



**DECivil**

## **ANÁLISE DE ESTRUTURAS II**

### **INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NA ANÁLISE DE PROBLEMAS PLANOS DE ELASTICIDADE**

Orlando J. B. A. Pereira

2000

## Alfabeto Grego

Alfa	A	α
Beta	B	β
Gama	Γ	γ
Delta	Δ	δ
Épsilon	E	ε
Zeta	Z	ζ
Eta	H	η
Teta	Θ	θ
Iota	I	ι
Capa	K	κ
Lambda	Λ	λ
Miú	M	μ
Niú	N	ν
Csi	Ξ	ξ
Ómicron	O	ο
Pi	Π	π
Ró	P	ρ
Sigma	Σ	σ
Tau	T	τ
Ípsilon	Υ	υ
Fi	Φ	φ, ϕ
Qui	X	χ
Psi	Ψ	ψ
Ómega	Ω	ω

## 1. Introdução

Diversos problemas com importância para a Engenharia podem ser descritos em termos de equações com derivadas parciais. Com excepção de alguns casos particulares, não é possível obter uma solução analítica exacta para estes problemas. O Método dos Elementos Finitos é, actualmente, o método numérico mais utilizado para obter soluções aproximadas para este tipo de problemas.

Diversos exemplos de problemas deste tipo podem ser encontrados em Engenharia Civil. No campo da Engenharia de Estruturas, podem citar-se, entre outros, os problemas de elasticidade linear em placas, lajes, cascas e sólidos tridimensionais.

A generalização de meios de cálculo automático potentes tem possibilitado o recurso cada vez mais frequente ao Método dos Elementos Finitos. Dado o carácter aproximado das soluções fornecidas por este método, o desconhecimento dos seus fundamentos pode conduzir a resultados desastrosos na sua aplicação, como sucedeu no caso da perda da plataforma petrolífera Sleipner A, na Noruega.

Por esta razão, o futuro Licenciado em Engenharia Civil, com o Perfil de Estruturas e Construção, tem necessidade de aprender os fundamentos do Método dos Elementos Finitos.

Dos problemas de Engenharia de Estruturas anteriormente citados, os mais fáceis para uma introdução ao Método dos Elementos Finitos são os de placas, nas quais se admite um estado de tensão plano.

Embora as formulações não convencionais do Método dos Elementos Finitos apresentem diversas vantagens, a formulação convencional de Elementos Finitos de deslocamento compatíveis é a mais simples e, actualmente, a mais utilizada em aplicações práticas.

Dado que se destinam a uma introdução ao Método dos Elementos Finitos, no âmbito da disciplina de Análise de Estruturas II, estes apontamentos incidirão exclusivamente sobre a aplicação de Elementos Finitos de deslocamento compatíveis na análise de estados de tensão planos em elasticidade linear.

É de notar que a utilização desta formulação do Método dos Elementos Finitos na análise elástica linear de sólidos tridimensionais não apresenta dificuldades teóricas adicionais. Contudo, quer a exposição quer a aplicação prática são substancialmente mais laboriosas. Por esta razão, este tipo de problemas não será abordado nesta disciplina.

Por sua vez, a utilização do Método dos Elementos Finitos na Análise Elástica Linear de Lajes é abordada noutro volume de apontamentos de Análise de Estruturas II.

## 2. Conceitos Básicos de Teoria da Elasticidade para Estados Planos de Tensão

De acordo com a NP-761, uma placa é uma peça laminar plana sujeita a esforços existentes apenas no seu plano médio. Considere-se que a espessura da placa é constante e que o seu plano médio é o plano  $xy$ . Admitam-se como válidas as hipóteses:  $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_z = 0$ ;  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_{xy}$  não variam com  $z$ . Então, a análise da placa reduz-se à análise de um Estado Plano de Tensão, o qual constitui um problema bidimensional.

Neste capítulo, apresentam-se as relações fundamentais (compatibilidade, constitutivas e equilíbrio) para problemas de elasticidade linear em Estados Planos de Tensão, que se suporão representar placas de espessura constante.

Como exemplo, utilizar-se-á o domínio bidimensional  $\Omega$  representado na figura 2.1.

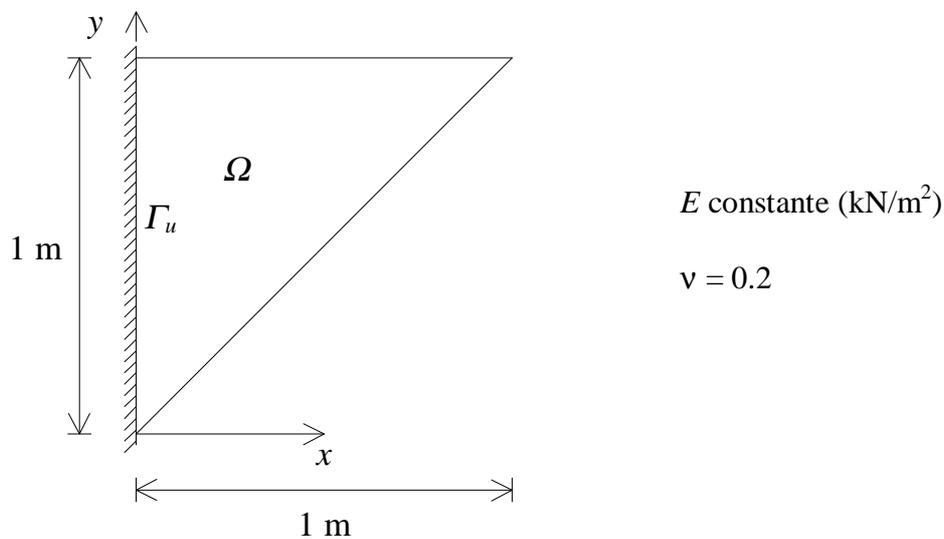


Figura 2.1

Na fronteira cinemática  $\Gamma_u$ , impõem-se os valores dos deslocamentos. Neste exemplo, considera-se que o lado se encontra encastrado, o que corresponde a impor um valor nulo para os deslocamentos dos pontos de  $\Gamma_u$ .

Considere-se o campo de deslocamentos  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$ , representado na figura 2.2.

Este campo de deslocamentos é compatível, dado que:

- é contínuo em todo o domínio;
- satisfaz as condições de fronteira cinemáticas, uma vez que  $\mathbf{u}(0, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{u}}$ .

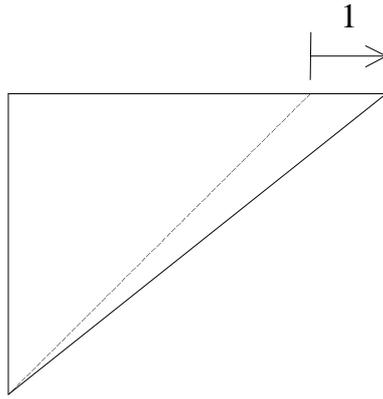


Figura 2.2

Admitindo como válida a hipótese dos pequenos deslocamentos, as relações deformações-deslocamentos são

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} \mathbf{u} ,$$

onde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é um vector que agrupa as componentes independentes do tensor das deformações,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x(x, y) \\ \varepsilon_y(x, y) \\ \gamma_{xy}(x, y) \end{bmatrix} ,$$

cujos significado físico se representa na figura 2.3, e  $\mathbf{A}$  é o operador diferencial de compatibilidade,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} .$$

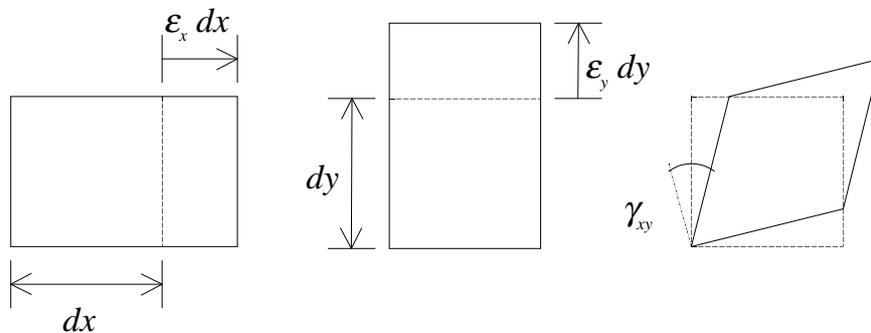


Figura 2.3

Para o campo de deslocamentos anterior, o campo de deformações é  $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x(x, y) \\ \varepsilon_y(x, y) \\ \gamma_{xy}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Admitindo um comportamento fisicamente linear, as relações constitutivas ou relações tensões-deformações são

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon},$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}$  é um vector que agrupa as componentes independentes do tensor das tensões,

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x(x, y) \\ \sigma_y(x, y) \\ \sigma_{xy}(x, y) \end{bmatrix},$$

cujo significado físico se representa na figura 2.4. Admitindo a isotropia do material, o operador  $\mathbf{D}$  é dado por

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix},$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade, ou módulo de Young, e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

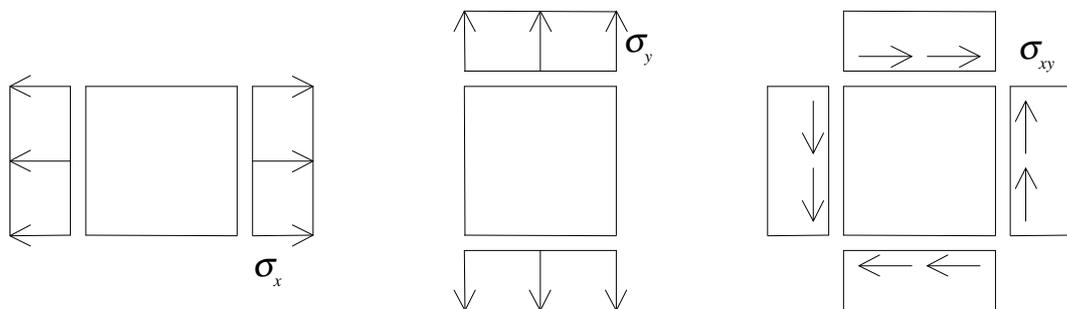


Figura 2.4

Para o campo de deformações anterior, o campo de tensões é  $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x(x, y) \\ \sigma_y(x, y) \\ \sigma_{xy}(x, y) \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} 100/96 \\ 20/96 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

As forças de massa e as tensões na fronteira que são equilibradas por um determinado campo de tensões são obtidas recorrendo às relações de equilíbrio. Tendo sido admitida como válida a hipótese dos pequenos deslocamentos, estas relações podem ser estabelecidas na configuração indeformada da estrutura.

O campo de tensões equilibra o vector de forças de massa  $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{bmatrix}$ , se verificar a equação de equilíbrio

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0,$$

onde o operador diferencial de equilíbrio  $\mathbf{A}^T$  é o transposto do operador de compatibilidade  $\mathbf{A}$  anteriormente definido.

As componentes do tensor das tensões equilibram as tensões  $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$ , numa faceta com normal exterior unitária  $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}$ , se verificarem as equações de equilíbrio

$$\begin{cases} t_x = \sigma_x n_x + \sigma_{xy} n_y \\ t_y = \sigma_{xy} n_x + \sigma_y n_y \end{cases}.$$

Para o campo de tensões anterior, o campo de forças de massa é  $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Para a placa representada na figura 2.1, as normais exteriores unitárias são as indicadas na figura 2.5(a). As tensões aplicadas na fronteira estática  $\Gamma_e$  estão indicadas na figura 2.5(b), bem como as reacções na fronteira cinemática.

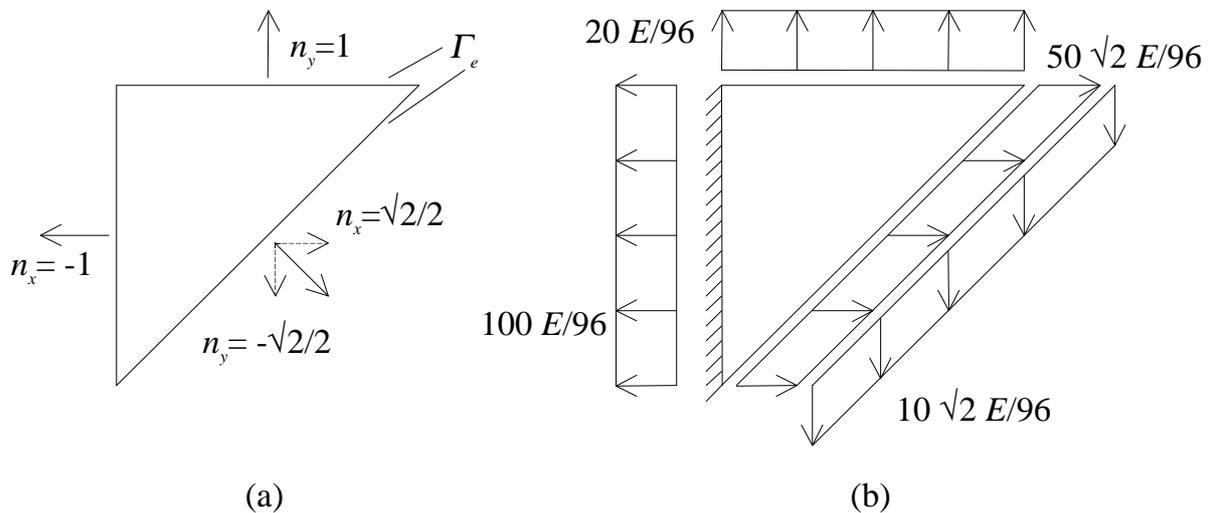


Figura 2.5

Portanto, o campo de deslocamentos inicialmente considerado é a solução exacta para a placa da figura 2.1, quando as forças de massa aplicadas são nulas e as tensões aplicadas são:

$$\bar{\mathbf{t}}(x,1) = \begin{bmatrix} \bar{t}_x(x,1) \\ \bar{t}_y(x,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20/96 \end{bmatrix} E, \text{ no bordo horizontal e}$$

$$\bar{\mathbf{t}}(x, x) = \begin{bmatrix} \bar{t}_x(x, x) \\ \bar{t}_y(x, x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50\sqrt{2}/96 \\ -10\sqrt{2}/96 \end{bmatrix} E, \text{ no bordo inclinado.}$$

Considere-se agora o campo de deslocamentos  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}$ .

Como exercício, o leitor poderá verificar que este campo de deslocamentos satisfaz as condições de compatibilidade, que corresponde à deformada representada na figura 2.6(a), que as correspondentes deformações e tensões são

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 40/96 \end{bmatrix} E, \text{ respectivamente,}$$

que as forças de massa são nulas e que as tensões na fronteira são as representadas na figura 2.6(b).

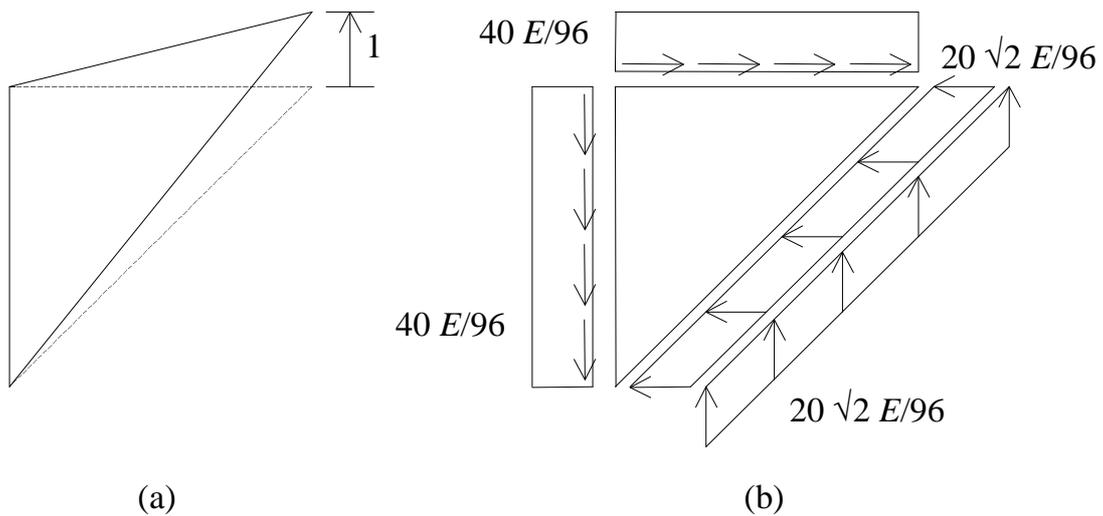


Figura 2.6

### 3. Cálculo de Soluções Aproximadas

Considere-se o problema representado na figura 3.1.

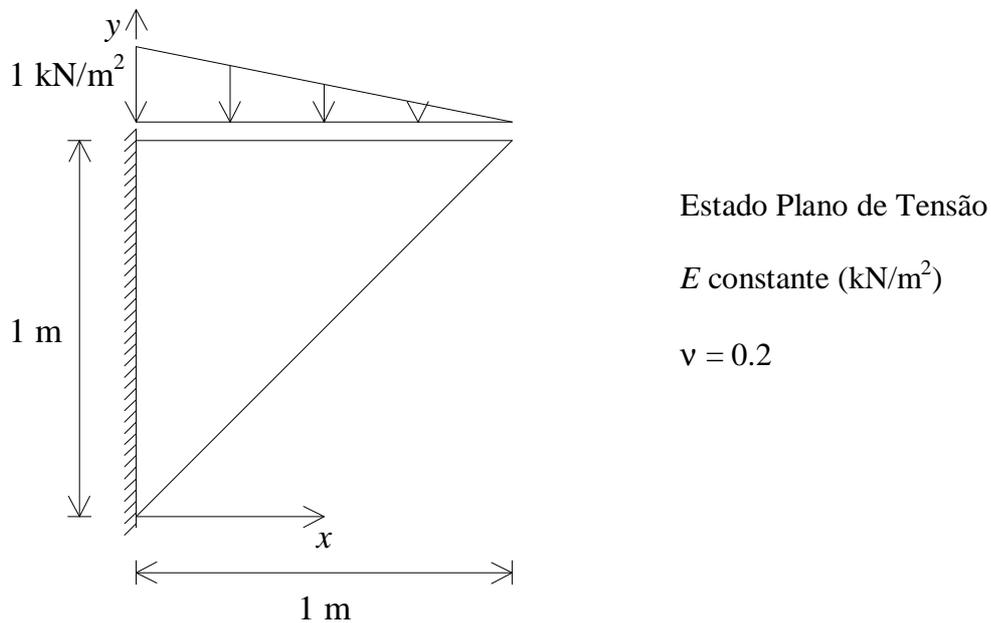


Figura 3.1

A solução exacta do problema satisfaz simultaneamente as condições de compatibilidade, as relações constitutivas e as condições de equilíbrio. Contudo, não é possível, com um número finito de parcelas, obter a expressão analítica da solução exacta deste problema. Portanto, é necessário obter uma solução aproximada. Esta solução poderá satisfazer de forma exacta algumas das condições anteriores, mas só irá satisfazer as outras de forma aproximada.

Por exemplo, podemos procurar uma solução aproximada que seja compatível. Para este problema, poderemos considerar uma combinação linear dos campos de deslocamentos usados no capítulo anterior:

$$\mathbf{u} = \Psi(\mathbf{x})\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \Psi_1(x, y) & \Psi_2(x, y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}, \text{ onde } \Psi_1(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \Psi_2(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}.$$

Quaisquer que sejam os valores de  $d_1$  e de  $d_2$ , o campo de deslocamentos é compatível. Estes valores representam os deslocamentos do vértice livre do triângulo, conforme se pode observar na figura 3.2, na qual se representam igualmente as deformadas correspondentes a valores unitários de cada um dos referidos deslocamentos.

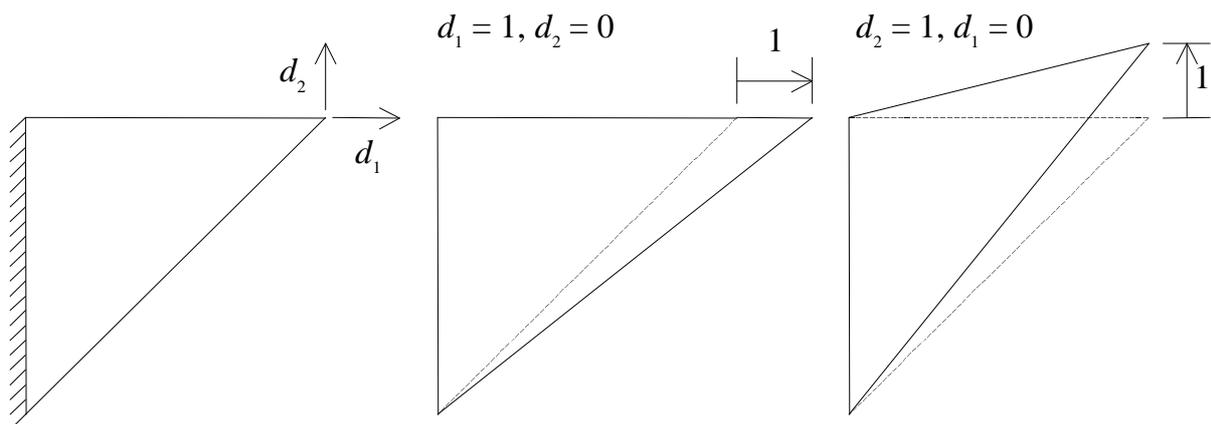


Figura 3.2

Deste modo, variando os valores de  $d_1$  e de  $d_2$ , é possível reproduzir todos os campos de deslocamentos lineares e compatíveis. No capítulo seguinte, ver-se-á que estes campos de deslocamentos correspondem aos de um elemento finito de 3 nós, com as necessárias condições de apoio.

As correspondentes deformações são

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} \boldsymbol{\Psi} \mathbf{d} \Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d}, \text{ com } \mathbf{B} = \mathbf{A} \boldsymbol{\Psi}.$$

Neste caso,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

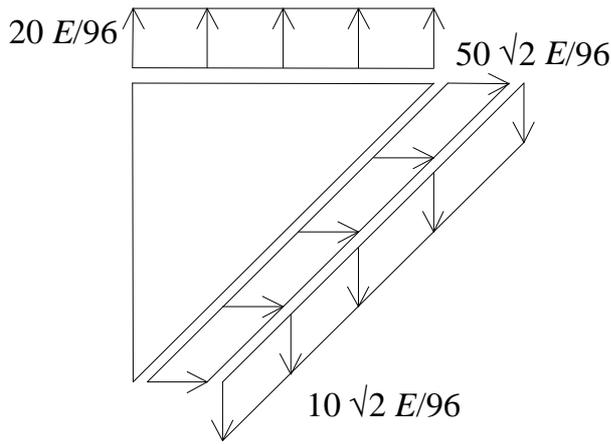
Por sua vez, as tensões são

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{d}.$$

Neste caso,  $\mathbf{D} \mathbf{B} = E \begin{bmatrix} 100/96 & 0 \\ 20/96 & 0 \\ 0 & 40/96 \end{bmatrix}$ .

Para qualquer das deformadas da figura 3.2, as forças de massa são nulas. Para cada uma das deformadas, as tensões na fronteira estática são as representadas na figura 3.3.

$$d_1 = 1, d_2 = 0$$



$$d_2 = 1, d_1 = 0$$

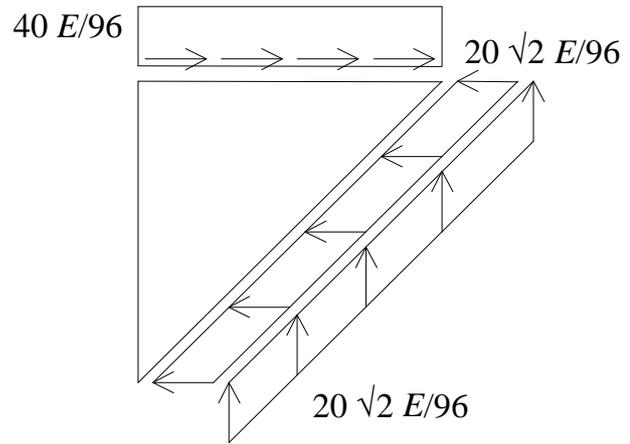


Figura 3.3

Combinando as tensões representadas na figura 3.3, não é possível obter na fronteira estática tensões iguais às do carregamento, quaisquer que sejam os valores de  $d_1$  e de  $d_2$ .

No entanto, é possível calcular valores de  $d_1$  e de  $d_2$  tais que o trabalho das forças de massa e das tensões na fronteira estática seja igual ao trabalho do carregamento, tanto para os deslocamentos da primeira deformada da figura 3.2 como para os deslocamentos da segunda deformada da mesma figura. Ou seja, é possível calcular  $d_1$  e  $d_2$  resolvendo o sistema:

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega} \Psi_1^T f_1 d\Omega + \int_{\Gamma_i} \Psi_1^T t_1 d\Gamma & \int_{\Omega} \Psi_1^T f_2 d\Omega + \int_{\Gamma_i} \Psi_1^T t_2 d\Gamma \\ \int_{\Omega} \Psi_2^T f_1 d\Omega + \int_{\Gamma_i} \Psi_2^T t_1 d\Gamma & \int_{\Omega} \Psi_2^T f_2 d\Omega + \int_{\Gamma_i} \Psi_2^T t_2 d\Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \Psi_1^T \bar{f} d\Omega + \int_{\Gamma_i} \Psi_1^T \bar{t} d\Gamma \\ \int_{\Omega} \Psi_2^T \bar{f} d\Omega + \int_{\Gamma_i} \Psi_2^T \bar{t} d\Gamma \end{bmatrix}.$$

As forças de massa e as tensões na fronteira estática foram calculadas a partir do campo de tensões no interior, no capítulo 2. Estes cálculos são normalmente evitados, dado que o Princípio dos Trabalhos Virtuais (P.T.V.) permite substituir o trabalho das forças com os deslocamentos pelo trabalho das tensões com as deformações. Obtém-se assim o sistema

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega} (A \Psi_1)^T D (A \Psi_1) d\Omega & \int_{\Omega} (A \Psi_1)^T D (A \Psi_2) d\Omega \\ \int_{\Omega} (A \Psi_2)^T D (A \Psi_1) d\Omega & \int_{\Omega} (A \Psi_2)^T D (A \Psi_2) d\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \Psi_1^T \bar{f} d\Omega + \int_{\Gamma_i} \Psi_1^T \bar{t} d\Gamma \\ \int_{\Omega} \Psi_2^T \bar{f} d\Omega + \int_{\Gamma_i} \Psi_2^T \bar{t} d\Gamma \end{bmatrix},$$

o qual pode ser escrito na forma

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F}, \text{ com } \mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \text{ e } \mathbf{F} = \int_{\Omega} \Psi^T \bar{f} d\Omega + \int_{\Gamma_i} \Psi^T \bar{t} d\Gamma.$$

$$\text{Neste exemplo, } \mathbf{K} = \int_0^1 \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} 100/96 & 0 \\ 20/96 & 0 \\ 0 & 40/96 \end{bmatrix} dydx = \frac{E}{192} \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 40 \end{bmatrix} (\text{kN/m}^2)$$

$$\text{e } \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^1 \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x-1 \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/6 \end{bmatrix} \text{ kN/m.}$$

A matriz  $\mathbf{K}$  é uma matriz de rigidez e o vector  $\mathbf{F}$  é um vector de forças. Os respectivos termos podem ser imaginados como forças aplicadas segundo  $d_1$  e  $d_2$ , como se pode observar na representação gráfica do sistema de equações que se apresenta na figura 3.4.

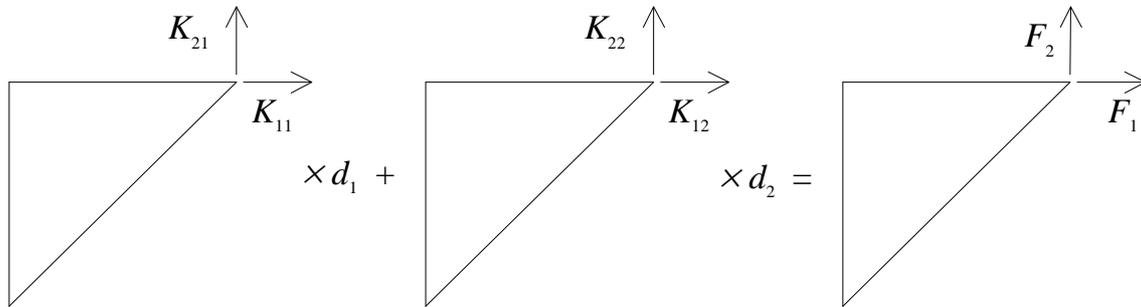


Figura 3.4

O sistema de equações anterior tem a mesma forma do sistema de equações do Método dos Deslocamentos para estruturas reticuladas, estudado na disciplina de Análise de Estruturas I.

Contudo, as forças representadas na figura 3.4 são fictícias. São forças equivalentes às reais, mas apenas no sentido de produzirem o mesmo trabalho para cada uma das deformadas da figura 3.2. As forças reais correspondentes às deformadas da figura 3.2 são as tensões representadas na figura 3.3 e o carregamento real é o representado na figura 3.1. Nas estruturas reticuladas, os termos da matriz  $\mathbf{K}$  são as forças reais correspondentes às deformadas.

Além disso, nas estruturas reticuladas, cada deformada é a deformada real quando um deslocamento independente é unitário e os restantes são nulos. Em contrapartida, as deformadas representadas na figura 3.2 são as deformadas quando um deslocamento nodal é unitário e o outro é nulo e, adicionalmente, os deslocamentos são restringidos a funções lineares.

Além disso, no caso das estruturas reticuladas, existe uma solução particular exacta e os termos dos vectores de forças são forças reais, o que não acontece no caso da figura 3.4.

Portanto, ao contrário do que sucede com as estruturas reticuladas, é natural que o sistema de equações anteriormente obtido possa fornecer para  $d_1$  e  $d_2$  valores diferentes dos exactos. Conforme se viu anteriormente, é o que terá de suceder neste caso.

$$\text{Resolvendo o sistema de equações, obtém-se } \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.8 \end{bmatrix} \frac{1}{E} \text{ (m).}$$

$$\text{O correspondente campo de deslocamentos é } \mathbf{u} = \Psi \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.8x \end{bmatrix} \frac{1}{E} \text{ (m).}$$

Por sua vez, o campo de tensões é  $\sigma = DBd = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.3333 \end{bmatrix} \text{ kN/m}^2$ .

Estes campos encontram-se representados na figura 3.5. O leitor poderá verificar que, de facto, a solução é compatível mas não respeita as condições de fronteira estáticas.

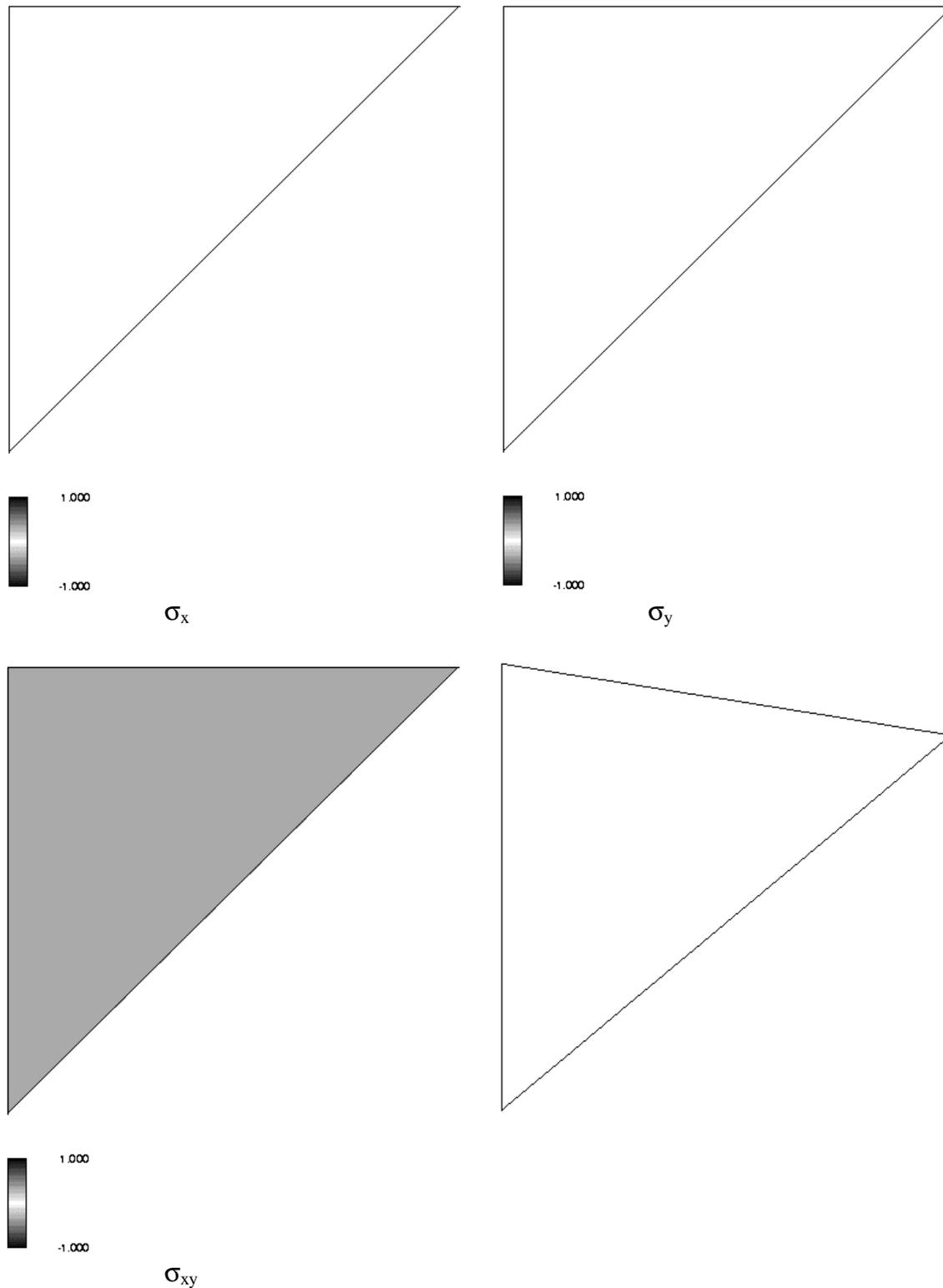


Figura 3.5

## 4. Método dos Elementos Finitos

### 4.1. Métodos para melhorar a aproximação

Na figura 4.1, representa-se uma solução muito próxima da solução exacta, para o problema considerado no capítulo anterior.

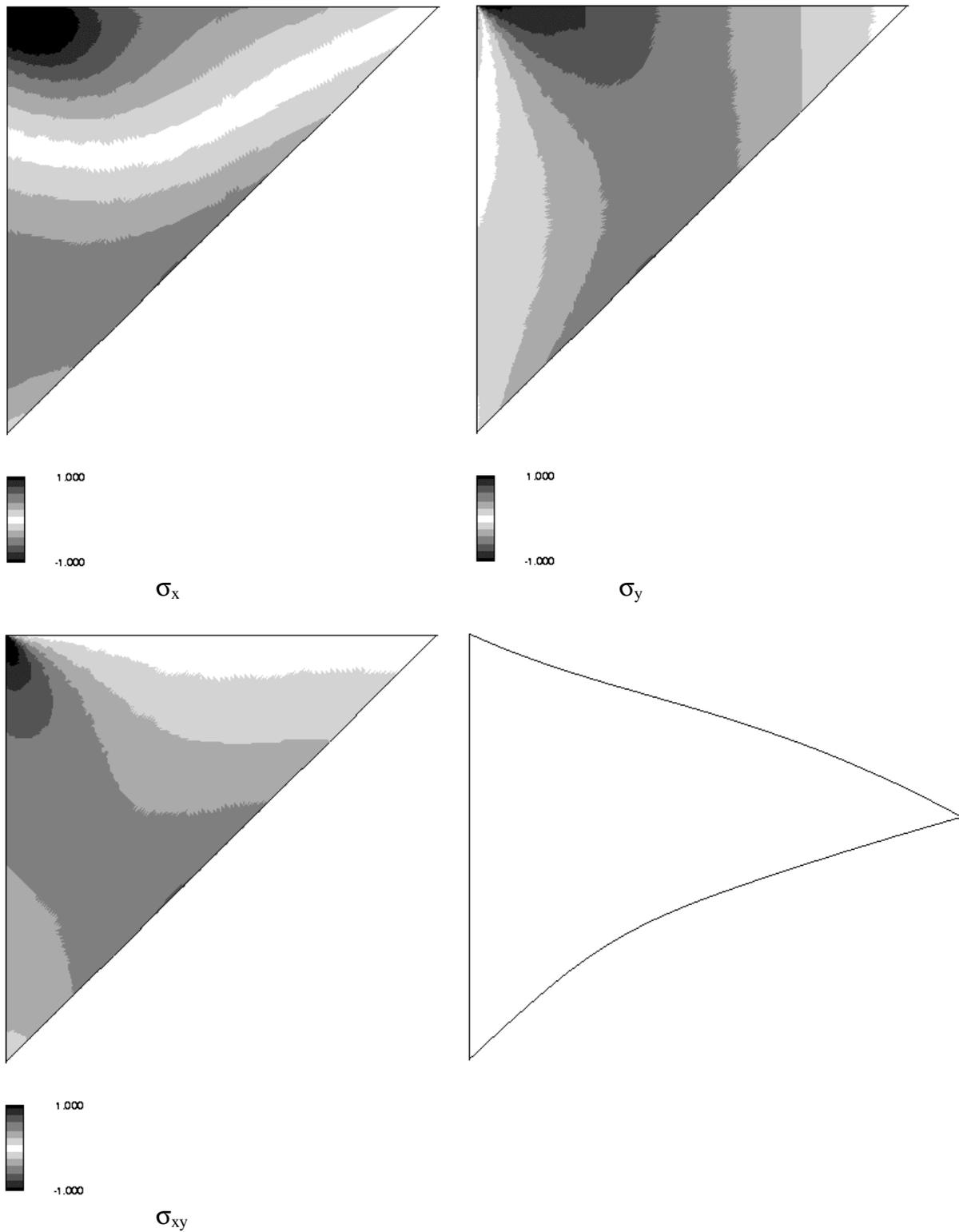


Figura 4.1

Utilizando a solução representada na figura 4.1 como referência, a solução aproximada representada na figura 3.5 tem um erro relativo médio no campo de tensões de 80%. Assim, é uma aproximação demasiado grosseira. Portanto, é necessário refinar a aproximação.

Em lugar de utilizar uma função linear em todo o domínio para aproximar cada componente do campo de deslocamentos, uma alternativa consiste em dividir o domínio em subdomínios e, embora garantindo a continuidade de deslocamentos entre eles, utilizar uma função linear separada em cada um. Estes subdomínios constituem os elementos finitos.

A solução obtida no capítulo anterior correspondia à utilização de 1 elemento finito de 3 nós, conforme representado na figura 4.2(a). Na figura 4.2(b) representa-se uma discretização do domínio em 4 elementos finitos de 3 nós. Este método de refinamento é designado por refinamento  $h$ .

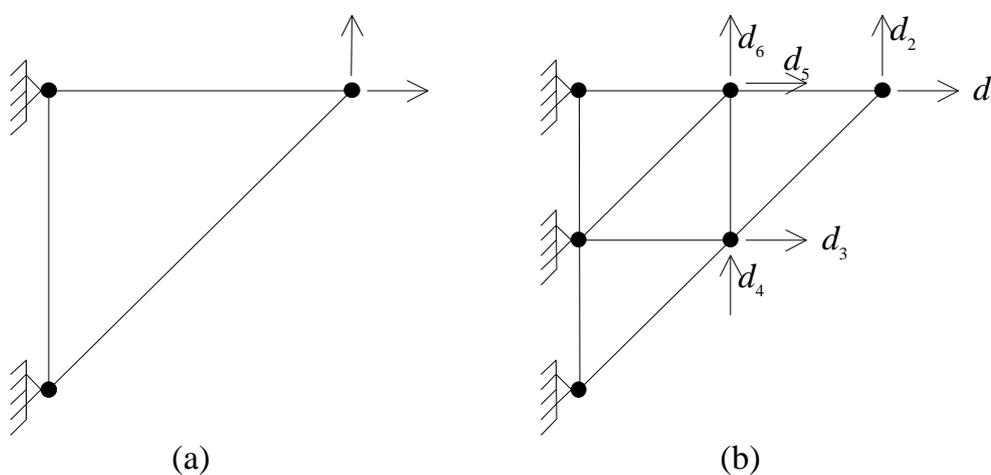


Figura 4.2

As deformadas correspondentes a cada um dos 6 deslocamentos nodais da malha de 4 elementos finitos estão representadas na figura 4.3. Em cada elemento, os deslocamentos são obtidos por interpolação linear, a partir dos deslocamentos dos nós desse elemento.

Como se pode verificar em todas as deformadas, as condições de fronteira cinemáticas estão asseguradas, tal como a continuidade de deslocamentos.

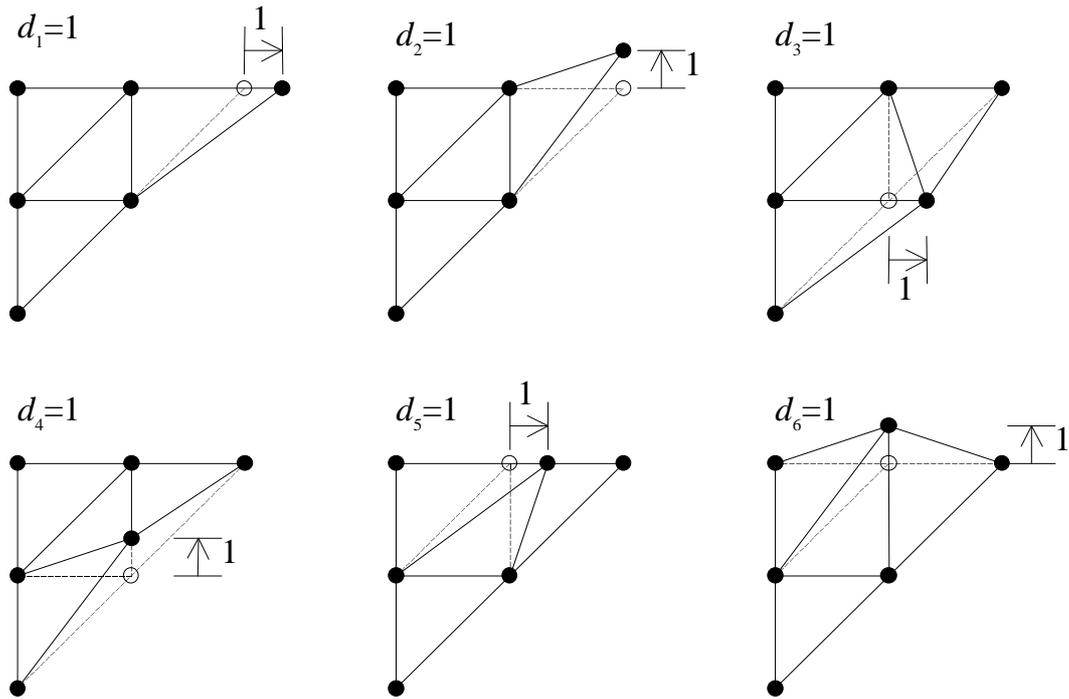


Figura 4.3

Uma segunda alternativa para refinar a aproximação consiste em utilizar um polinómio de grau mais elevado para aproximar cada componente do campo de deslocamentos. Este método de refinamento é designado por refinamento  $p$ .

Na figura 4.4, representa-se uma discretização do domínio utilizando 1 elemento finito de 6 nós, o que corresponde a fazer uma interpolação de 2º grau para os deslocamentos, tal como se pode observar nas deformadas correspondentes a cada um dos 6 deslocamentos nodais, representadas na figura 4.5. Pode igualmente verificar-se que as condições de fronteira cinemáticas estão asseguradas em todas as deformadas.

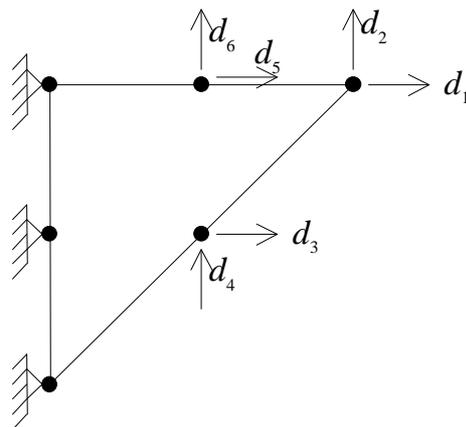


Figura 4.4

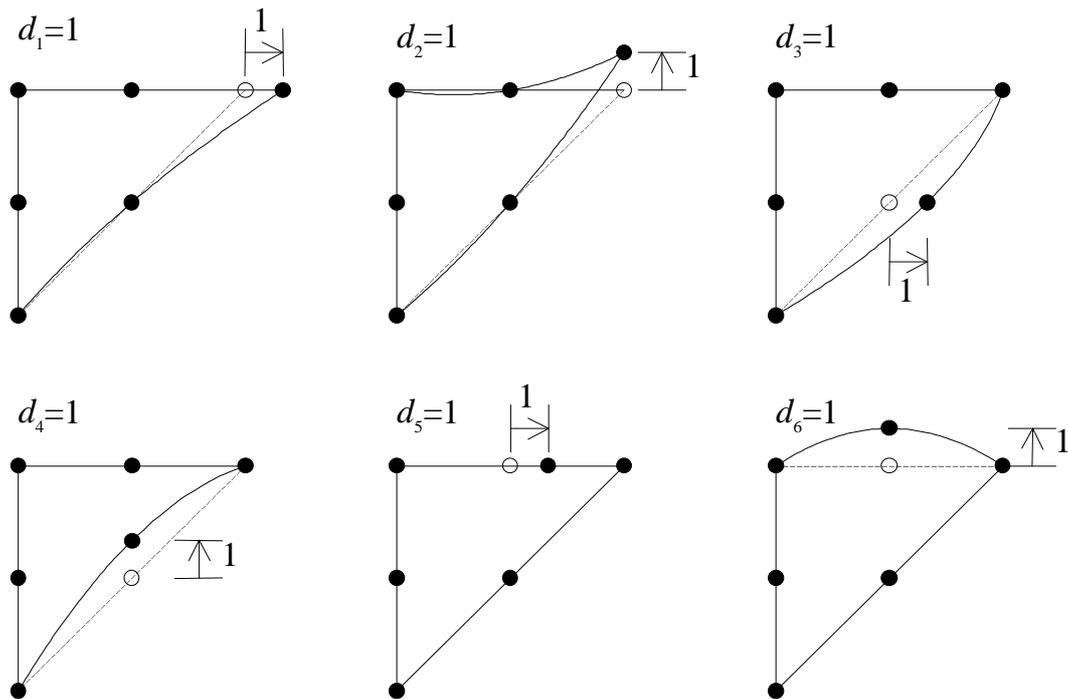


Figura 4.5

Naturalmente, com 6 graus de liberdade apenas, a solução seria ainda excessivamente grosseira, quer num caso quer no outro.

Na figura 4.7, representa-se a solução obtida com a malha uniforme de 64 elementos finitos representada na figura 4.6, à qual correspondem 72 graus de liberdade. Para essa solução, o erro relativo médio no campo de tensões é ainda de 31%. Contudo, pode observar-se que a aproximação do campo de deslocamentos é já relativamente boa.

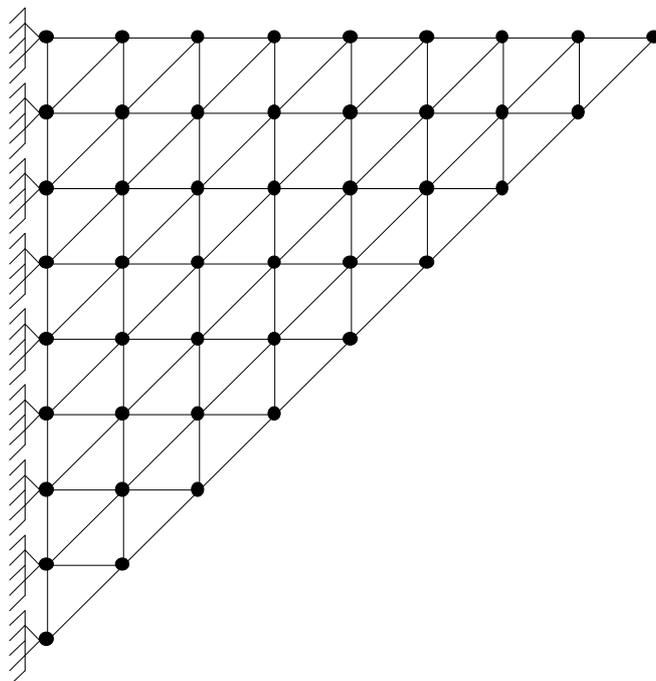


Figura 4.6

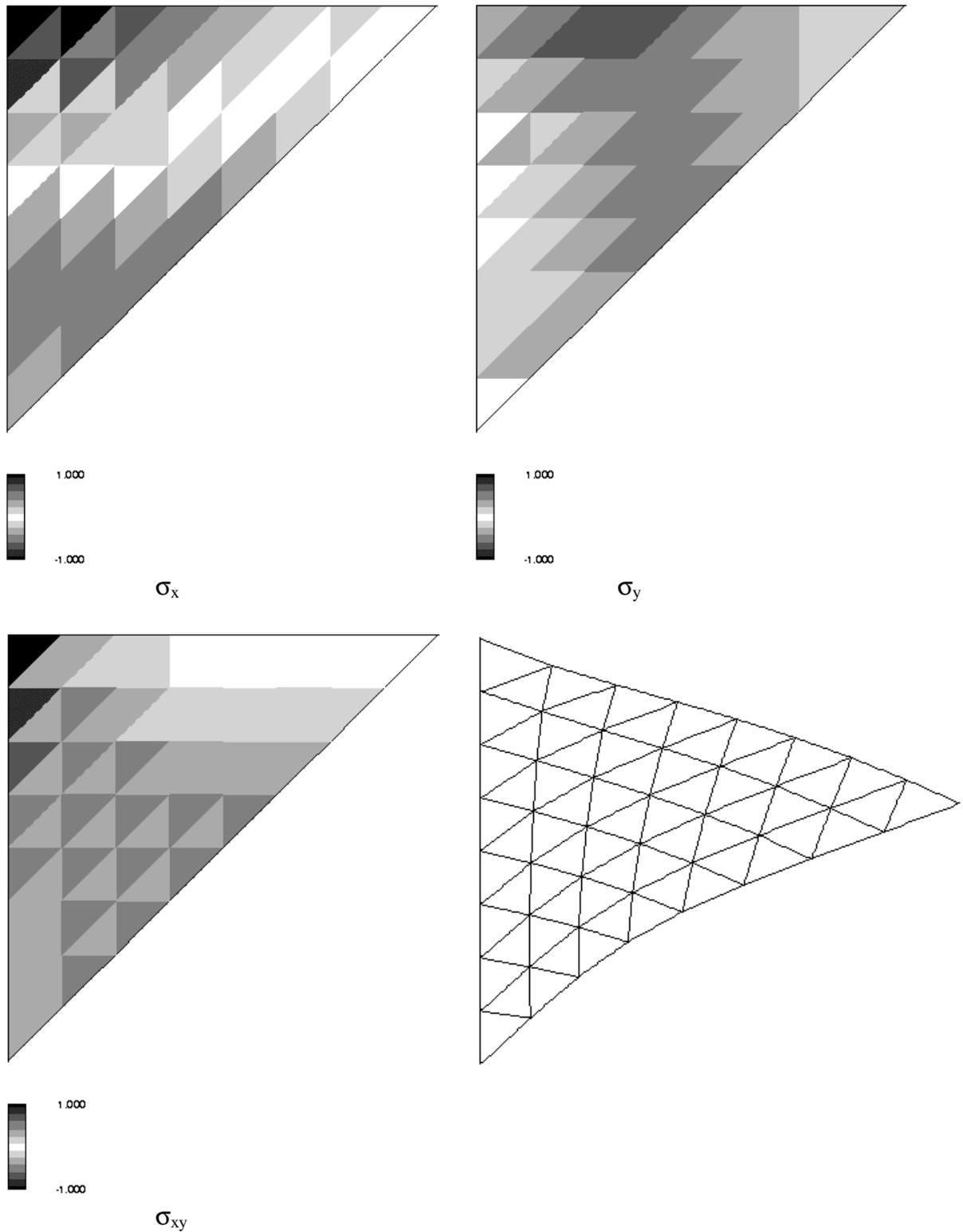


Figura 4.7

Na figura 4.9, representa-se a solução obtida com 1 elemento finito triangular de 36 nós. Neste elemento finito, os deslocamentos são aproximados por polinómios de 7º grau. Dadas as condições de apoio representadas na figura 4.8, o número de graus de liberdade é 56. Para a referida solução, o erro relativo médio no campo de tensões é de 9.7%. A aproximação do campo de deslocamentos é já muito boa.

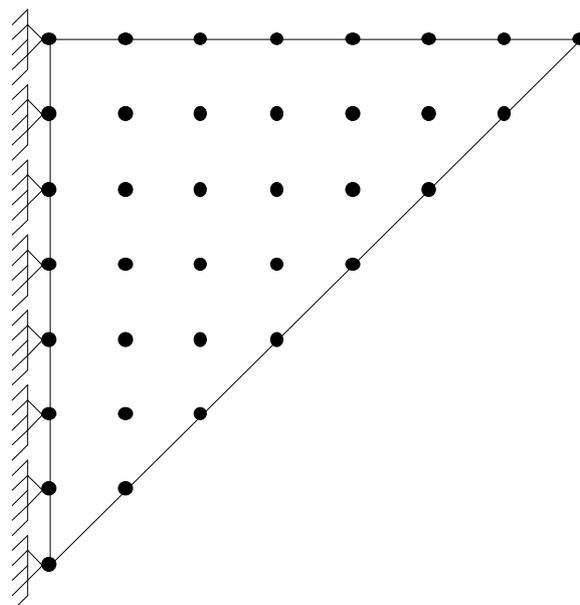


Figura 4.8

Portanto, o refinamento  $p$  permitiu obter, com um menor número de graus de liberdade, melhores resultados do que o refinamento  $h$  uniforme.

Poderia pensar-se que a divisão do domínio em subdomínios seria desnecessária.

No entanto, o refinamento  $h$  não tem obrigatoriamente de ser uniforme. Se forem colocados mais elementos onde as variações da solução são mais difíceis de reproduzir com as funções de interpolação utilizadas, como na malha representada na figura 4.10, é possível obter melhores resultados do que no refinamento  $p$ . Este tipo de refinamento é designado por refinamento  $h$ -adaptativo.

Além disso, a geometria dos domínios e das fronteiras cinemáticas dos problemas com interesse prático raramente são tão simples como as do exemplo que tem sido considerado até aqui. Isto torna inevitável a divisão do domínio em elementos finitos. Uma das vantagens do Método dos Elementos Finitos sobre vários outros métodos aproximados, tais como o Método das Diferenças Finitas, é precisamente a facilidade de aplicação a domínios e condições de fronteira complicados.

Ao utilizar um programa de cálculo automático, é conveniente escolher elementos finitos do grau mais elevado que esteja disponível. Os programas de cálculo automático comerciais para a análise de estruturas permitem uma escolha muito limitada de tipos de elementos finitos e só dispõem de elementos finitos de grau relativamente baixo, pelo que a subdivisão do domínio é quase sempre inevitável.

Numa introdução ao Método dos Elementos Finitos, é preferível considerar elementos do grau mais baixo possível, por forma a simplificar o seu estudo.

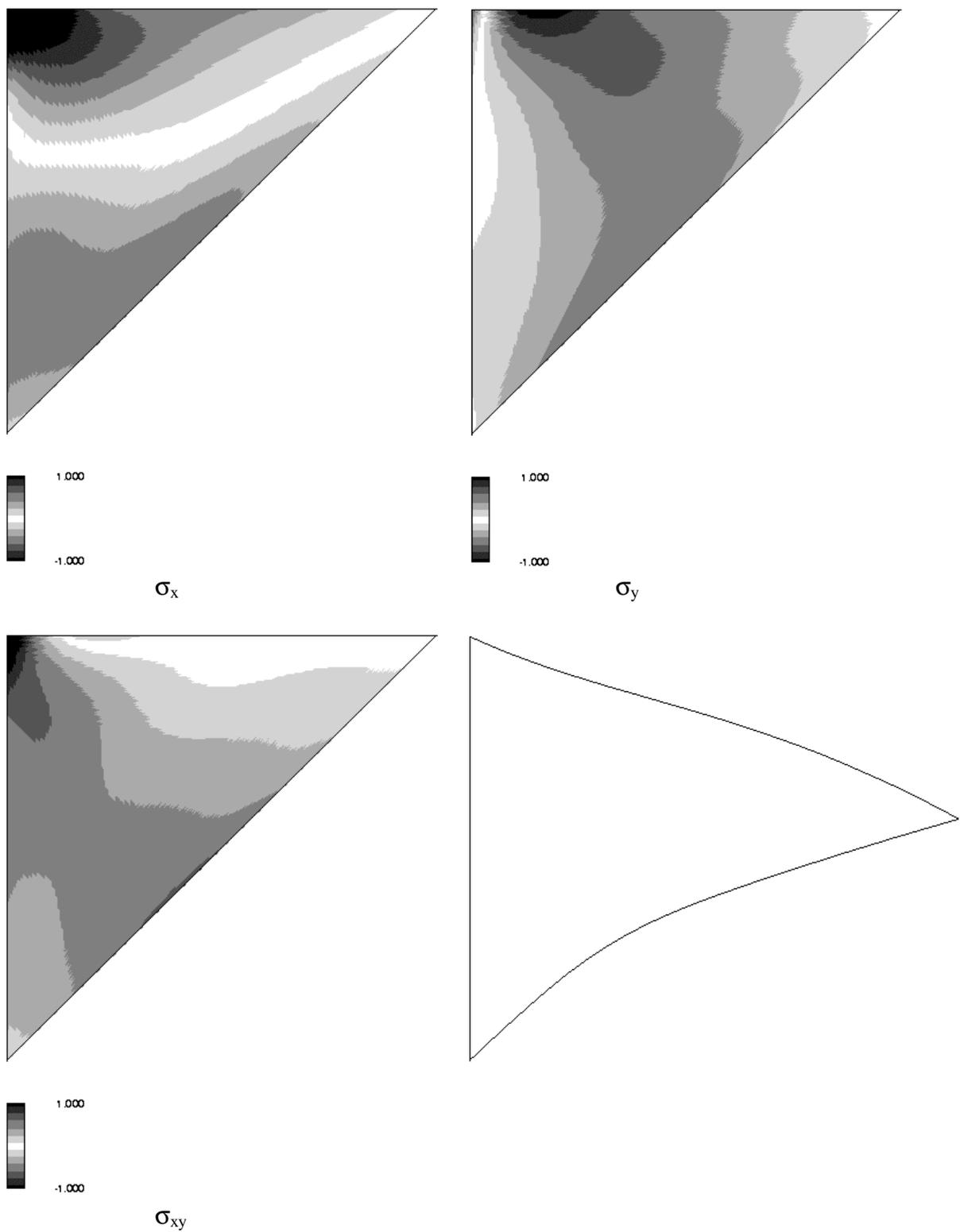


Figura 4.9

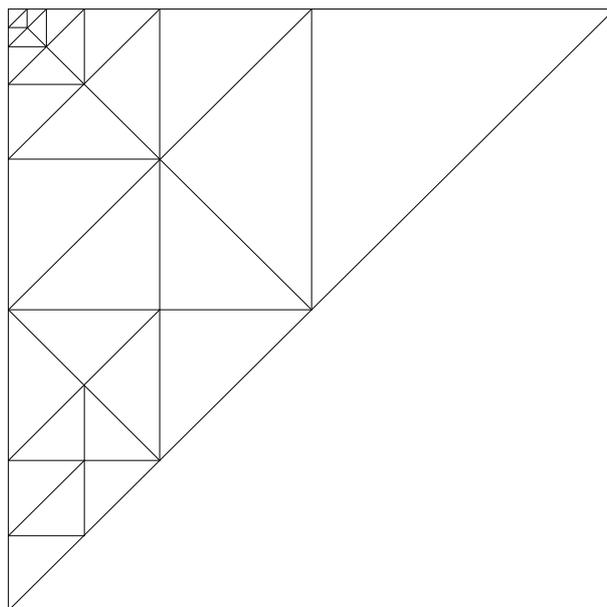


Figura 4.10

As soluções aproximadas representadas nas figuras 3.5, 4.7 e 4.9 permitem exemplificar algumas características comuns às soluções aproximadas obtidas quando a discretização efectuada assegura a compatibilidade, mas não permite obter a solução exacta.

O campo de tensões nunca satisfaz todas as condições de equilíbrio no interior e na fronteira dos elementos. Além disso, como as tensões são obtidas a partir das derivadas dos deslocamentos, a aproximação obtida para as tensões é sempre pior do que a conseguida para os deslocamentos.

A malha de elementos finitos é sempre mais rígida do que a estrutura real. Portanto, quando a acção é constituída apenas por forças, o trabalho que estas realizam com os deslocamentos aproximados é sempre inferior ao real, como se pode observar na tabela 4.1.

Solução	Trabalho das forças exteriores (kNm/m)
Figura 3.5 - 1 elemento de 3 nós	$0.133/E$
Figura 4.7 - 64 elementos de 3-nós	$0.334/E$
Figura 4.9 - 1 elemento de 36 nós	$0.364/E$
Figura 4.1 - Solução "exacta"	$0.368/E$

Tabela 4.1

Se uma nova discretização permitir reproduzir as deformadas da discretização anterior, a nova solução será melhor do que a anterior. Em relação à malha de 1 elemento de 3 nós, qualquer um dos refinamentos indicados na tabela 4.1 fornece um valor mais elevado para o trabalho das forças exteriores.

Em geral, o erro da solução diminui quando se aumenta o número de elementos dum determinado tipo ou quando se aumenta o grau dos elementos, mesmo sem respeitar estritamente a condição anterior.

No caso particular em que a discretização, além de garantir a compatibilidade, permite reproduzir a solução exacta para o campo de deslocamentos, a solução da equação do Método dos Elementos Finitos corresponde à solução exacta do problema.

Se a solução exacta é não polinomial, a solução de elementos finitos converge para a solução exacta, quando, em todo o domínio, o refinamento tende para infinito.

## 4.2. Interpolação dos Deslocamentos

Considere-se novamente a discretização representada na figura 4.2(b). Na figura 4.11, indica-se, para essa discretização, uma numeração dos elementos finitos.

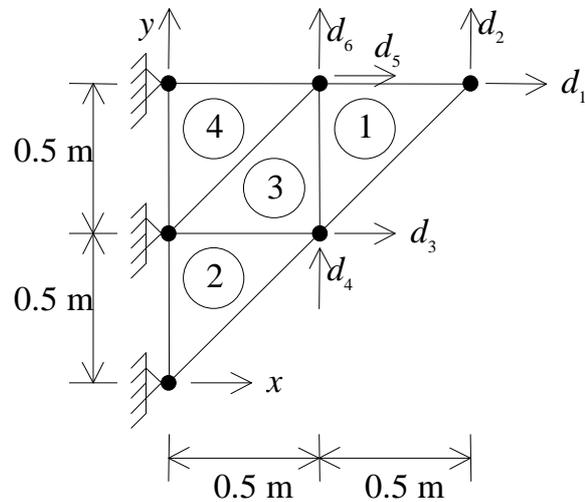


Figura 4.11

As deformadas correspondentes a cada um dos 6 deslocamentos nodais foram já representadas na figura 4.3. Em cada elemento, os deslocamentos são obtidos por interpolação linear, a partir dos deslocamentos dos nós desse elemento. Deste modo, a expressão analítica do campo de deslocamentos dentro de cada elemento depende exclusivamente dos nós desse elemento.

Sendo assim, considere-se o elemento 1, desligado dos restantes elementos da malha, tal como representado na figura 4.12. Na mesma figura, indicam-se uma numeração local dos nós e uma numeração local dos deslocamentos nodais deste elemento.

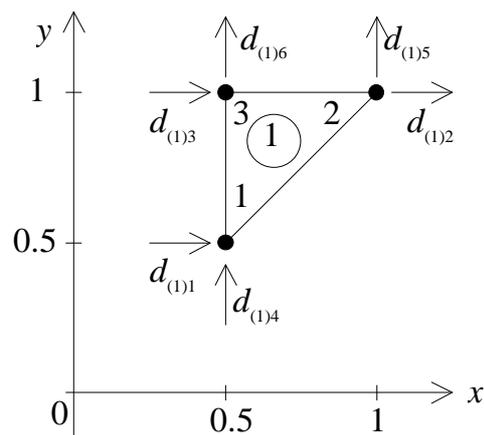


Figura 4.12

Na figura 4.13, representam-se as deformadas correspondentes a cada um dos 3 primeiros deslocamentos nodais do elemento 1.

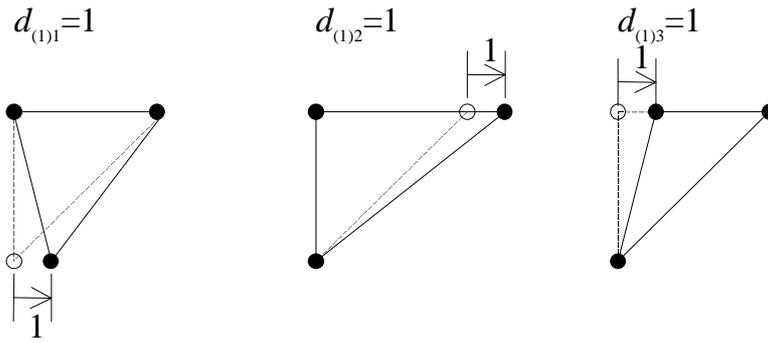


Figura 4.13

Então, de acordo com a figura 4.13, podemos escrever que, no elemento 1,

$$u_x(x, y) = \psi_{(1)1}(x, y)d_{(1)1} + \psi_{(1)2}(x, y)d_{(1)2} + \psi_{(1)3}(x, y)d_{(1)3},$$

sendo  $\psi_{(1)i}(x, y)$  uma função linear que toma o valor 1 no nó  $i$  do elemento 1 e o valor 0 nos restantes nós. Por esta razão,  $\psi_{(1)i}$  é designada por função de interpolação associada ao nó  $i$  do elemento 1.

A função de interpolação associada ao nó 1 pode ser escrita na forma

$$\psi_{(1)1} = a + b x + c y.$$

Por sua vez, os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  podem ser calculados resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} \psi_{(1)1}(x_1, y_1) = 1 \\ \psi_{(1)1}(x_2, y_2) = 0 \\ \psi_{(1)1}(x_3, y_3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Desde que os 3 nós não sejam colineares, o sistema tem sempre solução. A expressão geral dessa solução é

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ y_2 - y_3 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix}.$$

É de notar que, se os nós estiverem numerados no sentido anti-horário, como sucede na figura 4.12,  $x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$  é igual ao dobro da área do elemento.

Para as coordenadas indicadas na figura 4.12,  $\psi_{(1)1}(x, y) = 2 - 2y$ .

Podem ser escritos sistemas de equações análogos para as funções de interpolação associadas aos nós 2 e 3 do elemento 1. As soluções desses sistemas permitem concluir que a expressão geral das 3 funções de interpolação é

$$\psi_{(e)i} = \frac{1}{2A_{(e)}}(a_i + b_i x + c_i y), \text{ com } a_i = x_j y_k - x_k y_j, b_i = y_j - y_k, c_i = x_k - x_j \text{ e:}$$

se  $i = 1, j = 2$  e  $k = 3$ ;

se  $i = 2, j = 3$  e  $k = 1$ ;

se  $i = 3, j = 1$  e  $k = 2$ .

Para as coordenadas indicadas na figura 4.12,  $\psi_{(1)2}(x,y) = -1 + 2x$  e  $\psi_{(1)3}(x,y) = -2x + 2y$ .

A expressão de  $u_y$  pode ser obtida utilizando exactamente as mesmas funções de interpolação. Desta forma, designando por  $\Omega_{(1)}$  o subdomínio correspondente ao elemento 1, podemos escrever que

$$\mathbf{u}|_{x \in \Omega_{(1)}} = \boldsymbol{\psi}_{(1)} \mathbf{d}_{(1)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_x(x,y) \\ u_y(x,y) \end{bmatrix}_{(x,y) \in \Omega_{(1)}} = \begin{bmatrix} \psi_{(1)1} & \psi_{(1)2} & \psi_{(1)3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_{(1)1} & \psi_{(1)2} & \psi_{(1)3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{(1)1} \\ d_{(1)2} \\ d_{(1)3} \\ d_{(1)4} \\ d_{(1)5} \\ d_{(1)6} \end{bmatrix}.$$

Substituindo as expressões das funções de interpolação obtidas anteriormente,

$$\begin{bmatrix} u_x(x,y) \\ u_y(x,y) \end{bmatrix}_{(x,y) \in \Omega_{(1)}} = \begin{bmatrix} 2-2y & -1+2x & -2x+2y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-2y & -1+2x & -2x+2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{(1)1} \\ d_{(1)2} \\ d_{(1)3} \\ d_{(1)4} \\ d_{(1)5} \\ d_{(1)6} \end{bmatrix}.$$

Para os restantes elementos, pode proceder-se de forma análoga.

Na figura 4.14(a) indicam-se uma numeração local dos nós e uma numeração local dos deslocamentos nodais dos elementos 2 e 4, as quais coincidem com as anteriormente utilizadas para o elemento 1. Na figura 4.14(b) indicam-se as correspondentes numerações para o elemento 3.

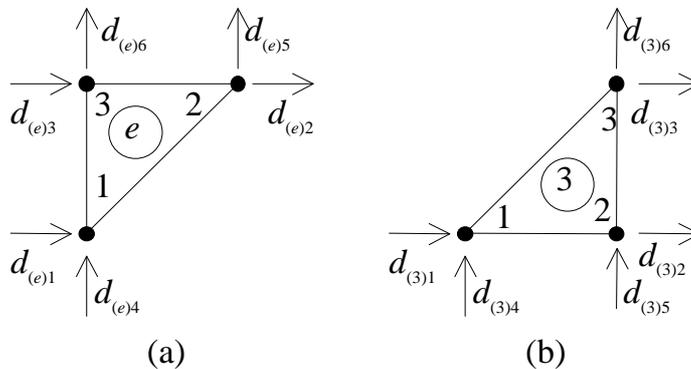


Figura 4.14

O leitor poderá verificar que, para o elemento 3, as funções de interpolação são  $\psi_{(3)1}(x,y) = 1 - 2x$ ,  $\psi_{(3)2}(x,y) = 1 + 2x - 2y$  e  $\psi_{(3)3}(x,y) = -1 + 2y$ .

$$\text{Portanto, } \Psi_{(3)} = \begin{bmatrix} 1-2x & 1+2x-2y & -1+2y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2x & 1+2x-2y & -1+2y \end{bmatrix}$$

e o campo de deslocamentos no elemento 3 é

$$\begin{bmatrix} u_x(x,y) \\ u_y(x,y) \end{bmatrix}_{(x,y) \in \Omega_{(3)}} = \begin{bmatrix} 1-2x & 1+2x-2y & -1+2y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2x & 1+2x-2y & -1+2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{(3)1} \\ d_{(3)2} \\ d_{(3)3} \\ d_{(3)4} \\ d_{(3)5} \\ d_{(3)6} \end{bmatrix}.$$

Substituindo os deslocamentos nodais elementares pelos correspondentes deslocamentos nodais globais, os deslocamentos no elemento 3 ficam

$$\begin{bmatrix} u_x(x,y) \\ u_y(x,y) \end{bmatrix}_{(x,y) \in \Omega_{(3)}} = \begin{bmatrix} 1+2x-2y & -1+2y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2x-2y & -1+2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_5 \\ d_4 \\ d_6 \end{bmatrix}.$$

Se procedermos de igual forma para o elemento 1, os deslocamentos nesse elemento são

$$\begin{bmatrix} u_x(x,y) \\ u_y(x,y) \end{bmatrix}_{(x,y) \in \Omega_{(1)}} = \begin{bmatrix} 2-2y & -1+2x & -2x+2y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-2y & -1+2x & -2x+2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_1 \\ d_5 \\ d_4 \\ d_2 \\ d_6 \end{bmatrix}.$$

Estas duas últimas expressões são diferentes uma da outra. Contudo, nos pontos da interface entre os elementos 1 e 3, nos quais  $x = 0.5$ , ambas as expressões se reduzem a

$$\begin{bmatrix} u_x(y) \\ u_y(y) \end{bmatrix}_{x=0.5} = \begin{bmatrix} 2-2y & -1+2y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2y & -1+2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_5 \\ d_4 \\ d_6 \end{bmatrix}.$$

Dado que, ao longo da interface, ambas são funções lineares e assumem os mesmos valores em dois nós, era forçoso que assim sucedesse.

Este é um exemplo de como a compatibilidade de deslocamentos num lado entre dois elementos está assegurada quando, ao longo desse lado, todos os nós pertencentes a cada um dos elementos coincidem com nós do outro elemento.

### 4.3. Montagem do Sistema de Equações

Considerem-se novamente o problema e a discretização representados na figura 4.15.

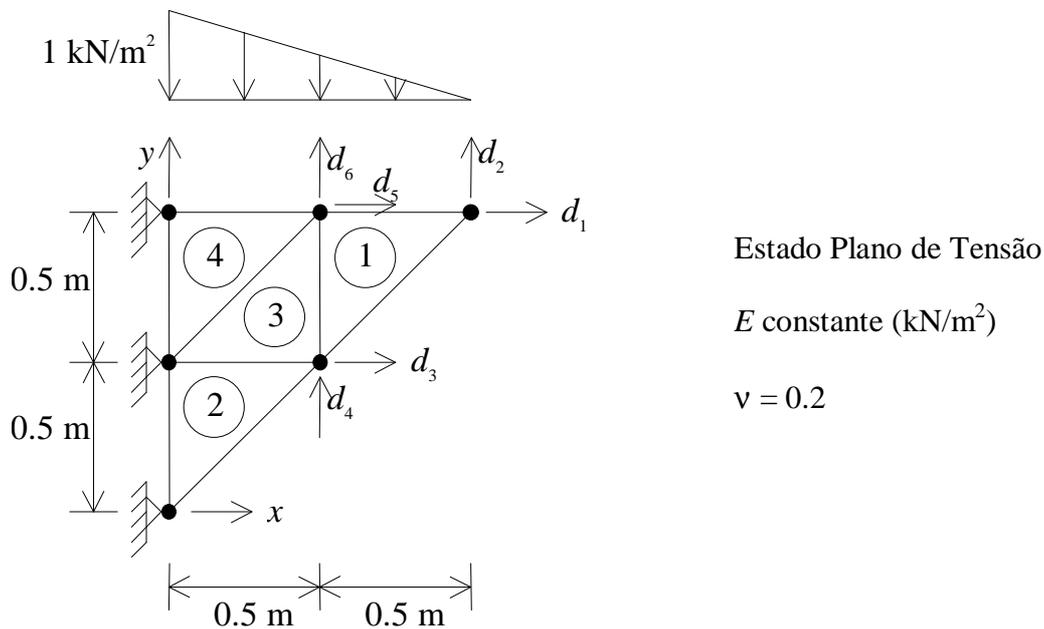


Figura 4.15

Para esta discretização, a equação do Método dos Elementos Finitos é um sistema de 6 equações a 6 incógnitas:

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix}.$$

A matriz  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez global e o vector  $\mathbf{F}$  é o vector de forças global. Tal como no capítulo 3, o termo  $K_{ij}$  é o trabalho realizado pelas tensões correspondentes a  $d_j = 1$  (e  $d_l = 0$  se  $l \neq j$ ) com as deformações correspondentes a  $d_i = 1$  (e  $d_k = 0$  se  $k \neq i$ ). Por sua vez,  $F_i$  é o trabalho realizado pelo carregamento com os deslocamentos correspondentes a  $d_i = 1$  (e  $d_k = 0$  se  $k \neq i$ ).

Os termos da matriz de rigidez podem também ser representados como forças nodais equivalentes. Por exemplo, quando  $d_3 = 1$  e  $d_l = 0$  se  $l \neq 3$ , os termos da terceira coluna da matriz de rigidez global correspondem às forças fictícias representadas na figura 4.16.

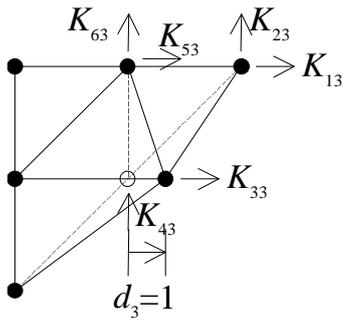


Figura 4.16

Cada uma dessas forças pode ser vista como uma soma de contribuições de cada um dos elementos finitos envolvidos na deformada. Estas contribuições são também forças fictícias, as quais podem ser interpretadas como termos de matrizes de rigidez elementares.

A numeração local dos nós e a numeração local dos deslocamentos nodais dos elementos finitos são, para os elementos 1, 2 e 4, as representadas na figura 4.17(a) e, para o elemento 3, as representadas na figura 4.17(b).

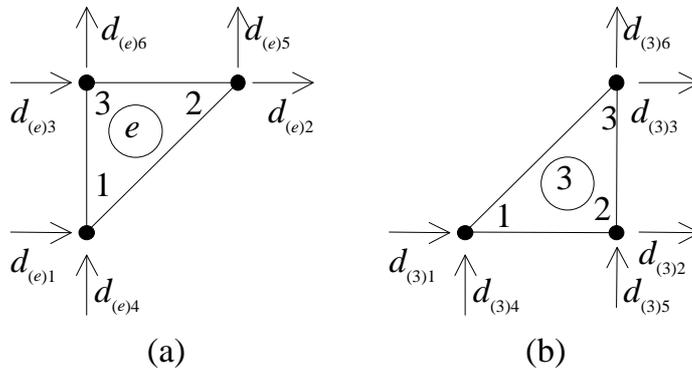


Figura 4.17

Deste modo, para cada elemento finito  $e$ , pode definir-se uma matriz de rigidez elemental  $K_{(e)}$ . Na figura 4.18, representam-se as forças fictícias correspondentes aos termos das matrizes de rigidez elementares associadas à deformada da figura 4.16.

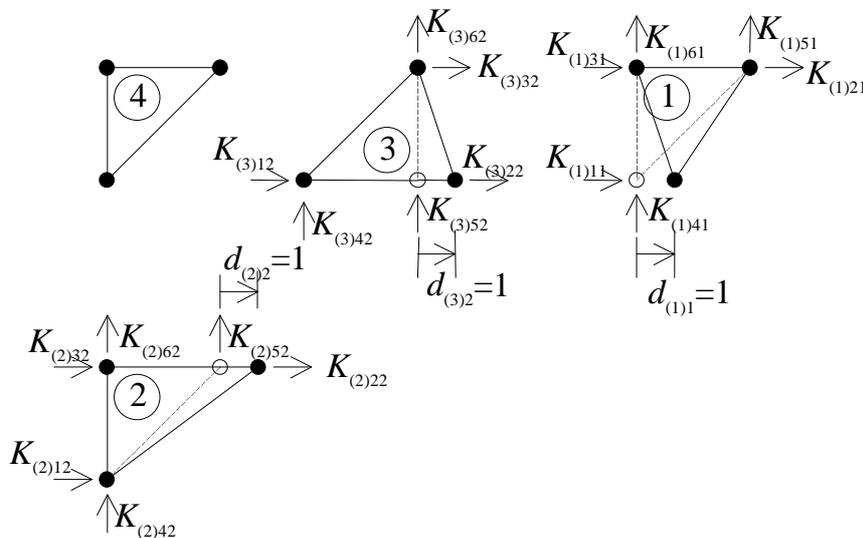


Figura 4.18

Na realidade, tal como para a matriz de rigidez global, o termo  $K_{(e)ij}$  é o trabalho realizado pelas tensões correspondentes a  $d_{(e)j} = 1$  com as deformações correspondentes a  $d_{(e)i} = 1$ .

$$\text{Por exemplo, } K_{(1)61} = \int_{0.5x}^1 \int \left( \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_{(1)3}(x,y) \end{bmatrix} \right)^T \mathbf{D} \left( \mathbf{A} \begin{bmatrix} \psi_{(1)1}(x,y) \\ 0 \end{bmatrix} \right) dy dx.$$

Na secção 4.2, obteve-se que  $\psi_{(1)1}(x,y) = 2 - 2y$  e  $\psi_{(1)3}(x,y) = -2x + 2y$ . Portanto,  $K_{(1)61} = \frac{5}{24} E$ .

Fazendo os cálculos para toda a matriz de rigidez dum elemento em conjunto,

$$\mathbf{K}_{(e)} = \int_{\Omega_{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{(e)} d\Omega, \text{ com } \mathbf{B}_{(e)} = \mathbf{A} \boldsymbol{\psi}_{(e)}.$$

É de notar que, de acordo com o indicado no capítulo 2, a matriz  $\mathbf{D}$  é sempre simétrica, pelo que a matriz de rigidez elementar também é sempre simétrica.

Voltando ao raciocínio em termos de forças fictícias e comparando as figuras 4.16 e 4.18, pode verificar-se que:

$$K_{13} = K_{(1)21}$$

$$K_{23} = K_{(1)51}$$

$$K_{33} = K_{(1)11} + K_{(2)22} + K_{(3)22}$$

$$K_{43} = K_{(1)41} + K_{(2)52} + K_{(3)52}$$

$$K_{53} = K_{(1)31} + K_{(3)32}$$

$$K_{63} = K_{(1)61} + K_{(3)62}.$$

Na verdade, para montar a matriz de rigidez global a partir das matrizes de rigidez elementares, não é necessário desenhar deformadas como as das figuras 4.16 e 4.18. A única informação necessária é a relação entre os deslocamentos nodais globais e os deslocamentos nodais elementares, para a qual são suficientes as figuras 4.15 e 4.17. Esta relação pode ser escrita na forma apresentada na tabela 4.2. Esta tabela é normalmente designada por tabela de incidências.

$e$	$d_{(e)1}$	$d_{(e)2}$	$d_{(e)3}$	$d_{(e)4}$	$d_{(e)5}$	$d_{(e)6}$
1	$d_3$	$d_1$	$d_5$	$d_4$	$d_2$	$d_6$
2	-	$d_3$	-	-	$d_4$	-
3	-	$d_3$	$d_5$	-	$d_4$	$d_6$
4	-	$d_5$	-	-	$d_6$	-

Tabela 4.2

Cada linha da tabela indica, para um elemento finito, qual o deslocamento global correspondente a cada deslocamento desse elemento. O elemento finito  $e$  contribui para  $K_{ij}$  se tanto  $d_i$  como  $d_j$  constam da linha  $e$ . Se  $d_i$  corresponde a  $d_{(e)k}$  e  $d_j$  a  $d_{(e)l}$ , então a contribuição do elemento  $e$  para  $K_{ij}$  será igual a  $K_{(e)kl}$ .

Procedendo desta forma, pode verificar-se que, neste exemplo, as restantes colunas da matriz de rigidez global são:

$$K_{11} = K_{(1)22}$$

$$K_{21} = K_{(1)52}$$

$$K_{31} = K_{(1)12}$$

$$K_{41} = K_{(1)42}$$

$$K_{51} = K_{(1)32}$$

$$K_{61} = K_{(1)62}$$

$$K_{12} = K_{(1)25}$$

$$K_{22} = K_{(1)55}$$

$$K_{32} = K_{(1)15}$$

$$K_{42} = K_{(1)45}$$

$$K_{52} = K_{(1)35}$$

$$K_{62} = K_{(1)65}$$

$$K_{14} = K_{(1)24}$$

$$K_{24} = K_{(1)54}$$

$$K_{34} = K_{(1)14} + K_{(2)25} + K_{(3)25}$$

$$K_{44} = K_{(1)44} + K_{(2)55} + K_{(3)55}$$

$$K_{54} = K_{(1)34} + K_{(3)35}$$

$$K_{64} = K_{(1)64} + K_{(3)65}$$

$$K_{15} = K_{(1)23}$$

$$K_{25} = K_{(1)53}$$

$$K_{35} = K_{(1)13} + K_{(3)23}$$

$$K_{45} = K_{(1)43} + K_{(3)53}$$

$$K_{55} = K_{(1)33} + K_{(3)33} + K_{(4)22}$$

$$K_{65} = K_{(1)63} + K_{(3)63} + K_{(4)52}$$

$$K_{16} = K_{(1)26}$$

$$K_{26} = K_{(1)56}$$

$$K_{36} = K_{(1)16} + K_{(3)26}$$

$$K_{46} = K_{(1)46} + K_{(3)56}$$

$$K_{56} = K_{(1)36} + K_{(3)36} + K_{(4)25}$$

$$K_{66} = K_{(1)66} + K_{(3)66} + K_{(4)55}$$

Devido à simetria das matrizes de rigidez elementares, a matriz de rigidez global também é sempre simétrica, tal como se verifica neste exemplo.

A tabela de incidências pode igualmente ser utilizada para obter os termos do vector de forças global em função dos termos dos vectores de forças elementares.

Neste exemplo:

$$F_1 = F_{(1)2}$$

$$F_2 = F_{(1)5}$$

$$F_3 = F_{(1)1} + F_{(2)2} + F_{(3)2}$$

$$F_4 = F_{(1)4} + F_{(2)5} + F_{(3)5}$$

$$F_5 = F_{(1)3} + F_{(3)3} + F_{(4)2}$$

$$F_6 = F_{(1)6} + F_{(3)6} + F_{(4)5}.$$

Tal como para o vector de forças global,  $F_{(e)i}$  é o trabalho realizado pelo carregamento com os deslocamentos correspondentes a  $d_{(e)i} = 1$ .

$$\text{Por exemplo, } F_{(1)6} = \int_{0.5}^1 \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi_{(1)3}(x,1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ x-1 \end{bmatrix} dx = -\frac{1}{12} \text{ kN/m}.$$

Fazendo os cálculos para todo o vector de forças dum elemento em conjunto,

$$F_{(e)} = \int_{\Omega_{(e)}} \Psi_{(e)}^T \bar{f} d\Omega + \int_{\Gamma_{(e)} \cap \Gamma_t} \Psi_{(e)}^T \bar{t} d\Gamma.$$

#### 4.4. Cálculo da solução

Considerem-se novamente o problema e a discretização representados na figura 4.19.

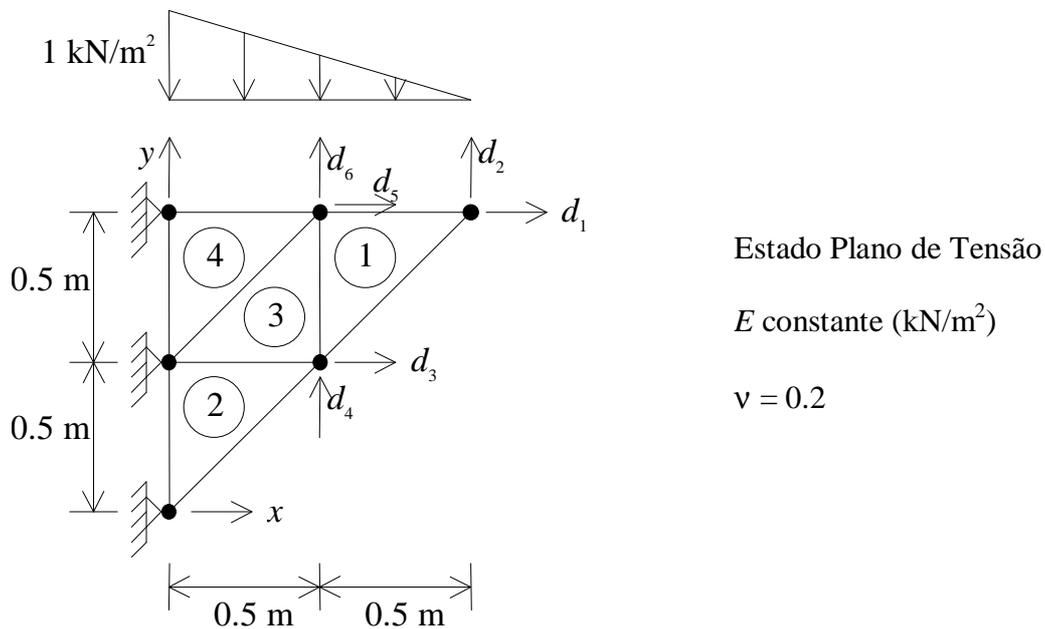


Figura 4.19

Montando o sistema de equações do Método dos Elementos Finitos, pelo processo descrito na secção 4.3, e resolvendo esse sistema, obtém-se o vector de deslocamentos nodais globais:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.208512 \\ -1.10312 \\ -0.0751207 \\ -0.502940 \\ 0.179377 \\ -0.648618 \end{bmatrix} \frac{1}{E} \text{ (m)}.$$

Conhecidos os valores dos deslocamentos nodais de um elemento, o campo de deslocamentos nesse elemento pode ser calculado de forma independente dos deslocamentos nos restantes elementos.

Tome-se como exemplo o elemento 3, para o qual a numeração local dos nós e a numeração local dos deslocamentos nodais estão representadas na figura 4.20.

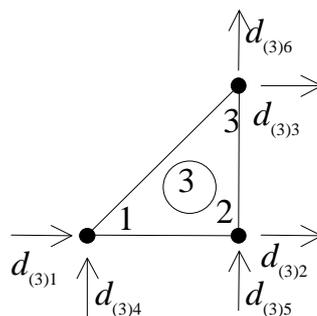


Figura 4.20

De acordo com esta numeração, o vector dos deslocamentos nodais do elemento é

$$\mathbf{d}_{(3)} = \begin{bmatrix} d_{(3)1} \\ d_{(3)2} \\ d_{(3)3} \\ d_{(3)4} \\ d_{(3)5} \\ d_{(3)6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_3 \\ d_5 \\ 0 \\ d_4 \\ d_6 \end{bmatrix}.$$

Por conseguinte, a expressão do campo de deslocamentos no elemento 3 será

$$\begin{bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{bmatrix}_{(x,y) \in \Omega_{(3)}} = \begin{bmatrix} \psi_{(3)2} & \psi_{(3)3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{(3)2} & \psi_{(3)3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_5 \\ d_4 \\ d_6 \end{bmatrix}.$$

Na secção 4.2, obteve-se que  $\psi_{(3)2}(x,y) = 1 + 2x - 2y$  e  $\psi_{(3)3}(x,y) = -1 + 2y$ . Portanto, os deslocamentos no elemento 3 são

$$\mathbf{u}|_{x \in \Omega_{(3)}} = \begin{bmatrix} -0.150241x + 0.508995y - 0.254497 \\ -1.00588x - 0.291356y + 0.145678 \end{bmatrix} \frac{1}{E} \quad (\text{m}).$$

Por sua vez, as deformações são  $\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} = \begin{bmatrix} -0.150241 \\ -0.291356 \\ -0.496885 \end{bmatrix} \frac{1}{E}$

e as tensões são  $\boldsymbol{\sigma}_{(3)} = \begin{bmatrix} -0.217200 \\ -0.334796 \\ -0.207035 \end{bmatrix} \text{kN/m}^2$ .

Procedendo de forma análoga para o elemento 1, obtém-se que, nesse elemento,

$$\boldsymbol{\sigma}_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.291356 \\ -0.166667 \end{bmatrix} \text{kN/m}^2.$$

Portanto, na interface entre os elementos 1 e 3, existe um desequilíbrio de tensões

$$\begin{bmatrix} \Delta t_x \\ \Delta t_y \end{bmatrix}_{(1)(3)} = \begin{bmatrix} t_x(0.5, y) \\ t_y(0.5, y) \end{bmatrix}_{(1)} + \begin{bmatrix} t_x(0.5, y) \\ t_y(0.5, y) \end{bmatrix}_{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.166667 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.217200 \\ -0.207035 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.217200 \\ -0.040368 \end{bmatrix} \text{kN/m}^2.$$

É de notar que, nesta interface, a descontinuidade de  $\sigma_y$  não implica qualquer violação do equilíbrio.

## 5. O Elemento Finito de 4 Nós

Quer na discretização de domínios com geometria complicada, quer na geração de malhas não estruturadas, tais como a do exemplo de refinamento  $h$ -adaptativo representado na figura 4.10, os elementos finitos de forma triangular são os mais simples de utilizar.

Todavia, num elevado número de casos com interesse prático, a discretização através de elementos finitos quadriláteros é a mais cómoda.

Por esta razão, este capítulo incide sobre o mais simples dos elementos finitos quadriláteros: o elemento finito de 4 nós.

Como exemplo, considere-se o elemento finito de 4 nós representado na figura 5.1. Na mesma figura, indicam-se uma numeração local dos nós e uma numeração local dos deslocamentos nodais deste elemento.

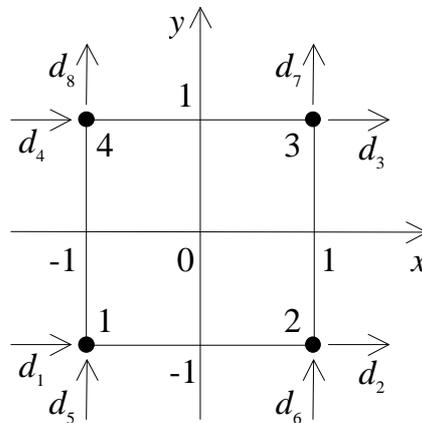


Figura 5.1

O deslocamento segundo  $x$ , por exemplo, será

$$u_x(x, y) = \psi_1(x, y)d_1 + \psi_2(x, y)d_2 + \psi_3(x, y)d_3 + \psi_4(x, y)d_4,$$

sendo  $\psi_i(x, y)$  a função de interpolação associada ao nó  $i$  do elemento.

Procedendo do mesmo modo que para o elemento de 3 nós, a função de interpolação associada ao nó 1 seria agora escrita na forma

$$\psi_1 = a + b x + c y + d x y.$$

Os coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  terão de ser tais que sejam simultaneamente satisfeitas as seguintes equações:

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, y_1) = 1 \\ \psi_1(x_2, y_2) = 0 \\ \psi_1(x_3, y_3) = 0 \\ \psi_1(x_4, y_4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para as coordenadas indicadas na figura 5.1,  $\psi_1(x,y) = 0.25 - 0.25x - 0.25y + 0.25xy$ . É de notar que, embora a função seja bilinear no interior do elemento, varia linearmente ao longo de cada um dos lados.

Imagine-se agora um elemento finito igual ao da figura 5.1 mas rodado 45°, tal como representado na figura 5.2.

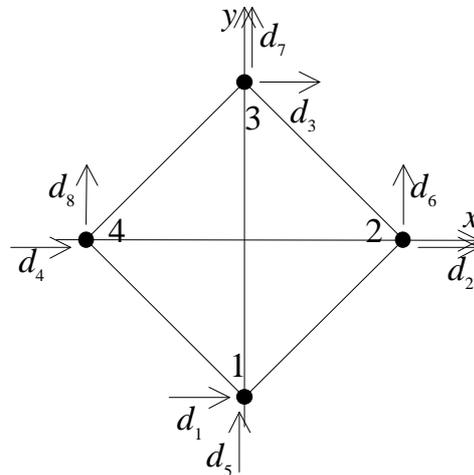


Figura 5.2

Neste caso, para a função de interpolação associada ao nó 1, o correspondente sistema de

$$\text{equações é } \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ao contrário do que sucedia quando os lados eram paralelos aos eixos coordenados, neste caso o sistema é impossível de resolver.

Para um elemento finito quadrilátero, o conjunto das funções de interpolação não é completo, isto é, não contém todos os monómios  $x^i y^j$  com  $i + j = p$ , ao contrário do que sucede para elementos triangulares. Não é possível pois, para elementos finitos quadriláteros, obter uma interpolação em função das coordenadas globais que seja invariante em relação a rotações.

Por este motivo, a interpolação tem de ser efectuada num sistema de coordenadas local.

Na figura 5.3, representa-se um quadrilátero com um sistema de coordenadas local. Estas coordenadas são designadas por coordenadas naturais do quadrilátero.

A interpolação do deslocamento segundo  $x$  passa a ser

$$u_x(\xi, \eta) = \psi_1(\xi, \eta)d_1 + \psi_2(\xi, \eta)d_2 + \psi_3(\xi, \eta)d_3 + \psi_4(\xi, \eta)d_4,$$

sendo  $\psi_i(\xi, \eta)$  a função de interpolação, nas coordenadas naturais, associada ao nó  $i$  do elemento.

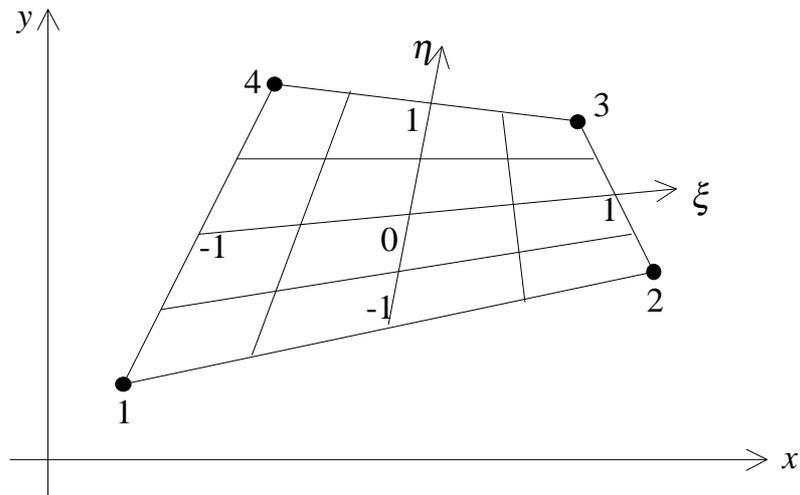


Figura 5.3

A qualquer elemento quadrilátero corresponde, nas coordenadas naturais  $\xi$  e  $\eta$ , o elemento mestre quadrado representado na figura 5.4. Portanto, nas coordenadas naturais, o elemento está sempre na situação do elemento representado na figura 5.1, qualquer que seja a posição dos seus nós nas coordenadas globais.

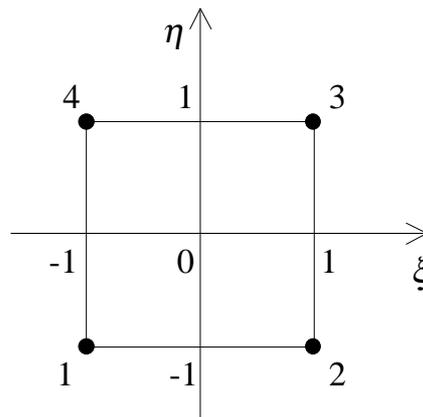


Figura 5.4

Para obter as funções de interpolação, nas coordenadas naturais, pode proceder-se como para o elemento representado na figura 5.1. Porém, existe um processo alternativo. Observou-se anteriormente que a função de interpolação bilinear tinha uma variação linear ao longo de cada lado. Portanto, a função de interpolação associada ao nó 1 toma valores nulos quando  $\xi = 1$  ou quando  $\eta = 1$ . Além disso, tem um valor unitário quando  $\xi = -1$  e  $\eta = -1$ , pelo que

$$\psi_1(\xi, \eta) = \frac{(\xi - 1)(\eta - 1)}{(-1 - 1)(-1 - 1)} = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta).$$

Procedendo da forma análoga para os restantes nós,

$$\psi_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta),$$

$$\psi_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta),$$

$$\psi_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta).$$

Além da expressão de  $u_x(\xi, \eta)$ , é igualmente necessário saber a que ponto  $(x, y)$  corresponde o ponto  $(\xi, \eta)$ . Ou seja, é necessário conhecer a expressão da transformação de coordenadas.

Uma forma prática de obter a expressão da transformação de coordenadas consiste em interpolar a forma do elemento a partir das coordenadas dos nós. Esta interpolação pode ser realizada utilizando as funções anteriormente utilizadas para interpolar os deslocamentos, obtendo-se:

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \psi_1(\xi, \eta)x_1 + \psi_2(\xi, \eta)x_2 + \psi_3(\xi, \eta)x_3 + \psi_4(\xi, \eta)x_4, \\ y(\xi, \eta) &= \psi_1(\xi, \eta)y_1 + \psi_2(\xi, \eta)y_2 + \psi_3(\xi, \eta)y_3 + \psi_4(\xi, \eta)y_4. \end{aligned}$$

Nestas expressões, a função  $\psi_i(\xi, \eta)$  é designada por função de forma associada ao nó  $i$  do elemento finito. Como é simultaneamente a função de interpolação dos deslocamentos, o elemento finito é designado por isoparamétrico.

Com excepção de algumas formas particulares, não é possível obter a expressão analítica da transformação de coordenadas inversa, ou seja as expressões de  $\xi(x, y)$  e de  $\eta(x, y)$ . Portanto, apesar de ser possível, para qualquer ponto  $(\xi, \eta)$ , calcular  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$  e  $u_x(\xi, \eta)$ , não é possível obter a expressão analítica de  $u_x(x, y)$ .

Uma das vantagens da transformação de coordenadas consiste na simplificação dos limites de integração no cálculo das matrizes de rigidez e vectores de forças elementares.

Qualquer que seja a posição dos nós dum elemento,

$$\int_{\Omega^{(e)}} f \, dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) |J(\xi, \eta)| \, d\xi d\eta,$$

onde  $|J(\xi, \eta)|$  é o jacobiano da transformação de coordenadas, isto é, o determinante da matriz Jacobiana da transformação de coordenadas, a qual por sua vez é definida como

$$J(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}.$$

Num lado correspondente a  $\xi = 1$ , por exemplo,

$$\int_{\Gamma^{(e)}} t \, d\Gamma = \int_{-1}^1 t(1, \eta) \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}(1, \eta)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}(1, \eta)\right)^2} \, d\eta.$$

O inconveniente da transformação de coordenadas consiste na complicação do cálculo de derivadas, o qual é necessário para obter as funções a integrar para calcular as matrizes de rigidez elementares. É necessário recorrer à regra de derivação da função composta:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Por sua vez, de acordo com a regra de derivação da função inversa,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1}(\xi, \eta).$$

Deste modo, é possível utilizar elementos finitos quadriláteros com lados não paralelos aos eixos coordenados. Naturalmente, os programas de cálculo automático para aplicação do Método dos Elementos Finitos recorrem sempre a transformações de coordenadas.

Contudo, no âmbito destes apontamentos, uma introdução ao Método dos Elementos Finitos, o caso particular do elemento finito rectangular de lados paralelos aos eixos do sistema de coordenadas global merece ser tratado de forma especial.

Neste caso particular, a interpolação nas coordenadas globais é possível e fornece exactamente o mesmo resultado que a interpolação nas coordenadas naturais. Sendo assim, é mais prático trabalhar directamente nas coordenadas globais.

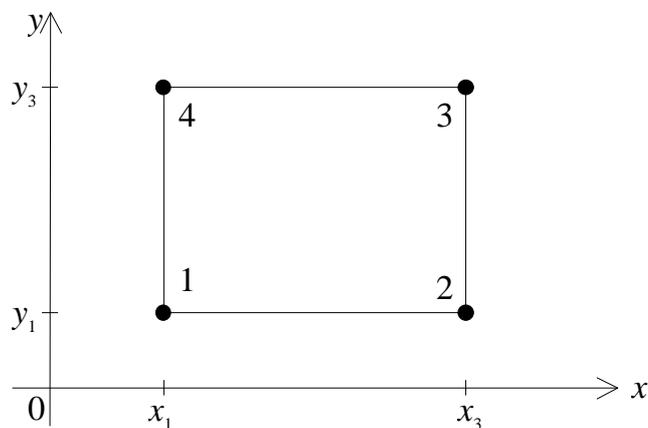


Figura 5.5

Para o elemento finito de 4 nós representado na figura 5.5, no qual  $x_1 = x_4$ ,  $x_2 = x_3$ ,  $y_1 = y_2$  e  $y_3 = y_4$ , as funções de interpolação podem ser calculadas de forma análoga à utilizada para o elemento mestre, obtendo-se:

$$\psi_1(x, y) = \frac{(x - x_3)(y - y_3)}{(x_1 - x_3)(y_1 - y_3)},$$

$$\psi_2(x, y) = \frac{(x - x_1)(y - y_3)}{(x_3 - x_1)(y_1 - y_3)},$$

$$\psi_3(x, y) = \frac{(x - x_1)(y - y_1)}{(x_3 - x_1)(y_3 - y_1)},$$

$$\psi_4(x, y) = \frac{(x - x_3)(y - y_1)}{(x_1 - x_3)(y_3 - y_1)}.$$

## 6. Apoios Inclinados, Assentamentos de Apoio e Variações de Temperatura

### 6.1. Apoios Inclinados

Considerem-se o problema discretizado através de 1 elemento finito e a numeração local dos deslocamentos representados na figura 6.1.

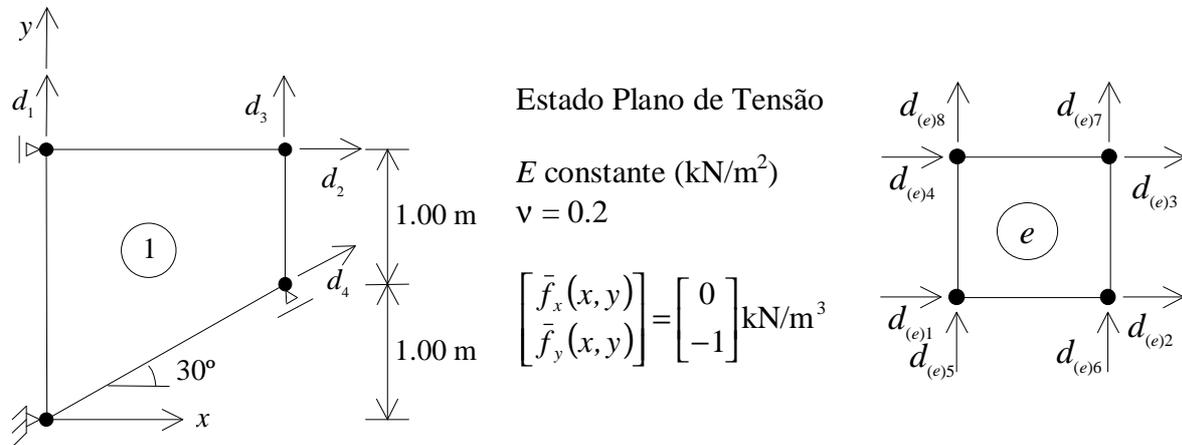


Figura 6.1

Na figura 6.2, representa-se a deformada correspondente a  $d_4 = 1$ , bem como as forças nodais equivalentes aos termos da correspondente coluna da matriz de rigidez.

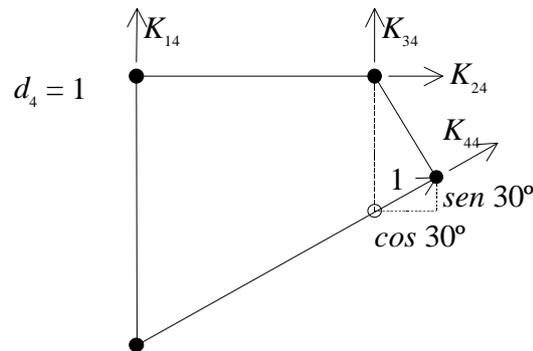


Figura 6.2

Pode observar-se que esta deformada é a soma das duas deformadas representadas na figura 6.3. Na primeira,  $d_{(1)2} = \cos 30^\circ$ ; na segunda,  $d_{(1)6} = \sin 30^\circ$ . Portanto, as correspondentes forças nodais equivalentes são as representadas também na figura 6.3.

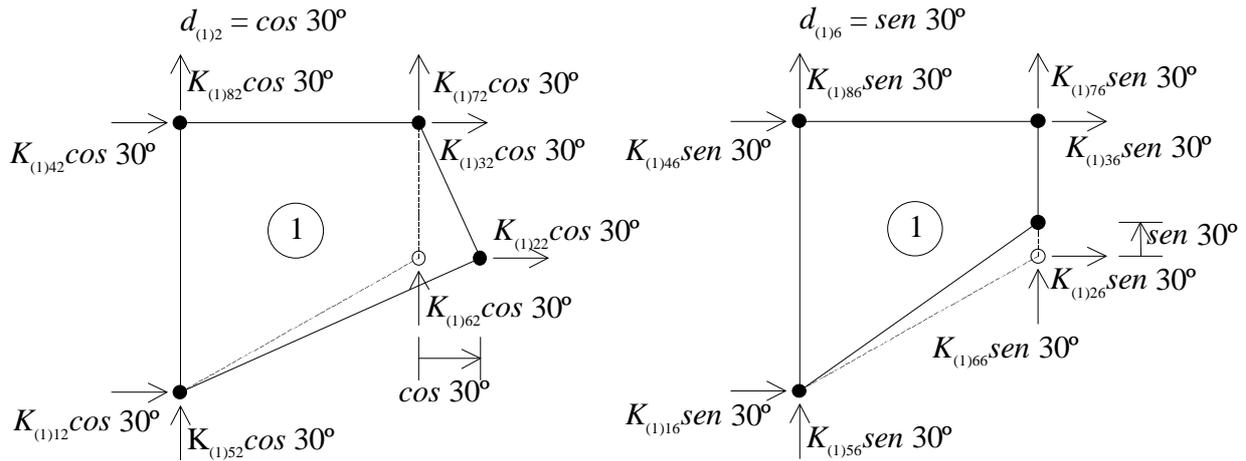


Figura 6.3

Comparando as figuras 6.3 e 6.2, conclui-se que:

$$K_{14} = K_{(1)82} \cos 30^\circ + K_{(1)86} \sin 30^\circ,$$

$$K_{24} = K_{(1)32} \cos 30^\circ + K_{(1)36} \sin 30^\circ,$$

$$K_{34} = K_{(1)72} \cos 30^\circ + K_{(1)76} \sin 30^\circ.$$

Para calcular  $K_{44}$ , é necessário projectar segundo  $d_4$  as quatro forças aplicadas no nó deslocado. Ou seja:

$$K_{44} = K_{(1)22} \cos 30^\circ \cos 30^\circ + K_{(1)62} \cos 30^\circ \sin 30^\circ + \\ + K_{(1)26} \sin 30^\circ \cos 30^\circ + K_{(1)66} \sin 30^\circ \sin 30^\circ.$$

Tal como no capítulo 4, a matriz de rigidez global pode ser montada, a partir da matriz de rigidez elementar, recorrendo apenas às incidências indicadas na tabela 6.1.

$e$	$d_{(e)1}$	$d_{(e)2}$	$d_{(e)3}$	$d_{(e)4}$	$d_{(e)5}$	$d_{(e)6}$	$d_{(e)7}$	$d_{(e)8}$
1	-	$d_4 \cos 30^\circ$	$d_2$	-	-	$d_4 \sin 30^\circ$	$d_3$	$d_1$

Tabela 6.1

Procedendo desta forma para as restantes colunas da matriz de rigidez global, obtém-se:

$$K_{11} = K_{(1)88},$$

$$K_{21} = K_{(1)38},$$

$$K_{31} = K_{(1)78},$$

$$K_{41} = K_{(1)28} \cos 30^\circ + K_{(1)68} \sin 30^\circ,$$

$$K_{12} = K_{(1)83},$$

$$K_{22} = K_{(1)33},$$

$$K_{32} = K_{(1)73},$$

$$K_{42} = K_{(1)23} \cos 30^\circ + K_{(1)63} \sin 30^\circ,$$

$$K_{13} = K_{(1)87},$$

$$K_{23} = K_{(1)37},$$

$$K_{33} = K_{(1)77},$$

$$K_{43} = K_{(1)27} \cos 30^\circ + K_{(1)67} \sin 30^\circ.$$

Como a matriz de rigidez elementar é simétrica, a matriz de rigidez global também o é.

Procedendo de forma análoga para o vector de forças global, obtém-se:

$$F_1 = F_{(1)8},$$

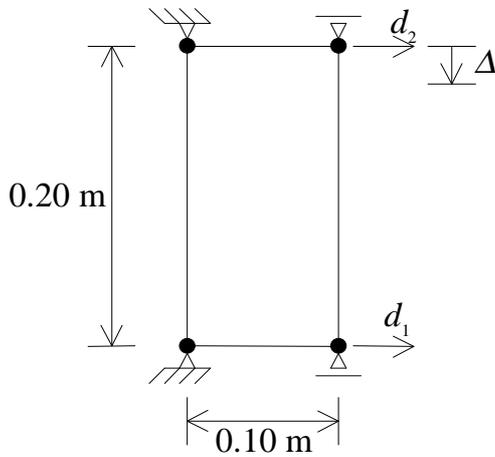
$$F_2 = F_{(1)3},$$

$$F_3 = F_{(1)7},$$

$$F_4 = K_{(1)2} \cos 30^\circ + K_{(1)6} \sin 30^\circ.$$

## 6.2. Assentamentos e Reacções de Apoio

Considere-se o problema discretizado através de 1 elemento finito representado na figura 6.4. Além da força de massa, existe um assentamento num apoio.



Estado Plano de Tensão

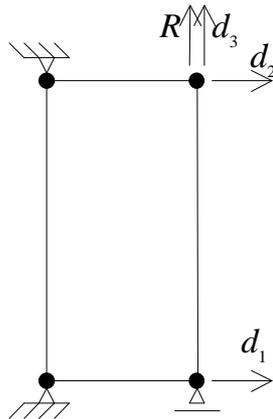
$E$  constante ( $\text{kN/m}^2$ )

$\nu = 0.2$

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_x(x, y) \\ \bar{f}_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{kN/m}^3$$

Figura 6.4

Substituindo o apoio pela correspondente reacção, obtém-se o problema representado na figura 6.5.



$$\begin{bmatrix} \bar{f}_x(x, y) \\ \bar{f}_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{kN/m}^3$$

Figura 6.5

Para este segundo problema, considerando que  $F_3$  corresponde apenas às cargas aplicadas no problema original, o sistema de equações do Método dos Elementos Finitos é

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + R \end{bmatrix}$$

Dado que o segundo problema pretende representar o problema original,  $d_3 = -\Delta$ . Desta forma, as duas primeiras equações ficam com apenas duas incógnitas:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 - K_{13}(-\Delta) \\ F_2 - K_{23}(-\Delta) \end{bmatrix}$$

Uma vez resolvido este sistema de equações, a terceira equação do sistema anterior pode ser utilizada para calcular a reacção no apoio:

$$R = K_{31}d_1 + K_{32}d_2 + K_{33}(-\Delta) - F_3.$$

### 6.3. Variações de Temperatura

Considere-se o problema discretizado através de 1 elemento finito e a numeração local dos deslocamentos representados na figura 6.6.

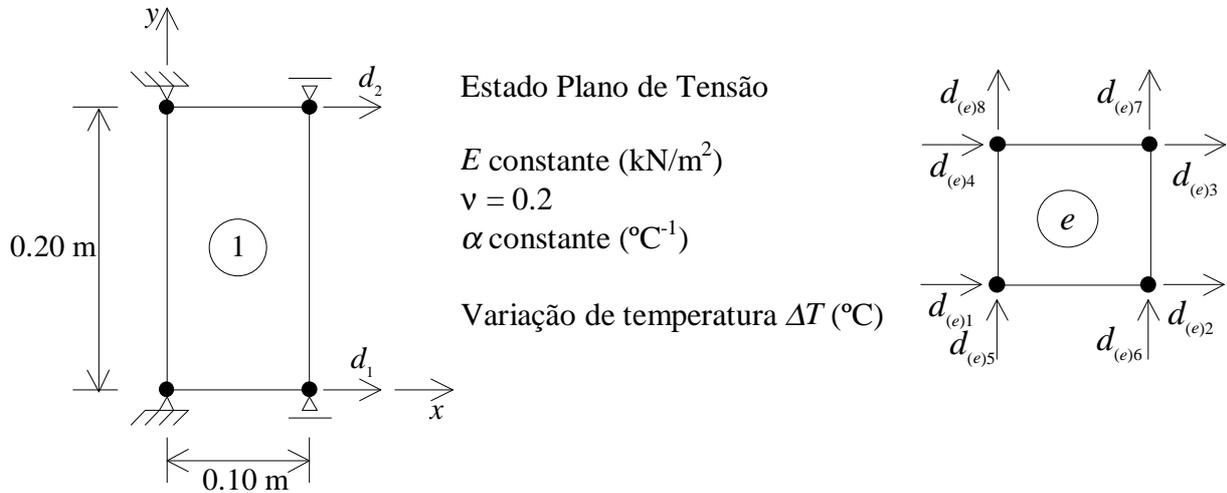


Figura 6.6

A equação do Método dos Elementos Finitos,  $\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F}$ , pode ser obtida, a partir da matriz de rigidez elementar,  $\mathbf{K}_{(1)}$ , e do vector de forças nodais elementar,  $\mathbf{F}_{(1)}$ , pelo processo descrito no capítulo 4.

A matriz de rigidez elementar é calculada da forma habitual:  $\mathbf{K}_{(1)} = \int_{\Omega_{(1)}} \mathbf{B}_{(1)}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{(1)} d\Omega$ .

O vector de forças nodais elementar tem de ser equivalente à variação de temperatura. Isto é, para o elemento desligado dos apoios (e do resto da malha, caso existisse), o vector de forças nodais elementar tem de ser equivalente a um campo de tensões que cause os mesmos deslocamentos que a variação de temperatura.

A variação de temperatura dá origem ao seguinte campo de deformações:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{bmatrix} \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se estas deformações tivessem sido provocadas por tensões, estas seriam iguais a  $\mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0$ . Por conseguinte, o vector de forças nodais elementar equivalente à variação de temperatura é dado por:

$$\mathbf{F}_{(1)} = \int_{\Omega_{(1)}} \mathbf{B}_{(1)}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega.$$

Uma vez resolvida a equação do Método dos Elementos Finitos e obtidos os deslocamentos nodais elementares, o campo de deslocamentos no elemento será dado por  $\mathbf{u}|_{x \in \Omega_{(1)}} = \boldsymbol{\psi}_{(1)} \mathbf{d}_{(1)}$  e o campo de deformações por  $\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)} = \mathbf{A} \boldsymbol{\psi}_{(1)} \mathbf{d}_{(1)} = \mathbf{B}_{(1)} \mathbf{d}_{(1)}$ .

Por sua vez, o campo de tensões será dado por

$$\boldsymbol{\sigma}_{(1)} = \mathbf{D} (\mathbf{B}_{(1)} \mathbf{d}_{(1)} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) = \mathbf{D}\mathbf{B}_{(1)} \mathbf{d}_{(1)} - \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0.$$

## 7. Elementos Finitos de Grau Superior

### 7.1. Elementos Finitos Triangulares

Considere-se o elemento finito triangular, de lados rectos e com 6 nós, representado na figura 7.1.

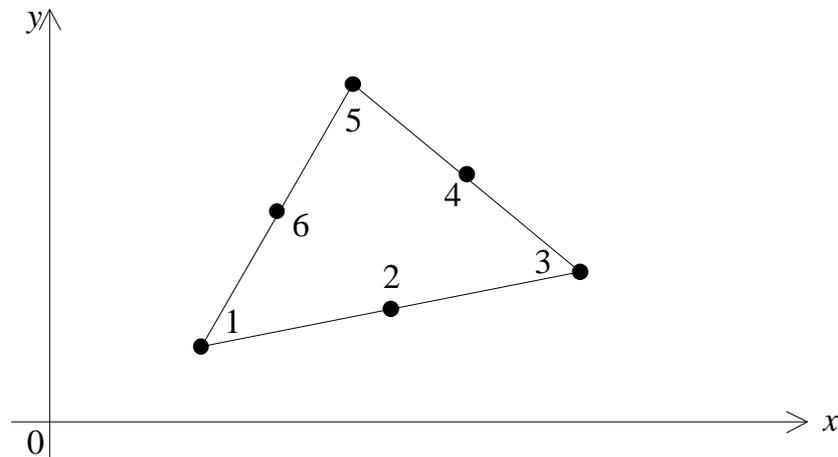


Figura 7.1

Procedendo do mesmo modo que para o elemento de 3 nós, a função de interpolação associada ao nó  $i$  seria agora um polinómio do tipo

$$\psi_i = a + b x + c y + d x^2 + e x y + f y^2.$$

Portanto, a função de interpolação é um polinómio completo de 2º grau nas coordenadas globais. Sendo o polinómio completo, é sempre possível determinar os valores dos coeficientes, desde que os vértices do triângulo não sejam colineares, e a interpolação é invariante em relação a rotações dos eixos.

Considere-se agora o lado cujos extremos são os nós 1 e 3. Sendo recto, as coordenadas dos pontos ao longo do lado são dadas por uma função linear

$$(x(s), y(s)) = (x_1 + (x_3 - x_1)s, y_1 + (y_3 - y_1)s) \quad s \in [0, 1].$$

Deste modo, ao longo desse lado, a função de interpolação será um polinómio de 2º grau em  $s$ :

$$\psi_i = k_0 + k_1 s + k_2 s^2.$$

Admita-se agora que o referido lado constitui a interface com um segundo elemento de 6 nós. Ao longo do lado, cada uma das funções de interpolação do segundo elemento é também um polinómio de 2º grau. Portanto, a continuidade de deslocamentos está assegurada desde que os nós 1, 2 e 3 coincidam com nós do segundo elemento.

Na família dos elementos finitos triangulares, o membro seguinte é o elemento de 10 nós representado na figura 7.2.

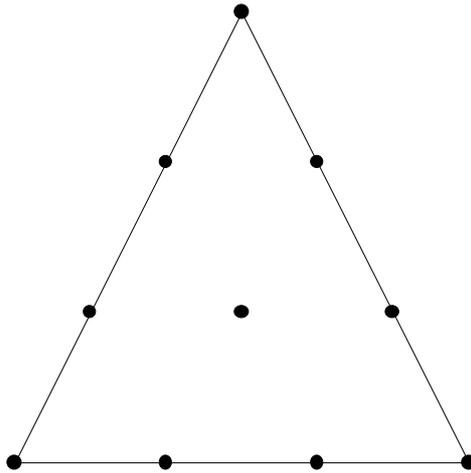


Figura 7.2

Os monómios utilizados na interpolação podem ser obtidos através do triângulo de Pascal representado na figura 7.3.

$$\begin{array}{cccc}
 & & & 1 \\
 & & x & y \\
 & x^2 & xy & y^2 \\
 x^3 & x^2y & xy^2 & y^3
 \end{array}$$

Figura 7.3

Ao utilizar elementos finitos de grau superior a 1, existindo mais do que 2 nós em cada lado, é lógico que se aproveite tal facto quando for necessário discretizar um domínio com fronteiras curvas, não alinhando esses nós em linha recta. Ao fazer isto, teremos elementos com lados curvos, tais como o elemento finito triangular de 6 nós representado na figura 7.4.

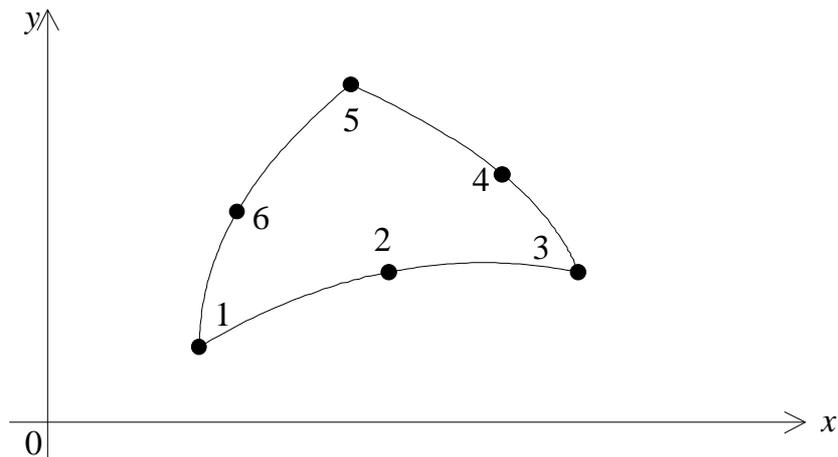


Figura 7.4

Neste caso, a função que define as coordenadas dos pontos ao longo de um lado,  $(x(s), y(s))$ , já não é uma função linear. Sendo assim, a utilização de funções de interpolação expressas nas coordenadas globais já não garante a continuidade de deslocamentos nos lados.

Por este motivo, em elementos finitos com lados curvos, a interpolação tem de ser efectuada num sistema de coordenadas local. Para elementos triangulares, as coordenadas naturais são as coordenadas de área, definidas a partir de um elemento mestre triangular de lados rectos.

As funções utilizadas para a interpolação dos deslocamentos num elemento de um determinado grau são igualmente utilizadas para definir a forma desse elemento. Ou seja, os elementos são isoparamétricos.

Como foi referido no capítulo 5, os programas de cálculo automático para aplicação do Método dos Elementos Finitos recorrem sempre a transformações de coordenadas, para todos os elementos.

## 7.2. Elementos Finitos Quadriláteros

São correntemente utilizadas duas famílias de elementos finitos quadriláteros, os elementos finitos de Lagrange e os elementos finitos Serendipianos.

Os três primeiros membros da família dos elementos finitos quadriláteros de Lagrange estão representados na figura 7.5.

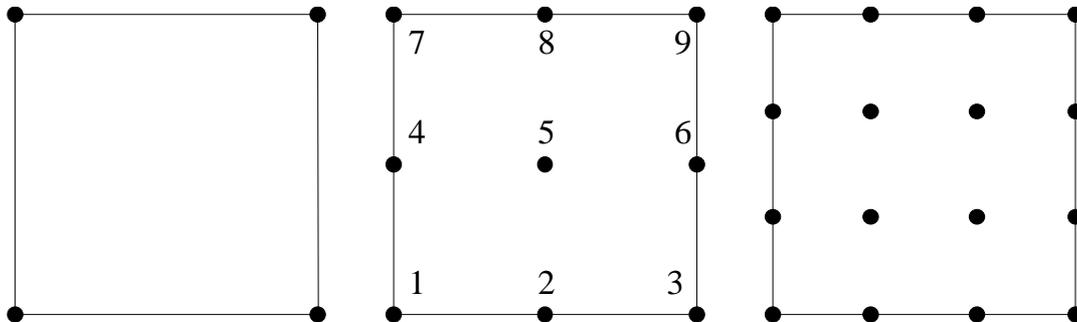


Figura 7.5

As expressões das funções de interpolação, nas coordenadas naturais, podem ser obtidas de forma análoga ao efectuado para o elemento isoparamétrico de 4 nós, no capítulo 5.

Para o elemento isoparamétrico de 9 nós, as funções de interpolação são:

$$\psi_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)\xi(1-\eta)\eta,$$

$$\psi_2 = -\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)\eta,$$

$$\psi_3 = -\frac{1}{4}(1+\xi)\xi(1-\eta)\eta,$$

$$\psi_4 = -\frac{1}{2}(1-\xi)\xi(1-\eta^2),$$

$$\psi_5 = (1-\xi^2)(1-\eta^2),$$

$$\psi_6 = \frac{1}{2}(1+\xi)\xi(1-\eta^2),$$

$$\psi_7 = -\frac{1}{4}(1-\xi)\xi(1+\eta)\eta,$$

$$\psi_8 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)\eta,$$

$$\psi_9 = \frac{1}{4}(1+\xi)\xi(1+\eta)\eta.$$

Sendo o elemento finito isoparamétrico, estas funções são também utilizadas como funções de forma do elemento, pelo que os lados podem ser curvos.

Para o elemento isoparamétrico de 16 nós, os monómios utilizados na interpolação formam, no triângulo de Pascal, o losango representado na figura 7.6.

$$\begin{array}{c}
1 \\
\xi \quad \eta \\
\xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \\
\xi^3 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \quad \eta^3 \\
\xi^3\eta \quad \xi^2\eta^2 \quad \xi\eta^3 \\
\xi^3\eta^2 \quad \xi^2\eta^3 \\
\xi^3\eta^3
\end{array}$$

Figura 7.6

Os três primeiros membros da família dos elementos finitos quadriláteros Serendipianos estão representados na figura 7.7.

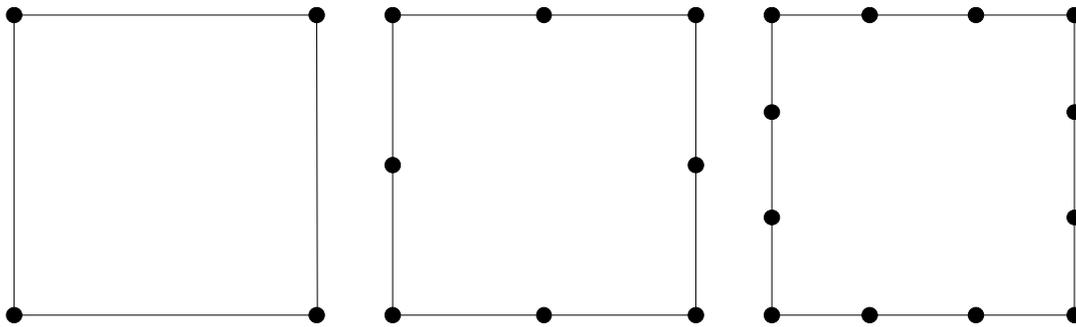


Figura 7.7

Para o elemento isoparamétrico de 12 nós, os monómios utilizados na interpolação formam, no triângulo de Pascal, a figura representada na figura 7.8.

$$\begin{array}{c}
1 \\
\xi \quad \eta \\
\xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \\
\xi^3 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \quad \eta^3 \\
\xi^3\eta \quad \xi\eta^3
\end{array}$$

Figura 7.8

## **8. Bibliografia**

NP-761 - Teoria das Estruturas - Vocabulário, 1969.

JAC Martins, O Princípio dos Trabalhos Virtuais e o Método dos Elementos Finitos na Análise de Placas e Lajes, Relatório CREST DT 2/1988.

Pedro GSV Parreira, Introdução ao Método dos Elementos Finitos, Edição da Associação de Estudantes do Instituto Superior Técnico, Lisboa, 1989.

JN Reddy, An Introduction to the Finite Element Method, McGraw-Hill, 2ª edição, Singapura, 1993.

OC Zienkiewicz e RL Taylor, The Finite Element Method - Basic Formulation and Linear Problems, Volume 1, 4ª edição, McGraw-Hill, Berkshire, 1989.

OC Zienkiewicz e RL Taylor, The Finite Element Method - Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-Linearity, Volume 2, 4ª edição, McGraw-Hill, Berkshire, 1991.