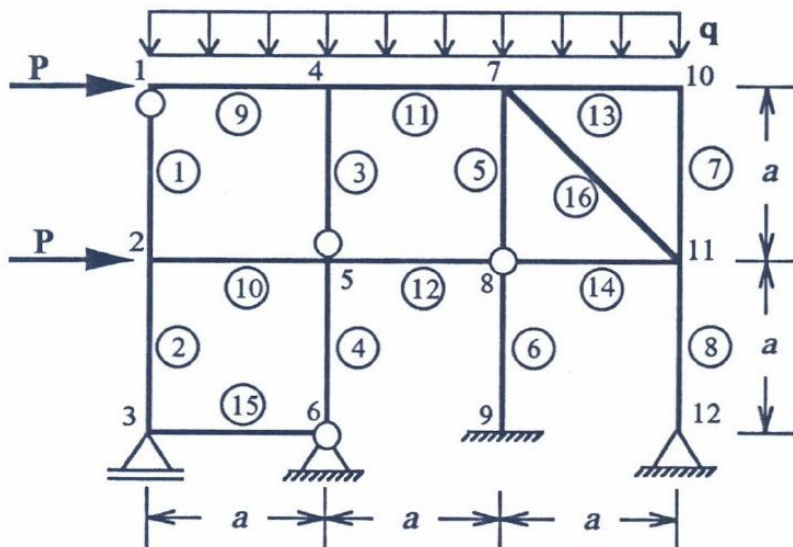


ENG 1240 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS III - 2º Semestre - 2016

Prova Final - 15/12/2016 - Duração: 2:45 hs - Com Consulta

1ª Questão (7,0 pontos)

Considere o pórtico plano abaixo com barras extensíveis. Não é considerada deformação por cisalhamento (barra de Navier - Euler-Bernoulli). Todos os nós e barras estão numerados. A numeração das deslocabilidades (graus de liberdade) segue a mesma ordem da numeração dos nós ($3i-2, 3i-1, 3i$, sendo i o índice de um nó).



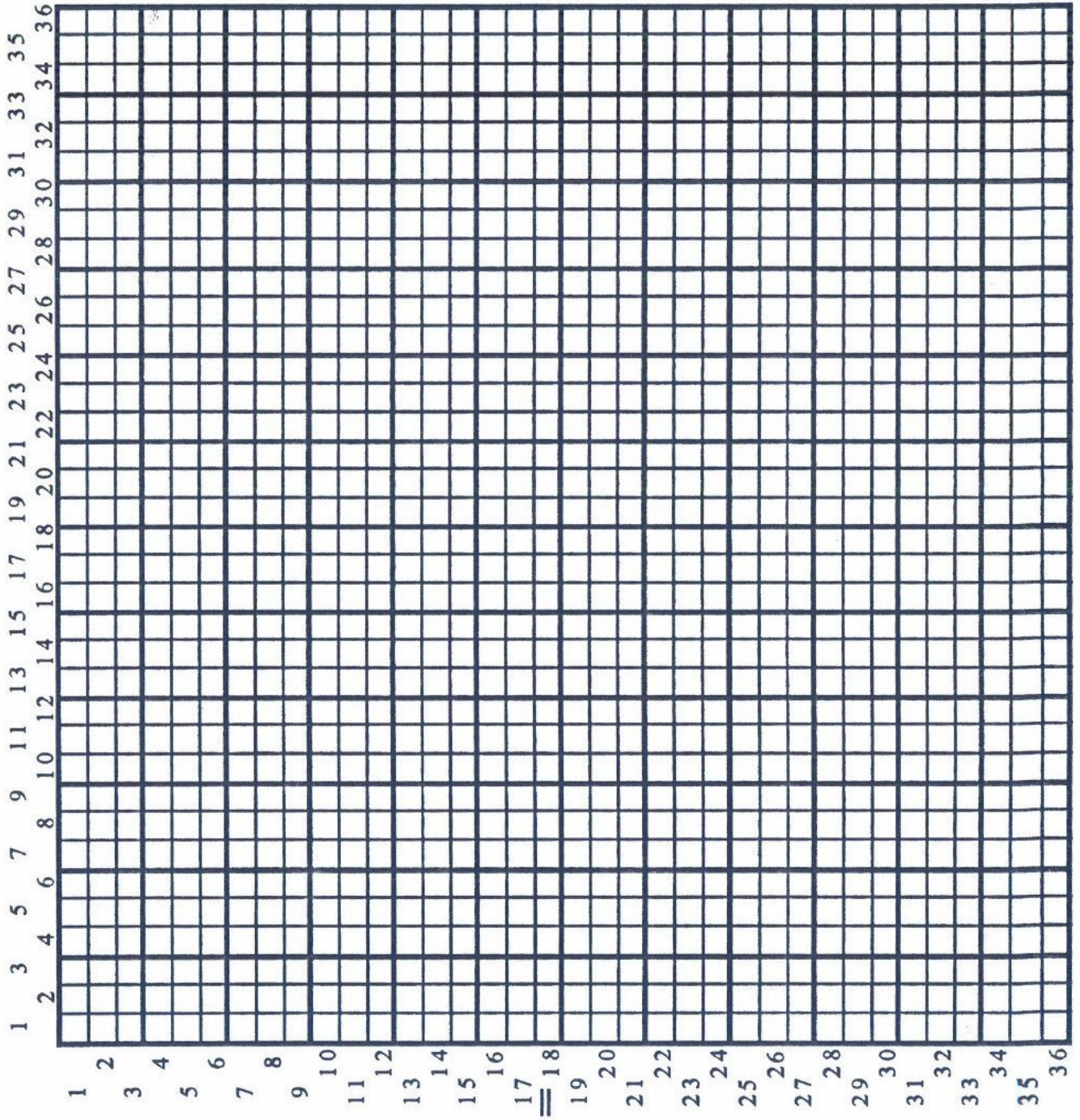
Seções transversais de todas as barras:

Módulo de elasticidade: E
 Momento de inércia: I
 Área: A

- Mostre a matriz de rigidez completa da barra 1, em função de E, A, I e a , no sistema de eixos globais. (1,5 pontos)
- A rotação do nó 2 corresponde à deslocabilidade (grau de liberdade) global D_6 . Determine os coeficientes $K_{4,6}, K_{5,6}, K_{6,6}$ e $K_{14,6}$ da 6ª coluna da matriz de rigidez global $[K]$ em função de E, A, I e a . (1,5 pontos)
- A tabela na folha seguinte representa a matriz de rigidez global do modelo estrutural. Observe que os coeficientes correspondentes aos graus de liberdade restritos por apoios também estão incluídos. Observe também que a tabela divide a matriz de rigidez em submatrizes 3×3 de forma a agrupar os efeitos dos graus de liberdade de cada um dos nós. Indique a contribuição de todas as barras para a matriz de rigidez global da estrutura, completando esquematicamente na tabela com "X" as submatrizes 3×3 não nulas e indicando os números das barras que contribuem para cada submatriz. Uma submatriz é não nula quando pelo menos um dos seus coeficientes é não nulo. (1,5 pontos)
- Na direita da tabela da folha seguinte está representado o vetor das forças/momentos nodais combinadas (forças/momentos nodais propriamente ditas e cargas equivalentes nodais) do modelo estrutural. Observe que as posições das forças/momentos nodais correspondentes às reações de apoio também estão incluídas. Indique com "X" todas as componentes de forças/momentos nodais não nulas, incluído as componentes de reações de apoio. Indique os valores conhecidos das componentes do vetor de forças/momentos nodais em função do valor P das cargas concentradas aplicadas e do valor q das forças uniformemente distribuídas aplicadas. (1,5 pontos)
- Observe que as duas barras adjacentes ao nó 6 e as quatro barras adjacentes ao nó 8 são articuladas (têm rótula) nesses nós. Qual é o problema com esse tipo de consideração de articulação (todas as barras adjacentes são rotuladas no nó)? Qual seria uma possível solução para esse problema? (1,0 ponto)

2ª Questão (3,0 pontos)

Descreva os passos da análise de um pórtico plano pelo método da rigidez direta.

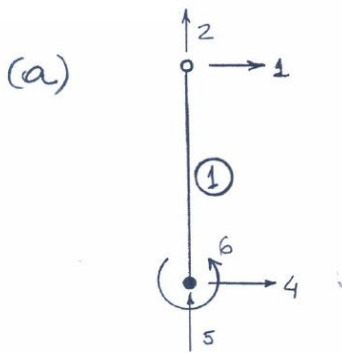


[K]

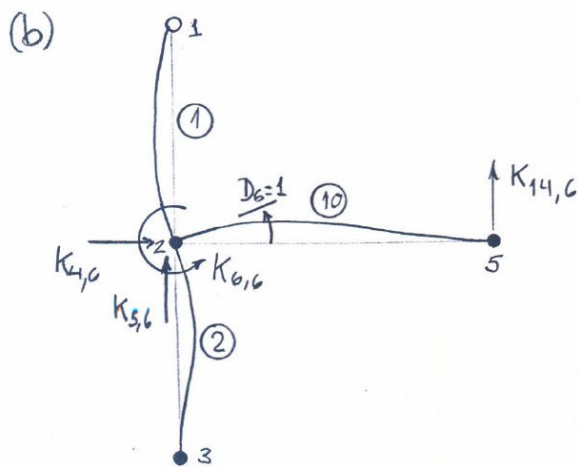
{F}



1ª Questão



$$[k] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{3EI}{a^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{a^3} & 0 & \frac{3EI}{a^2} \\ 0 & \frac{EA}{a} & 0 & 0 & -\frac{EA}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3EI}{a^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{a^3} & 0 & -\frac{3EI}{a^2} \\ 0 & -\frac{EA}{a} & 0 & 0 & \frac{EA}{a} & 0 \\ \frac{3EI}{a^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{a^2} & 0 & \frac{3EI}{a} \end{bmatrix} \end{matrix}$$



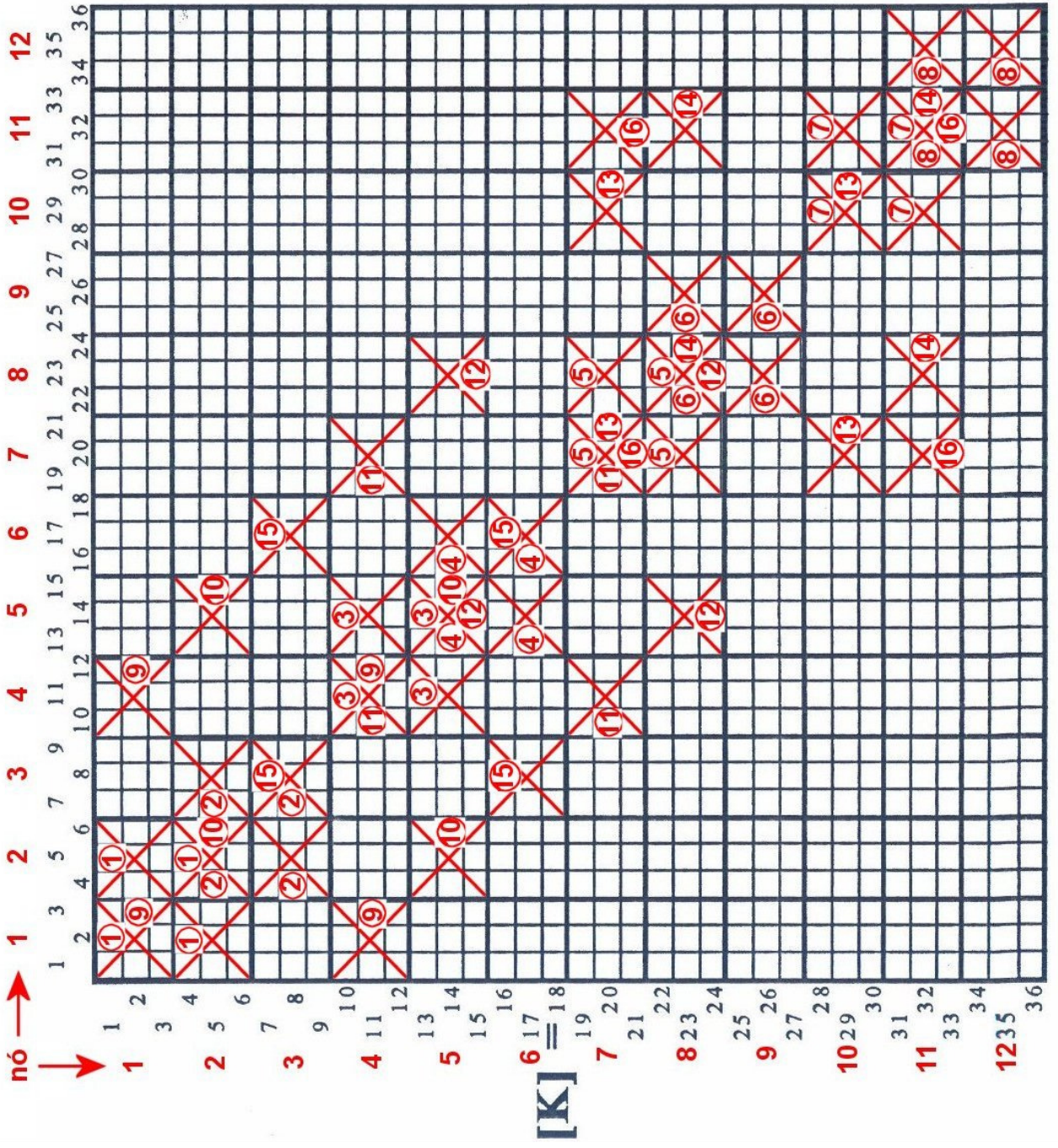
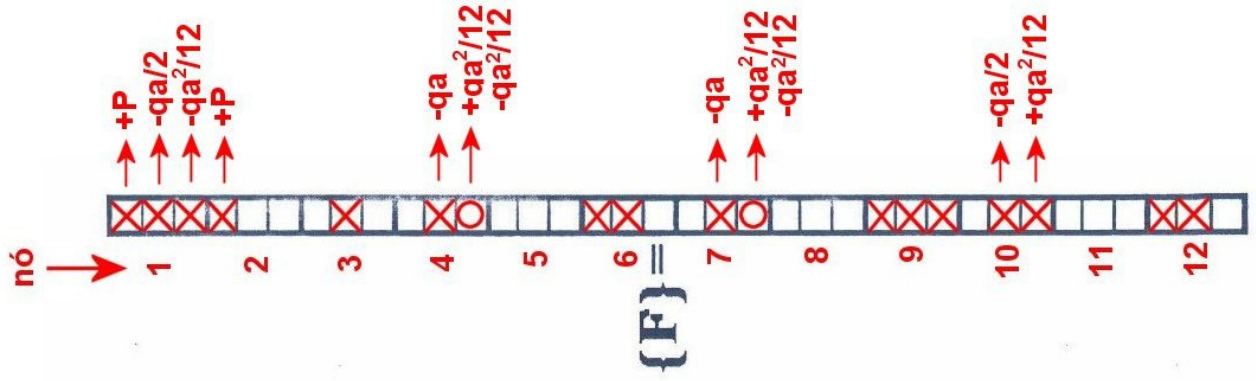
$$\left\{ \begin{aligned} K_{4,6} &= -\frac{3EI}{a^2} + \frac{6EI}{a^2} = \frac{3EI}{a^2} \\ K_{5,6} &= +\frac{6EI}{a^2} \\ K_{6,6} &= \frac{3EI}{a} + \frac{4EI}{a} + \frac{4EI}{a} = \frac{11EI}{a} \\ K_{14,6} &= -\frac{6EI}{a^2} \end{aligned} \right.$$

(e)

O problema que ocorre quando todas as barras que convergem em um nó são articuladas nesse nó é que nenhuma rigidez fica associada ao grau de liberdade da rotação desse nó. Nesse caso, a matriz de rigidez global tem a linha e a coluna do grau de liberdade rotação desse nó nulas. Isto é, a submatriz "livre-livre" (ver solução da segunda questão) é singular (tem determinante nulo).

A solução para esse problema é eliminar a linha e coluna nulas associadas ao grau de liberdade rotação do nó com articulação completa. Isso pode ser feito introduzindo um apoio fictício (uma chapa) que prende a rotação do nó com articulação completa. Dessa forma, a linha e a coluna nulas serão retiradas da submatriz "livre-livre" da matriz de rigidez global. Esse procedimento não modifica os resultados da análise.

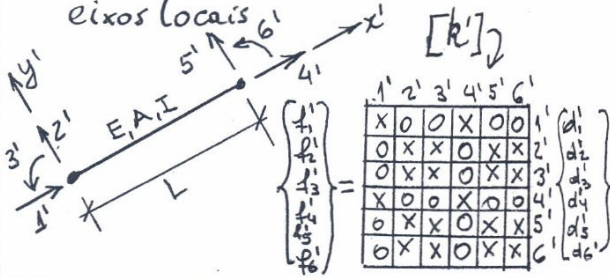
(c) e (d)



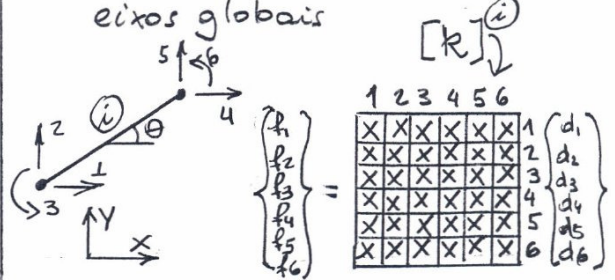
2ª Questão

Solução

1) Cálculo das matrizes de rigidez das barras nos sistemas de eixos locais



2) Cálculo das matrizes de rigidez das barras no sistema de eixos globais



3) Montagem da matriz de rigidez global da estrutura

$$[K] = \sum_i [k]^i$$

← soma das contribuições de todas as barras nas posições correspondentes

$$[K] = [R]^T [k] [R] \quad \text{onde:}$$

(6x6) (6x6) (6x6) (6x6)

$$[R] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} c = \cos \theta \\ s = \sin \theta \end{matrix}$$

5) Solução do sistema de equações de equilíbrio

$$[K]\{D\} = \{F\}$$

(l → livre f → fixo)

$$\begin{bmatrix} [K_{ll}] & [K_{lf}] \\ [K_{fl}] & [K_{ff}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D_l\} \\ \{D_f\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_l\} \\ \{F_f\} \end{Bmatrix}$$

deslocabilidades desconhecidas conhecidos
conhecidos (em geral nulos) desconhecidos (reações)

4) Montagem da parte conhecida do vetor das forças nodais

Soma das forças/momentos nodais propriamente ditos com forças equivalentes nodais das barras carregadas (iguais às reações de engastamento com sentidos inversos)

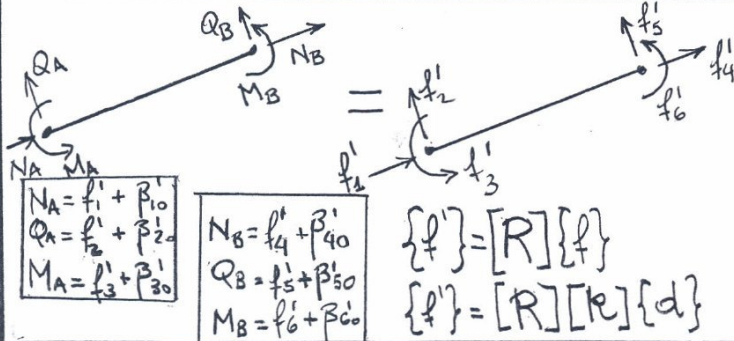
$$\{D_l\} = [K_{ll}]^{-1} (\{F_l\} - [K_{lf}]\{D_f\})$$

(cálculo das deslocabilidades)

$$\{F_f\} = [K_{fl}]\{D_l\} + [K_{ff}]\{D_f\}$$

(cálculo das reações de apoio)

6) Cálculo dos esforços finais nas barras



{D} ⇒ {d} (deslocamentos e rotações de barra)

