ilustração da representação gráfica de uma função de plastificação no espaço definido por tensões principais.

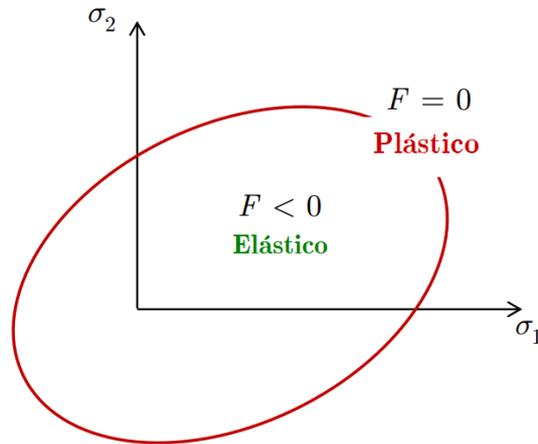


Figura 1. Representação gráfica de uma função de plastificação em estados planos (Krabbenhoft, 2013)

O uso do critério depende do tipo de material, ou seja, precisa-se estudar o comportamento do material com o qual se está trabalhando para escolher o critério que melhor o ajusta. Existem diversos critérios de plastificação (Chakrabarty, 2006; Neto et al., 2008), e nesse trabalho será abordado o de von Mises (ou da máxima energia de distorção). Sendo este critério mais usualmente aplicado a metais.

Critério de von Mises. Esse critério foi proposto por von Mises (1913) e leva seu nome. Segundo ele a plastificação se dá quando a energia de distorção elástica atinge um valor crítico. Desse modo, diz-se que a função de plastificação $f(\sigma)$ é

$$f(\sigma) = \begin{cases} \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2} - \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_Y & \Rightarrow \text{estado plano de tensões} \\ \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 - \sigma_{xy}^2} - \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_Y & \Rightarrow \text{estado plano de deformações} \end{cases} \quad (2)$$

Deve-se notar que esse critério de plastificação é aplicável a materiais cujo comportamento não é sensível às tensões hidrostáticas.

2.2 Teoremas Limites da Plasticidade

Teorema do Limite Inferior. “Se a carga atuante tem uma magnitude que permita encontrar um campo de tensões, satisfazendo às condições de equilíbrio no interior e no contorno, e essas tensões estejam satisfazendo um critério de resistência do material em qualquer ponto do corpo, então a carga atuante é menor ou no máximo igual à carga de colapso da estrutura.” Um campo de tensões desse tipo é denominado seguro ou estaticamente admissível. Pelo fato da carga de colapso real da estrutura ser sempre maior ou igual a uma carga atuante referida a um campo de tensões estaticamente admissível, os limites inferiores são sempre valores a favor da segurança.

Teorema do Limite Superior. “Considerando-se um campo de deslocamentos geometricamente possível, uma carga que realize trabalho externo igual ao trabalho interno plástico de deformação, para o campo de deslocamentos em questão, será maior ou igual à carga de colapso”. De acordo com o teorema do limite superior, a carga de colapso real da estrutura é sempre menor ou igual à carga obtida conforme descrito acima, consequentemente, limites superiores da carga de colapso e, portanto, contrários à segurança.

Teorema da Unicidade. A partir dos dois teoremas da AL, pode-se encontrar uma carga de forma a satisfazer duas condições: 1) existência de um campo de tensões estaticamente admissível correspondente às tensões dentro ou sobre a superfície de colapso. Nesse caso o carregamento correspondente é menor ou igual à carga de colapso; 2) existência de um campo de deslocamentos geometricamente admissível. Nesse caso, o carregamento correspondente é obtido da igualdade do trabalho externo e trabalho interno plástico. Quando ambas as condições são satisfeitas simultaneamente, o fator de carga encontrado é igual ao fator de carga de colapso, que é assim determinado de maneira única.

2.3 Programação Matemática

A Programação Matemática é a área da Matemática que trata dos problemas de minimização ou otimização de funções. O problema fundamental de otimização é fornecer a melhor decisão em qualquer circunstância. Em um problema de otimização matemática escolhe-se uma função de várias variáveis (ou funções), denominada função objetivo, para ser minimizada ou maximizada, podendo ser as variáveis submetidas a uma ou mais restrições, as quais devem ser satisfeitas.

As restrições são classificadas como: *Restrições de Igualdade* que são expressas por equações e/ou sistemas de equações de igualdade que envolvem todas, ou parte, das variáveis da função objetivo e que devem ser satisfeitas. *Restrições de Desigualdade* que são expressas por inequações e/ou sistemas de inequações que englobam algumas, ou todas, variáveis que compõe a função objetivo e que devem ser satisfeitas. *Restrições Laterais* que se impõem valores mínimos e/ou máximos às variáveis da função objetivo.

Em suma, o problema geral de programação matemática pode ser descrito nos seguintes termos: minimizar a função objetivo $f(\mathbf{x})$ de n variáveis contidas no vetor \mathbf{x} , designado de vetor das variáveis de projeto, sendo que as n variáveis estão submetidas a (s.a) p restrições de igualdade $h_k(\mathbf{x})$, m restrições de desigualdade $c_j(\mathbf{x})$ e l restrições laterais do tipo maior ou igual a um limite inferior x_i^{inf} e menor ou igual a um limite superior x_i^{sup} , i.e.

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}) \quad & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \text{s.a} \quad & \begin{cases} h_k(\mathbf{x}) = 0 & k = 1 \dots p \\ c_j(\mathbf{x}) \leq 0 & j = 1 \dots m \\ x_i^{\text{inf}} \leq x_i \leq x_i^{\text{sup}} & i = 1 \dots l \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

A programação matemática é dividida de acordo com o tipo de problema que se almeja solucionar. Têm-se, dessa forma, as seguintes classificações: a Otimização Sem Restrições (OSR) e a Otimização Com Restrições (OCR), que por sua vez é dividida entre Programação Linear (PL), Programação Quadrática (PQ) e Programação Não Linear (PNL). Suas aplicações dependem unicamente do tipo de função objetivo e o tipo de restrições, como exposto na Tabela 1.

Tabela 1. Divisão da programação matemática por tipo de função objetivo e restrições

Tipo de Restrição	Tipo de função objetivo		
	Linear	Quadrática	Não Linear
Linear	PL	PQ	PNL
Não Linear	PNL	PNL	PNL

O emprego da PL vai além do indicado na Tabela 1, haja vista que é frequentemente utilizada na solução de problemas de programação não-linear, quando estes são resolvidos de forma recursiva, ou seja, como uma sequência de problemas de PL.

O problema de AL pode ser formulado como um problema de Programação Matemática por meio dos teoremas enunciados na Seção 2.2. Pelo teorema do limite inferior, maximiza-se o fator que multiplica as cargas atuantes λ . Já no teorema do limite superior, minimiza-se o trabalho interno plástico de deformação, ou seja, encontra-se o campo de velocidades associado ao menor trabalho interno plástico de deformação. Ressalta-se ainda que, vem se empregando recentemente na AL outra área da Programação Matemática denominada Programação Cônica (Ben-Tal & Nemirovski, 2001), que tem se mostrado bastante promissora, podendo viabilizar a utilização da AL na solução de problemas práticos de engenharia em grande escala. Na Figura 2, é sucintamente esquematizado o uso da Programação Matemática na AL.

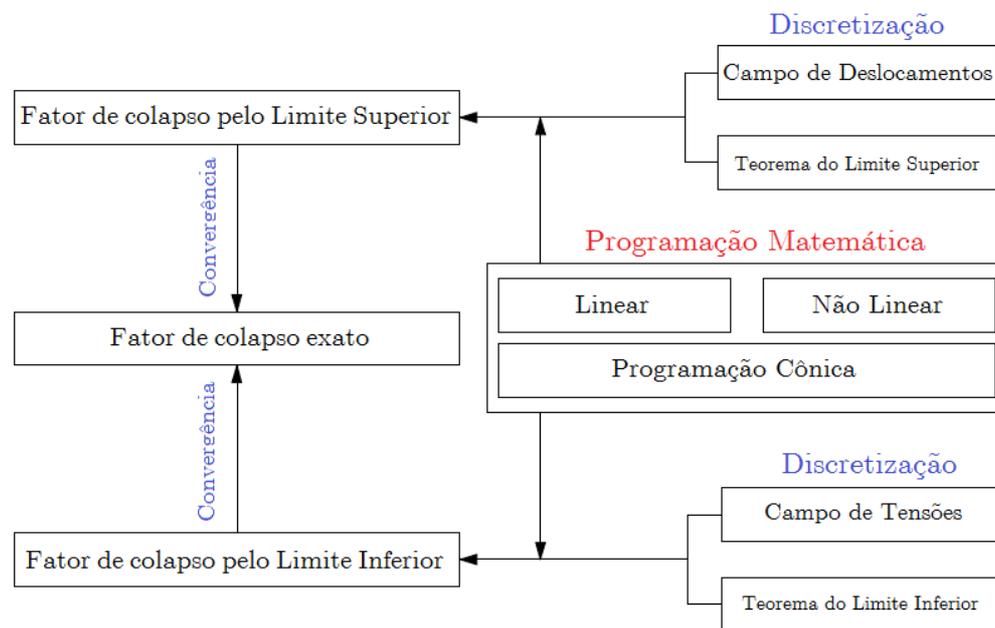


Figura 2. Resumo da Análise Limite como problema de otimização

Aplicação do Teorema do Limite Inferior. A formulação do problema consiste em maximizar λ enquanto forem atendidas as restrições. Uma delas é a restrição do material, ou seja, pode-se intensificar o estado de tensões num ponto atendendo o critério de plastificação, a qual se traduz em restrição de desigualdade. A partir desse nível de tensões aquele ponto passa a redistribuir a carga para sua vizinhança. Esse processo é viável enquanto for atendido o

equilíbrio global da estrutura, configurando-se em uma restrição de igualdade. Finalmente chega-se à

$$\begin{aligned} & \max \lambda \\ & \text{s.a.} \begin{cases} \nabla^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \\ \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma} = \lambda \mathbf{t} \\ f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

na qual \mathbf{b} é o vetor de forças de volume, \mathbf{n} é um vetor associado a um plano no qual se avalia a tensão, \mathbf{t} são forças externas aplicadas no contorno, $\boldsymbol{\sigma}$ é o campo de tensões, λ é o fator de colapso e ∇ é um operador diferencial que em problemas planos é dado por

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}^T \quad (5)$$

As duas restrições de igualdade na Eq. (4) representam equações de equilíbrio expressas na forma forte. Quando se faz uso de um método numérico, os quais representam por parâmetros discretos os campos de tensões e deslocamentos, precisa-se explicitar em sua formulação uma matriz de equilíbrio que seja equivalente a essas equações.

Aplicação do Teorema do Limite Superior. A formulação pelo Teorema do Limite Superior procura minimizar o trabalho interno das deformações plásticas, expresso por

$$W_{\text{int}} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \nabla \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{t} \mathbf{u} \, d\Gamma \quad (6)$$

Expresso na forma de programação matemática, com o multiplicador plástico α , tem-se

$$\begin{aligned} & \min W_{\text{int}} \\ & \text{s.a.} \begin{cases} \nabla^T u = \alpha \nabla^T f(\boldsymbol{\sigma}) \\ \alpha \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

3 FORMULAÇÕES VARIACIONAIS EM MECÂNICA DOS SÓLIDOS

A formulação de um problema de Análise Limite (AL) passa, como apresentado, por equações diferenciais de equilíbrio ou compatibilidade, que devem ser satisfeitas em cada ponto do domínio, por isso é chamada de forma forte. Todavia, resolver um problema de AL em uma estrutura qualquer dessa forma é inviável. Pode-se então, satisfazer essas equações na média, ou seja, na forma fraca. Para tal, escolhe-se uma função para interpolar o campo desejado. Essa função de interpolação não é a solução exata do problema, ou seja, há um erro, ou resíduo, associado a essa interpolação. Para satisfazer a equação na média força-se que o resíduo médio seja igual a zero ao longo do domínio, ou seja

$$\int_{\Omega} R W \, d\Omega = 0 \quad (8)$$

na qual R é o resíduo e W é uma função peso, ou função de ponderação, que trabalha ponderando (penalizando) o resíduo ao longo do domínio.

Desse modo, parte-se das equações diferenciais de equilíbrio

$$\begin{aligned} \nabla^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= \mathbf{0} & \text{em } \Omega \\ \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{t} & \text{em } \Gamma \end{aligned} \quad (9)$$

Resolvendo-as na forma fraca, tem-se

$$\int_{\Omega} (\nabla^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \bar{\mathbf{u}} \, d\Omega - \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{t}) \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma = 0 \quad (10)$$

no qual, $\bar{\mathbf{u}}$ são os deslocamentos virtuais, equivalentes à função peso. Prova-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais

$$\int_{\Omega} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{b}) \, d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} \, d\Gamma \quad (11)$$

Aplicando a lei constitutiva para material linear elástico (Lei de Hooke), i.e.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (12)$$

onde \mathbf{D} é a matriz que correlaciona o campo de tensões com o de deformações, expressa por

$$\mathbf{D} = \begin{cases} \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} & \text{estado plano de tensão} \\ \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} & \text{estado plano de deformação} \end{cases} \quad (13)$$

Adicionalmente, considera-se que as forças de volume e forças internas são conservativas, chegando-se ao Princípio da Mínima Energia Potencial

$$\Pi_p = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} + \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{b} \right) \, d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} \, d\Gamma \quad (14)$$

Nota-se que esse funcional depende apenas do campo cinemático. É desse funcional que se deriva as formulações convencionais, para problemas de elasticidade, dos métodos numéricos como o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Contudo, não é possível formular consistentemente um problema de AL por esse funcional, pois, como inferido, necessita-se de uma formulação que forneça equações de equilíbrio.

Outros funcionais foram derivados, para solucionar os mais diversos problemas, como o Princípio Variacional de Hu-Washizu, que trata independentemente os campos de tensão, deformação e deslocamento. Há também o Princípio Variacional de Hellinger-Reissner, que pode ser derivado a partir do Princípio Variacional de Hu-Washizu, correlacionando pela lei constitutiva os campos de tensão e deformação, desse modo, o Princípio Variacional de Hellinger-Reissner envolve os campos de deslocamento e de tensão. Um resumo da derivação dos Princípios Variacionais discutidos é apresentado na Fig. 3. Pelos campos independentes

envolvidos (tensão e deslocamento), o Princípio Variacional de Hellinger-Reissner é empregado na formulação de métodos híbridos em tensões e deformações, como o Método dos Elementos Finitos Híbrido em Tensões e o Método dos Elementos de Contorno Híbrido em Tensões. Esses métodos híbridos apresentam matrizes de equilíbrio, que são as mesmas utilizadas na AL. Por isso, o Princípio Variacional de Hellinger-Reissner é fundamental para realizar AL com qualquer método.

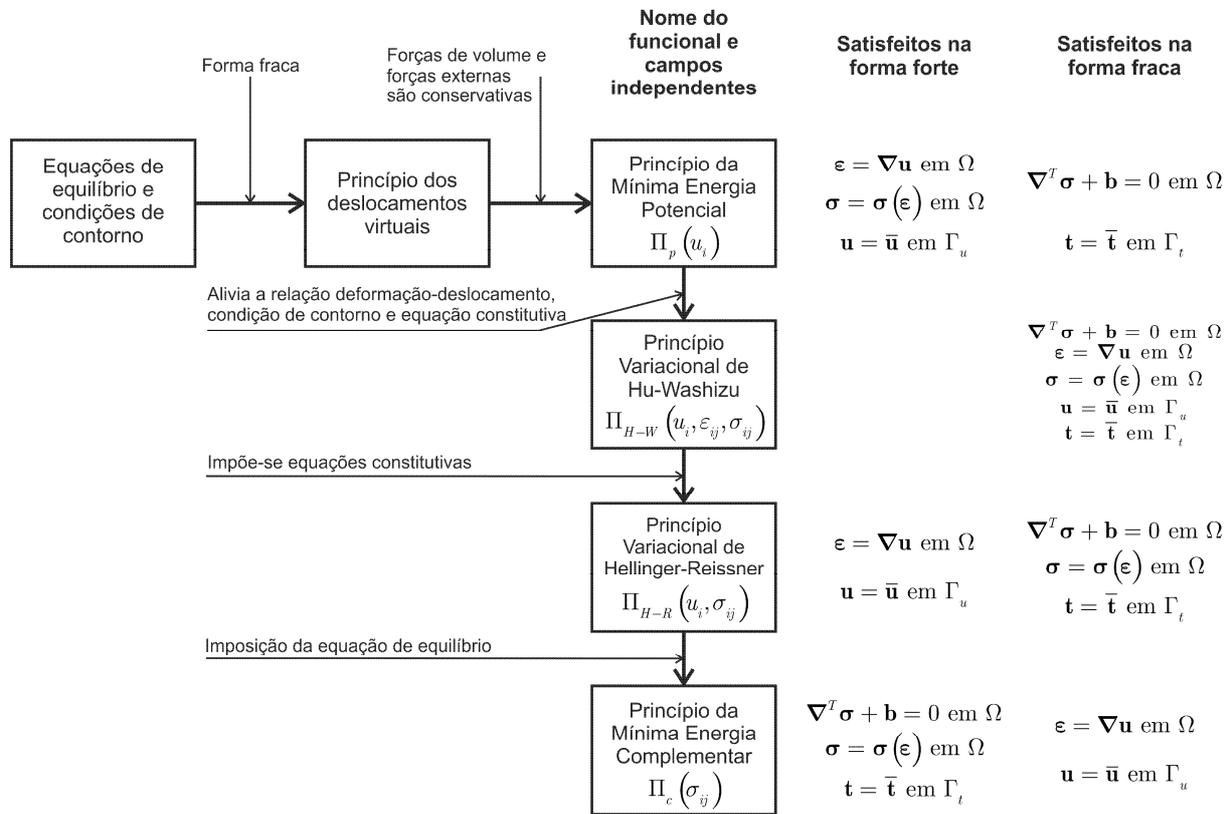


Figura 3. Satisfação forte e fraca dos parâmetros envolvidos nos Princípios Variacionais

4 REVENDO ANÁLISE LIMITE COM ELEMENTOS FINITOS

Para solucionar um problema de Análise Limite (AL) pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) faz-se necessário uma discretização do domínio Ω do sólido. Provavelmente a estratégia mais adotada a fim de formular problemas de AL com o MEF é o Princípio dos Trabalhos Virtuais, expresso pela Eq. (11), que estabelece igualdade entre o trabalho virtual interno e o trabalho virtual externo. Para formulação do MEF esse princípio é reescrito na forma discreta, resultando em

$$\int_{\Omega} \bar{\epsilon}^T \sigma d\Omega - \bar{\mathbf{d}}^T \mathbf{p} = 0 \tag{15}$$

na qual, $\bar{\epsilon}$ é o vetor de deformações virtuais compatíveis com os deslocamentos virtuais $\bar{\mathbf{d}}$ (grandezas cinemáticas) e σ é vetor de tensões reais em equilíbrio com o vetor \mathbf{p} de forças externas atuantes (grandezas estáticas). Vale ressaltar que é comum, ao se programar um método numérico, utilizar um vetor para representar um tensor, por simplificar a implementação e minimizar o esforço computacional demandado.

Como em toda formulação do MEF, utilizam-se funções interpoladoras do campo de deslocamento, também denominadas funções de forma, com as quais são interpolados os deslocamentos nodais, ou seja

$$\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{N}(x, y) \mathbf{d} \quad (16)$$

onde $\mathbf{u}(x, y)$ é o campo de deslocamentos para problemas planos (x, y) , $\mathbf{N}(x, y)$ é a matriz que contém as funções de forma que dependem do tipo de elemento utilizado para discretizar o domínio, e \mathbf{d} é o vetor de deslocamentos nodais.

Obtêm-se as deformações, a partir de derivadas do campo de deslocamentos, desse modo

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u}(x, y) \quad (17)$$

na qual $\boldsymbol{\nabla}$ é o operador diferencial definido na Eq. (5).

Por conseguinte, chega-se à seguinte relação deformação-deslocamento nodal

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \boldsymbol{\nabla} \mathbf{N}(x, y) \mathbf{d} = \mathbf{B}(x, y) \mathbf{d} \quad (18)$$

onde \mathbf{B} , dita matriz de compatibilidade cinemática, é $\mathbf{B}(x, y) = \boldsymbol{\nabla} \mathbf{N}(x, y)$.

Está na derivação do campo de tensões a principal diferença entre as formulações para análise elástica e para AL, uma vez que para análise elástica o campo de tensões é derivado por meio da lei constitutiva, associada ao campo cinemático. Já na AL, como o material é rígido-plástico, interpola-se o campo estático independentemente do campo cinemático.

Adota-se então que a tensão possui valor constante em cada elemento. Essa hipótese não é obrigatória, porém facilita a imposição de equilíbrio entre os elementos. Assim,

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y) = \mathbf{P} \boldsymbol{\beta} \quad (19)$$

onde $\boldsymbol{\beta}$ é o vetor de parâmetros de tensões em cada elemento e \mathbf{P} é a matriz de interpolação das componentes de tensões a partir dos parâmetros $\boldsymbol{\beta}$.

Substituindo-se as Eq. (18) e (19) na Eq. (15), chega-se a

$$\int_{\Omega} \bar{\mathbf{d}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\beta} d\Omega - \bar{\mathbf{d}}^T \mathbf{p} = 0 \quad (20)$$

na qual $\bar{\mathbf{d}}$ e $\boldsymbol{\beta}$ são constante e podem sair da integral, resultando em

$$\bar{\mathbf{d}}^T \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{P} d\Omega \boldsymbol{\beta} - \bar{\mathbf{d}}^T \mathbf{p} = 0 \quad (21)$$

Isolando $\bar{\mathbf{d}}$ na Eq. (21), tem-se

$$\bar{\mathbf{d}}^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{P} d\Omega \boldsymbol{\beta} - \mathbf{p} \right) = 0 \quad (22)$$

e como $\bar{\mathbf{d}}$ é o vetor de deslocamentos virtuais, ou seja, arbitrário, não sendo necessariamente nulo, o único modo de anular o produto da Eq. (22) é

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{P} d\Omega \boldsymbol{\beta} = \mathbf{p} \quad \therefore \quad \mathbf{A} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{p} \quad (23)$$

onde

$$\mathbf{A} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{P} d\Omega \quad (24)$$

é a matriz de equilíbrio entre forças internas e externas. Como demonstrado, a montagem dessa matriz envolve uma integral ao longo do domínio do sólido e por isso é necessário, como supracitado, uma discretização do domínio.

Todavia, segundo discutido na Seção 3 uma formulação alternativa, variacionalmente consistente, pode ser obtida a partir do Princípio Variacional de Hellinger-Reissner, expresso por

$$\Pi_{H-R} = \int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\sigma}^T \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{t}^T \mathbf{u} d\Gamma \quad (25)$$

O termo relativo ao trabalho das forças externas pode ser reescrito, em termos das cargas e deslocamentos nodais, da seguinte forma

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t}^T \mathbf{u} d\Gamma = \mathbf{p}^T \mathbf{d} \quad (26)$$

Substituindo-se as Eq. (18), (19) e (26) na Eq. (25), obtém-se

$$\Pi_{H-R} = \int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B} \mathbf{d} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} \boldsymbol{\beta} \right) d\Omega - \mathbf{p}^T \mathbf{d} \quad (27)$$

na qual \mathbf{d} e $\boldsymbol{\beta}$ são constantes e podem sair da integral, levando à

$$\Pi_{H-R} = \boldsymbol{\beta}^T \int_{\Omega} \mathbf{P}^T \mathbf{B} d\Omega \mathbf{d} - \boldsymbol{\beta}^T \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} d\Omega \boldsymbol{\beta} - \mathbf{p}^T \mathbf{d} \quad (28)$$

A condição de estacionariedade do funcional da Eq. (28) em relação à $\boldsymbol{\beta}$ recai em

$$\int_{\Omega} \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} d\Omega \boldsymbol{\beta} - \int_{\Omega} \mathbf{P}^T \mathbf{B} d\Omega \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (29)$$

Já a condição de estacionariedade do funcional da Eq. (28) em relação à \mathbf{d} é

$$\boldsymbol{\beta}^T \int_{\Omega} \mathbf{P}^T \mathbf{B} d\Omega = \mathbf{p}^T \quad (30)$$

cujas transpostas são

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{P} d\Omega \boldsymbol{\beta} = \mathbf{p} \quad \therefore \quad \mathbf{A} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{p} \quad (31)$$

onde \mathbf{A} é a matriz de equilíbrio dada por

$$\mathbf{A} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{P} d\Omega \quad (32)$$

Ressalta-se que a matriz de equilíbrio encontrada a partir do Princípio Variacional de Hellinger-Reissner, Eq. (32), é exatamente igual à obtida na Eq. (24), pelo Princípio dos deslocamentos virtuais, o que valida a aplicação desse potencial em problemas de AL.

A Eq. (29) pode ser reescrita de seguinte maneira

$$\mathbf{F} \boldsymbol{\beta} - \mathbf{A}^T \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (33)$$

na qual \mathbf{F} é a matriz de flexibilidade expressa por

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} d\Omega \quad (34)$$

Associando as Eq. (33) e (31) em forma de sistema de equações matriciais, tem-se

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{F} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Resolvendo a primeira equação do sistema da Eq. (35) para $\boldsymbol{\beta}$, obtém-se

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{d} \quad (36)$$

A substituição de $\boldsymbol{\beta}$ na segunda equação do sistema da Eq. (35) resulta em

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{p} \quad (37)$$

na qual \mathbf{K} é uma matriz de rigidez simétrica, dada por $\mathbf{K} = \mathbf{A} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{A}^T$, na qual \mathbf{F}^{-1} é a inversa generalizada da matriz de flexibilidade \mathbf{F} . A solução da Eq. (37) fornece os resultados de \mathbf{d} nos nós da discretização. O cálculo dessa inversa generalizada demanda um alto custo computacional, porém não precisa ser calculada para AL, uma vez que só a equação de equilíbrio, dada pela Eq. (31), é necessária e suficiente na AL quando formulada pelo limite inferior ou teorema estático.

Na formulação para análise estática garante-se compatibilidade entre os elementos, pois o deslocamento é o mesmo em graus de liberdade de elementos adjacentes. Na AL precisa-se garantir, também, equilíbrio entre os elementos adjacentes. Assim, monta-se a matriz \mathbf{A} global da estrutura. Todos os pontos da estrutura estão em equilíbrio, inclusive os nós dos elementos. Desse modo, montam-se equações de equilíbrio para cada nó da estrutura, somando a contribuição de cada elemento que o possui. O processo é muito parecido com a montagem da matriz de rigidez na formulação clássica.

Programação Matemática. Pode-se enfim, de posse da matriz de equilíbrio da estrutura, mais um critério de plastificação, escrever o problema de AL como um problema de otimização, da seguinte forma

$$\begin{array}{l} \max \lambda \\ \text{s.a.} \end{array} \begin{cases} \mathbf{A} \boldsymbol{\beta} = \lambda \mathbf{p} \\ f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \end{cases} \quad (38)$$

5 ANÁLISE LIMITE COM ELEMENTOS DE CONTORNO

A essência de uma formulação em Elementos de Contorno é reduzir a dimensionalidade do problema, ou seja, a dimensão da representação do problema é transformada da dimensão do domínio para a dimensão do contorno.

A formulação convencional de colocação para análise elástica, estática, plana, linear e isotrópica pode ser encontrada com detalhes em Becker (1992), Brebbia & Dominquez (1992) e Beer et al. (2008). Entretanto, no intuito de realizar uma Análise Limite (AL), essa formulação, por envolver parâmetros elásticos do material, não se mostra como uma formulação apropriada, já que na AL o material é assumido com comportamento rígido-plástico. Desse modo, precisa-se de uma formulação na qual seja possível considerar o material como material rígido-plástico perfeito, ou seja, uma formulação baseada apenas no equilíbrio das forças externas com as internas, resultantes do campo de tensões ao longo do

sólido, da mesma forma que é feito com Elementos Finitos. Para tanto, deve-se usar a formulação híbrida em tensões do MEC (HSBEM), cuja formulação pode ser encontrada mais detalhadamente em Dumont (1989) e em Souza (1992), e que será brevemente descrita nessa seção com os passos mais importantes para formular um problema de AL com o MEC de forma consistente.

Os desenvolvimentos a seguir consideram o caso particular de um corpo sólido tendo um domínio Ω delimitado por um contorno Γ que está sujeito a forças de superfície \bar{t} em Γ_t e deslocamentos \bar{u} em Γ_u , como ilustrado na Figura 5.

Na formulação do MEC aqui apresentada, a discretização do contorno Γ utiliza nós e elementos, Figura 5(b). Somente parâmetros nodais são necessários para a representação primária das variáveis envolvidas na análise. Esta representação pode ser estendida para todo o contorno usando interpolações sobre cada elemento, como a seguir

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_j \mathbf{d}^j \quad \text{e} \quad \mathbf{t} = \mathbf{N}_j \mathbf{t}^j \quad (39)$$

Na qual \mathbf{N}_j são as funções de interpolação, \mathbf{d}^j e \mathbf{t}^j são os valores dos deslocamentos e das forças de superfície nos nós dos elementos.

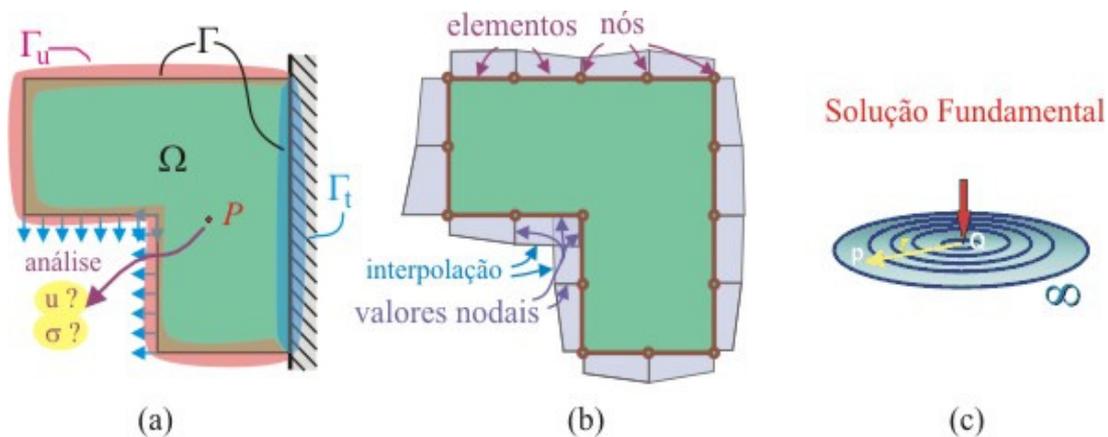


Figura 5. (a) Modelo estrutural; (b) Discretização com elementos de contorno; (c) Solução fundamental.

As análises por elementos de contorno possuem basicamente dois passos. O primeiro consiste em determinar os resultados no contorno. Em seguida, os resultados em qualquer ponto no domínio podem ser obtidos conhecendo-se os resultados ao longo de todo o contorno. Outra característica importante dos MEC é o uso de uma solução especial da equação governante do problema chamada de Solução Fundamental, que é, em parte, responsável pela eliminação da integral de domínio. Para análise de tensões, essa solução é associada ao problema de uma carga concentrada aplicada em um ponto P de um meio infinito, como ilustrado na Fig. 5(c).

As Soluções Fundamentais da equação diferencial de equilíbrio (isto é, juntando-se os três conjuntos de equações: equilíbrio, compatibilidade e constitutiva) é dada por

$$u_{ik}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ik} + r_{,l} r_{,k} \right] \quad (40)$$

e por

$$t_{lk}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu)\delta_{lk} + 2r_{,l}r_{,k} \right] + (1-2\nu)(n_l r_{,k} - n_k r_{,l}) \right\} \quad (41)$$

que representam, respectivamente, os deslocamentos e as forças em qualquer ponto na direção k , quando uma carga unitária é aplicada no ponto i na direção l , na qual r representa a distância entre os dois pontos.

5.1 Formulação Híbrida Em Tensões

A formulação híbrida do MEC é uma formulação variacionalmente consistente que utiliza artifício matemático do Método de Galerkin. A grande vantagem da utilização desta base matemática consiste na obtenção de matrizes simétricas para representar o problema. A literatura apresenta apenas o desenvolvimento deste método para análises lineares.

A formulação híbrida em tensões do MEC baseia-se no princípio variacional de Hellinger-Reissner (Dumont, 1989). O potencial de Hellinger-Reissner é expresso por

$$-\Pi_{H-R} = \int_{\Omega} [U_0^{*c}(\sigma_{ij}^*) + \sigma_{ij}^* u_i] d\Omega - \int_{\Gamma} u_i \sigma_{ij}^* \eta_j d\Gamma + \int_{\Gamma^{\sigma}} \bar{t}_i u_i d\Gamma \quad (42)$$

que é função unicamente dos deslocamentos u_i e das tensões σ_{ij}^* (independentes entre si), na qual $U_0^{*c}(\sigma_{ij}^*)$ é a energia de deformação complementar.

Supondo-se também que as tensões estejam em equilíbrio com as forças de massa no domínio, como na equação diferencial de equilíbrio, chega-se à origem da formulação híbrida dos elementos finitos, desenvolvida por Pian & Tong (1969), em que se tem um campo de tensões no domínio e um campo de deslocamentos no contorno. Esta mesma formulação foi estendida ao Método dos Elementos de Contorno Híbrido, conforme será apresentado a seguir.

O campo de tensões no domínio é dado por uma combinação linear de soluções fundamentais como

$$\sigma_{ij}^* = D_{kij} p_k^* \quad (43)$$

ou seja, supõe-se como uma aproximação para σ_{ij}^* a expressão em série em termos de parâmetros nodais de força p_k^* a se determinar, portanto \mathbf{p}^* é um vetor de forças singulares e D_{kij} é a solução fundamental para tensões, derivada da Identidade Somigliana, dada por

$$D_{kij} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ (1-2\nu) \left(\delta_{ki} r_{,j} + \delta_{kj} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k} \right) + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \quad (44)$$

Vale ressaltar que a Eq. (43) que expressa o campo de tensões por funções de interpolação é equivalente à Eq. (19) utilizada na formulação com o MEF, porém no MEC essas funções de interpolação são singulares.

5.2 Resultados no Contorno

Após a discretização e aplicação do princípio da energia potencial estacionária para o potencial de Hellinger-Reissner, o problema pode ser expresso por

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{F} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^* \\ \mathbf{d} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} \quad (45)$$

na qual \mathbf{d} é o vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{F} é uma matriz de flexibilidade simétrica, dada por

$$\mathbf{F} \equiv F_{mn} = \int_{\Gamma} t_{im}^* u_{in}^* d\Gamma \quad (46)$$

e \mathbf{H} é expressa por

$$\mathbf{H} \equiv H_{mn} = \int_{\Gamma} t_{im}^* u_{in}^* d\Gamma \quad (47)$$

e \mathbf{p} é o vetor de forças nodais equivalentes devido às forças de superfície no contorno.

Resolvendo a primeira equação do sistema da Eq. (45) para \mathbf{p}^* , resulta-se em

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{d} \quad (48)$$

A substituição de \mathbf{p}^* na segunda equação do sistema da Eq. (45) resulta em

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{p} \quad (49)$$

na qual \mathbf{K} é uma matriz de rigidez simétrica, dada por $\mathbf{K} = \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H}$, na qual \mathbf{F}^{-1} é a inversa generalizada da matriz de flexibilidade \mathbf{F} . A solução da Eq. (49) fornece os resultados de \mathbf{d} e \mathbf{p} nos nós da discretização. A partir destes resultados, a resposta em todo o contorno pode ser obtida usando as funções de interpolação de cada elemento.

5.3 Resultados em Pontos Internos

Para realizar AL com o MEC precisam-se avaliar e controlar as tensões em pontos do domínio (pontos internos), pois são exatamente nesses pontos onde se impõe que o critério de plastificação adotado seja satisfeito. As tensões (e os deslocamentos) para qualquer ponto no domínio Ω podem ser obtidos por meio das forças nodais \mathbf{p}^* , exceto nos pontos de aplicação dessas forças. Então, o campo de tensões em Ω pode ser obtido diretamente pela Eq. (43).

Já que nenhuma integração adicional é necessária, o cálculo de resultados no domínio com o Método dos Elementos de Contorno Híbrido torna-se mais simples e mais rápido do que em qualquer outro método. Por outro lado, existem também alguns inconvenientes, como o comportamento dos resultados próximos dos nós da discretização, que tendem invariavelmente a infinito. Outro inconveniente desse método é o cálculo e a inversão da matriz \mathbf{F} , que demanda um grande esforço computacional. Contudo, na AL seu cálculo não é necessário, uma vez que é preciso apenas de equações que impõem o equilíbrio à estrutura, podendo se utilizar somente a segunda equação do sistema da Eq. (45), exatamente da mesma forma como realizado com o Método dos Elementos Finitos.

5.4 Formulação de Problemas de Análise Limite

Parte-se da equação de equilíbrio, segunda equação do sistema da Eq. (45), multiplicando-se o lado direito da equação pelo fator de colapso λ , ou seja

$$\mathbf{H}^T \mathbf{p}^* = \lambda \mathbf{p} \quad (50)$$

No processo de maximização do λ , deve-se avaliar a função de plastificação em pontos do domínio, denominados pontos de controle. Recomenda-se utilizar a maior quantidade de pontos possíveis, tentando posicioná-los em regiões onde se espera ocorrer plastificação.

Desse modo, pode-se escrever o problema da AL no formato de programação matemática da seguinte maneira

$$\begin{aligned} & \max \lambda \\ & s.a. \begin{cases} \mathbf{H}^T \mathbf{p}^* = \lambda \mathbf{p} \\ f(\mathbf{D}(\mathbf{x}) \mathbf{p}^*) \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (51)$$

na qual, \mathbf{x} é um vetor que contém as coordenadas dos pontos de controle.

6 RESULTADOS PRELIMINARES

A título de validação da metodologia proposta, apresenta-se um exemplo simples de uma placa de espessura $e = 1.00\text{m}$, sendo puramente tracionada, como ilustrado na Figura 6.

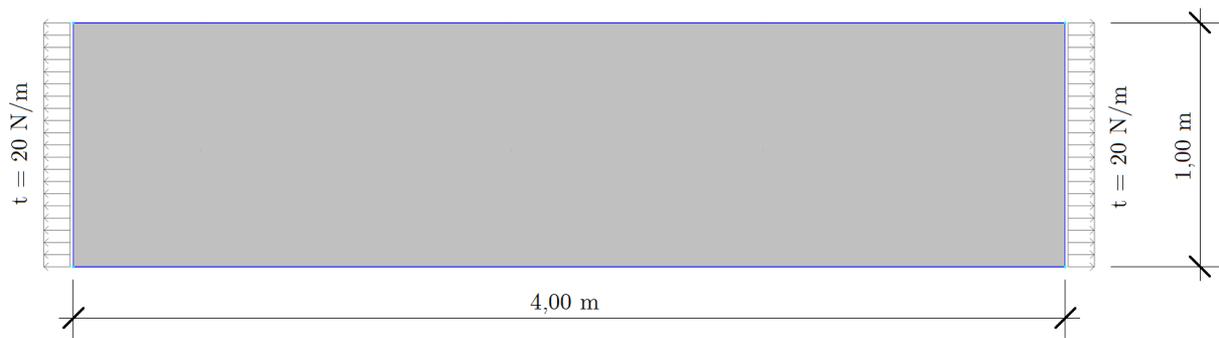


Figura 6. Modelo de uma chapa tracionada

Pode-se dizer que esse é um dos poucos exemplos, cuja solução pode ser facilmente determinada. A tensão encontrada $\sigma = t/e = 20\text{N/m}^2$ é constante ao longo do corpo. Assumindo-se tensão de escoamento $\sigma_Y = 30\text{N/m}^2$, encontra-se a solução exata do problema, $\lambda = \sigma_Y/\sigma = 30/20 = 1.5$.

Para esse modelo, a formulação com o Método dos Elementos Finitos (MEF) fornece resultado exato com apenas um elemento quadrilateral. Já a formulação proposta converge para a solução, discretizando-se com um elemento de contorno por lado e colocando apenas um ponto de controle, como pode ser observado na Figura 7(a). Resultados obtidos mantendo-se a discretização e aumentando-se o número de pontos de controle, são apresentados na Tabela 2.



Figura 7. Discretização do modelo em um elemento de contorno por lado

Tabela 2. Variação do resultado com o número de pontos de controle, mantendo-se fixa a discretização, um elemento por lado

Nº de pontos de controle	Fator de colapso λ	Tempo de análise (ms)	Erro (%)
1	1.43	66.8	4.7
2	1.39	84.8	7.3
3	1.34	107	10.7
5	1.34	146	10.7
20	1.34	455	10.7

Nota-se, ao observar a Tabela 2, que o resultado piorou e depois se manteve constante. Isso se dá devido à forma que os pontos de controle foram distribuídos no domínio. Na configuração 2, Figura 7(b), os pontos de controle se aproximaram mais dos nós, perturbando, assim o campo de tensões. Para as demais quantidades de pontos, esses foram colocados entre os dois pontos internos da Figura 7(b), pouco alterando o resultado.

Discretiza-se agora a estrutura com elementos de comprimento 0.5 m, ou seja, dois elementos na direção vertical e oito na horizontal. Colocando-se um ponto de controle no centro do modelo da Figura 8(a) e dois pontos no modelo da Figura 8(b), obtêm-se os resultados apresentados na Tabela 3.

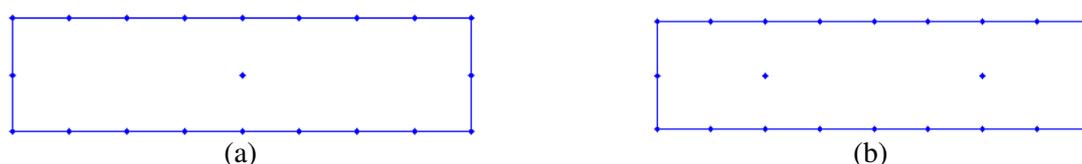


Figura 8. Discretização do modelo em elementos de contorno de 0.5 m de comprimento

Tabela 3. Variação do resultado com o número de pontos de controle, mantendo-se fixa a discretização, elementos de comprimento 0.5 m

Nº de pontos de controle	Fator de colapso λ	Tempo da análise (ms)	Erro (%)
1	1.5137	473	0.9
2	1.5170	609	1.1

Observa-se que, a melhor opção, para esse problema, é colocar apenas um ponto de controle, pois assim, a influência da singularidade da tensão é menor. Ademais, pode-se observar que o resultado melhorou muito quando se utilizou uma discretização mais refinada.

7 CONCLUSÕES

Por fim, como ficou demonstrado, a metodologia proposta é capaz de realizar Análise Limite (AL) com o Método dos Elementos de Contorno (MEC), com todas as formulações de maneira consistente.

Na prática a metodologia demonstra sua sensibilidade com relação à posição dos pontos de controle e a discretização do contorno. Ou seja, como todo método numérico, essa técnica apresenta melhores resultados à medida que se refina a discretização. Quanto mais refinado o contorno melhor definido estará o campo de tensões ao longo do domínio, possibilitando, assim, a inserção de pontos de controle em mais locais, melhorando o resultado.

Pode-se, futuramente, a partir de análises linear-elásticas, ajustar algum tipo de equação que relacione a discretização do contorno com a proximidade máxima que um ponto de controle pode ter em relação ao contorno. Outro futuro tópico de pesquisa é anexar, à implementação da técnica proposta nesse trabalho, uma adaptatividade dos pontos de controle, porém, para isso seria necessário possuir acesso ao código de programação matemática utilizado.

A aplicação dessa técnica é indicada principalmente a meios infinitos e semi-infinitos, os quais não são bem representados pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). Em meios finitos, a solução pelo MEF ainda parece ser a mais adequada. Em problemas envolvendo iteração solo-estrutura, entre outros seria interessante combinar MEF-MEC aplicando cada um na parte mais adequada. Essa técnica é chamada de acoplamento, e pode-se realizar em trabalhos futuros um acoplamento para AL.

ACKNOWLEDGEMENTS

Os autores gostariam de agradecer o suporte da FAPERJ para a realização da pesquisa.

REFERENCES

- Becker, A., 1992. *The boundary element methods in engineering*.
- Beer, G., Smith, I. & Duenser, C., 2008. *The Boundary Element Method with programming*.
- Ben-Tal, A. & Nemirovski, A., 2001. *Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications*. Society for Industrial Mathematics.
- Brebbia, C. & Dominguez, J., 1992. *Boundary elements: an introductory course*.
- Carstensen, C. & Klose, R., 2002. Elastoviscoplastic Finite Element Analysis in 100 lines of Matlab. *J. Numer. Math.*, Vol. 10, No. 3, pp. 157–192.
- Chakrabarty, J., 2006. *Theory of Plasticity*, Elsevier.
- Drucker, D.C.; Greenberg, H.J.; Prager, W. 1952. Extended limit design theorems for continuous medium. *Quarterly of Applied Mathematics* 9, 381–389.
- Dumont, N.A., 1989. The hybrid boundary element method: An alliance between mechanical consistency and simplicity. *Appl. Mech. Rev.*, 42, 54–63.
- Durand, A.F., Vargas Jr., E. A. & Vaz, L.E., 2006. Applications of numerical limit analysis (NLA) to stability problems of rock and soil masses. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 43, 408–425.

- Gvozdev, A.A., 1938. The determination of the value of the collapse load of statically indeterminate systems undergoing plastic deformation. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1, 322–335.
- Hodge, P. G. J. & Belytschko, T., 1968. Numerical Methods for the Limit Analysis of Plates. *Journal of Applied Mechanics* 35, 796–802.
- Jiang, Y. & Wang, C., 2006. On Teaching Finite Element Method in Plasticity With Mathematica. 233–242.
- Kanno, Y., 2012. Worst scenario detection in limit analysis of trusses against deficiency of structural components. *Engineering Structures*, 42, 33–42.
- Krabbenhoft, K., 2013. *Computational Limit Analysis*. Workshop on Limit Analysis.
- Martin, J. B., 1975. *Plasticity*. MIT Press, Cambridge.
- Mijalkovic, M., Trajkovic, M. & Milosevic, B., 2008. Limit analysis of beams under combined stresses. *Facta universitatis - series: Architecture and Civil Engineering*, 6, 75–88.
- Neto, E. de S., Peric, D. & Owen, D.R.J., 2008. *Computational Methods for Plasticity*, Wiley.
- Pachás, M., Vaz, L.E., Vargas Jr., E. A. & Herskovits, J., 2008. Geotechnical Limit Analysis and Optimization. *International Conference on Engineering Optimization*, 1–5.
- Panzeca, T., Parlavecchio, E., Zito, L., Gao, X.W. & Guo, X., 2013. Lower bound limit analysis by BEM: Convex optimization problem and incremental approach. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37, 558–568.
- Petrovic, Z., Milosevic, B., Mijalkovic, M. & Brcic, S., 2011. Determination of the limit load of statically indeterminate truss girders. *Facta universitatis - series: Architecture and Civil Engineering*, 9, 217–229.
- Pian, T.H.H. & Tong, P., 1969. Basis of Finite Element Method for Solid Continua. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1, 3–28.
- Prager, W., 1972. *Limit analysis: The development of a concept*. Foundation of Plasticity 2 (edited by Sawczuk), Noordhoff
- Rossi, P.P., 2013. Evaluation of the ultimate strength of R.C. rectangular columns subjected to axial force, bending moment and shear force. *Engineering Structures*, 57, 339–355.
- Save, M. & Massonnet, C. 1972. *Plastic analysis and design of plates, shells and disks*. North-Holland publishing company.
- Souza, R.M., 1992. *O método híbrido dos elementos de contorno para a análise elastostática de sólidos*. Master thesis, PUC-Rio.
- Vicente da Silva, M. & Antão, A.N., 2007. A non-linear programming method approach for upper bound limit analysis. *Int. Journal for Numerical Methods in Eng.*, 72, 1192–1218.
- Vicente da Silva, M. & Antão, A.N., 2008. Upper bound limit analysis with a parallel mixed finite element formulation. *International Journal of Solids and Structures*, 45, 5788–5804.
- von Mises, R., 1913. Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand. *Göttin. Nachr. Math. Phys.*, vol. 1, pp. 582–592.
- Zhang, X., Liu, Y., Zhao, Y. & Cen, Z., 2002. Lower bound limit analysis by the symmetric Galerkin boundary element method and the Complex method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, 1967–1982.