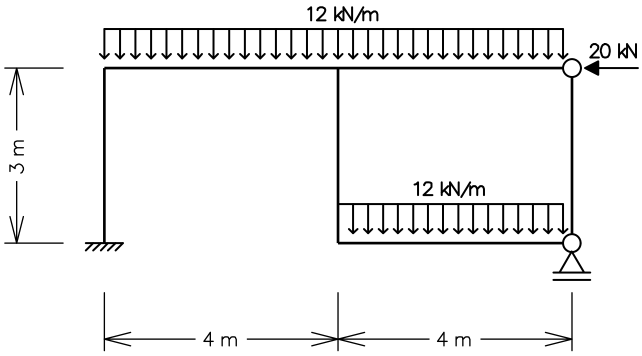
# ENG 1204 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 2º Semestre – 2018

# Primeira Prova – 1ª Questão – Data: 12/09/2018 – Duração: 1:30 hs

**1ª Questão** (5,5 pontos)
Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 7.2 \times 10^4$ kNm².




Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas:

$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \dfrac{bf - de}{ad - bc} \\ \\ X_2 = \dfrac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

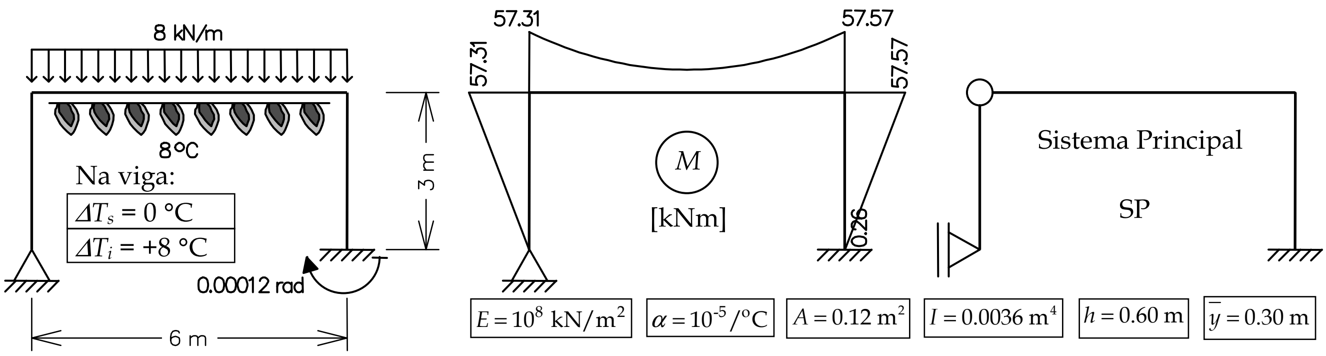
# ENG 1204 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 2º Semestre – 2018

## Primeira Prova – 2ª Parte – Data: 17/09/2018 – Duração: 1:30 hs

**2ª Questão** (3,5 pontos)
Considere o pórtico hiperestático mostrado abaixo. O material tem módulo de elasticidade $E$ = $10^8$ kN/m² e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5}$ /°C. As barras do pórtico têm uma seção transversal com área $A$ = 0.12 m², momento de inércia $I$ = 0.0036 m⁴, altura $h$ = 0.60 m e centro de gravidade no meio de altura. As seguintes solicitações atuam no pórtico concomitantemente:

- Carregamento com força uniformemente distribuída $q$ = 8 kN/m atuando na viga do pórtico.
- Aquecimento de $\Delta T_i$ = +8 °C na face inferior da viga.
- Recalque rotacional, no sentido horário, de $1.2 \times 10^{-4}$ rad ($\rho$ = –0.00012 rad) do apoio da direita.

O diagrama final de momentos fletores para essas três solicitações também é indicado. Esta solução considera apenas deformações axiais e deformações por flexão, isto é, são desprezadas deformações por cisalhamento.




Considerando que na solução do pórtico pelo Método das Forças foi adotado o Sistema Principal (SP) indicado acima, pede-se:

(a) Mostre uma figura do SP com os hiperestáticos indicados, arbitrando um sentido para eles. Baseado no diagrama final de momentos fletores fornecido, determine os valores dos hiperestáticos, com unidades. Os sinais devem ser consistentes com os sentidos arbitrados para os hiperestáticos (1,0 ponto).

(b) Forneça a interpretação física dos termos de carga $\delta_{10}$, indicando causa, localização, se é deslocamento ou rotação, e se é absoluto ou relativo (0,5 ponto).

(c) Determine o diagrama de momentos fletores do caso (0) da solução provocado pelas três solicitações concomitantes (0,5 ponto).

(d) Calcule o valor do termo de carga $\delta_{10}$, indicando a unidade, considerando deformações axiais e deformações por flexão (1,5 pontos).

**3ª Questão** (1,0 ponto) – Grau vindo do primeiro trabalho (nota do trabalho x 0,1).

Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas:

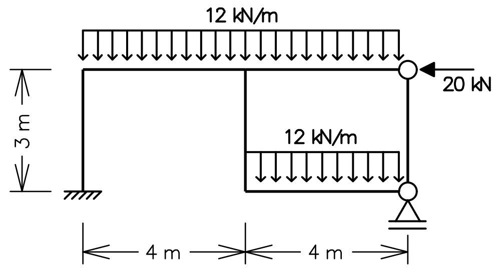
$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \dfrac{bf - de}{ad - bc} \\ X_2 = \dfrac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

Sabe-se:

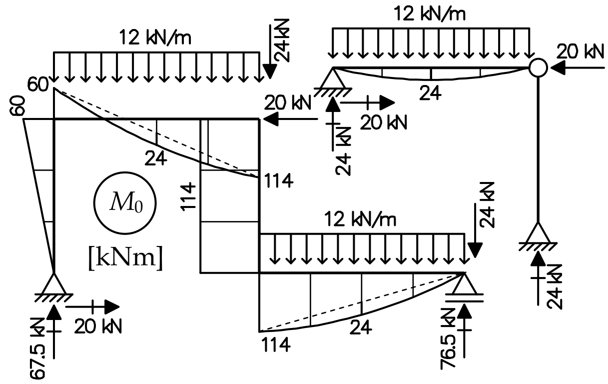
(i) O deslocamento axial relativo interno provocado pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é
$du^T = \alpha \, \Delta T_{CG} \, dx$
sendo $\Delta T_{CG}$ a variação de temperatura na fibra do centro de gravidade da seção transversal.

(ii) O rotação relativa interna provocada pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é
$$d\theta^T = \frac{\alpha(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx$$
sendo $\Delta T_i$ a variação de temperatura das fibras inferiores da viga e $\Delta T_s$ a variação de temperatura das fibras superiores.

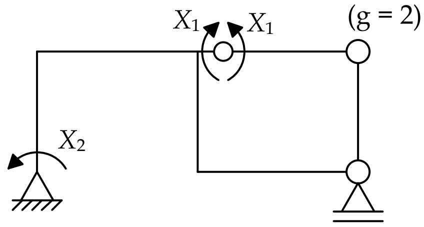
**1ª Questão**



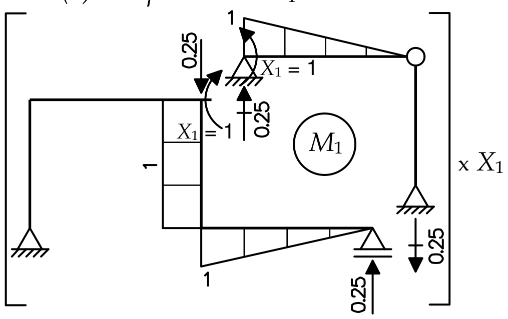

*Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP*



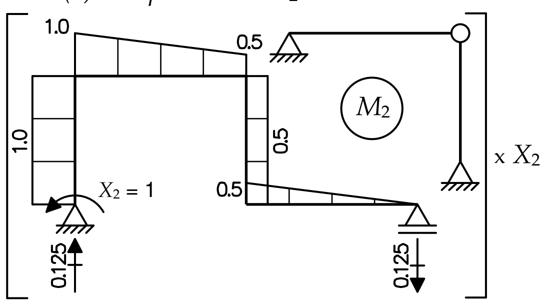

*Sistema Principal (SP) e Hiperestáticos*




*Caso (1) – Hiperestático $X_1$ isolado no SP*




*Caso (2) – Hiperestático $X_2$ isolado no SP*




*Equações de compatibilidade:*

$$\begin{cases}\delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix}+494 \\ -273\end{Bmatrix} + \frac{1}{EI}\begin{bmatrix}+17/3 & -13/6 \\ -13/6 & +77/12\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1 \\ X_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0 \\ 0\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}X_1 = -81.4 \text{ kNm} \\ X_2 = +15.1 \text{ kN}\end{cases}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 24\cdot 4 + 1\cdot 114\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 114\cdot 4 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 24\cdot 4\right] = +\frac{494}{EI}$$

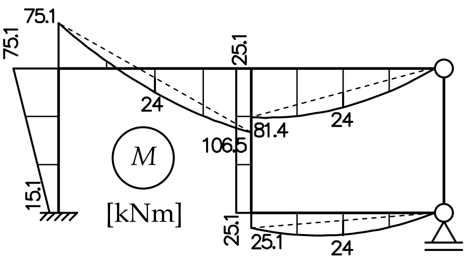
$$\delta_{20} = \frac{1}{EI}\cdot\begin{bmatrix}+\frac{1}{3}\cdot 1.0\cdot 60\cdot 4 - \frac{1}{6}\cdot 1.0\cdot 114\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 0.5\cdot 60\cdot 4 - \frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 114\cdot 4 - \frac{1}{3}\cdot 1.0\cdot 24\cdot 4 - \frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 24\cdot 4 \\ +\frac{1}{2}\cdot 1.0\cdot 60\cdot 3 - 0.5\cdot 114\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 114\cdot 4 - \frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 24\cdot 4\end{bmatrix} = -\frac{273}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\cdot\left[+2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 4\right) + 1\cdot 1\cdot 3\right] = +\frac{17}{3EI} \qquad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI}\cdot\left[-0.5\cdot 1\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 1\cdot 4\right] = -\frac{13}{6EI}$$

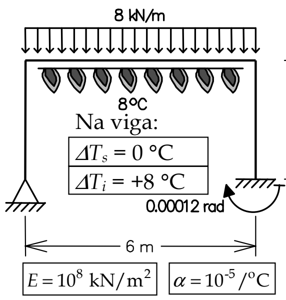
$$\delta_{22} = \frac{1}{EI}\cdot\begin{bmatrix}+\frac{1}{3}\cdot 1.0\cdot 1.0\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 1.0\cdot 0.5\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 0.5\cdot 1.0\cdot 4 + \frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 0.5\cdot 4 \\ +1.0\cdot 1.0\cdot 3 + 0.5\cdot 0.5\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 0.5\cdot 4\end{bmatrix} = +\frac{77}{12EI}$$

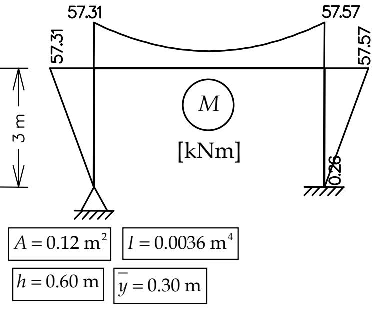
*Momentos Fletores Finais:*

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$$



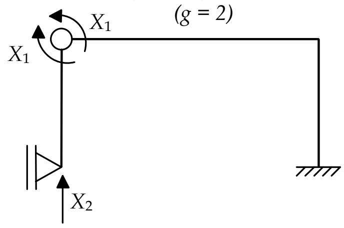
**2ª Questão**




**Item (a)**

*Sistema Principal e Hiperestáticos*
*(g = 2)*




**Item (a)** (cont.)

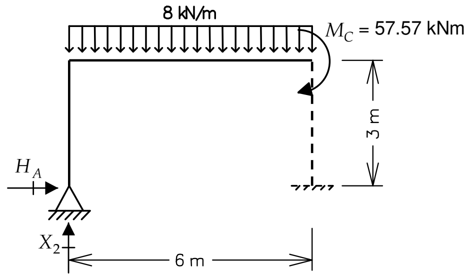
$\boxed{X_1 = +57.31 \text{ kNm}}$

$H_A$ = +57.31 ÷ 3 m = +19.10 kN

$-X_2 \cdot 6$ m + $H_A \cdot 3$ m + (8 kN/m· 6 m) · 3 m = $M_C$

$X_2 \cdot 6$ = 19.10 · 3 + 48 · 3 m – 57.57

$\boxed{X_2 = +23.96 \text{ kN}}$



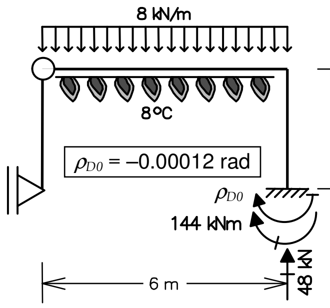

**Item (b)**

O termo de carga $\delta_{10}$ é a rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula introduzida na criação do Sistema Principal (associada a $X_1$) provocada pela força uniformemente distribuída aplicada na viga, pela variação de temperatura na viga e pelo recalque rotacional no apoio da direita, no caso (0).

O termo de carga $\delta_{20}$ é o deslocamento vertical absoluto no apoio da esquerda do Sistema Principal (na direção de $X_2$) provocado pela força uniformemente distribuída aplicada na viga, pela variação de temperatura na viga e pelo recalque rotacional no apoio da direita, no caso (0).

**Item (c)**

*Caso (0) – Solicitações externas isoladas no SP*



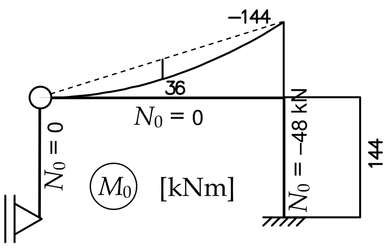



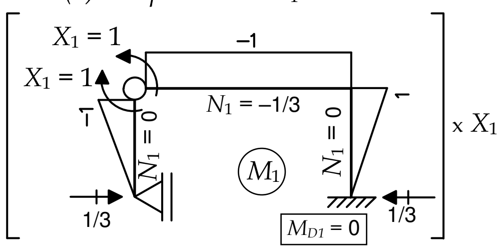

Diagrama de momentos fletores do caso (0) só depende da força uniformemente distribuída aplicada na viga, pois variação de temperatura e recalque de apoio não provocam esforços internos no SP isostático.

**Item (d)**

*Equações de compatibilidade*

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0 \end{cases}$$

*Caso (1) – Hiperestático $X_1$ isolado no SP*




**Item (d)** (cont.)

$$\boxed{\delta_{10} = \delta_{10}^q + \delta_{10}^T + \delta_{10}^\rho}$$

$$\delta_{10}^q = \int_{pórtico} \frac{M_1 M_0}{EI} dx + \int_{pórtico} \frac{N_1 N_0}{EA} dx$$

$$\delta_{10}^q = \frac{1}{EI}\left[\begin{aligned} &\frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot(-144)\cdot 6 + \frac{2}{3}\cdot(-1)\cdot(+36)\cdot 6 \\ &+\frac{1}{2}\cdot(+1)\cdot(+144)\cdot 3 \end{aligned}\right] + \frac{1}{EA}[0]$$

$$\boxed{\delta_{10}^q = +140\times 10^{-5} \text{ rad}}$$

$$\delta_{10}^T = \int_{viga} M_1 d\theta_0^T + \int_{viga} N_1 du_0^T$$

$$d\theta_0^T = \frac{\alpha\cdot(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h}dx = \frac{\alpha\cdot(+8-0)}{0.60}dx = +\alpha\cdot\frac{40}{3}\cdot dx$$

$$du_0^T = \alpha\cdot\Delta T_{CG}\cdot dx = +\alpha\cdot 4\cdot dx$$

$$\delta_{10}^T = \int_0^6 M_1 d\theta_0^T + \int_0^6 N_1 du_0^T = +\alpha\cdot\frac{40}{3}\cdot\int_0^6 M_1 dx + \alpha\cdot 4\cdot\int_0^6 N_1 dx$$

$$\delta_{10}^T = +\alpha\cdot\frac{40}{3}\cdot\left[(-1)\cdot 6\right] + \alpha\cdot 4\cdot\left[\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 6\right] \quad \boxed{\delta_{10}^T = -88\times 10^{-5} \text{ rad}}$$

$$1\cdot\delta_{10}^\rho + M_{D1}\cdot\rho_{D0} = 0 \;\Rightarrow\; \delta_{10}^\rho = -M_{D1}\cdot\rho_{D0}$$

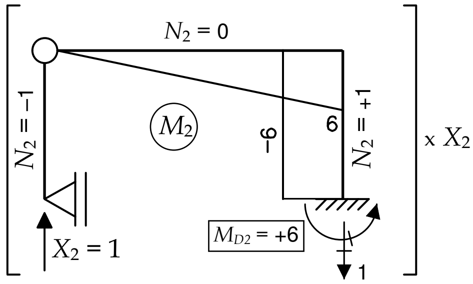
$$\delta_{10}^\rho = -M_{D1}\cdot\rho_{D0} = -\left[(0)\cdot(-0.00012)\right] \qquad \boxed{\delta_{10}^\rho = 0 \text{ rad}}$$

$$\boxed{\delta_{10} = \delta_{10}^q + \delta_{10}^T + \delta_{10}^\rho = +52\times 10^{-5} \text{ rad}}$$

**Alternativa para o item (d): cálculo do outro termo de carga**

A questão da prova só pediu um termo de carga. Entretanto, como os hiperestáticos podem ter sido numerados na ordem inversa, o cálculo do outro termo de carga também é mostrado.

*Caso (2) – Hiperestático $X_2$ isolado no SP*




$$\boxed{\delta_{20} = \delta_{20}^{q} + \delta_{20}^{T} + \delta_{20}^{\rho}}$$

$$\delta_{20}^{q} = \int\limits_{pórtico} \frac{M_2 M_0}{EI}dx + \int\limits_{pórtico} \frac{N_2 N_0}{EA}dx$$

$$\delta_{20}^{q} = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\cdot(+6)\cdot(-144)\cdot 6 + \frac{1}{3}\cdot(+6)\cdot(+36)\cdot 6 \\ (-6)\cdot(+144)\cdot 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{EA}\left[(+1)\cdot(-48)\cdot 3\right]$$

$$\boxed{\delta_{20}^{q} = -1081.2\times10^{-5}\ \text{m}}$$

$$1\cdot\delta_{20}^{\rho} + M_{D2}\cdot\rho_{D0} = 0 \ \Rightarrow\ \delta_{20}^{\rho} = -M_{D2}\cdot\rho_{D0}$$

$$\delta_{20}^{\rho} = -M_{D2}\cdot\rho_{D0} = -\left[(+6)\cdot(-0.00012)\right]$$

$$\boxed{\delta_{20}^{\rho} = +72\times10^{-5}\ \text{m}}$$

$$\delta_{20}^{T} = \int\limits_{viga} M_2\, d\theta_0^T + \int\limits_{viga} N_2\, du_0^T$$

$$\delta_{20}^{T} = \int_0^6 M_2\, d\theta_0^T + \int_0^6 N_2\, du_0^T = +\alpha\cdot\frac{40}{3}\cdot\int_0^6 M_2\, dx + \alpha\cdot 4\cdot\int_0^6 N_2\, dx$$

$$\delta_{20}^{T} = +\alpha\cdot\frac{40}{3}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot(+6)\cdot 6\right] + \alpha\cdot 4\cdot\left[0\cdot 6\right]$$

$$\boxed{\delta_{20}^{T} = +240\times10^{-5}\ \text{m}}$$

$$\boxed{\delta_{20} = \delta_{20}^{q} + \delta_{20}^{T} + \delta_{20}^{\rho} = -769.2\times10^{-5}\ \text{m}}$$

**Verificação dos valores dos hiperestáticos** (isso não faz parte da prova)

$$\delta_{11} = \int\limits_{pórtico} \frac{M_1^2}{EI}dx + \int\limits_{pórtico} \frac{N_1^2}{EA}dx$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left[(-1)\cdot(-1)\cdot 6 + \frac{1}{3}\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot(+1)\cdot(+1)\cdot 3\right] + \frac{1}{EA}\left[(-1/3)\cdot(-1/3)\cdot 6\right]$$

$$\boxed{\delta_{11} = +\frac{20.05}{9}\times10^{-5}\ \text{rad/kNm}}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int\limits_{pórtico} \frac{M_1 M_2}{EI}dx + \int\limits_{pórtico} \frac{N_1 N_2}{EA}dx \qquad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot(+6)\cdot 6 + \frac{1}{2}\cdot(+1)\cdot(-6)\cdot 3\right] + \frac{1}{EA}[0]$$

$$\boxed{\delta_{12} = -7.5\times10^{-5}\ \text{rad/kN}} \qquad \boxed{\delta_{21} = -7.5\times10^{-5}\ \text{m/kNm}}$$

$$\delta_{22} = \int\limits_{pórtico} \frac{M_2^2}{EI}dx + \int\limits_{pórtico} \frac{N_2^2}{EA}dx \qquad \delta_{22} = \frac{1}{EI}\left[+\frac{1}{3}\cdot(+6)\cdot(+6)\cdot 6 + (-6)\cdot(-6)\cdot 3\right] + \frac{1}{EA}\left[(-1)\cdot(-1)\cdot 3 + (+1)\cdot(+1)\cdot 3\right]$$

$$\boxed{\delta_{22} = +50.05\times10^{-5}\ \text{m/kN}}$$

Verificação:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(+52 + (20.05/9)\cdot 57.31 \quad -7.5\cdot 23.96\right)\cdot 10^{-5} = 0 \\ \left(-769.2 \quad -7.5\cdot 57.31 + 50.05\cdot 23.96\right)\cdot 10^{-5} = 0 \end{cases} \qquad \text{OK}$$