

Computação Gráfica

Módulo I – Imagem

UniverCidade - Prof. Ismael H F Santos

Considerações Gerais

- **Objetivo:** *Discutir os principais conceitos e os princípios básicos dos Sistemas Gráficos e a Programação em OpenGL.*
- **A quem se destina :** *Alunos e Profissionais que desejem aprofundar seus conhecimentos sobre Computação Gráfica e suas aplicações.*

Bibliografia

- *Computação Gráfica Volume 1. Jonas Gomes e Luiz Velho. Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA.*
- *Introdução a Computação Gráfica - Paulo Roma*
 - <http://www.lcg.ufrj.br/compgraf1/downloads/apostila.pdf>
 - <http://www.lcg.ufrj.br/compgraf1/downloads/apostila.ps.gz>
- *Notas do Curso ministrado na Universidade de Maryland pelo Prof. David Mount*
 - <ftp://ftp.cs.umd.edu/pub/faculty/mount/427/427lects.ps.gz>
 - <http://www.lcg.ufrj.br/~esperanc/CG/427lects.ps.gz>
- *Apostila Fundamentos da Imagem Digital – Antonio Scuri*
- *Computer Graphics: Principles and Practice, Second Edition. James Foley, Andries van Dam, Steven Feiner, John Hughes. Addison-Wesley.*
- *OpenGL Programming Guide, 2nd Edition. Mason Woo, Jackie Neider, Tom Davis. Addison Wesley.*

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

3

Bibliografia OpenGL

- *OpenGL® Programming Guide, 2nd Edition. Mason Woo, Jackie Neider, Tom Davis. Addison Wesley.*
 - <http://www.lcg.ufrj.br/redbook>
- *Manual de referência online*
 - <http://www.lcg.ufrj.br/opengl>
- *Sítio oficial do OpenGL*
 - www.opengl.org

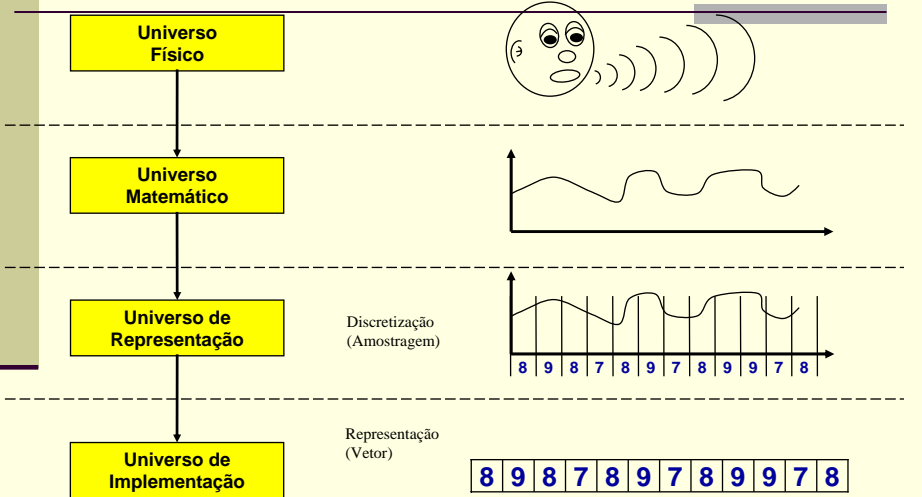
April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

4

Paradigma dos 4 Universos

Exemplo:
VOZ HUMANA



April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

5

Paradigma dos 4 Universos



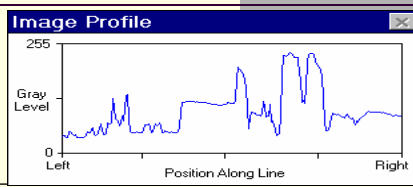
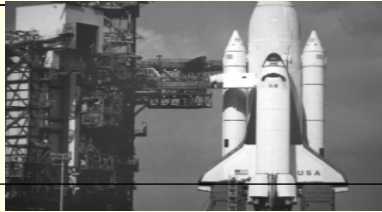
April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

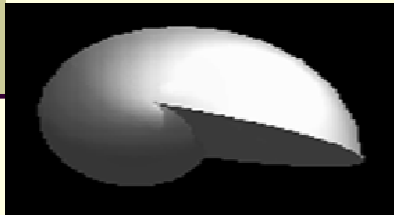
6

Imagens como Funções

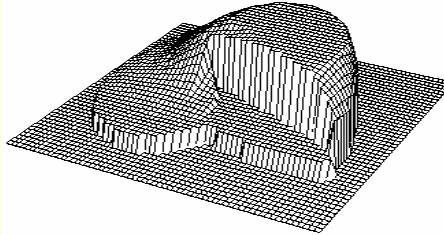
- Uma linha de uma imagem PB: Domínio 1D



- Uma imagem PB:



Domínio 2D



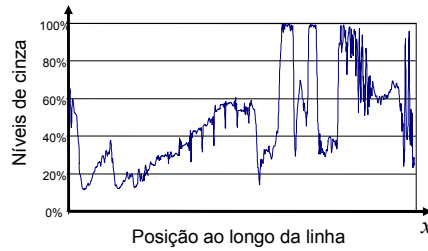
- Uma imagem Colorida: Domínio 3D (?)

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

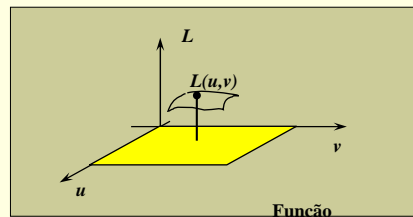
7

Imagem - Modelo Matemático: Função



$$L : [0, w] \times [0, h] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow L$$

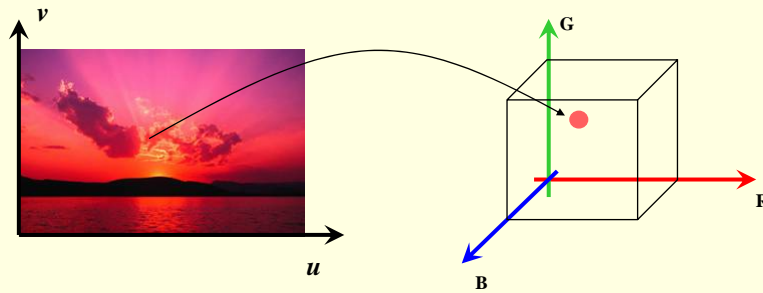


April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

8

Imagem colorida

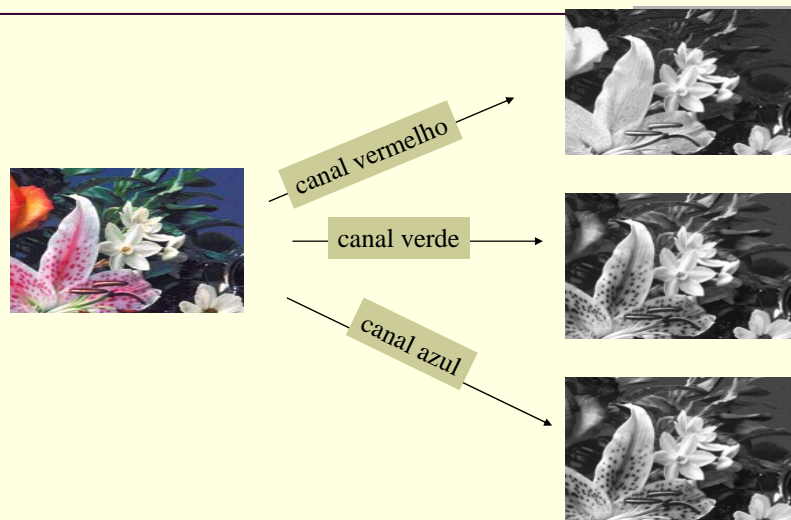


April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

9

Imagem coloridas como 3 canais de cor



April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

10

Imagem Digital

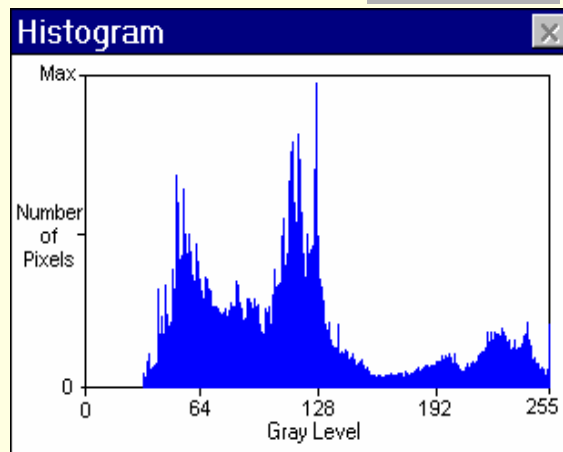
Amostragem, quantização e codificação

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

11

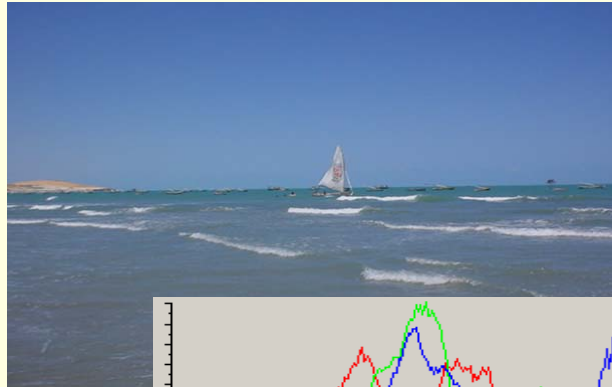
Imagem Digital: Histogramas



Uma outra maneira de ver a informação da imagem: probabilidade de ocorrência de um determinado valor, uso de intervalo $[0, 255]$, contraste,...

12

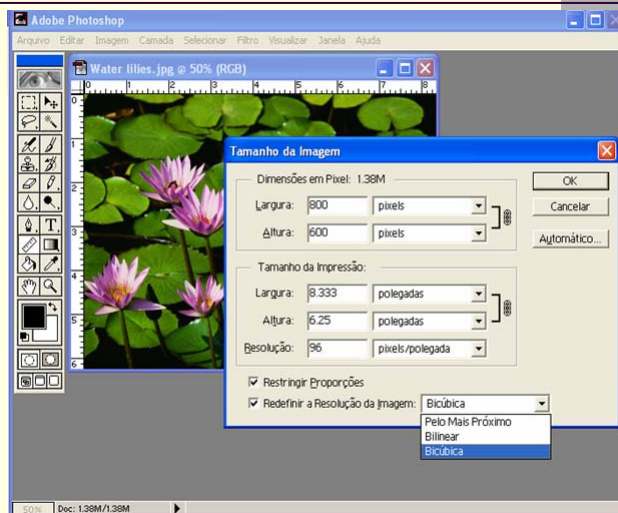
Histogramas de Imagem Colorida



April 05

13

Propriedades básicas de uma Imagem Digital

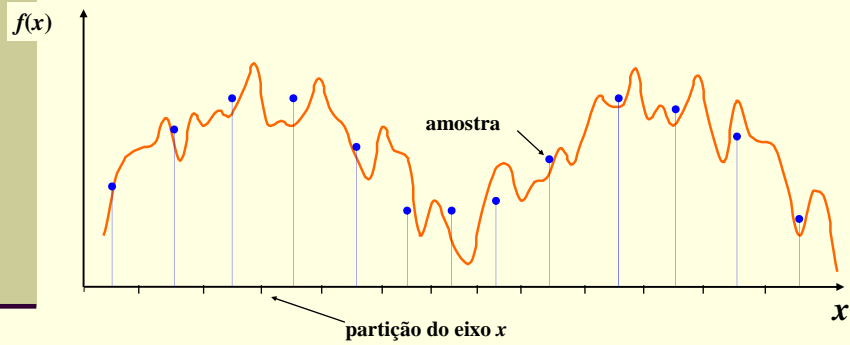


April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

14

Amostragem, quantização e codificação de $f(x)$

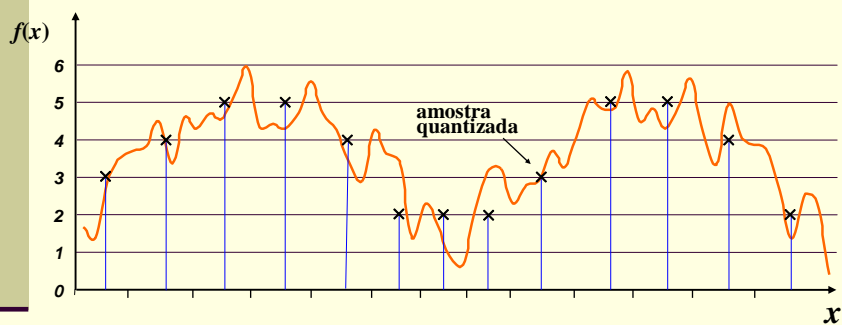


April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

15

Amostragem, quantização e codificação de $f(x)$



codificação = (3, 4, 5, 5, 4, 2, 2, 3, 5, 5, 4, 2)

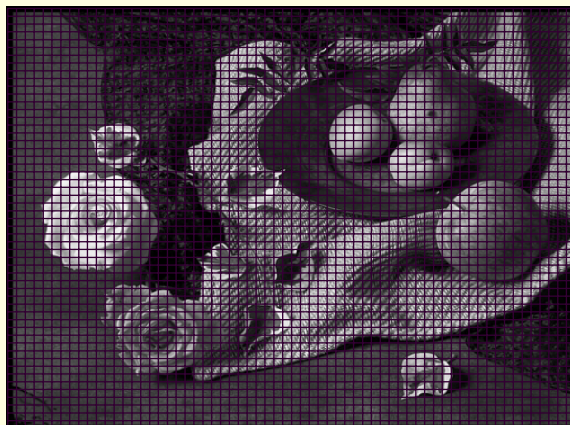
April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

16

Digitalização de Imagens

Discretização espacial (amostragem) - Resolução (X x Y pixels)



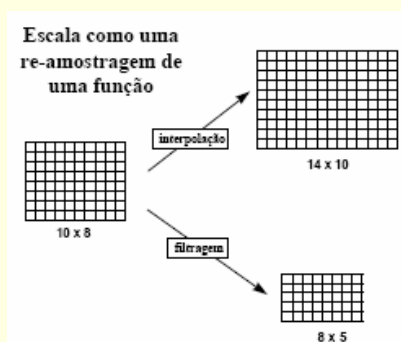
April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tegraf.puc-rio.br

17

Resolução geométrica

■ Interpolação e Filtragem



Resolução de Vídeos

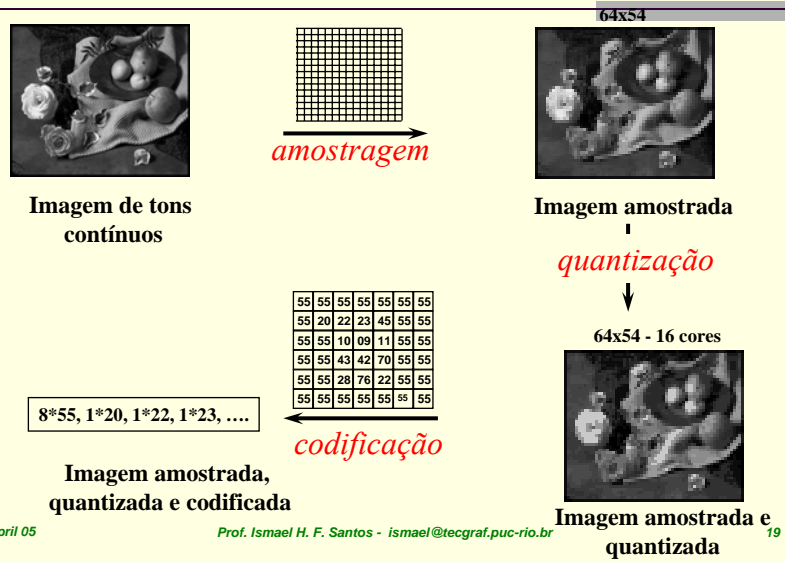
Video Mode	Resolution	Colors
CGA	320 x 200	4
MCGA	320 x 200	256
EGA	640 x 350	16
VGA	640 x 480	256
S-VGA	1,024 x 768	≥ 256
S-VGA	1,280 x 1,024	≥ 256

April 05

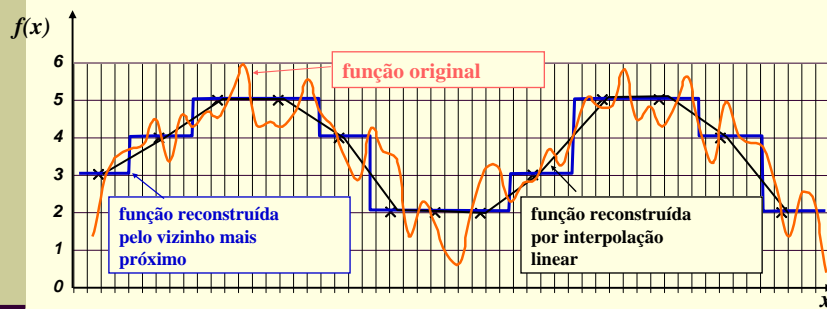
Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tegraf.puc-rio.br

18

Processos básicos

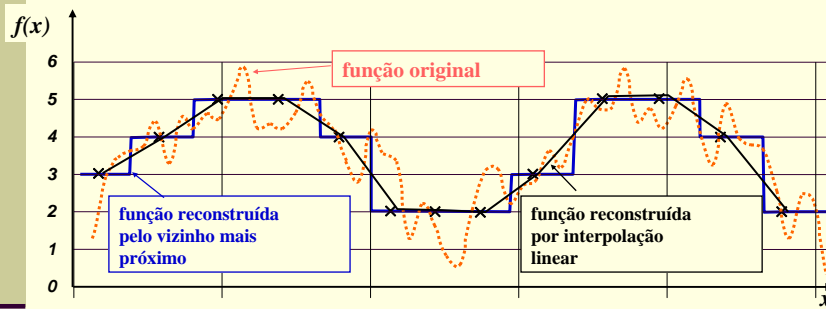


Problemas associados a re-amostragem de um sinal digital $f(x)$



(a) aumento de resolução

Re-amostragem de $f(x)$



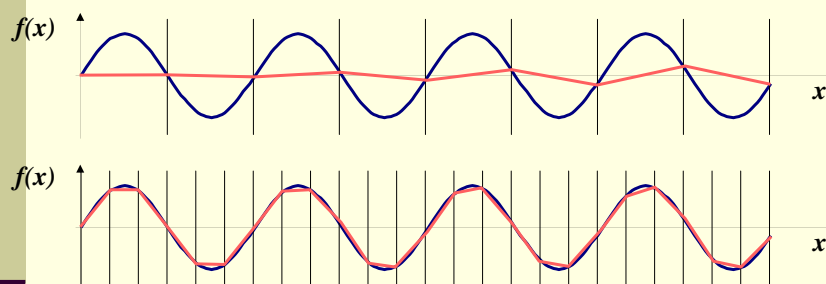
(b) redução de resolução

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

21

Frequência de Amostragem



April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

22

Quantização

- Discretização no espaço de cores (redução das cores usadas)
- Critérios para escolha das cores (exemplos em 256 cores):



• Quantização Uniforme (256 cores)



• Algoritmo de Populosidade (16 cores)



• Quantização por Aglomeração (16 cores)



Imagem Original (24 bits)

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

23

Digitalização de Imagens

quantização



315x260 – 256 cores



64x53 – 256 cores

amostragem

15	15	15	15	15	15	15
15	10	12	13	5	15	15
15	15	10	09	11	15	15
15	15	13	12	10	15	15
15	15	08	06	12	15	15
15	15	15	15	15	15	15



64x53 - 16 cores

April 05

codificação Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

24

Codificação e armazenamento de Imagens

compressão e formatos de arquivos

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

25

Codificação

- Imagem no Universo de Codificação:
 - Palette de cores
 - RGBRGB
 - RRGGBB
 - Compressão
 - formato PPM
 - formato BMP

















Obs: Imagens em formato raster (não vetórias)

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

26

Palette de Cores

	Red	Green	Blue
	255	0	0
	180	148	149
	132	123	125
	202	99	143
	198	71	163
	88	43	45
	8	8	175
	105	109	105
	124	124	116
	179	173	159
	214	193	165
	231	214	198
	247	231	222
	198	148	132
	65	36	31
	206	206	206

Os pixels da imagem fazem referência aos índices da Palette

15	15	15	15	15	15	15
15	10	12	13	5	15	15
15	15	10	09	11	15	15
15	15	13	12	10	15	15
15	15	08	06	12	15	15
15	15	15	15	15	15	15

Palette

- Geralmente com 256, 16 ou 4 cores

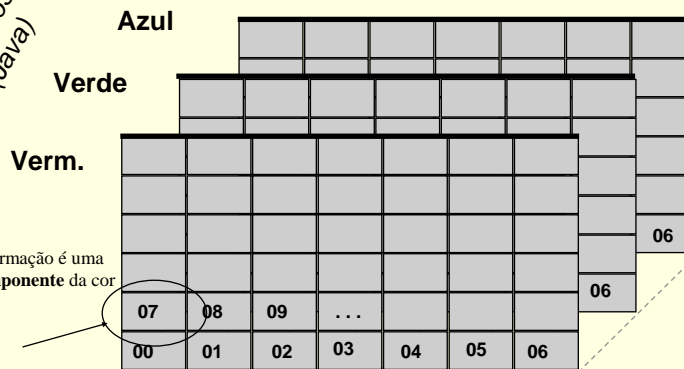
F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

27

RRGGBB

Plano de Cores

Bancos (Java)



Informação é uma componente da cor

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgr

Organização dos pixels de uma imagem por planos de cores

RRGGBB

- Declaração em C das matrizes **R**, **G** e **B** de uma imagem colorida com resolução 200x300?
- Qual o tipo a ser usado?
 - int, float, char, double ou void ?
 - short ou long ?
 - unsigned ?

unsigned char R[60000], G[60000], B[60000];

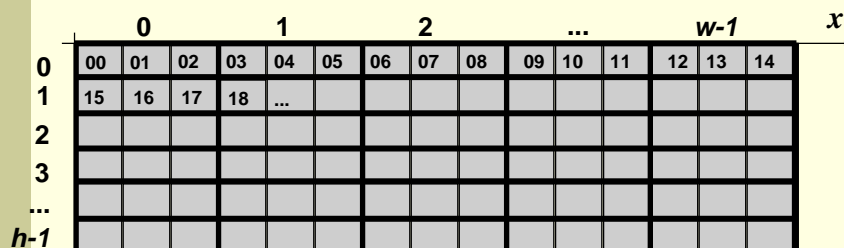
- Atenção! Normalmente são ponteiros cujo espaço são alocados dinamicamente (malloc).

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

29

RGBRGB



Pixel (x,y) de uma imagem WxH – formato PPM
unsigned char *rgb_vector;

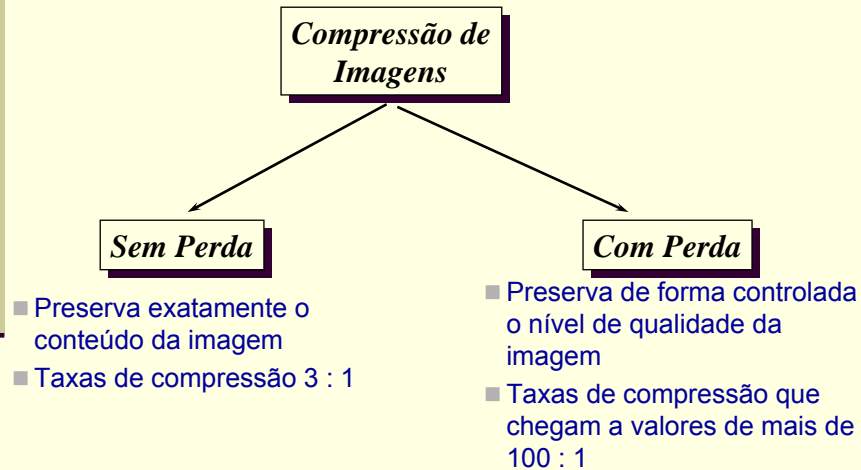
```
offset=3*(w*y+x);  
red   = rgb_vector[offset];  
green = rgb_vector[offset+1];  
blue  = rgb_vector[offset+2];
```

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

30

Compressão de imagens



April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

31

Métodos de compressão

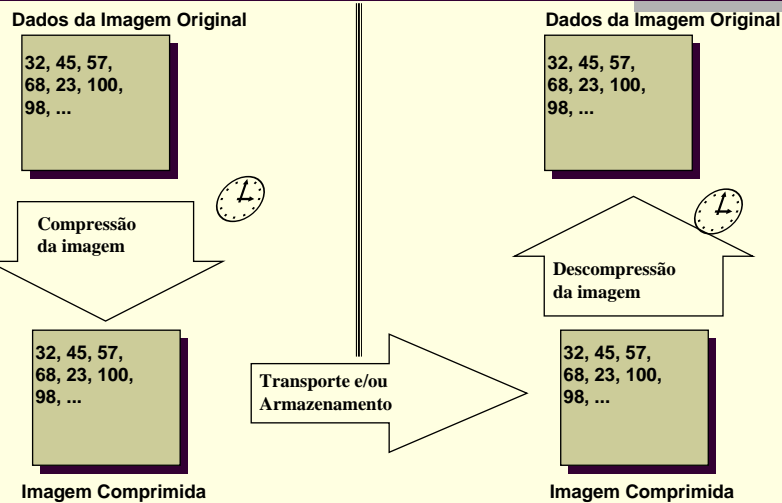
- *Sem perdas*
 - *Run length encoding (RLE) - repetição*
 - *Huffman coding - histograma*
 - *Predictive coding - diferenças*
 - *Block coding (LZW) - dicionário*
- *Com perdas*
 - *Truncation coding - reduz a representação*
 - *Predictive coding - descarta diferenças altas*
 - *Block coding - dicionário aproximado*
 - *Transform coding - descarta frequências altas*

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

32

Processo de compressão e descompressão



April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

33

Fundamentos da Compressão de Imagens

A compressão de uma imagem é obtida quando se elimina a redundância de:

- codificação
- entre *pixels*
- psico-visual

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

34

Run-Length Encoding

76	76	76	76	76	78	79	79	79	79	80	80
76 5					78 1	79 4			80 2		

imagem binária

0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	...
7							4				5							

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

37

Codificação uniforme

tons	# pixels	Uniforme		
		código	tam.	# bits
0	1900	000	3	5700
1/7	2500	001	3	7500
2/7	2100	010	3	6300
3/7	1600	011	3	4800
4/7	800	100	3	2400
5/7	600	101	3	1800
6/7	300	110	3	900
1	200	111	3	600
TOTAL				30000

Podemos melhorar?

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

38

Codificação de Huffman

tons	# pixels	Tamanho fixo			Huffman		
		código	tam.	# bits	código	tam.	# bits
0	1900	000	3	5700	00	2	3800
1/7	2500	001	3	7500	10	2	5000
2/7	2100	010	3	6300	01	2	4200
3/7	1600	011	3	4800	110	3	4800
4/7	800	100	3	2400	1110	4	3200
5/7	600	101	3	1800	11111	5	3000
6/7	300	110	3	900	111101	6	1800
1	200	111	3	600	111100	6	1200
TOTAL		30000			TOTAL 27000		

Tabela de Codificações de uma imagem 100x100 com oito tons de cinza.

A codificação de Huffman é feita com base numa árvore binária na qual as folhas são os tons e, o código, o caminho para se chegar da raiz até elas, como ilustra a figura a seguir para o exemplo da Tabela acima.

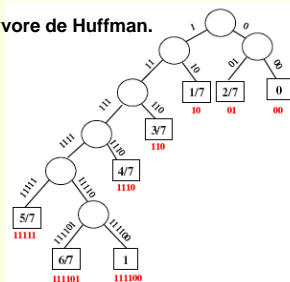
April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

39

Codificação de Huffman

Árvore de Huffman.



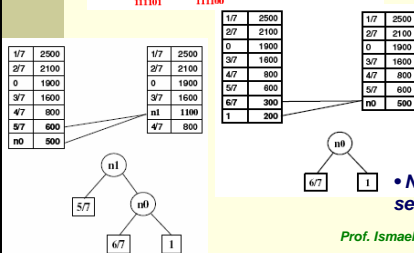
A idéia básica para construir esta árvore consiste em colocar os tons mais freqüentes perto da raiz e os tons menos freqüentes mais distantes. O algoritmo de construção da árvore de Huffman para isto pode ser descrito da seguinte maneira:

Comece criando uma tabela dos tons e do número de vezes que eles aparecem na imagem (colunas 1 e 2 da Tabela).

• Repita até que a tabela não tenha mais nenhuma linha:

1. Ordene a tabela de forma decrescente segundo o número de vezes que os tons aparecem na imagem;
2. Combine as duas últimas linhas da tabela (tons menos freqüentes) em uma única linha, somando o número de ocorrências dos tons combinados;
3. Armazene cada combinação como sendo um nó de uma árvore binária cujos filhos são as linhas combinadas.

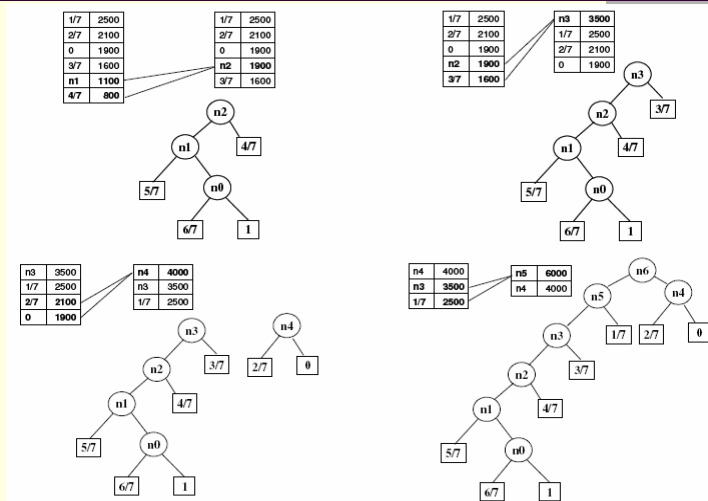
• Numere cada folha da árvore de acordo com o caminho para se chegar da folha até ele



Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

40

Codificação de Huffman



April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

41

Codificação de Huffman

s	p
a2	0.4
a6	0.3
a1	0.1
a4	0.1
a3	0.06
a5	0.04

Arrows indicate merging: a3 and a5 merge to 0.1; a1 and a4 merge to 0.2; a2 and a6 merge to 0.7; then 0.1 and 0.2 merge to 0.3; finally 0.3 and 0.7 merge to 1.0.

s	probabilidade
a2	0.4 1
a6	0.3 00
a1	0.1 011
a4	0.1 0100
a3	0.06 01010
a5	0.04 01011

Arrows indicate the binary tree structure for the probabilities.

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

42

Redundância de Codificação

r	$p(r)$	Code 1	$l(r)$	$l(r)p(r)$	Code 2	$l(r)$	$l(r)p(r)$
0	0.19	000	3	0.57	11	2	0.38
1/7	0.25	001	3	0.75	01	2	0.50
2/7	0.21	010	3	0.63	10	2	0.42
3/7	0.16	011	3	0.48	001	3	0.48
4/7	0.08	100	3	0.24	0001	4	0.32
5/7	0.06	101	3	0.18	00001	5	0.30
6/7	0.03	110	3	0.09	000001	6	0.18
1	0.02	111	3	0.06	000000	6	0.12
$\Sigma=1.00$			$L_{avg}=$	3.00		$L_{avg}=$	2.70

r_k = tons de cinza em uma imagem, $k=0, 1, \dots, \tau-1$

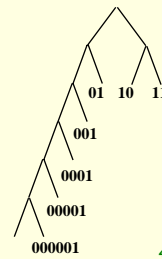
$$p(r_k) = n_k / n$$

onde n_k = número de pixels com tom r_k
 n = número de pixels da imagem

$$L_{avg} = \sum_{k=0}^{\tau-1} l(r_k) p(r_k)$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br



43

Resultado da Teoria da Informação

$$l_{opt}(r_k) = \log_2 \left(\frac{1}{p(r_k)} \right) \quad \text{número de bits}$$

r	$p(r)$	Code 1	$l(r)$	$l(r)p(r)$	Code 2	$l(r)$	$l(r)p(r)$	$\log(1/p)$	$\log(1/p)*p$
0	0.19	000	3	0.57	11	2	0.38	2.4	0.46
1/7	0.25	001	3	0.75	01	2	0.50	2.0	0.50
2/7	0.21	010	3	0.63	10	2	0.42	2.3	0.47
3/7	0.16	011	3	0.48	001	3	0.48	2.6	0.42
4/7	0.08	100	3	0.24	0001	4	0.32	3.6	0.29
5/7	0.06	101	3	0.18	00001	5	0.30	4.1	0.24
6/7	0.03	110	3	0.09	000001	6	0.18	5.1	0.15
1	0.02	111	3	0.06	000000	6	0.12	5.6	0.11
$\Sigma=1.00$			$L_{avg}=$	3.00		$L_{avg}=$	2.70	$L_{opt}=$	2.65

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

44

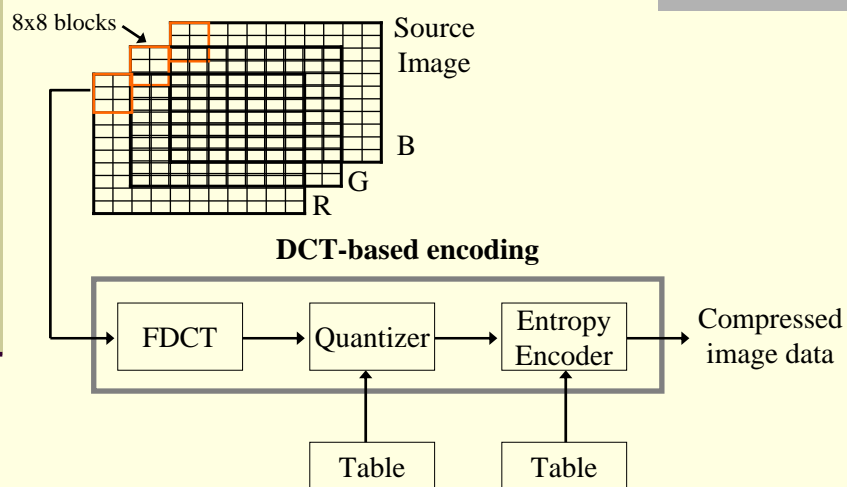
Compressão do jpeg

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

45

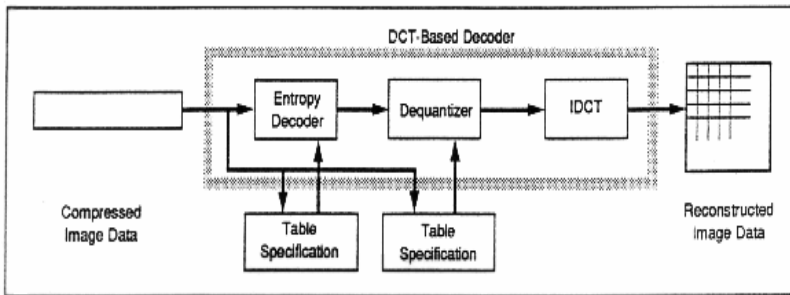
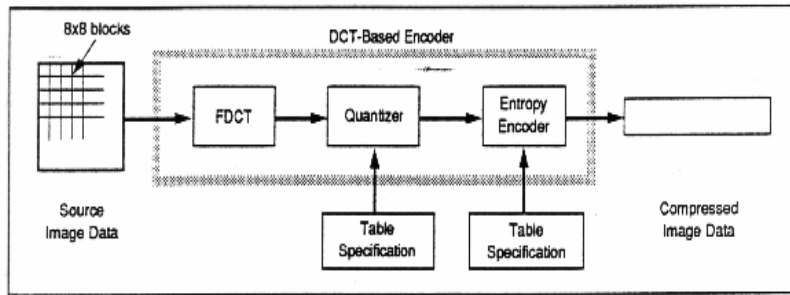
Aplicações são tecnologicamente complexas - exemplo: algoritmo do JPEG



April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

46



April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

48

```

jpeg image compression
Run Load image Prefactor = 1.0
Size of original bitmap, 1 byte per pixel (kbyte): 94.720
Quantization prefactor: 1.00
Compressed size of image (kbyte): 6.887
Kompression ratio: 13.8
The compressed image is stored on the disk as D:\COURSES\AM37-2\1\DEMOS\JPEG\GEORGE.###
    
```



April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

48

Run Load image Prefactor=1.0

Graytones of original image								DCT without quantization							
71	111	155	180	185	174	142	113	961	-290	-30	21	-13	8	-1	0
54	95	134	169	181	184	165	139	135	28	-171	8	1	2	0	0
58	71	107	152	176	183	182	158	-14	87	-10	-44	-13	0	1	0
60	56	74	118	158	179	183	172	4	11	3	11	-8	-8	3	-2
64	58	62	92	134	169	179	180	-6	14	0	-1	6	-2	0	0
79	71	63	73	105	150	172	177	-3	0	2	3	0	0	-1	2
69	69	63	55	76	118	158	173	9	14	0	0	1	1	-2	0
80	80	75	63	60	90	138	165	-1	-1	-1	-1	0	0	-1	0

Quantization tabel							
8	12	14	14	18	24	49	72
11	12	12	17	22	35	64	92
10	14	16	22	37	55	78	95
16	19	24	29	56	64	87	98
24	26	40	51	68	81	103	112
40	58	57	87	109	104	121	100
51	60	69	80	103	113	120	103
61	55	56	62	77	92	101	99

DCT after quantization							
120	-24	-2	1	0	0	0	0
12	1	-13	0	0	0	0	0
-1	8	-17	-2	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Reconstructed graytones								DCT after dequantization							
64	101	151	183	185	167	146	133	960	-288	-28	14	0	0	0	0
61	90	133	169	183	175	157	143	132	12	-169	0	0	0	0	0
57	74	106	145	175	183	172	158	-10	84	0	-44	0	0	0	0
56	61	80	113	159	182	182	172	0	0	0	0	0	0	0	0
61	57	64	93	135	168	180	179	0	0	0	0	0	0	0	0
71	63	60	75	106	141	166	179	0	0	0	0	0	0	0	0
82	74	65	64	80	112	143	174	0	0	0	0	0	0	0	0
89	82	70	59	64	93	137	169	0	0	0	0	0	0	0	0

Equations for JPEG DCT

■ Forward DCT:

$$DCT(x, y) = \frac{1}{4} C_x C_y \sum_{x=0}^7 \sum_{y=0}^7 Spixel(i, j) \cdot \cos \frac{(2i+1) \cdot x \cdot \pi}{16} \cdot \cos \frac{(2j+1) \cdot y \cdot \pi}{16}$$

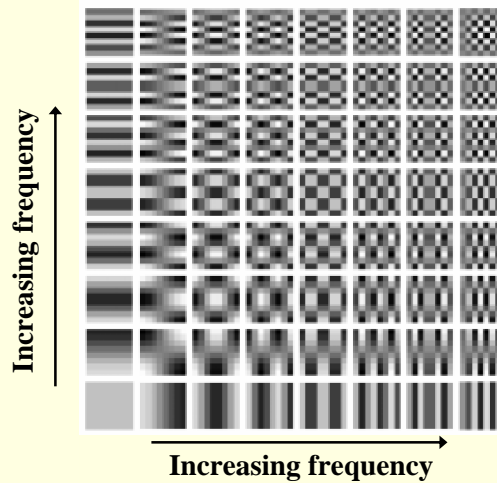
where $C_x C_y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ for $x, y = 0$; otherwise $C_x, C_y = 1$.

■ Inverse DCT:

$$pixel(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^7 \sum_{y=0}^7 C_i C_j DCT(i, j) \cdot \cos \frac{(2x+1)j \cdot \pi}{16} \cdot \cos \frac{(2y+1)i \cdot \pi}{16}$$

where $C_i, C_j = \frac{1}{\sqrt{2}}$ for $i, j = 0$; otherwise $C_i, C_j = 1$.

Visualization of Basis Functions



April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

51

Tipo Abstrato Imagem

```
Image *imgCreate (int w, int h);
void  imgDestroy (Image *image);

int imgGetWidth(Image * image);
int imgGetHeight(Image * image);
float * imgGetRGBData(Image * image);

void imgSetPixel3fv(Image *image, int x, int y, float * color);
void imgSetPixel3ubv(Image *image, int x, int y, unsigned char *color);
void imgGetPixel3fv(Image *image, int x, int y, float *color);
void imgGetPixel3ubv(Image *image, int x, int y, unsigned char *color);

Image * imgReadBMP(char *filename);
int imgWriteBMP(char *filename, Image * image);

Image * imgCopy(Image * image);
Image * imgGrey(Image * image);
Image * imgResize(Image * img0, int w1, int h1);
```

```
/*- implementação do tipo Imagem */
struct image_imp {
    int width; /* largura (width) em pixels */
    int height; /* altura (height) em pixels */
    float *buf; /* buffer RGB */
};
```

Arquivos Targa RGBA

Cabeçalho

Pixels (bgra,bgra, ...,bgra)

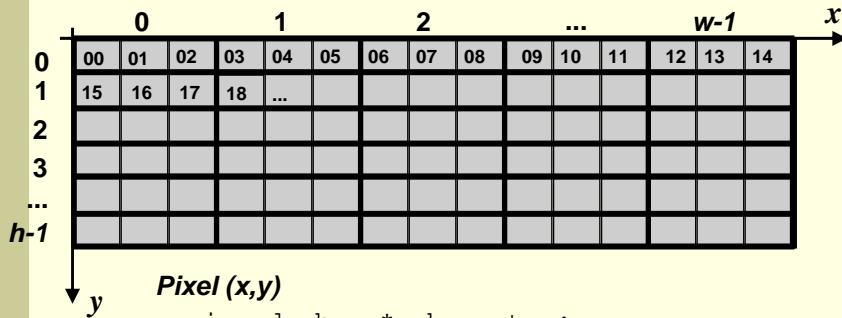
```
unsigned char imageType=2 /* RGB(A) sem compressão */
unsigned char bitDepth=32; /* 32 bits por pixel */
unsigned char byteZero=0; /* usado para escrever um byte zero no arquivo */
short int shortZero=0; /* usado para escrever um short int zero no arquivo */
```

```
/* escreve o cabeçalho */
putc(byteZero,filePtr); /* no. de caracteres no campo de id da imagem */
putc(byteZero,filePtr); /* imagem nao tem palheta de cores */
putc(imageType,filePtr); /* = 2 -> imagem "true color" (RGBA) */
putuint(shortZero,filePtr);/* info sobre a tabela de cores (inexistente) */
putuint(shortZero,filePtr); /* idem */
putc(byteZero,filePtr); /* idem */
putuint(shortZero,filePtr); /* =0 origem em x */
putuint(shortZero,filePtr); /* =0 origem em y */
putuint(img->width,filePtr); /* largura da imagem em pixels */
putuint(img->height,filePtr); /* altura da imagem em pixels */
putc(bitDepth,filePtr); /* numero de bits de um pixel */
putc(byteZero, filePtr); /* origem canto inf esquerdo sem entrelacamento */
```

Formato PPM

- **File_signature** "P6".
- **White_space** (blanks, TABs, CRs, LFs).
- **Width**, *w*, (ASCII decimal characters).
- **White_space** (blanks, TABs, CRs, LFs).
- **Height**, *h*, (ASCII decimal characters).
- **White_space** (blanks, TABs, CRs, LFs).
- **Max_color**, *max*, (ASCII decimal characters).
- **White_space** (blanks, TABs, CRs, LFs).
- **Pixels**, ($3*w*h$ bytes rgb components of pixels)
- Comments from # to the end of line
- lines ≤ 70 characters

Organização de *pixels* num *array* no formato PPM (o mais simples)



Pixel (x,y)

```
unsigned char *rgb_vector;
```

...

```
offset=3*(w*y+x);
```

```
red = rgb_vector[offset];
```

```
green = rgb_vector[offset+1];
```

```
blue = rgb_vector[offset+2];
```

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

55

Formato PPM

- **File_signature** "P6".
- **White_space** (blanks, TABs, CRs, LFs).
- **Width**, w , (ASCII decimal characters).
- **White_space** (blanks, TABs, CRs, LFs).
- **Height**, h , (ASCII decimal characters).
- **White_space** (blanks, TABs, CRs, LFs).
- **Max_color**, max , (ASCII decimal characters).
- **White_space** (blanks, TABs, CRs, LFs).
- **Pixels**, ($3*w*h$ bytes rgb components of pixels)

- Comments from # to the end of line
- lines ≤ 70 characters

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

56

Formato PPM

exemplo

```
P6
# Created by Paint Shop Pro
358 539
255
=?:?A<AC>CE@EFAFGBGHC GHC GHB . . .
```

Gravação em PPM

```
int ppm_write(int w, int h, unsigned char *rgb, char *file_name)
{
    FILE *fp;

    fp = fopen(file_name, "wb");
    if (fp == NULL)
        return 0;

    if (fprintf(fp, "P6\n%d %d\n255\n", w, h) <= 0)
    {
        fclose(fp);
        return 0;
    }

    if (fwrite(rgb, 3*w*h, 1, fp) != 1)
    {
        fclose(fp);
        return 0;
    }

    fclose(fp);
    return 1;
}
```

Leitura em PPM

```
int ppm_read(int *p_w, int *p_h, unsigned char **p_rgb, char *file_name) {
    FILE *fp;  char line[80];  int rgb_size;  int max;

    fp = fopen(file_name, "rb");
    if (fp == NULL) { printf("Error reading %s",file_name); return 0;}

    fgets(line,80,fp);
    if(strcmp(line,"P6\n")) { printf("Wrong signature\n"); return 0; }

    while (fscanf( fp, " %d ", p_w ) != 1) fgets(line, 80, fp);
    while (fscanf( fp, " %d ", p_h ) != 1) fgets(line, 80, fp);
    while (fscanf( fp, " %d", &max ) != 1) fgets(line, 80, fp);
    fgetc(fp);

    rgb_size=3*( *p_w)*( *p_h);
    (*p_rgb) = (unsigned char *) calloc(rgb_size, 1);
    if ((*p_rgb) != NULL)
        fread( (*p_rgb), rgb_size, 1, fp );

    fclose(fp);
    return 1;
}
```

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

59

Programa Simples

```
void main(void){
    int w, h; // dimensões da imagem
    unsigned char *rgb; // bytes de rgb
    unsigned char r,g,b,greyscale; // componentes de cor
    int x,y; long int k;

    if (ppm_read(&w,&h,&rgb,"test_in.ppm")==0) return;

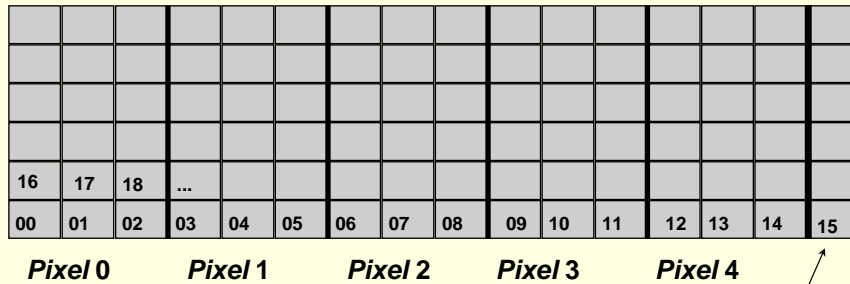
    for (y = 0; y < h; y++) {
        for (x = 0; x < w; x++) {
            k = 3*(y*w+x);
            r = rgb[k];
            g = rgb[k+1];
            b = rgb[k+2];
            greyscale = (unsigned char)(0.3*r+0.6*g+0.1*b);
            rgb[k] = greyscale; rgb[k+1] = greyscale; rgb[k+2] = greyscale;
        }
    }
    ppm_write(w, h, rgb, "test_out.ppm");
    free(rgb);
}
```

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

60

Arquivo BMP



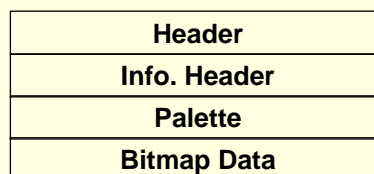
Organização dos *pixels* de uma imagem RGB no arquivo BMP

colocado para garantir múltiplo de 4

Microsoft Windows Bitmap - BMP

Características Principais

- Mono, 4-bit, 8-bit, 24-bit
- Tipo de compressão: RLE / não comprimido
- Tamanho máximo: 64K x 64K *pixels*
- Seções (versão 3):



BMP - Header

```
typedef struct _Win3xBitmapHeader
{
    WORD    Type;      /* Image file type 4D42h ("BM")*/
    DWORD   FileSize; /* File size (bytes) */
    WORD    Reserved1; /* Reserved (always 0) */
    WORD    Reserved2; /* Reserved (always 0) */
    DWORD   Offset;   /* Offset to bitmap data in bytes */
} WIN3XHEAD;
```

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

63

BMP - Information Header

```
typedef struct _Win3xBitmapInfoHeader
{
    DWORD   Size;      /* Size of this Header (40) */
    DWORD   Width;     /* Image width (pixels) */
    DWORD   Height;    /* Image height (pixels) */
    WORD    Planes;    /* Number of Planes (always=1) */
    WORD    BitCount;  /* Bits per pixel (1/4/8 or 24) */
    DWORD   Compression; /* Compression (0/1/2) */
    DWORD   SizeImage; /* Size of bitmap (bytes) */
    DWORD   XPelsPerMeter; /* Horz. resol.(pixels/m) */
    DWORD   YPelsPerMeter; /* Vert. resol.(pixels/m) */
    DWORD  ClrUsed;    /* Num of colors in the image */
    DWORD  ClrImportant; /* Num of important colors */
} WIN3XINFOHEADER;
```

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

64

BMP - Palette

```
typedef struct _Win3xPalette
{
    RGBQUAD Palette[ ]; /* 2, 16, or 256 elem. */
} WIN3XPALETTE;

typedef struct _Win3xRgbQuad
{
    BYTE   Blue; /* 8-bit blue component */
    BYTE   Green; /* 8-bit green component */
    BYTE   Red; /* 8-bit red component */
    BYTE   Reserved; /* Reserved (= 0) */
} RGBQUAD;
```

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

65

BMP - Image Data

■ Notas

- Cada *scan line* em um arquivo BMP é sempre um múltiplo de 4.
- Imagens com 1-, 4-, e 8-bits usam uma palheta de cores.
- Imagens com 24-bits guardam a cor diretamente, na ordem azul, verde e vermelho (RGBRGB).
- O armazenamento da imagem é sempre feito a partir do canto esquerdo inferior.

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

66

Processamento de Imagens

Processamentos apenas no espaço das cores

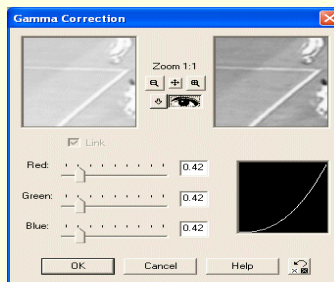
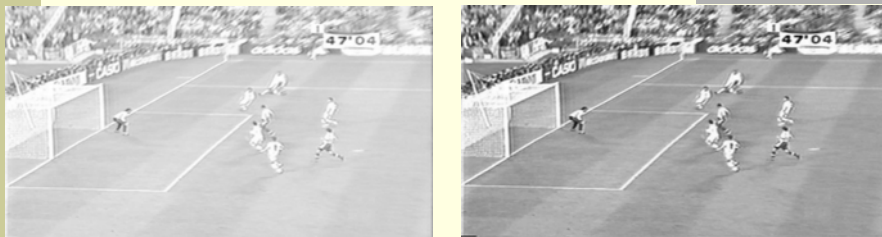
April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

67

Correção gama

Ajustes de contraste e iluminação

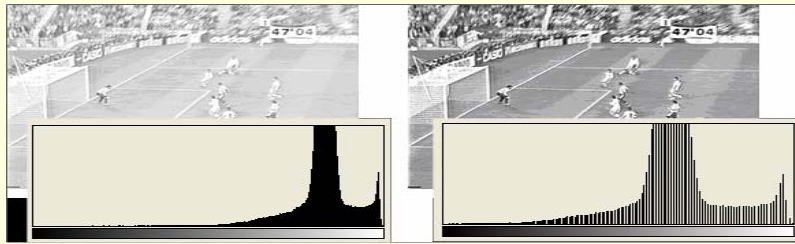


April 05

68

Correção gama

$$L \leftarrow \sqrt[\gamma]{L}$$

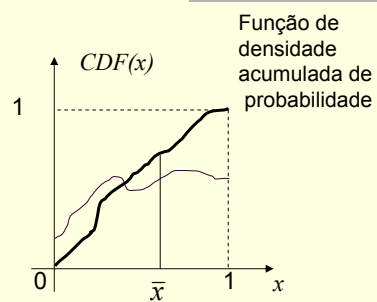
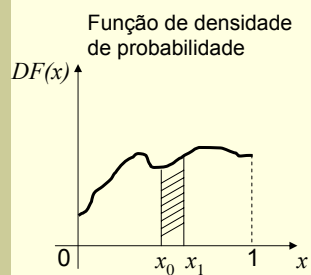


April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

69

Probabilidade



$$P\{x_0 \leq x < x_1\} = \int_{x_0}^{x_1} DF(x) dx$$

$$CDF(\bar{x}) = P\{0 \leq x < \bar{x}\} = \int_0^{\bar{x}} DF(x) dx$$

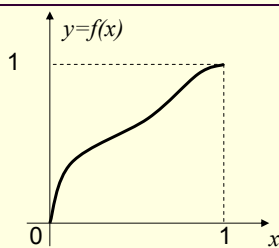
$$DF(x) = \frac{d}{dx} CDF(\bar{x})$$

April 05

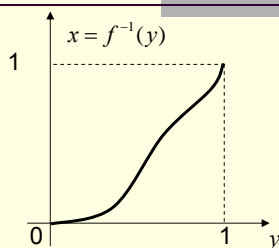
Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

70

Mudança de variável $y = f(x)$



Transformação
monotônica e
limitada ao
intervalo $[0,1]$

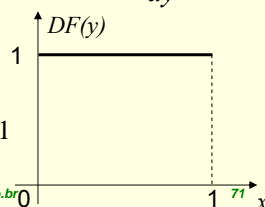


$$DF(y) = \frac{d}{dy} CDF(y) = \frac{d}{dx} CDF(x) \frac{dx}{dy} = DF(x) \frac{dx}{dy}$$

$$f(x) = CDF(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = DF(x)$$

$$DF(y) = \frac{DF(x)}{DF(x)} = 1$$

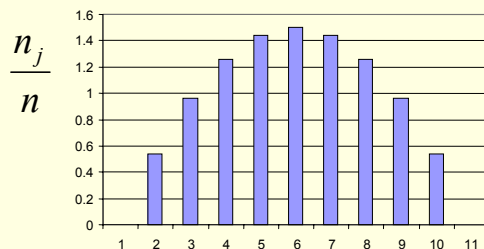


April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

Equalização de Histograma

$$L' = f(L) = \sum_{j=0}^L \frac{n_j}{n}$$

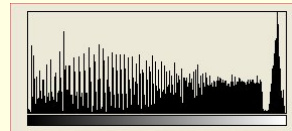
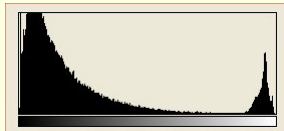


April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

72

Equalização do histograma



April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

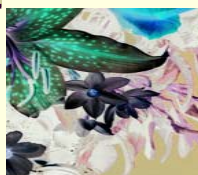
73

Tons de cinza e negativo

$$L_{x,y} = 0.299R_{x,y} + 0.587G_{x,y} + 0.114B_{x,y}$$



— tons de cinza —>



$$L_{x,y} = 255 - L_{x,y}$$



Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

74

Processamento de Imagens

Eliminação de ruídos e realce de arestas

Redução de ruídos

- Dada uma imagem I com um ruído n , reduza n o máximo que puder (preferencialmente elimine n completamente) sem alterar significativamente I .

$$\hat{I}(i, j) = I(i, j) + n(i, j)$$

$$SNR = \frac{\sigma_s}{\sigma_n} \quad SNR_{dB} = 10 \log_{10} \frac{\sigma_s}{\sigma_n}$$

$$20 \text{ dB significam} \quad \frac{\sigma_s}{\sigma_n} = 100$$

Dois tipos básicos de ruídos

- Ruído Gaussiano branco: processo estocástico de média zero, independente do tempo e dos espaço.

$\bar{n}(i, j) \sim \bar{n}(i + i_0, j + j_0)$ é o mesmo processo estocástico que não varia no tempo.

$$\bar{n}(i, j) = 0$$

$\bar{n}(i, j)$ é uma variável aleatória com a distribuição:

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

77

Dois tipos básicos de ruídos

- Ruído impulsivo: causado por erro de transmissão, CCDs defeituosos, etc...
Também chamado de pico e de sal e pimenta.

$$n_{sp}(i, j) = \begin{cases} 0 & x < l \\ i_{\min} + y(i_{\max} - i_{\min}) & x \geq l \end{cases}$$

$x, y \in [0,1]$ são v.a. uniformemente distribuídas

i_{\min} , i_{\max} e l são parâmetros de controle da quantidade de ruídos.

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

78

Exemplo de ruído Gaussiano ($\sigma=5$) e Impulsivo ($\ell=0.99$)

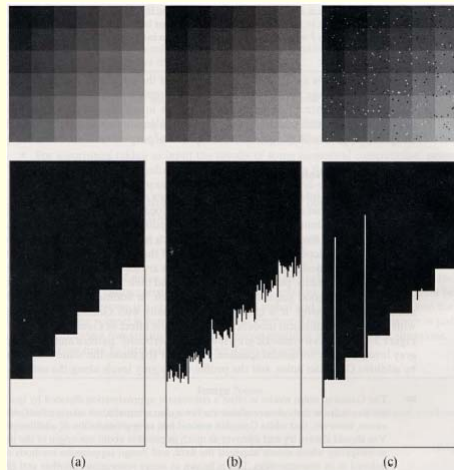
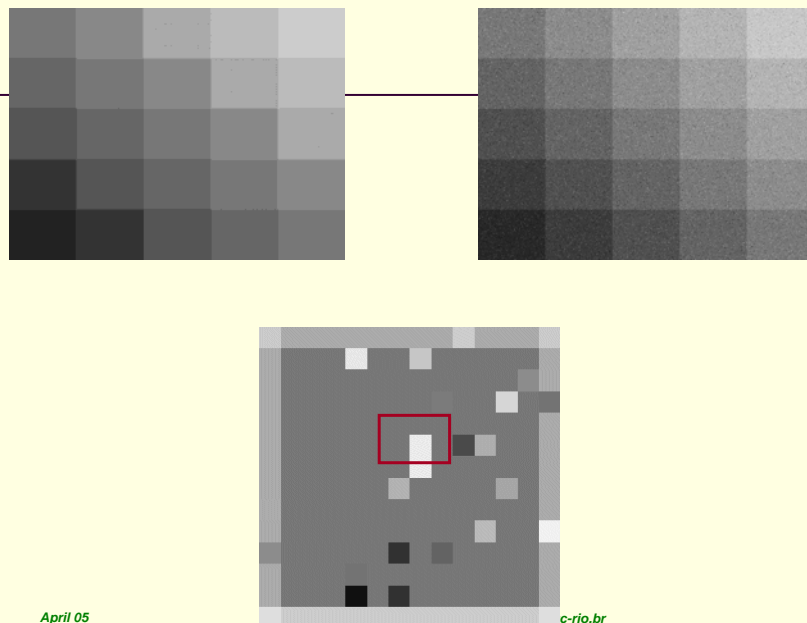


Figure 3.1 (a) Synthetic image of a 120×120 grey-level "checkerboard" and grey-level profile along a row. (b) After adding zero-mean Gaussian noise ($\sigma = 5$). (c) After adding salt and pepper noise (see text for parameters).

April 05

79



April 05

c-rio.br

80

Imagem com ruído impulsivo

Uso da mediana

223	204	204	204	204	204	204	204	204	204	204	204	204	223
171	120	120	120	18	120	50	120	120	120	120	120	120	171
171	120	120	120	116	120	120	120	120	120	120	120	120	171
138	120	120	120	120	120	50	120	97	120	120	120	120	171
171	120	120	120	120	120	120	120	120	120	187	120	120	242
172	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	171
171	120	120	120	120	120	120	179	120	120	120	167	120	171
171	120	120	120	120	120	120	120	235	120	120	120	120	171
171	120	120	120	120	120	120	120	235	120	76	175	120	171
171	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	171
171	120	120	120	120	120	120	120	123	120	120	214	120	114
171	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	143	171
171	120	120	120	232	120	120	198	120	120	120	120	120	171
203	171	171	171	171	171	171	171	171	205	171	171	171	203

$$I_{ij} = \text{mediana } \Omega_{ij}$$

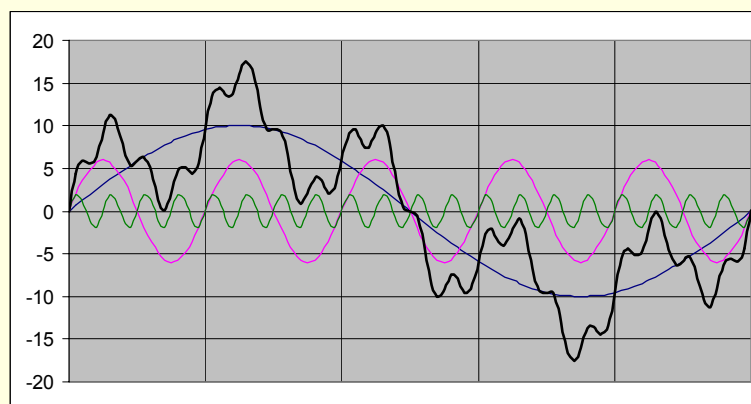
April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tegraf.puc-rio.br

81

Sinal com ruído

$$f_3(x) := 10 \cos(2 \pi x) + 6 \sin(10 \pi x) + .8 \cos(40 \pi x)$$

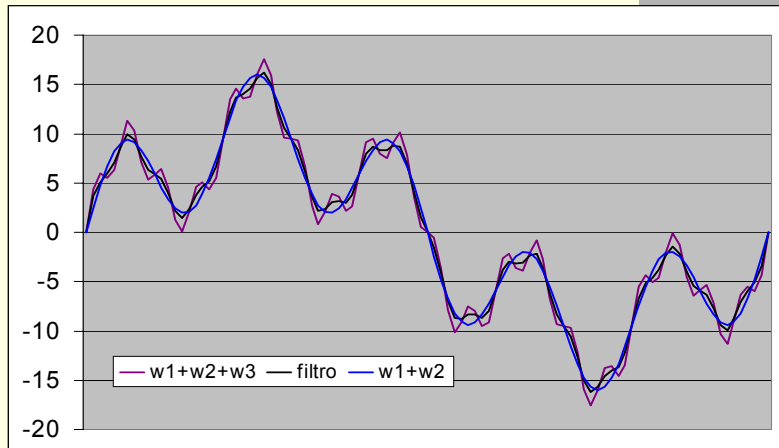


April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tegraf.puc-rio.br

82

Filtragem Gaussiana – Suavização



$$h_i = \frac{f_{i-1} + 2f_i + f_{i+1}}{4}$$

April 05

tecgraf.puc-rio.br

83

Filtro

- Um **filtro** é um operador que atenua ou realça uma determinada frequência
- Fácil de visualizar no domínio da frequência onde:

$$F(\omega) \leftarrow f(t)$$

$$H(\omega) = F(\omega)G(\omega)$$

$$h(t) \leftarrow H(\omega)$$

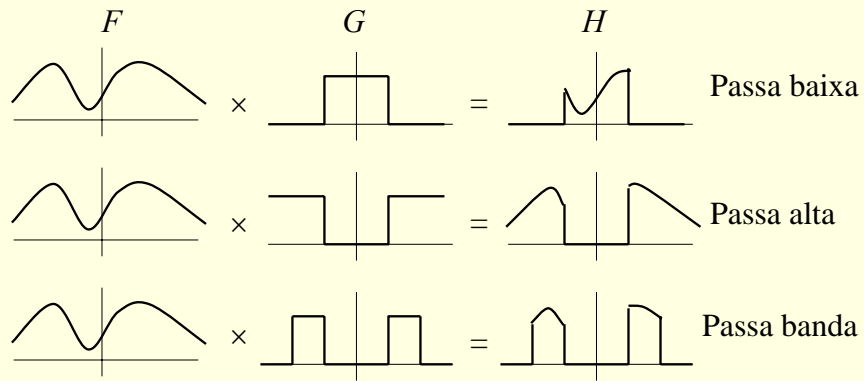
$h(t)$ é o $f(t)$ filtrado

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

84

Tipos de Filtros



April 05

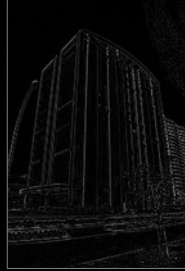
Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

85

Imagem filtrada com um filtro passa baixa



Imagem filtrada com um filtro passa alta



Filtragem no domínio espacial

$$F(\omega) \leftarrow f(x) \quad G(\omega) \leftarrow g(x)$$

$$H(\omega) = F(\omega)G(\omega)$$

ou:

$$h(x) \leftarrow H(\omega)$$

$$h(x) = f \otimes g = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du$$

- Filtragem no domínio espacial é obtida pela *convolution* (e vice-versa).

Na realidade é ao contrário: a TF é uma ferramenta para filtragem.

Mascara ou Filtro

$$h_i = \frac{f_{i-1} + 2f_i + f_{i+1}}{4}$$

ou:

$$h_i = \sum_{k=0}^{n-1} g_{(k-i)} f_i$$

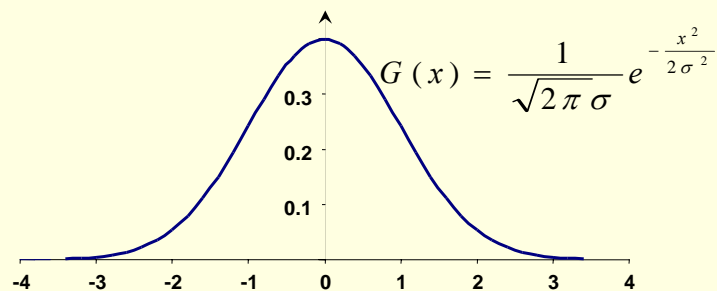
$$g_l = \begin{cases} 0 & \text{se } l < -1 \\ 1/4 & \text{se } l = -1 \\ 2/4 & \text{se } l = 0 \\ 1/4 & \text{se } l = +1 \\ 0 & \text{se } l > +1 \end{cases}$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

89

Discretização da Gaussiana 1D



$$\frac{1}{4} [1 \quad 2 \quad 1]$$

$$\frac{1}{16} [1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1]$$

$$\frac{1}{64} [1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1]$$

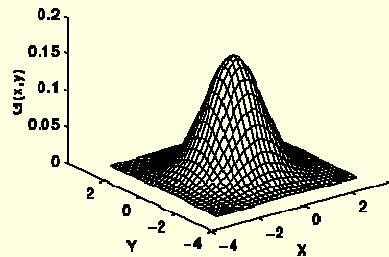
April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

90

Discretização da Gaussiana 2D

$$G(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}}$$



$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

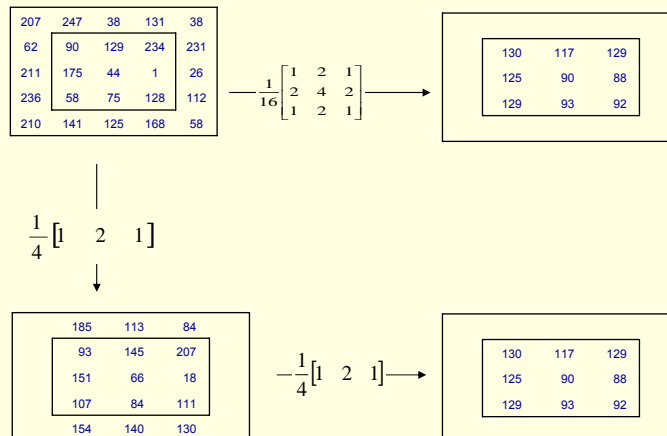
$$\frac{1}{273} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 26 & 16 & 4 \\ 7 & 26 & 41 & 26 & 7 \\ 4 & 16 & 26 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

91

Separabilidade do filtro gaussiano



April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

92

Transformada normalizada de Fourier

$$F(r, s) = \frac{1}{\sqrt{wh}} \sum_{x=0}^{w-1} \sum_{y=0}^{h-1} f(x, y) e^{-i2\pi(xr/w + ys/h)}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{wh}} \sum_{r=0}^{w-1} \sum_{s=0}^{h-1} F(r, s) e^{i2\pi(xr/w + ys/h)}$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

93

Transformada normalizada de Fourier: separação

$$F(r, s) = \frac{1}{\sqrt{wh}} \sum_{x=0}^{w-1} \sum_{y=0}^{h-1} f(x, y) e^{-i2\pi(xr/w + ys/h)}$$

$$F(r, s) = \frac{1}{\sqrt{w}} \sum_{x=0}^{w-1} \left[\frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{y=0}^{h-1} f(x, y) e^{-i2\pi(ys/h)} \right] e^{-i2\pi(xr/w)}$$

$$T(x, s)$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

94

Transformada normalizada de Fourier: Matriz H

$$T(x, s) = \sum_{y=0}^{h-1} \left(f(x, y) \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{h}} e^{-i2\pi(y s/h)} \right)}_{H(y, s)} \right)$$

$$H(y, s) = \frac{1}{\sqrt{h}} e^{-i2\pi(y s/h)} = \frac{1}{\sqrt{h}} \left(e^{-\frac{i2\pi}{h}} \right)^{y \cdot s}$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

95

Transformada normalizada de Fourier: Matriz H

$$\mathbf{T} = \mathbf{fH}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_{00} & f_{01} & \cdots & f_{0(h-1)} \\ f_{10} & f_{11} & \cdots & f_{1(h-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{(h-1)0} & f_{(h-1)1} & \cdots & f_{(h-1)(h-1)} \end{bmatrix}$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

96

T = fH

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{h}} \begin{bmatrix} \left(e^{\frac{i2\pi}{h}} \right)^{0 \cdot 0} & \left(e^{\frac{i2\pi}{h}} \right)^{0 \cdot 1} & \dots & \left(e^{\frac{i2\pi}{h}} \right)^{0 \cdot (h-1)} \\ \left(e^{\frac{i2\pi}{h}} \right)^{1 \cdot 0} & \left(e^{\frac{i2\pi}{h}} \right)^{1 \cdot 1} & \dots & \left(e^{\frac{i2\pi}{h}} \right)^{1 \cdot (h-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(e^{\frac{i2\pi}{h}} \right)^{(h-1) \cdot 0} & \left(e^{\frac{i2\pi}{h}} \right)^{(h-1) \cdot 1} & \dots & \left(e^{\frac{i2\pi}{h}} \right)^{(h-1) \cdot (h-1)} \end{bmatrix}$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

97

$$F(r, s) = \frac{1}{\sqrt{w}} \sum_{x=0}^{w-1} \left(e^{\frac{i2\pi}{w}} \right)^{x \cdot r} T(x, s)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{W(r, x)}$$

$$W(r, x) = \frac{1}{\sqrt{w}} \left(e^{\frac{i2\pi}{w}} \right)^{r \cdot x}$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

98

$$\mathbf{F} = \mathbf{W}\mathbf{T} = \mathbf{W}\mathbf{f}\mathbf{H}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{w}} \begin{bmatrix} \left(e^{\frac{i2\pi}{h}} \right)^{0 \cdot 0} & \left(e^{\frac{i2\pi}{h}} \right)^{0 \cdot 1} & \dots & \left(e^{\frac{i2\pi}{h}} \right)^{0 \cdot (w-1)} \\ \left(e^{\frac{i2\pi}{h}} \right)^{1 \cdot 0} & \left(e^{\frac{i2\pi}{h}} \right)^{1 \cdot 1} & \dots & \left(e^{\frac{i2\pi}{h}} \right)^{1 \cdot (w-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(e^{\frac{i2\pi}{h}} \right)^{(w-1) \cdot 0} & \left(e^{\frac{i2\pi}{h}} \right)^{(w-1) \cdot 1} & \dots & \left(e^{\frac{i2\pi}{h}} \right)^{(w-1) \cdot (w-1)} \end{bmatrix}$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

99

Problemas com a Transformada de Fourier

$$f(x_1, x_2) \leftrightarrow F(k_1, k_2)$$

$$f(x_1 + a, x_2 + b) \leftrightarrow F(k_1, k_2) e^{-i(ak_1 + bk_2)}$$

$$f(\rho x_1, \rho x_2) \leftrightarrow \frac{1}{\rho} F\left(\frac{k_1}{\rho}, \frac{k_2}{\rho}\right)$$

$$\begin{array}{c} f(x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta, x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta) \\ \updownarrow \\ F(k_1 \cos \theta - k_2 \sin \theta, k_1 \sin \theta + k_2 \cos \theta) \end{array}$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

100

Transformada de Mellin

$$M(f(x)) = M(f(ax))$$

$$M(s) = \int_0^{\infty} f(x)x^{s-1} dx$$

$$x = e^{-\xi} \quad dx = -e^{-\xi} d\xi$$

$$M(s) = \int_0^{\infty} f(x)x^{s-1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-\xi})e^{-s\xi} d\xi$$

$$s = \sigma + i2\pi w$$

$$M(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-\xi})e^{-\sigma\xi} e^{-i2\pi\omega\xi} d\xi = \mathfrak{I}(f(e^{-\xi}))e^{-\sigma\xi}$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

101

Transformada de Mellin

$$M(z_1, z_2) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x, y)x^{z_1-1} y^{z_2-1} dx dy$$

$$x = e^{-\xi} \quad dx = -e^{-\xi} d\xi \quad y = e^{-\eta} \quad dy = -e^{-\eta} d\eta$$

$$M(z_1, z_2) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-\xi}, e^{-\eta})e^{-\xi(z_1-1)} e^{-\eta(z_2-1)} (-e^{-\xi} d\xi)(-e^{-\eta} d\eta)$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

102

Transformada de Mellin

$$M(z_1, z_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-\xi}, e^{-\eta}) e^{-\xi z_1} e^{-\eta z_2} d\xi d\eta$$

$$z_1 = i2\pi u$$

$$z_2 = i2\pi v$$

$$M(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-\xi}, e^{-\eta}) e^{-i2\pi u \xi} e^{-i2\pi v \eta} d\xi d\eta$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

103

Transformada de Mellin

$$M(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-\xi}, e^{-\eta}) e^{-i2\pi u \xi} e^{-i2\pi v \eta} d\xi d\eta$$

$$\Delta u = \frac{1}{w\Delta x}$$

$$\Delta v = \frac{1}{h\Delta y}$$

$$M(r, s) = \frac{1}{wh} \sum_{x=0}^{w-1} \sum_{y=0}^{h-1} f(e^{\ln x}, e^{\ln y}) e^{-i\frac{2\pi}{w} r \xi} e^{-i\frac{2\pi}{h} s \eta}$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

104

$$\mathbf{F} = \mathbf{W}\mathbf{T} = \mathbf{W}\mathbf{f}\mathbf{H}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{w}} \begin{bmatrix} \left(e^{-\frac{i2\pi}{h}} \right)^{0 \cdot 0} & \left(e^{-\frac{i2\pi}{h}} \right)^{0 \cdot 1} & \dots & \left(e^{-\frac{i2\pi}{h}} \right)^{0 \cdot (w-1)} \\ \left(e^{-\frac{i2\pi}{h}} \right)^{1 \cdot 0} & \left(e^{-\frac{i2\pi}{h}} \right)^{1 \cdot 1} & \dots & \left(e^{-\frac{i2\pi}{h}} \right)^{1 \cdot (w-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(e^{-\frac{i2\pi}{h}} \right)^{(w-1) \cdot 0} & \left(e^{-\frac{i2\pi}{h}} \right)^{(w-1) \cdot 1} & \dots & \left(e^{-\frac{i2\pi}{h}} \right)^{(w-1) \cdot (w-1)} \end{bmatrix}$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

105

Transformada de Mellin

$$M(z_1, z_2) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x, y) x^{z_1-1} y^{z_2-1} dx dy$$

$$z_1 = i2\pi r$$

$$z_2 = i2\pi s$$

$$M(r, s) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x, y) x^{i2\pi r-1} y^{i2\pi s-1} dx dy$$

$$x = e^{-\xi} \quad dx = -e^{-\xi} d\xi$$

$$y = e^{-\eta} \quad dy = -e^{-\eta} d\eta$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

106

Transformada de Mellin

$$M(r, s) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x, y) x^{i2\pi r-1} y^{i2\pi s-1} dx dy$$

$$x = e^{-\xi} \quad dx = -e^{-\xi} d\xi \quad y = e^{-\eta} \quad dy = -e^{-\eta} d\eta$$

$$M(r, s) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(e^{-\xi}, e^{-\eta}) e^{i2\pi r\xi-1} e^{i2\pi s\eta-1} dx dy$$

$$\xi = -\ln x$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

107

Outros exemplos com o PaintShopProtm



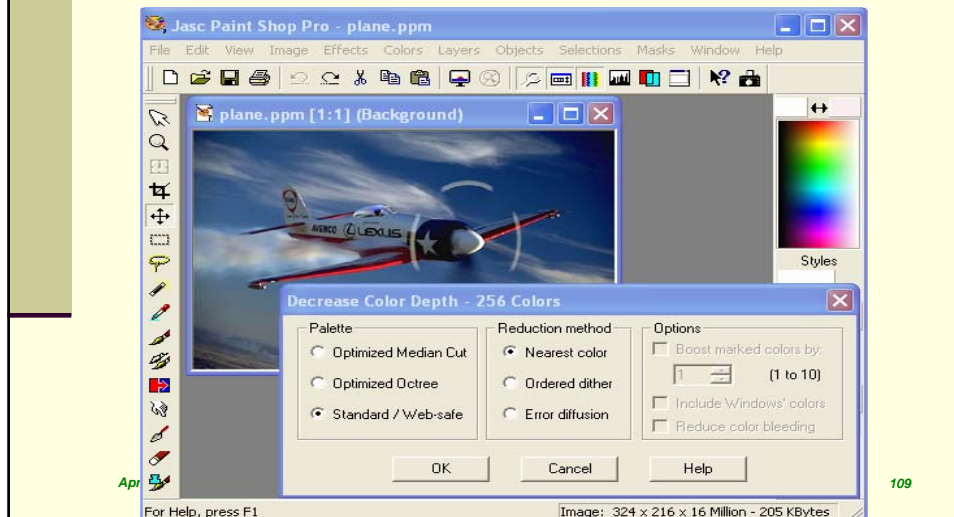
April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

108

Quantização de cores

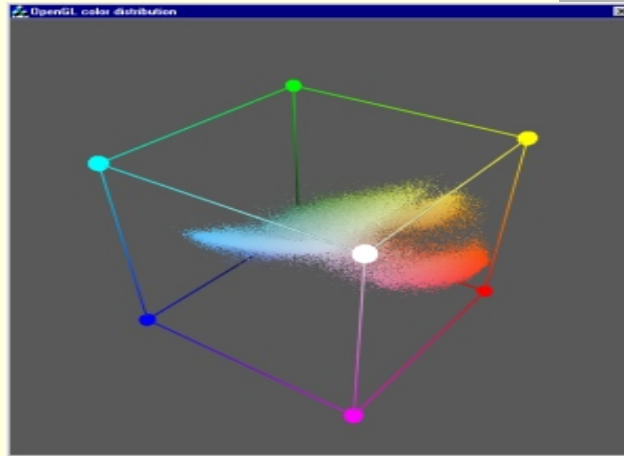
Quantização de 24 para 8 bits



A qualidade depende da imagem



Corte mediano

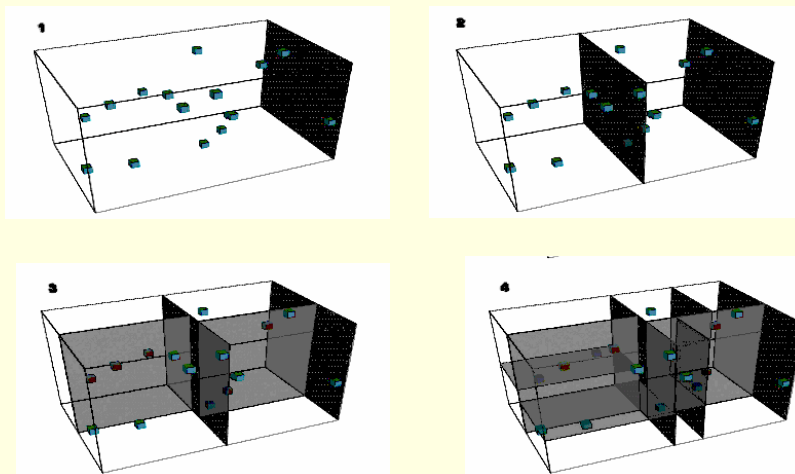


April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

111

Corte mediano



April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

112

Estudo de sinais digitais

*Transformadas para o domínio da frequência
Teorema de Nyquist e Alias*

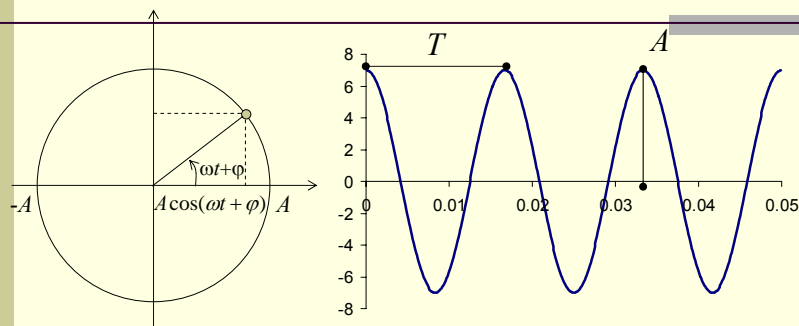
April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

113

Harmônicos

revisão



$$f = \frac{1}{T} \text{ (Hz)}$$

$$\omega t = 2\pi f t = \frac{2\pi}{T} t \text{ (rad)}$$

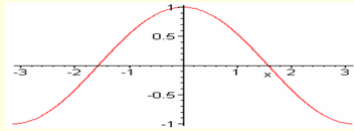
April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

114

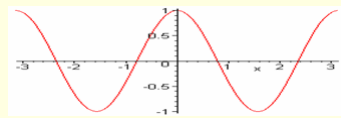
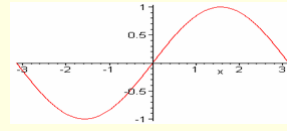
Integrais de senos e cosenos em $[-\pi, \pi]$

$\cos(nx)$

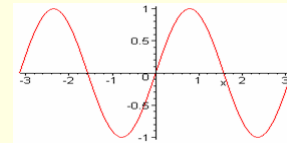


$n = 1$

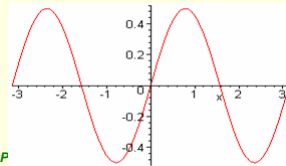
$\sin(nx)$



$n = 2$



$\sin(nx)\cos(nx)$



Áreas se compensam.
Integrais resultam em 0.

April 05

P

-rio.br

115

Integrais de senos e cosenos em $[-\pi, \pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \pi \delta_{mn} \quad \text{for } n, m \neq 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \pi \delta_{mn} \quad \text{for } n, m \neq 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = 0$$

Funções ortogonais

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) dx = 0$$

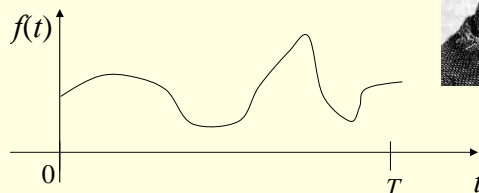
April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

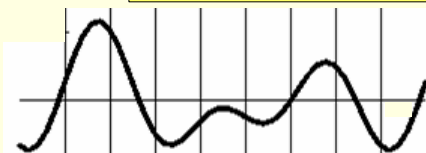
116

Série de Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)
Paper de 1807 para o
Institut de France:
Joseph Louis Lagrange
(1736-1813), and Pierre
Simon de Laplace
(1749-1827).



$$f(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right)$$

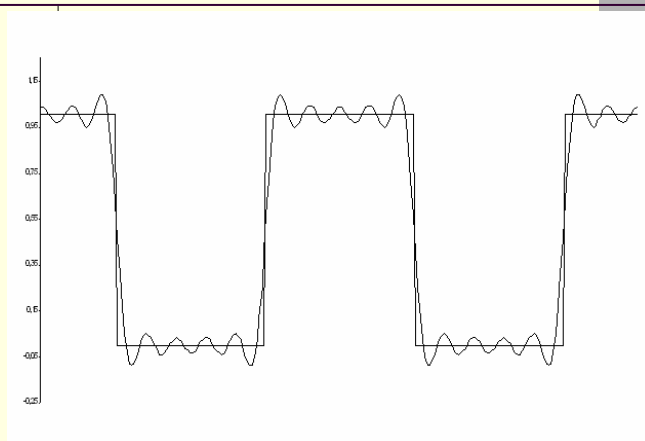


April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

117

Exemplo: Série de harmônicos

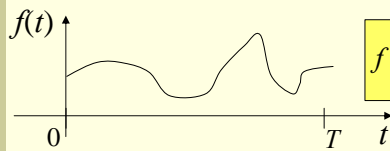


April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

118

Série de Fourier: cálculo de a_0



$$f(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right)$$

$$\int_0^T f(t) dt = \int_0^T a_0 dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi nkt}{T}\right) dt + b_k \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \right)$$

$$\int_0^T f(t) dt = a_0 T + 0 + 0$$

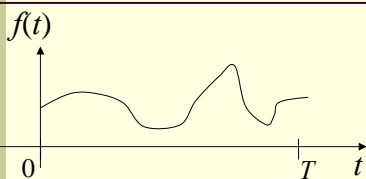
$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

119

Série de Fourier: a_n e b_n



$$f(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right)$$

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) f(t) dt = 0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_n \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt + 0$$

$$= T a_n$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

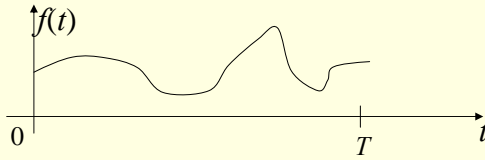
...

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

120

Resumindo



$$f(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right)$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$$

$$b_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$$

April 05

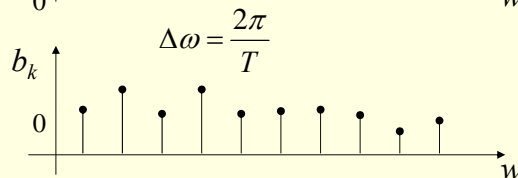
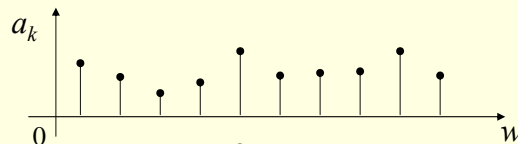
Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

121

Domínios



tempo ou
espaço



$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$$

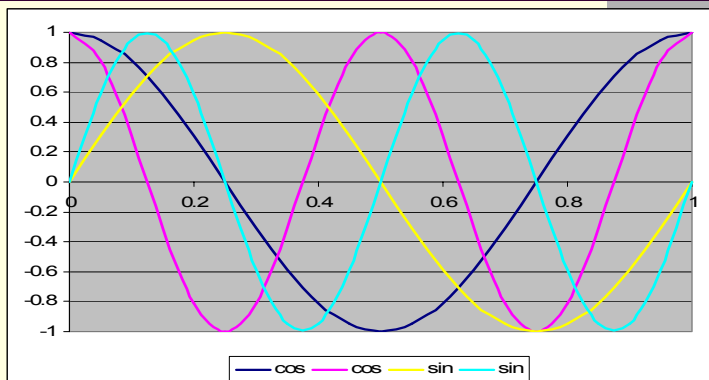
frequência

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

122

Coeficientes de funções pares e ímpares



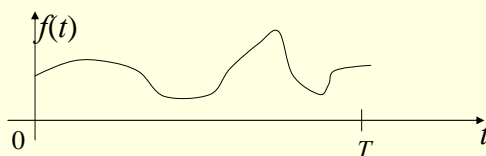
f -ímpar	$a_k = 0$
f -par	$b_k = 0$

April 05

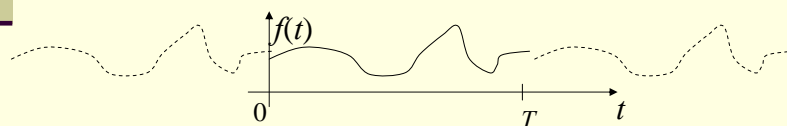
Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

123

Periodicidade da Série de Fourier



$$f(t+T) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}(t+T)\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}(t+T)\right) \right) = f(t)$$



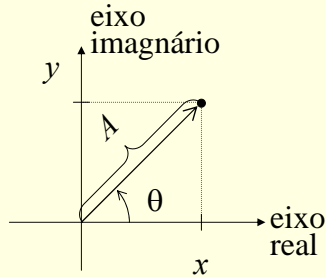
April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

124

Números complexos

revisão



- x é a parte real
- y é a parte imaginária
- A é a magnitude
- θ é a fase

$$z = x + iy = A(\cos \theta + i \sin \theta) \quad i = \sqrt{-1}$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

125

Operação básicas com complexos

revisão

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad a(x + iy) = ax + iay$$

$$i^2 = -1$$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 + i^2y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2)$$

$$(x + iy)(x - iy) = (x^2 + y^2) + i(xy - xy) = x^2 + y^2$$

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{1}{x_2^2 + y_2^2} (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

126

Derivada de $e^{i\omega t}$

$$\frac{d}{dt} e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t}$$

$$\frac{d}{dt} (\cos \omega t + i \sin \omega t) = -\omega \sin \omega t + i\omega \cos \omega t$$

$$= i\omega \left(-\frac{1}{i} \sin \omega t + \cos \omega t \right)$$

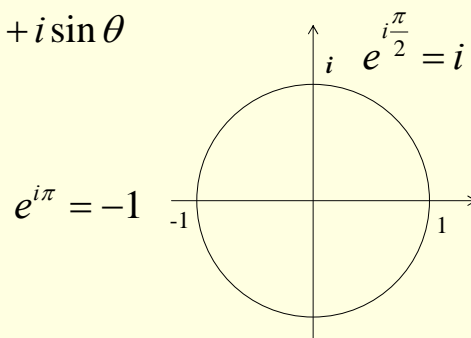
$$\frac{-1}{i} = \frac{-i}{i^2} = \frac{-i}{-1} = i$$

$$= i\omega (i \sin \omega t + \cos \omega t)$$

C.Q.D.

Outras propriedades úteis

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$



Outras propriedades úteis (2)

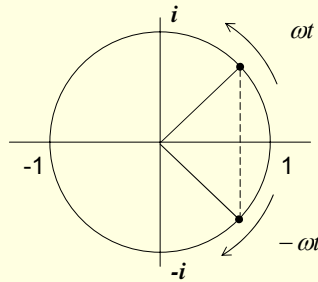
revisão

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$



o cosseno
corresponde a
média de
dois
harmônicos de
frequências
 w e $-w$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

129

Outras propriedades úteis (2)

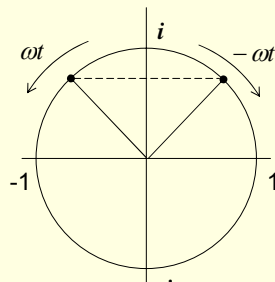
revisão

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{i}{2}(e^{-i\theta} - e^{i\theta})$$



o seno também
corresponde a
dois harmônicos:
 w e $-w$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

130

Outras propriedades úteis (3)

revisão

$$z_1 = A_1 e^{i\theta_1} = A_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$z_2 = A_2 e^{i\theta_2} = A_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$z_1 z_2 = A_1 A_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{A_1}{A_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

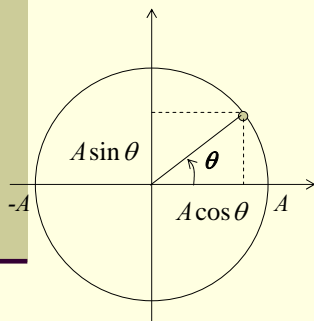
131

Amplitude e fase de complexos

revisão

Dado um valor:

$$z = A(\cos \theta + i \sin \theta) = x + iy$$



$$A^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z}$$

Amplitude

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

Fase

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

132

Série de Fourier com números complexos

$$f(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right)$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \left(e^{i\frac{2\pi kt}{T}} + e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} \right) + \frac{b_k}{i} \left(e^{i\frac{2\pi kt}{T}} - e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} \right) \right)$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(a_k + \frac{b_k}{i} \right) e^{i\frac{2\pi kt}{T}} + \left(a_k - \frac{b_k}{i} \right) e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} \right)$$

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

$$f(t) = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(F_k e^{i\frac{2\pi kt}{T}} + F_{-k} e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} \right)$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{i\frac{2\pi kt}{T}}$$

$$F_0 = a_0, \quad F_k = a_k - ib_k, \quad F_{-k} = a_n + ib_n$$

$$F_{-k} = \overline{F_k}$$

$$F_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)} dt \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

April 05

Prof. Ismael H.

Escrevendo em complexos

$$f(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{i\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)}$$

$$F_k = a_k - ib_k$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt, \quad b_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$e^{-i\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)} = \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

$$F_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)} dt \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

134

Serie de Fourier de Sinais Discretos

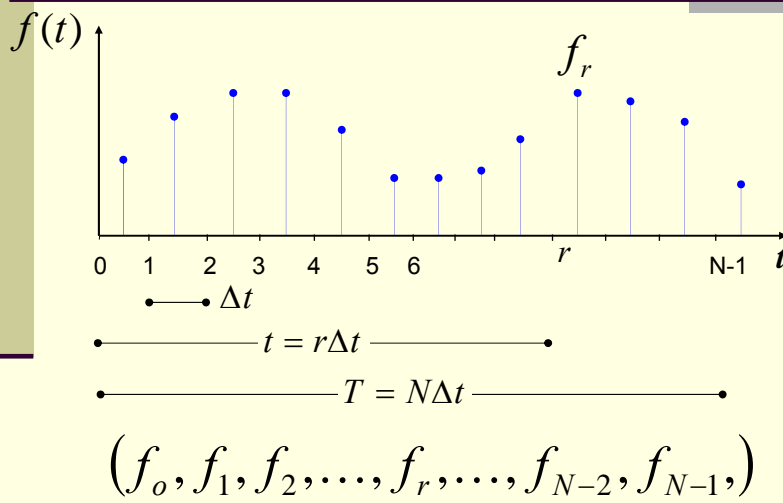
April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

135



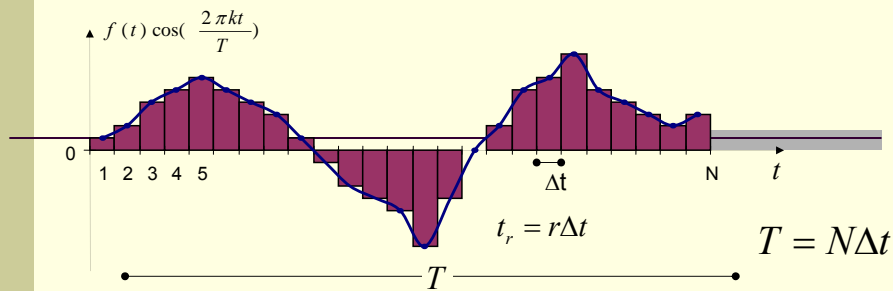
Sinal discreto



April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

136



$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \cong \frac{1}{N\Delta t} \sum_{r=0}^{N-1} f_r \cos\left(\frac{2\pi kr\Delta t}{N\Delta t}\right) \Delta t$$

$$a_k \cong \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f_r \cos\left(\frac{2\pi kr}{N}\right) \quad \dots \quad b_k \cong \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f_r \sin\left(\frac{2\pi kr}{N}\right)$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

137

$$a_k \cong \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f_r \cos\left(\frac{2\pi kr}{N}\right) \quad b_k \cong \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f_r \sin\left(\frac{2\pi kr}{N}\right)$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0(N-1)} \\ c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{(N-1)0} & c_{(N-1)1} & \cdots & c_{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix} \quad \text{onde:} \quad c_{kr} = \cos\left(\frac{2\pi kr}{N}\right)$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} s_{00} & s_{01} & \cdots & s_{0(N-1)} \\ s_{10} & s_{11} & \cdots & s_{1(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{(N-1)0} & s_{(N-1)1} & \cdots & s_{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix} \quad \text{onde:} \quad s_{kr} = \sin\left(\frac{2\pi kr}{N}\right)$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

138

$$F_k = a_k - ib_k = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} f_s e^{-i\left(\frac{2\pi ks}{N}\right)}$$

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} E_{00} & E_{01} & \cdots & E_{0(N-1)} \\ E_{10} & E_{11} & \cdots & E_{1(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{(N-1)0} & E_{(N-1)1} & \cdots & E_{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix}$$

onde:

$$E_{kr} = e^{-i\frac{2\pi kr}{N}}$$

$$f_k = \sum_{r=0}^{N-1} F_r e^{i\left(\frac{2\pi kr}{N}\right)}$$

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E'_{00} & E'_{01} & \cdots & E'_{0(N-1)} \\ E'_{10} & E'_{11} & \cdots & E'_{1(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E'_{(N-1)0} & E'_{(N-1)1} & \cdots & E'_{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{bmatrix}$$

onde:

$$E'_{kr} = e^{i\frac{2\pi kr}{N}}$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

139

Inversa da inversa

$$f_k \equiv \sum_{r=0}^{N-1} F_r e^{i\left(\frac{2\pi kr}{N}\right)}$$

onde:

$$F_r \equiv \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} f_s e^{-i\left(\frac{2\pi rs}{N}\right)}$$

$$f_k \equiv \sum_{r=0}^{N-1} F_r e^{i\left(\frac{2\pi kr}{N}\right)} = \sum_{r=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} f_s e^{-i\left(\frac{2\pi rs}{N}\right)} \right\} e^{i\left(\frac{2\pi kr}{N}\right)}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{N-1} f_s e^{-i\left(\frac{2\pi rs}{N}\right)} e^{i\left(\frac{2\pi kr}{N}\right)} = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} f_s e^{-i\left(\frac{2\pi rs}{N}\right)} e^{i\left(\frac{2\pi kr}{N}\right)} =$$

$$\frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} f_s \sum_{r=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi r(k-s)}{N}}$$

Qual o valor?

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

140

$$\sum_{r=0}^{N-1} e^{i \frac{2\pi r(k-s)}{N}} = \sum_{r=0}^{N-1} \left[e^{i \frac{2\pi(k-s)}{N}} \right]^r = 1 + q + q^2 + \dots + q^{N-1} \quad q = e^{i \frac{2\pi(k-s)}{N}}$$

Se $s=k$ $\sum_{r=0}^{N-1} e^{i \frac{2\pi r(k-s)}{N}} = \sum_{r=0}^{N-1} 1 = 1 + 1 + \dots + 1 = N$

Se $s \neq k$ é a soma de uma PG de N termos e razão q . $Soma = \frac{q^N - 1}{q - 1}$

Mas $q^N = \left[e^{i \frac{2\pi(k-s)}{N}} \right]^N = e^{i 2\pi(k-s)} = 1$ $Soma = \frac{1-1}{q-1} = 0$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

141

$$f_k \equiv \sum_{r=0}^{N-1} F_r e^{i \frac{2\pi kr}{N}}$$

onde:

$$F_r \equiv \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} f_s e^{-i \frac{2\pi rs}{N}}$$

$$f_k \equiv \sum_{r=0}^{N-1} F_r e^{i \frac{2\pi kr}{N}} = \sum_{r=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} f_s e^{-i \frac{2\pi rs}{N}} \right\} e^{i \frac{2\pi kr}{N}}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{N-1} f_s e^{-i \frac{2\pi rs}{N}} e^{i \frac{2\pi kr}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} f_s e^{-i \frac{2\pi rs}{N}} e^{i \frac{2\pi kr}{N}} =$$

$$\frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} f_s \sum_{r=0}^{N-1} e^{i \frac{2\pi r(k-s)}{N}} \quad \text{Qual o valor?} \quad = \frac{1}{N} f_k N = f_k$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

C.Q.D.

142

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left\{ e^{-i\left(\frac{2\pi k}{N}\right)} \right\} = ?$$

$$e^{-i\left(\frac{2\pi k}{N}\right)} = \cos \frac{2\pi k}{N} + i \sin \frac{2\pi k}{N}$$

N=3
April 05

N=4
Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

N=5

N=6
143

Transformada Discreta

$f(t) = \sin(2\pi 10t)$

$f_a = 200\text{Hz}$

$N = 256$

$\Delta t = \frac{1}{f_a} = 0.005\text{sec}$

$T = 0.005 \times 256 = 1.28\text{sec}$

T - não é o período do sinal!

April 05

$$T = N \cdot \Delta t = \frac{N}{f_a}$$

$$f_s = \sin\left(2\pi 10 \frac{sT}{N}\right)$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

144

Transformada Discreta de Fourier

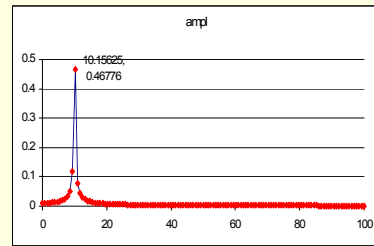
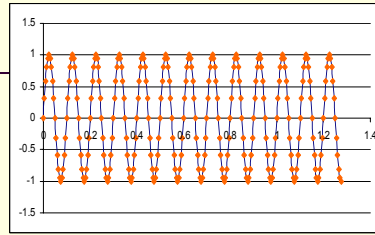
$$f_s = \sin\left(2\pi 10 \frac{sT}{N}\right)$$

$$F_k \equiv \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} f_s e^{-i\left(\frac{2\pi ks}{N}\right)}$$

$$k = 1$$

$$\Delta f = \frac{1}{T} = 0.7813 \text{ /sec}$$

$$\Delta \omega = \frac{2\pi}{T} = 4.91 \text{ rad /sec}$$



todas as frequências computadas são múltiplas destas

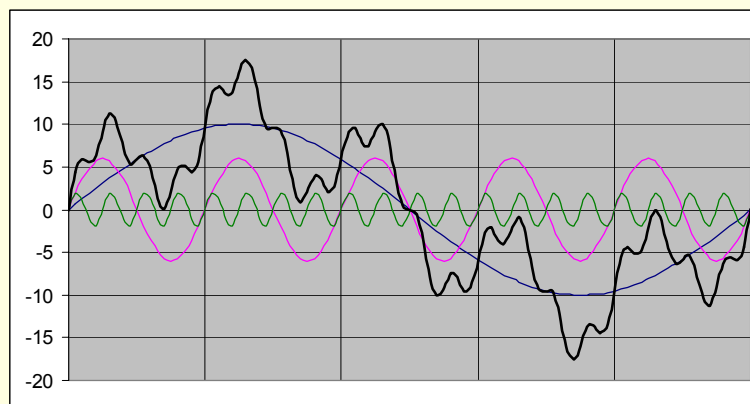
April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

145

Outro exemplo

$$f_3(t) := 10 \cos(2\pi t) + 6 \sin(10\pi t) + .8 \cos(40\pi t)$$

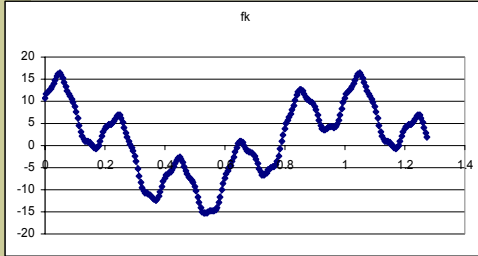


April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

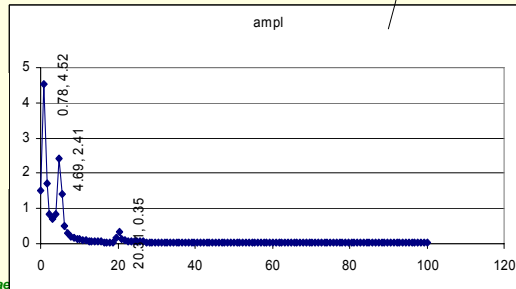
146

Transformada



$$f_k \equiv \sum_{r=0}^{N-1} F_r e^{i\left(\frac{2\pi kr}{N}\right)}$$

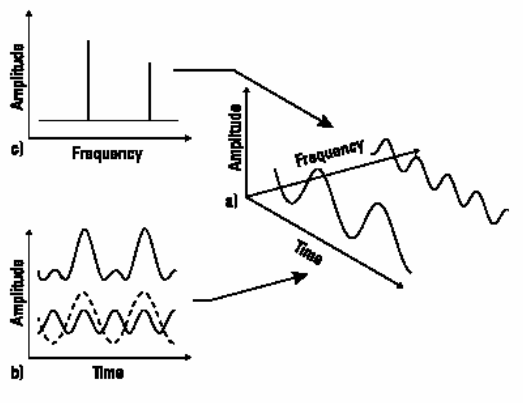
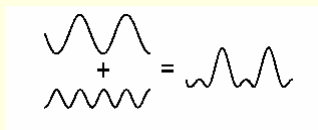
$$F_k \equiv \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} f_s e^{-i\left(\frac{2\pi ks}{N}\right)}$$



April 05

Prof. Ismael

Eixo de frequência



April 05

Prof.

Tutorial com o Excel

<http://www.me.psu.edu/me82/Learning/FFT/FFT.html>

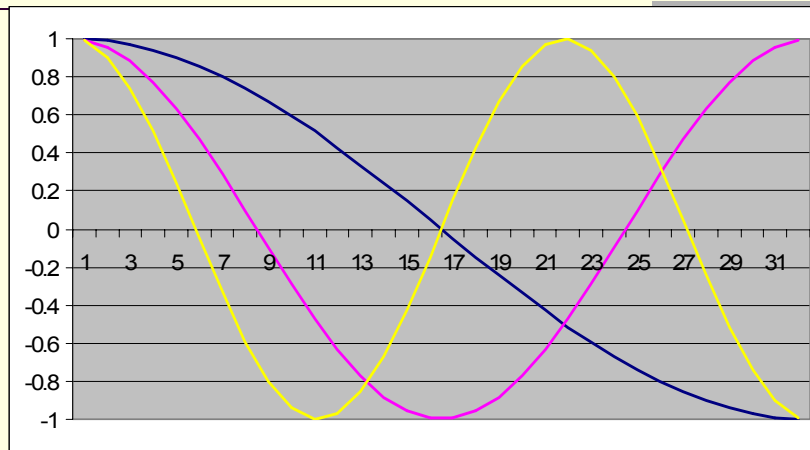
Discrete Cosine Transformation (DCT)

$$C_k \equiv \frac{\Lambda(k)}{\sqrt{N}} \sum_{s=0}^{N-1} f_s \cos\left(\frac{(2s+1)k}{2N} \pi\right)$$

$$f_s \equiv \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Lambda(k)}{\sqrt{N}} C_k \cos\left(\frac{(2s+1)k}{2N} \pi\right)$$

$$\Lambda(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \sqrt{2} & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\cos\left(\frac{(2s+1)k}{2N}\pi\right)$$



$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}(\alpha) \quad \text{o cosseno pode substituir o seno}$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

151

Transformada de Fourier

$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i2\pi wx} dx$$

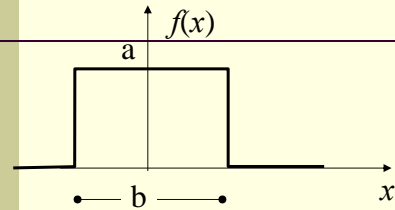
$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(w)e^{+i2\pi wx} dw$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

152

Exemplo 1: Função caixa (box)



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -b/2 \\ a & \text{se } x \in [-b/2, b/2] \\ 0 & \text{se } x > b/2 \end{cases}$$

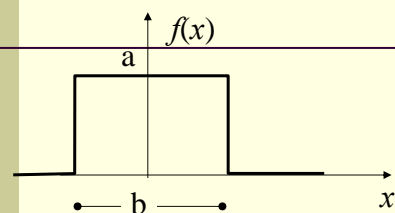
$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi\omega x} dx = a \int_{-b/2}^{b/2} e^{-i2\pi\omega x} dx \\ &= \frac{a}{-i2\pi\omega} e^{-i2\pi\omega x} \Big|_{-b/2}^{b/2} = \frac{a}{-i2\pi\omega} (e^{-i\pi\omega b} - e^{i\pi\omega b}) \\ &= \frac{a}{\pi\omega} \frac{(e^{i\pi\omega b} - e^{-i\pi\omega b})}{2i} = \frac{a}{\pi\omega} \sin(\pi\omega b) \end{aligned}$$

$$F(\omega) = ab \frac{\sin(\pi\omega b)}{\pi\omega b}$$

April 05

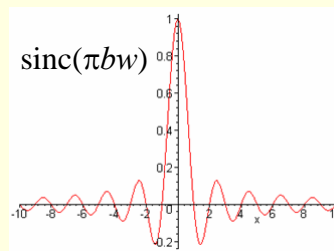
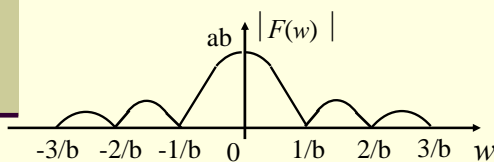
Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc

Transformada da função box



$$F(\omega) = ab \frac{\sin(\pi\omega b)}{\pi\omega b}$$

$$\|F(\omega)\| = |ab| \left| \frac{\sin(\pi\omega b)}{\pi\omega b} \right|$$



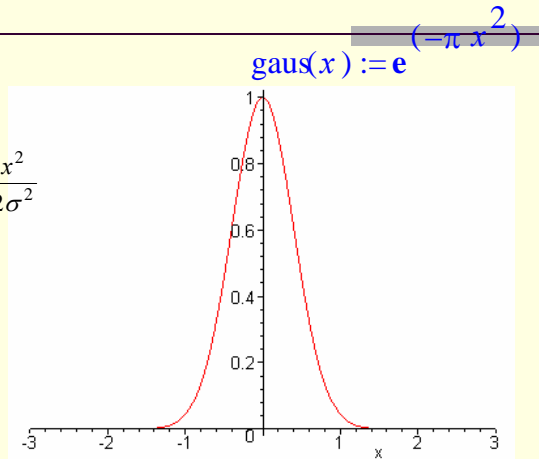
April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

154

Distribuição normal: Gaussiana

$$Gaus(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

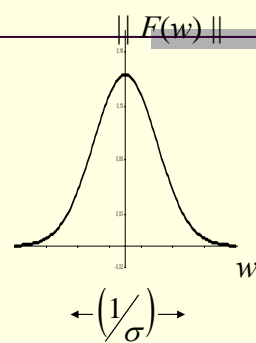
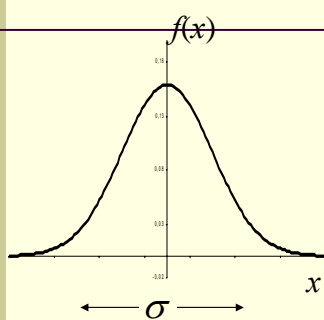


April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

155

Exemplo 2: Gaussiana



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$F(w) = e^{-\frac{w^2}{2\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)}}$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

156

Transformada da Gaussiana

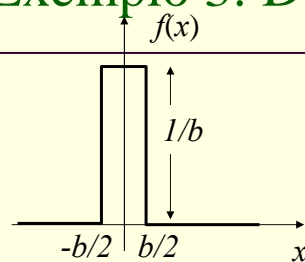
$$\begin{aligned}
 F(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right) e^{-i2\pi wx} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right) (\cos(2\pi wx) + i \sin(2\pi wx)) dx \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cos(2\pi wx) dx = e^{-2\pi\sigma^2 w^2} \\
 &= v\sqrt{2\pi} \left[\frac{1}{v\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2v^2}} \right] \quad v = \frac{1}{2\pi\sigma}
 \end{aligned}$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

157

Exemplo 3: Delta de Dirac



$$\delta(x) = \lim_{b \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{se } x < -b/2 \\ 1/b & \text{se } x \in [-b/2, b/2] \\ 0 & \text{se } x > b/2 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = \lim_{b \rightarrow 0} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{b} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{(b/2 + b/2)}{b} f(\xi), \xi \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2} \right]$$

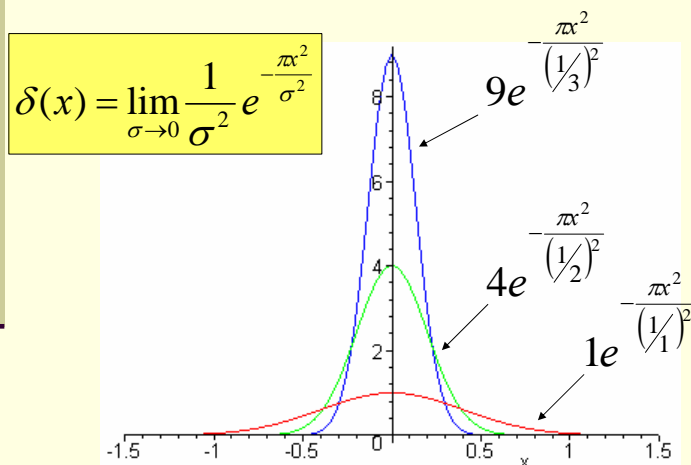
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

158

Delta de Dirac de Gaussianas

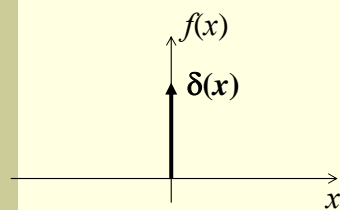


April 05

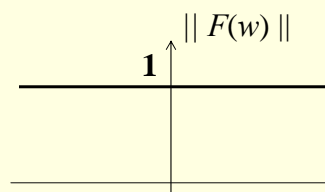
Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

159

Transformada do Delta de Dirac



$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-i2\pi wx} dx = e^0 = 1$$



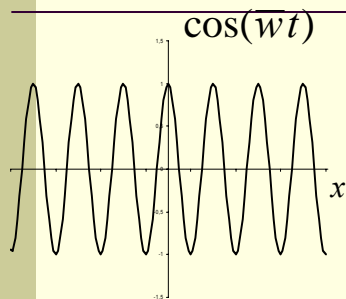
April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

W

160

Transformada do cosseno



$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(\bar{w}x)) e^{-i2\pi wx} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\bar{w}x) (\cos(2\pi wx) + i \sin(2\pi wx)) dx$$

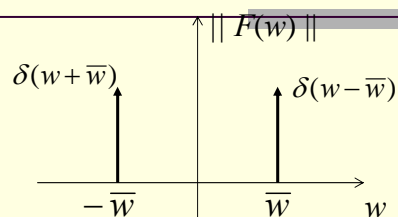
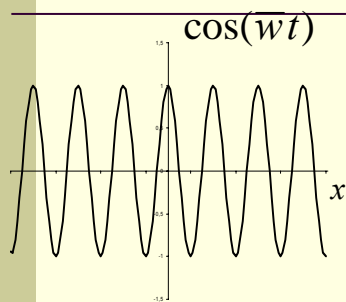
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\bar{w}x) \cos(2\pi wx) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } w \neq \frac{\bar{w}}{2\pi} \\ \infty & \text{se } w = \frac{\bar{w}}{2\pi} \end{cases}$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

161

Exemplo 4: Cosseno



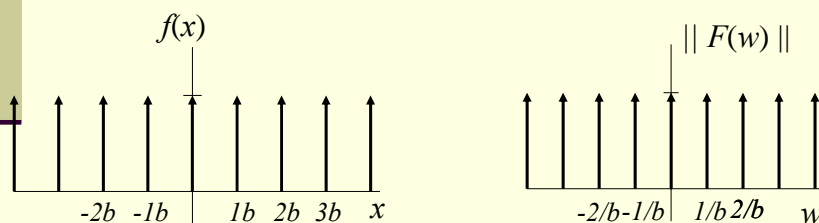
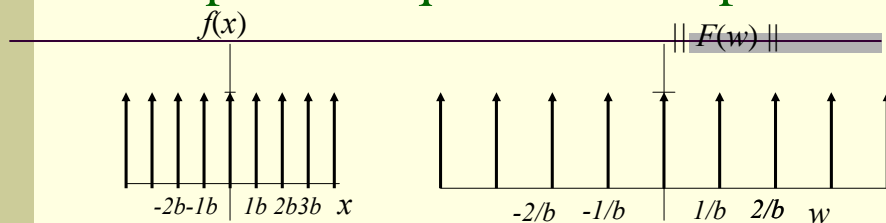
$$F(w) = \frac{1}{2} \left[\delta\left(w + \frac{\bar{w}}{2\pi}\right) + \delta\left(w - \frac{\bar{w}}{2\pi}\right) \right]$$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

162

Exemplo 5: Sequência de impulsos



April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

163

Pares importantes

$f(x)$	$F(u)$
1	$\delta(u)$
$\delta(x)$	1
$\cos \pi x$	$\frac{1}{2} \delta(u + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \delta(u - \frac{1}{2})$
$\sin \pi x$	$\frac{j}{2} \delta(u + \frac{1}{2}) - \frac{j}{2} \delta(u - \frac{1}{2})$
$e^{-\pi x^2}$	$e^{-\pi u^2}$
$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\text{sinc}(u) = \frac{\sin \pi u}{\pi u}$

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

164

Propriedades da transformada

$f(ax)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{u}{a}\right)$
$f(x-a)$	$e^{-j2\pi au} F(u)$
$F(x)$	$f(-u)$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$j2\pi u F(u)$
$f(x)+h(x)$	$F(u)+H(u)$
$f(x)*h(x)$	$F(u)H(u)$

convolução

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

165

Convolução

$$h(x) = f \otimes g = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du$$

$$h(x) = \int_{t=-\infty}^{t=\infty} g(t-x) f(x) dt$$

$$h_i = \sum_{k=0}^{n-1} g_{(k-i)} f_i$$

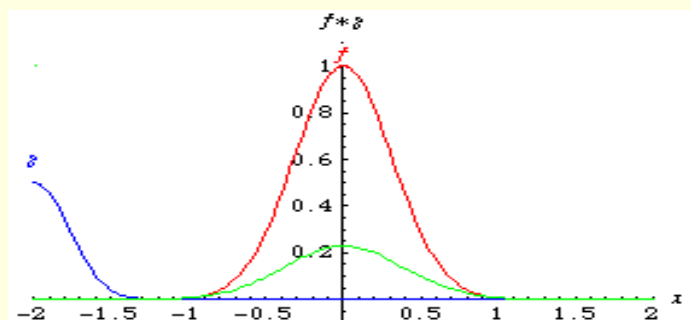
April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

166

Ilustração da convolução

$$h(x) = \int_{t=-\infty}^{t=\infty} g(t-x) f(x) dt$$



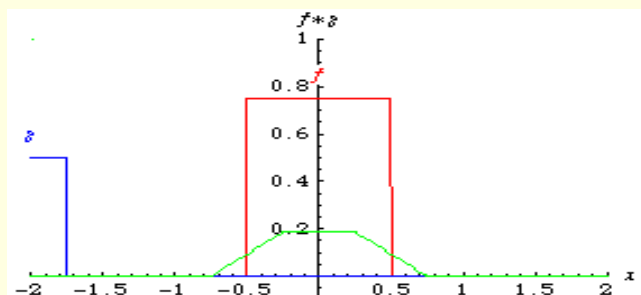
April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

167

Ilustração da convolução

$$h(x) = \int_{t=-\infty}^{t=\infty} g(t-x) f(x) dt$$

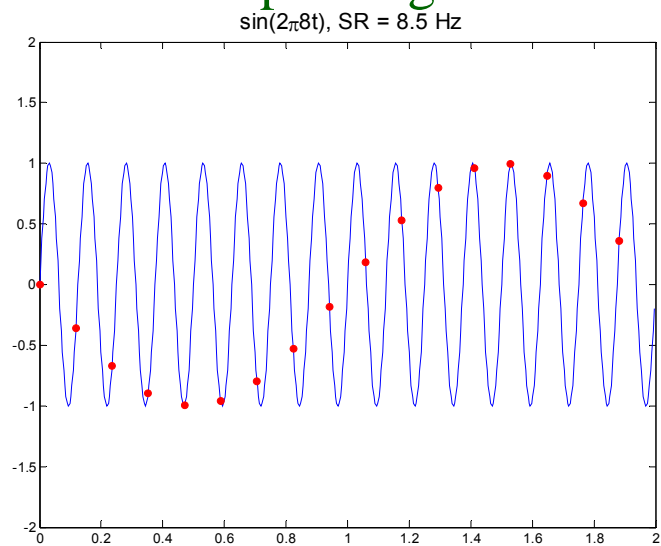


April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

168

An undersampled signal

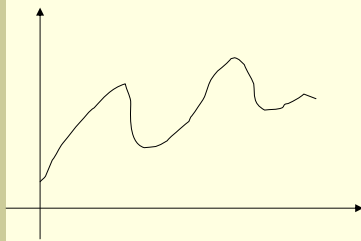


Amostragem e Reconstrução

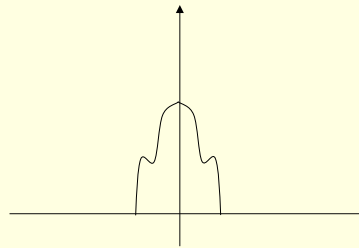
*Observando os domínios do espaço e das
frequências*

Sinal original

domínio do espaço



domínio das frequências



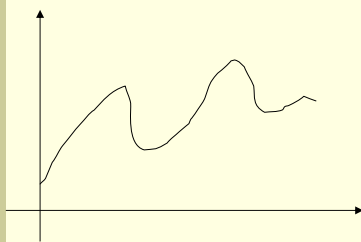
April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

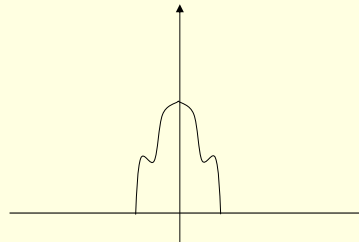
171

Amostragem

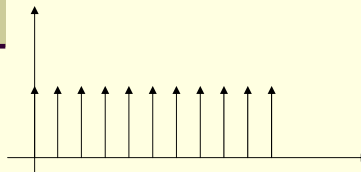
domínio do espaço



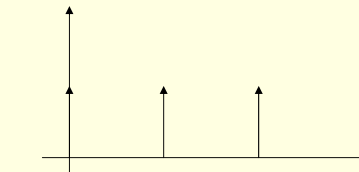
domínio das frequências



produto



convolução

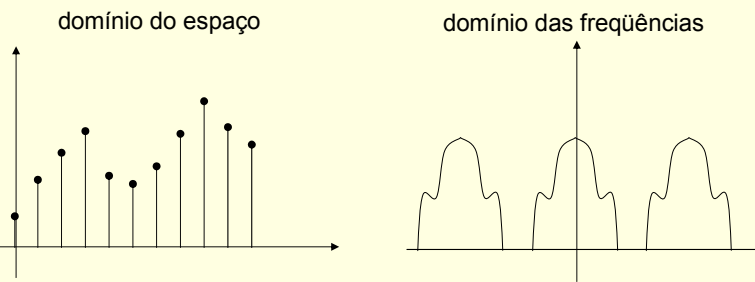


April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

172

Sinal discretizado

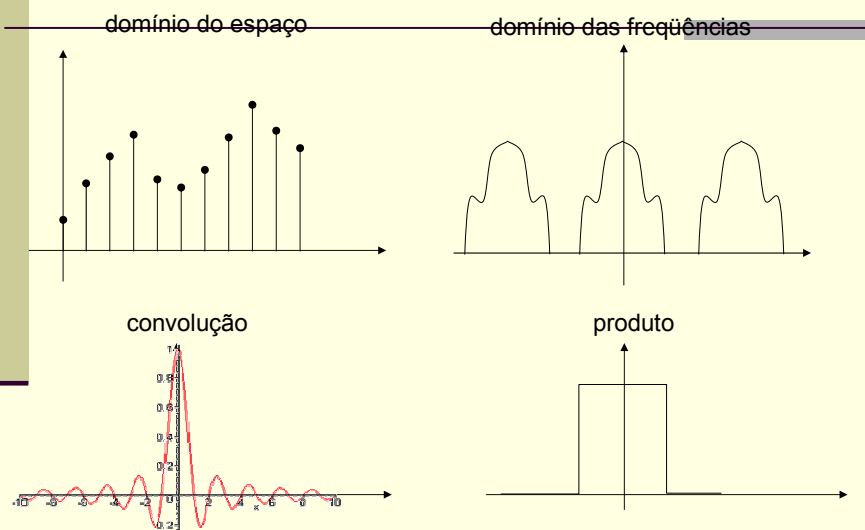


April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

173

Reconstrução

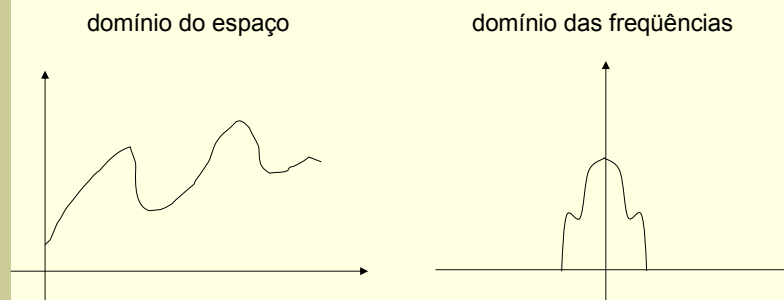


April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

174

Retorno ao sinal original

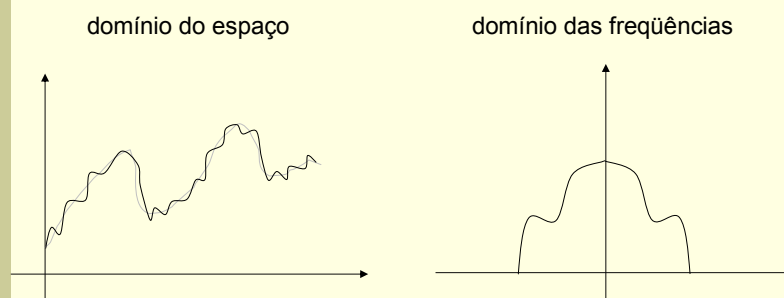


April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

175

Sinal original com mais altas frequências



April 05

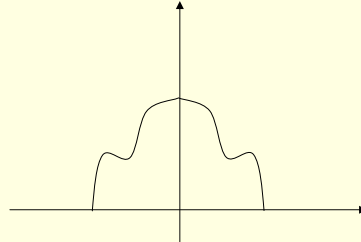
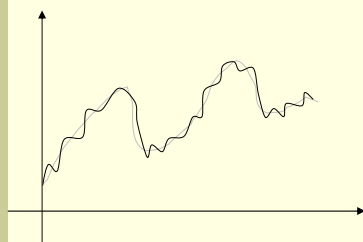
Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

176

Mesma taxa de amostragem

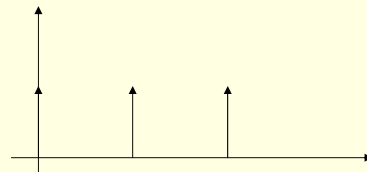
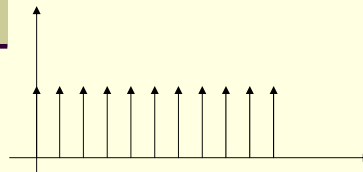
domínio do espaço

domínio das frequências



produto

convolução



April 05

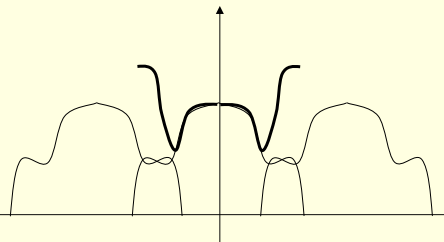
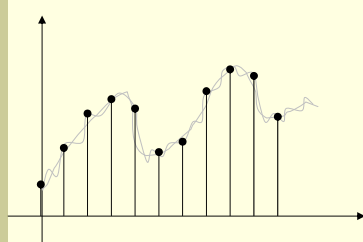
Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

177

Sinal amostrado

domínio do espaço

domínio das frequências



Não temos como reconstruir sem introduzir artefatos!

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

178

Teorema de Nyquist

Para que um sinal de banda limitada (i.e. aqueles cuja a transformada resultam em zero para frequências $f > B$) seja reconstruído plenamente ele precisa ser amostrado numa frequência $f \geq 2B$.

Um sinal amostrado na frequência ($f=2B$) é dito amostrado por Nyquist e $f=2B$ é a frequência de Nyquist.

Não há perda de informação nos sinais amostrados na frequência de Nyquist, e não adicionamos nenhuma informação se amostrarmos numa frequência maior.

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

179

Aliasing

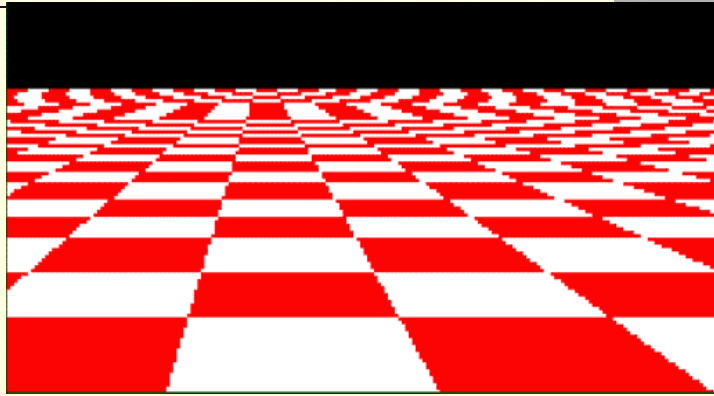
- Esta mistura de espectros é chamada de *aliasing*.
- Existem duas maneiras de lidarmos com *aliasing*.
 - Passar um filtro passa-baixa no sinal.
 - Aumentar a frequência de amostragem.

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

180

Alias



Texture errors

April 05

Prof. Ismael H. F. Santos - ismael@tecgraf.puc-rio.br

181