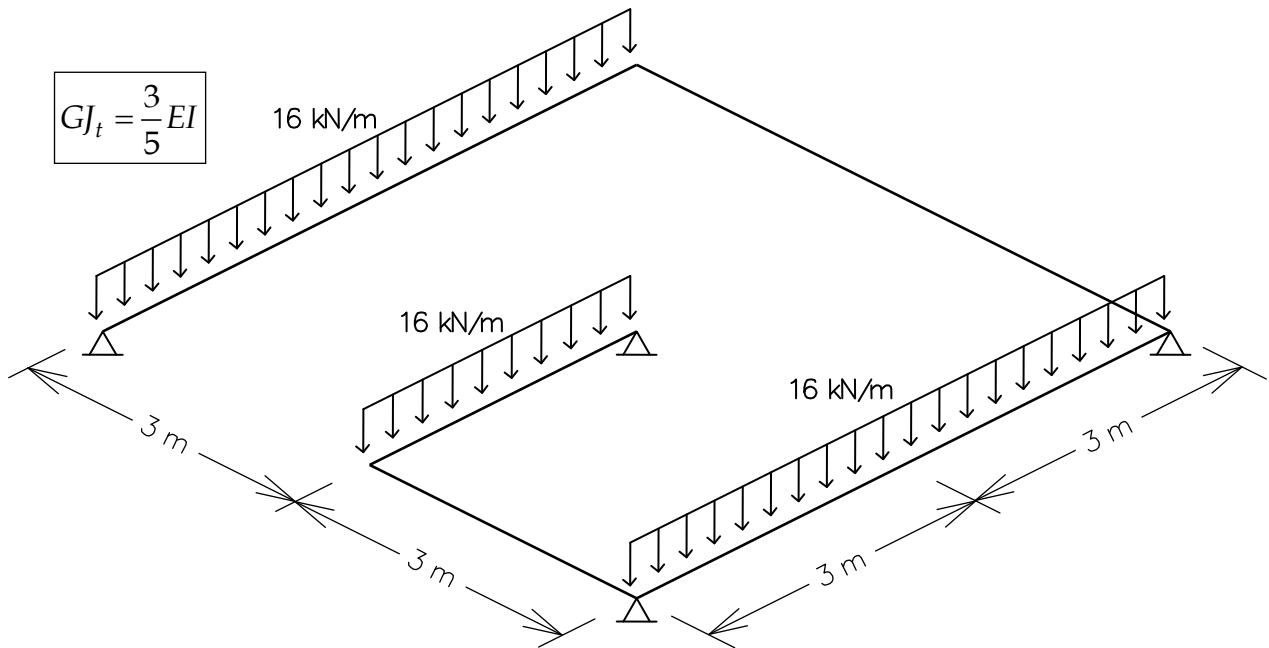


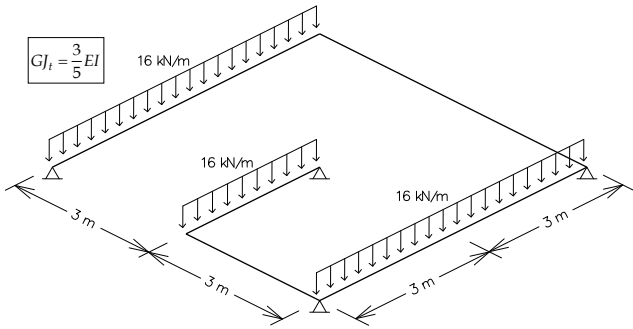
1ª Questão (2,0 pontos)

Empregando-se o Método das Forças, obter os diagramas de momentos fletores e momentos torçores para a grelha abaixo. Todas as barras têm a relação indicada entre a rigidez à torção  $GJ_t$  e a rigidez à flexão  $EI$ .

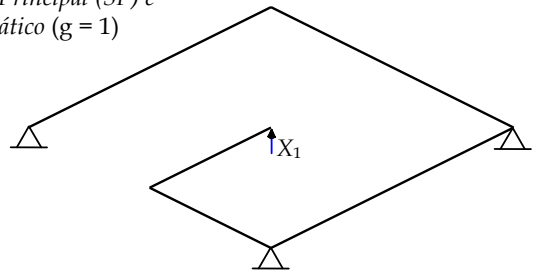


Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas: 
$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{bf - de}{ad - bc} \\ X_2 = \frac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

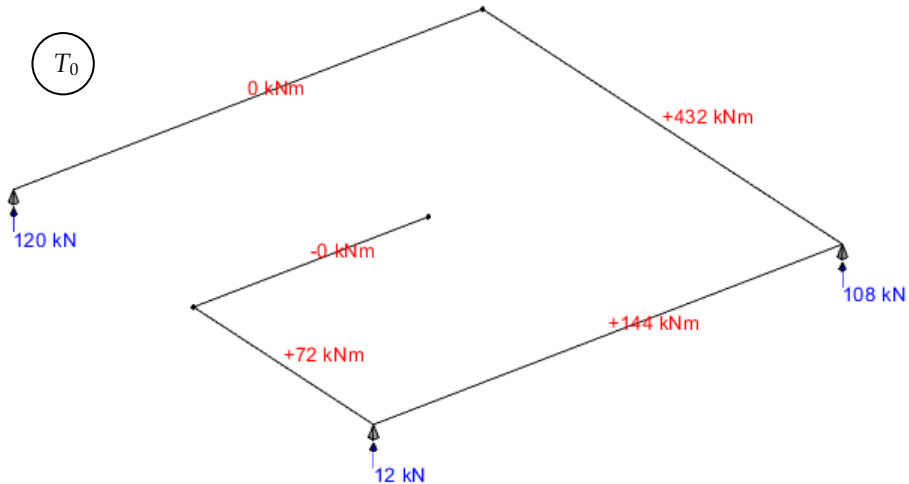
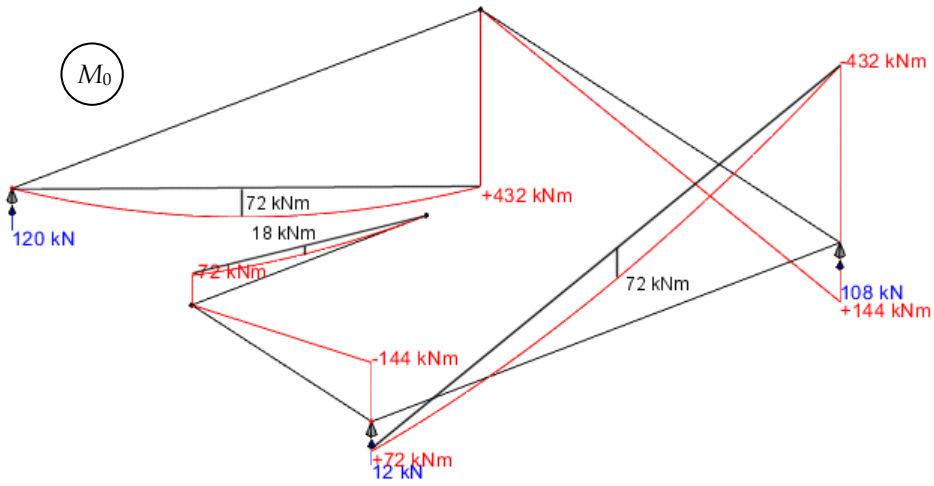
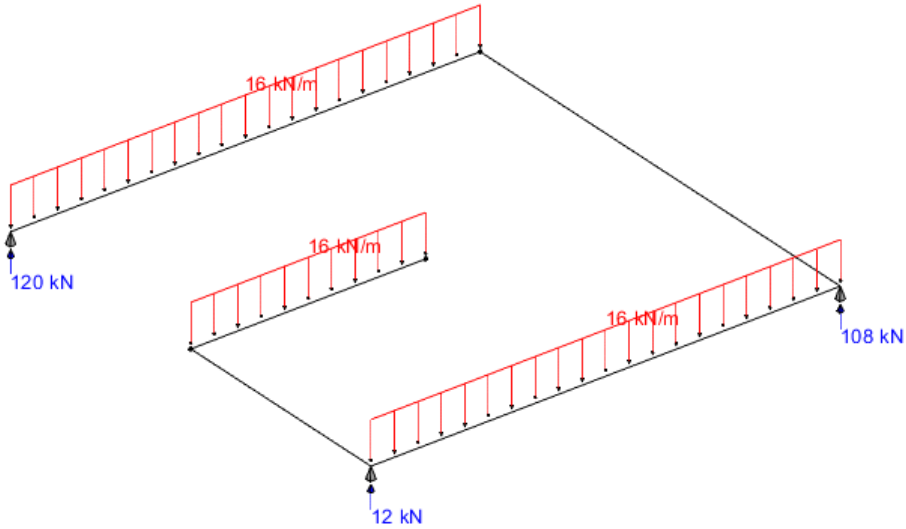
**Grau G2 - 1ª Questão**



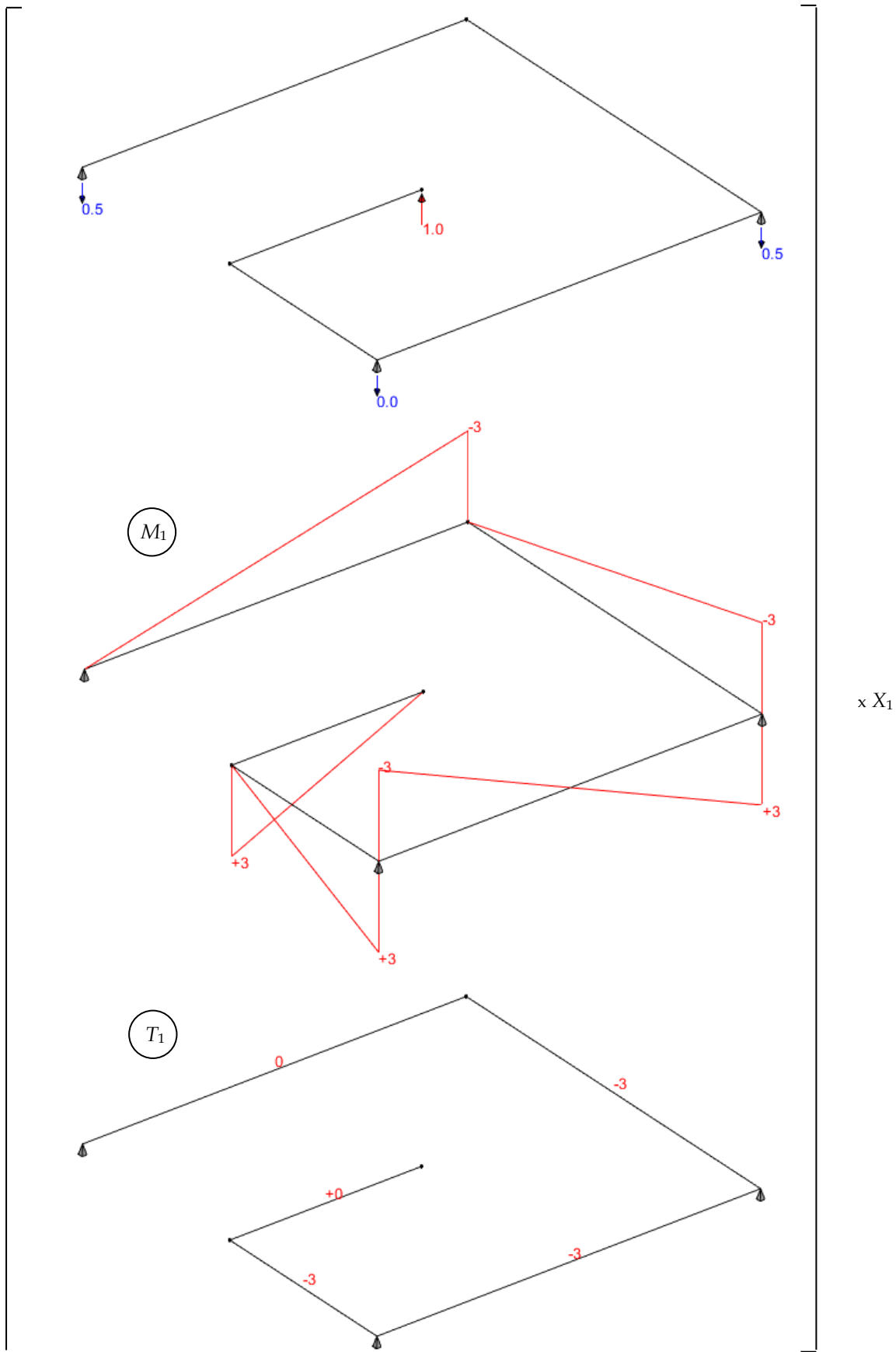
Sistema Principal (SP) e Hiperestático (g = 1)



Caso (0) - Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) – Hiperestático  $X_1$  isolado no SP



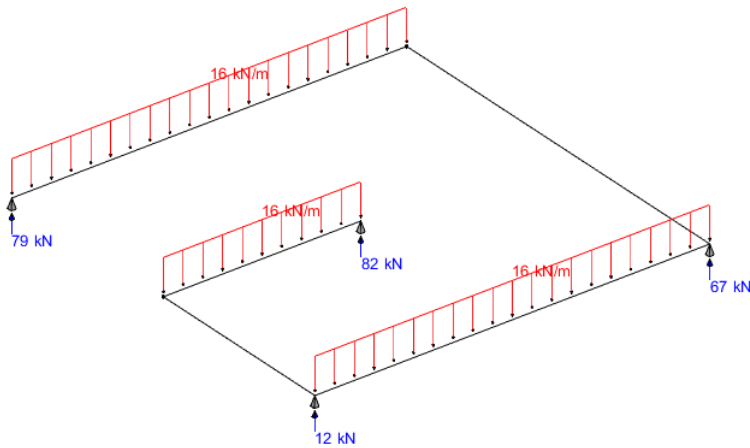
Equação de compatibilidade:

$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-24354}{EI} + \frac{297}{EI} X_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = +82 \text{ kN}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 432 \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 72 \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 144 \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 72 \cdot 6 \\ +\frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 72 \cdot 6 + \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 432 \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 432 \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 72 \cdot 6 \\ -\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 72 \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 144 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 72 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 18 \cdot 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{GJ_t} \cdot \begin{bmatrix} +(-3) \cdot (+432) \cdot 6 \\ +(-3) \cdot (+144) \cdot 6 \\ +(-3) \cdot (+72) \cdot 3 \end{bmatrix}$$

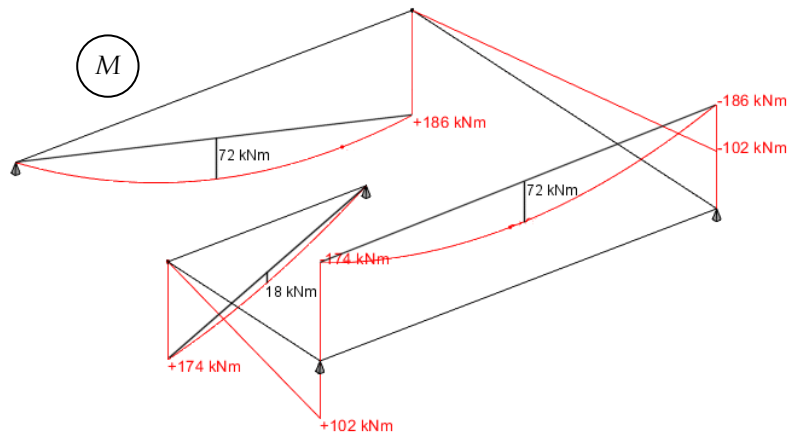
$$\delta_{10} = -\frac{5994}{EI} - \frac{11016}{GJ_t} = -\frac{5994}{EI} - \frac{5 \cdot 11016}{3 \cdot EI} = -\frac{24354}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ +2 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6 \right) + 4 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \right) \right] + \frac{1}{GJ_t} \cdot \left[ +2 \cdot ((-3) \cdot (-3) \cdot 6) + ((-3) \cdot (-3) \cdot 3) \right] = +\frac{72}{EI} + \frac{135}{GJ_t} = +\frac{297}{EI}$$



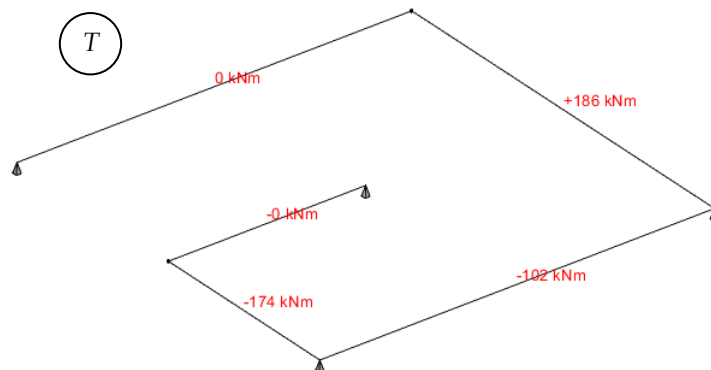
Momentos Fletores Finais:

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1$$



Momentos Torçores Finais:

$$T = T_0 + T_1 \cdot X_1$$



# ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 2º Semestre - 2019

## T2: Simulação computacional do Método dos Deslocamentos 2ª questão do grau G2 (1.0 ponto) - Data da entrega: 30/09/2019

Estude o exemplo de solução de um pórtico pelo Método dos Deslocamentos ("[http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftp\\_pub/lfm/eng1204roteiroMD.pdf](http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftp_pub/lfm/eng1204roteiroMD.pdf)"). Estude o tutorial sobre o Método dos Deslocamentos disponível em "[http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftp\\_pub/lfm/metdes1\\_0\\_0.exe](http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftp_pub/lfm/metdes1_0_0.exe)" (versão *off-line*). Obtenha o programa Ftool e seu manual em "<http://www.ftool.com.br>". Assista no site da disciplina no Ambiente de Aprendizagem Online da PUC-Rio (<https://ead.puc-rio.br/login/index.php>) o vídeo "Aula 13: Método dos Deslocamentos: Introdução". Siga os passos descritos nos itens abaixo e escreva um relatório. Este relatório deve conter as figuras que forem necessárias para descrever a simulação e seus valores numéricos.

### Item (a) - Estrutura original a ser resolvida

Defina arbitrariamente, usando o programa Ftool, um quadro plano com pelo menos quatro deslocabilidades. Defina também as propriedades elásticas e geométricas das barras e as cargas que atuam no quadro. Adote todas as unidades em kN e m. Crie uma figura com a estrutura, suas dimensões e todas as propriedades e cargas utilizadas. Essa figura deve mostrar a configuração deformada da estrutura, com as componentes de deslocamentos e rotações (com valores e unidades) dos nós do modelo estrutural indicadas. Essas componentes de deslocamentos e rotações dos nós são as incógnitas do Método dos Deslocamentos, são chamadas de *deslocabilidades*, e devem ser identificadas pelo nome  $D_j$ , sendo  $j$  o número da deslocabilidade. Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe as deslocabilidades com seus nomes, valores e unidades à mão. Anote os valores das deslocabilidades (com sinal) para usar no item (f).

### Item (b) - Sistema Hipergeométrico

Obtenha uma estrutura completamente indeslocável (todos os nós com deslocamentos e rotações impedidos) a partir da inserção de vínculos externos (apoios fictícios) na estrutura do item (a). Essa estrutura será o Sistema Hipergeométrico (SH) para a resolução da estrutura original pelo Método dos Deslocamentos. Mostre o SH em uma figura com os apoios fictícios numerados de acordo com a numeração das deslocabilidades.

### Item (c) - Caso básico (0)

Para o Sistema Hipergeométrico do item (b), mantenha o carregamento do item (a). Isto corresponde ao caso (0) do Método dos Deslocamentos. Mostre a configuração deformada da estrutura juntamente com o carregamento aplicado, indicando as reações de apoio (com valores e unidades) que correspondem aos termos de carga  $\beta_{i0}$ . Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os nomes, valores (com sinal) e unidades dos termos de carga à mão.

### Item (d) - Casos básicos que isolam as deslocabilidades

Retire as cargas utilizadas no item (c) e imponha ao Sistema Hipergeométrico, alternadamente, deslocamentos ou rotações prescritos com valores unitários nos nós onde os vínculos foram inseridos no item (b). Utilize a opção *Prescribed Displacements* do menu *Support Conditions* para impor um deslocamento prescrito. Isso deve gerar um caso de solicitação para cada deslocabilidade imposta independentemente, sendo que cada um corresponde a um dos casos ( $j$ ) do Método dos Deslocamentos, onde  $j$  é o número de uma deslocabilidade. Mostre a configuração deformada da estrutura para cada uma das deslocabilidades unitárias impostas, indicando as reações de apoio (com valores, sinais e unidades) que correspondem aos *coeficientes de rigidez globais*  $K_{ij}$ . Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os nomes, valores, sinais e unidades dos coeficientes de rigidez à mão.

### Item (e) - Sistema de equações de equilíbrio

Com base nos resultados dos itens (c) e (d), monte o sistema de equações de equilíbrio que resulta da solução do quadro original pelo Método dos Deslocamentos. Os valores numéricos dos coeficientes deste sistema de equações são obtidos dos termos de carga e dos coeficientes de rigidez.

### Item (f) - Verificação da solução do sistema de equações de equilíbrio

Com base nos resultados da estrutura original do item (a), verifique se os valores das deslocabilidades correspondem realmente à solução do sistema de equações obtido no item (e).

### Item (g) - Obtenção de esforços internos

Indique os passos seguintes à solução do sistema de equações de equilíbrio que seriam necessários para complementar o cálculo dos esforços internos da estrutura pelo Método dos Deslocamentos.

# ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 2º Semestre - 2019

## Grau G2 - 3ª Questão - Data: 02/10/2019 - Duração: 0:50 hs - Sem Consulta

### 3ª Questão (1,0 ponto)

Considere a solução do pórtico plano da figura ao lado pelo Método dos Deslocamentos.

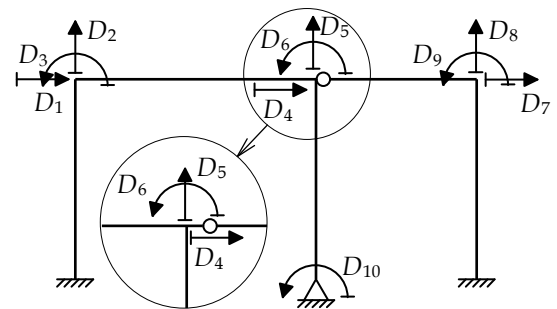
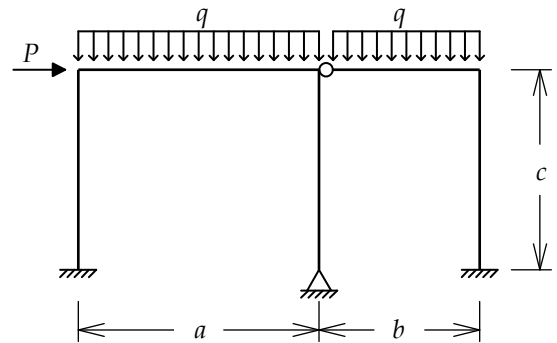
Módulo de elasticidade do material (todas as barras):  $E$ .

Área da seção transversal (todas as barras):  $A$ .

Momento de inércia da seção transversal (todas as barras):  $I$ .

Não se considera deformação por cisalhamento.

As deslocabilidades do modelo estrutural estão mostradas ao lado.



Pede-se:

#### Item (a)

Mostre os valores dos termos de carga  $\beta_{i0}$  do caso (0) da solução pelo Método dos Deslocamentos em função dos parâmetros fornecidos.

#### Item (b)

Mostre os valores dos coeficientes de rigidez  $K_{i4}$  do caso (4) da solução pelo Método dos Deslocamentos em função dos parâmetros fornecidos.

#### Item (c)

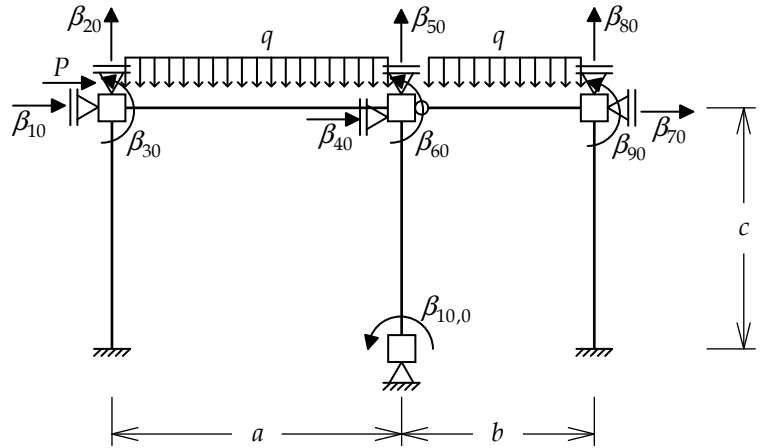
Mostre os valores dos coeficientes de rigidez  $K_{i6}$  do caso (6) da solução pelo Método dos Deslocamentos em função dos parâmetros fornecidos.

SOLUÇÃO  
**ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 2º Semestre - 2019**

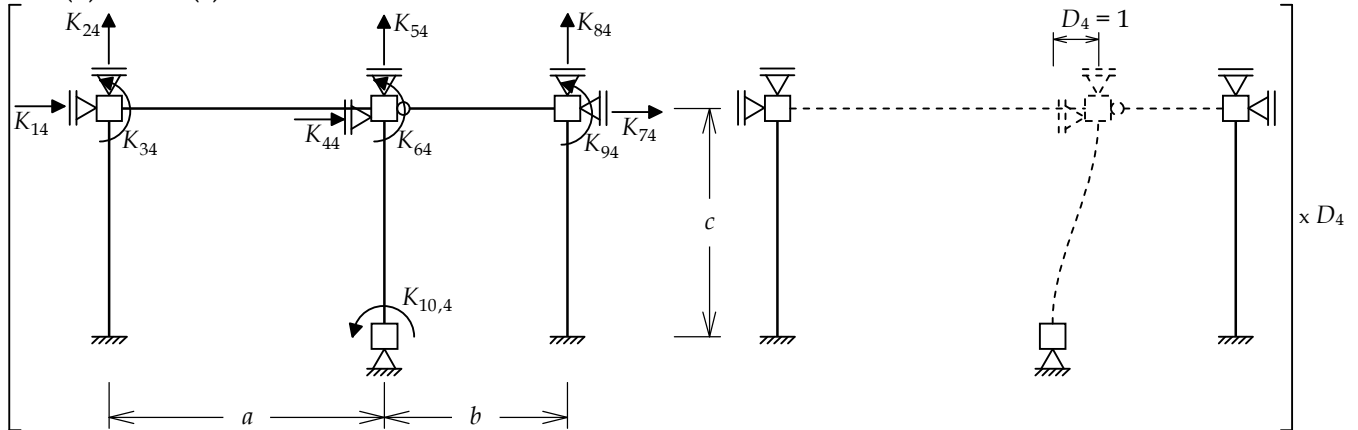
**Grau G2 - 3ª Questão - Data: 02/10/2019 - Duração: 0:50 hs - Sem Consulta**

**Item (a) - Caso (0)**

$\beta_{10} = -P$	$\beta_{40} = 0$	$\beta_{70} = 0$
$\beta_{20} = +\frac{qa}{2}$	$\beta_{50} = +\frac{qa}{2} + \frac{3qb}{8}$	$\beta_{80} = +\frac{5qb}{8}$
$\beta_{30} = +\frac{qa^2}{12}$	$\beta_{60} = -\frac{qa^2}{12}$	$\beta_{90} = -\frac{qb^2}{8}$
$\beta_{10,0} = 0$		

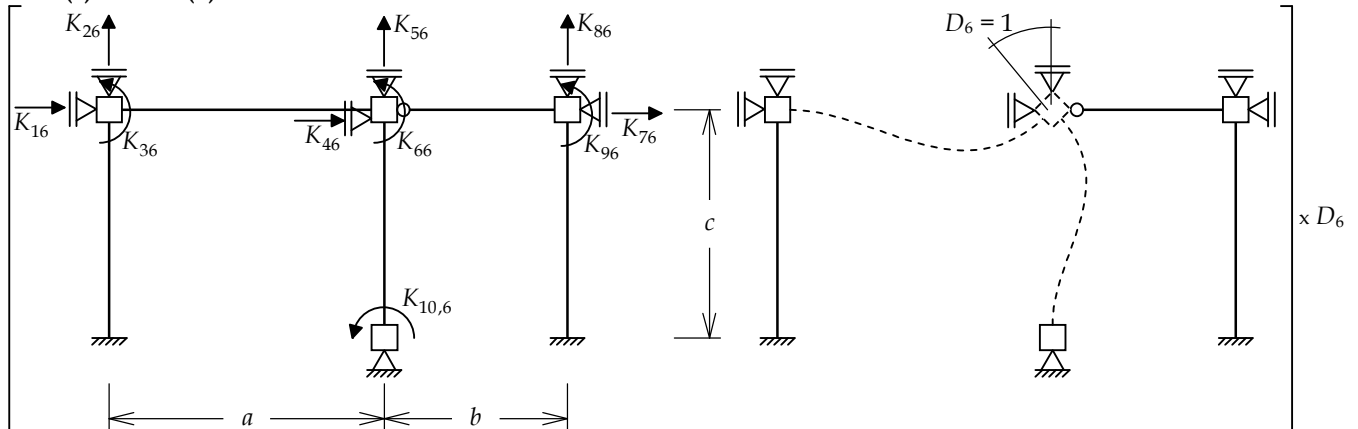


**Item (b) - Caso (4)**



$K_{14} = -\frac{EA}{a}$	$K_{24} = 0$	$K_{34} = 0$	$K_{44} = +\frac{EA}{a} + \frac{EA}{b} + \frac{12EI}{c^3}$	$K_{54} = 0$
$K_{64} = +\frac{6EI}{c^2}$	$K_{74} = -\frac{EA}{b}$	$K_{84} = 0$	$K_{94} = 0$	$K_{10,4} = +\frac{6EI}{c^2}$

**Item (c) - Caso (6)**



$K_{16} = 0$	$K_{26} = +\frac{6EI}{a^2}$	$K_{36} = +\frac{2EI}{a}$	$K_{46} = +\frac{6EI}{c^2}$	$K_{56} = -\frac{6EI}{a^2}$
$K_{66} = +\frac{4EI}{a} + \frac{4EI}{c}$	$K_{76} = 0$	$K_{86} = 0$	$K_{96} = 0$	$K_{10,6} = +\frac{2EI}{c}$

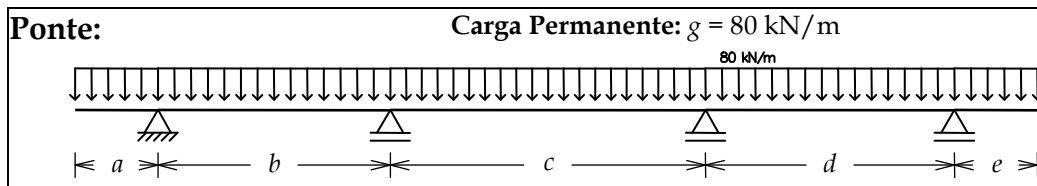
# ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 2º Semestre - 2015

## Terceiro trabalho (T3): carregamento móvel e linhas de influência

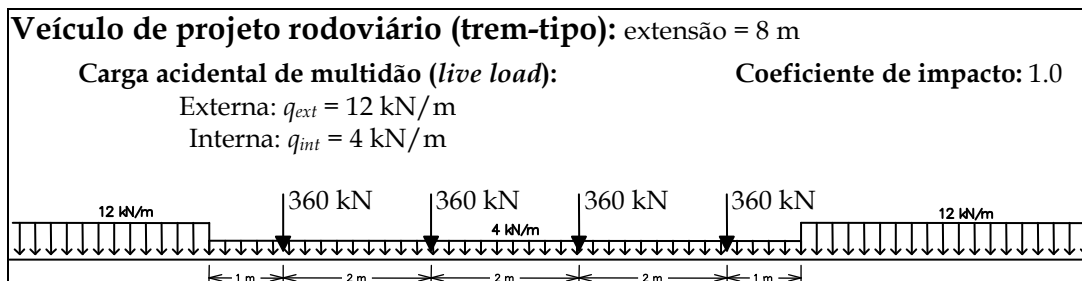
### 4ª questão do grau G2 (1.0 ponto) - Data da entrega: 30/10/2019

Utilizando o Ftool, determine as envoltórias de mínimos e máximos de esforço cortante e momento fletor para um dos modelos estruturais de ponte mostrados abaixo (cada aluno tem um modelo de ponte). Utilize o módulo de elasticidade do concreto. A seção transversal da viga da ponte está mostrada abaixo. A ponte está solicitada por uma carga permanente uniformemente distribuída  $g$  (valor indicado) e por um carregamento móvel, que é um veículo de projeto (trem-tipo) com quatro cargas concentradas e cargas acidentais de multidão uniformemente distribuídas,  $q_{int}$  e  $q_{ext}$ , conforme indicado. Veja valores para comprimentos de balanços e para os vãos da ponte (parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  e  $e$ ) na tabela na página seguinte. As envoltórias devem ser traçadas para o efeito combinado da carga permanente e do veículo de projeto. Os valores das envoltórias devem ser mostrados com um passo de visualização de 2 metros, isto é, os valores devem ser mostrados em seções dos elementos estruturais da ponte a cada 2 metros.

O trabalho consiste em escrever um relatório descrevendo, com figuras, os procedimentos para determinação das envoltórias. A nota do trabalho vai ser baseada no conteúdo e na qualidade de apresentação do relatório. No relatório deve constar uma memória de cálculo para a verificação dos valores mínimos e máximos calculados para as envoltórias de esforço cortante e de momento fletor na seção central do segundo vão da viga da ponte (vão com comprimento  $c$ ). As linhas de influência nesta seção devem ser desenhadas e devem ser indicadas as posições do carregamento móvel que determinam os valores mínimos e máximos de esforço cortante e momento fletor para esta seção. As áreas das linhas de influência, nos seus trechos positivos e negativos, devem ser calculadas com base nas ordenadas da linha de influência usando a regra dos trapézios.



Parâmetros da seção transversal										
Viga (T-shape)		<table border="1"> <tr> <td>d:</td> <td>1.20 m</td> </tr> <tr> <td>b:</td> <td>1.00 m</td> </tr> <tr> <td>tw:</td> <td>0.40 m</td> </tr> <tr> <td>tf:</td> <td>0.40 m</td> </tr> </table>	d:	1.20 m	b:	1.00 m	tw:	0.40 m	tf:	0.40 m
d:	1.20 m									
b:	1.00 m									
tw:	0.40 m									
tf:	0.40 m									





Na *homepage* da disciplina tem disponível um roteiro (formato PDF) para criação de um modelo de ponte com trem-tipo, e visualização de posições críticas do trem-tipo ao longo de linhas de influência e de envoltórias de esforços internos: [http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftp\\_pub/lfm/ftool400roteirotremtipo.pdf](http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftp_pub/lfm/ftool400roteirotremtipo.pdf). ESSE ROTEIRO É DE UMA PONTE COM PILARES, QUE É DIFERENTE DA PONTE SEM PILARES E COM BALANÇOS DESTE TRABALHO.

**Sugestão de opções de configuração no Ftool:**

Unidades: kN-m

Número de casas decimais para distâncias: 0 (nenhuma casa decimal)

Número de casas decimais para forças: 1

Número de casas decimais para momentos: 1

Número de casas decimais para cargas distribuídas: 0 (nenhuma casa decimal)

Número de casas decimais para dimensões de seção transversal (em metros): 2

Tamanho do passo (*Step*) de visualização: 2 m

Opção de desenho de valores de resultados (*Display/Result Values*): ativa.

Opção de desenho de valores de resultados em passos (*Display/Step Values*): ativa.

Opção de desenho transversal de valores de resultados (*Display/Transversal Values*): ativa.

Opção de desenho de sinais de momentos fletores (*Display/Bending Moment Signs*): ativa.

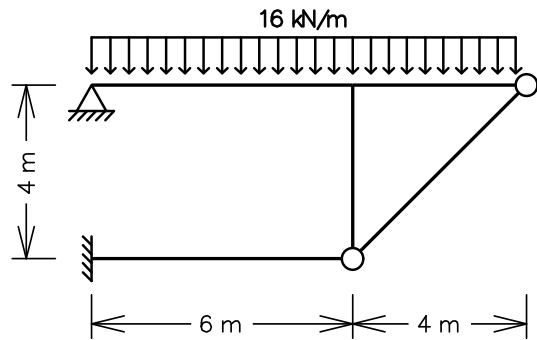
	Nome	Dimensões dos vãos [m]				
		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
1	ALEXANDER CESAR DIREITO HENRIQUES	8	26	40	34	12
2	ARTHUR DANTAS DE SOUZA	8	28	38	34	12
3	BRUNO BARBOSA DOS SANTOS GUERREIRO	8	30	36	34	12
4	CAIO NETO PENNA	8	32	34	34	12
5	CAMILA FARIA BAPTISTA	8	34	32	34	12
6	FELIPE FARIA RODRIGUES MONTEIRO	8	34	34	32	12
7	GABRIEL VIEIRA SANTOS	8	34	36	30	12
8	JOSE VICTOR MORENO PEREZ	8	34	38	28	12
9	LEONARDO DALZINI BRITO	8	34	40	26	12
10	LEONARDO TEIXEIRA DE HOLLANDA LIMA	10	40	26	34	10
11	PEDRO GRANDI BACKHEUSER	10	38	28	34	10
12	RENAN JACHELLI CORREA	10	36	30	34	10
13	SANTIAGO ARIAS LIEVANO	10	34	32	34	10

# ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 2º Semestre - 2019

Grau G2 - 5ª Questão - Data: 23/10/2019 - Duração: 1:45 hs - Sem Consulta

## 5ª Questão (2,5 pontos)

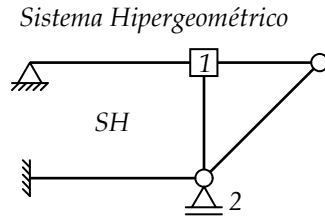
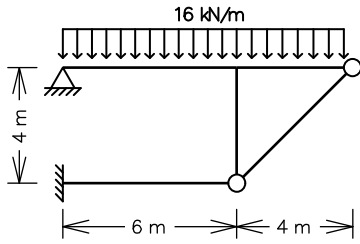
Empregando-se o Método dos Deslocamentos, obter o diagrama de momentos fletores para o quadro ao lado (barras inextensíveis). Todas as barras têm a mesma inércia à flexão  $EI = 1.8 \times 10^5 \text{ kNm}^2$ .



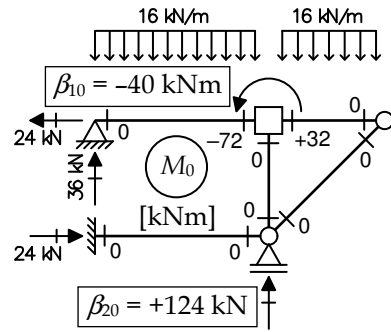
Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas:

$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} D_1 = \frac{bf - de}{ad - bc} \\ D_2 = \frac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

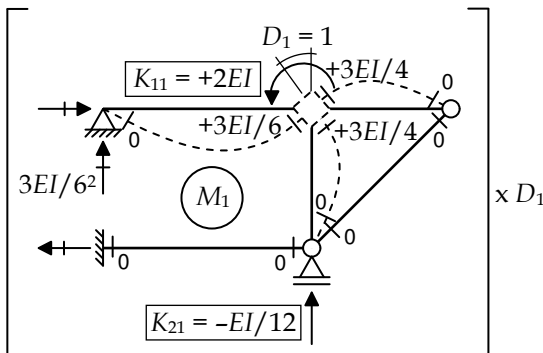
5ª Questão



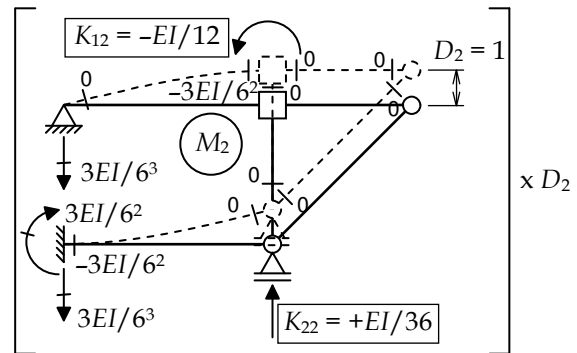
Caso (0) - Solicitação externa isolada no SH



Caso (1) - Deslocabilidade  $D_1$  isolada no SH



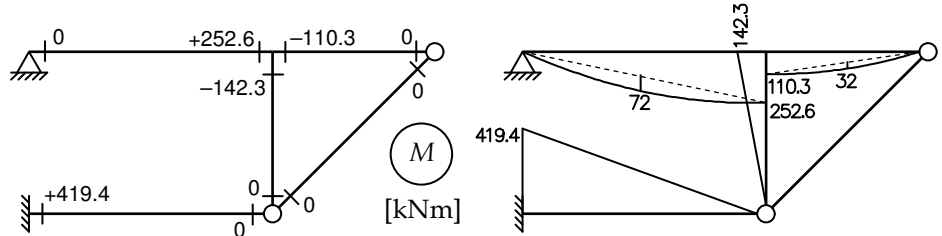
Caso (2) - Deslocabilidade  $D_2$  isolada no SH



Equações de equilíbrio:

$$\begin{cases} \beta_{10} + K_{11}D_1 + K_{12}D_2 = 0 \\ \beta_{20} + K_{21}D_1 + K_{22}D_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -40 \\ +124 \end{Bmatrix} + EI \cdot \begin{bmatrix} +2 & -1/12 \\ -1/12 & +1/36 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} D_1 = -\frac{189.714}{EI} \\ D_2 = -\frac{5033.14}{EI} \end{cases}$$

Momentos Fletores Finais:  
 $M = M_0 + M_1 \cdot D_1 + M_2 \cdot D_2$

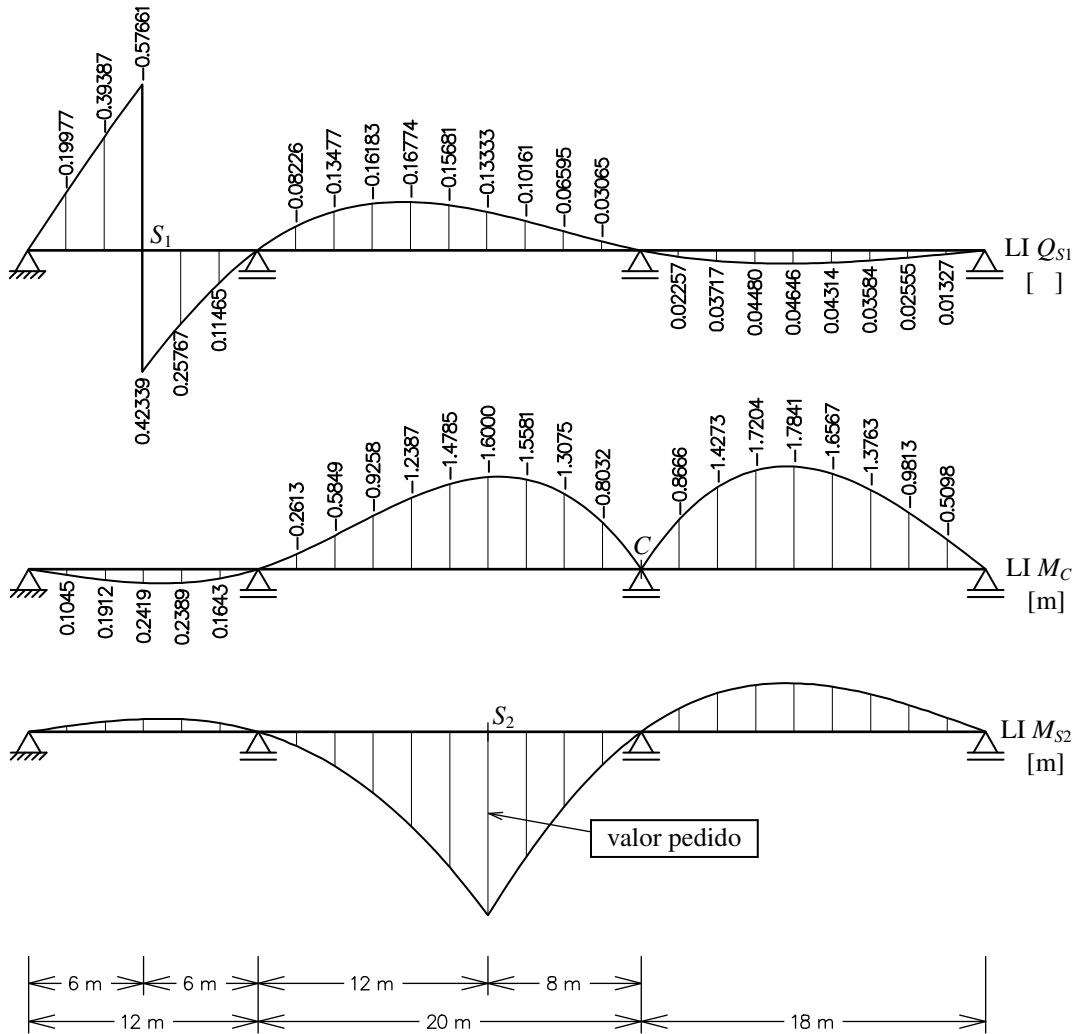


# ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 2º Semestre - 2019

## Grau G2 - 6ª Questão - Data: 04/11/2019 - Duração: 0:45 hs - Sem Consulta

### 6ª Questão (2,5 pontos)

Abaixo estão mostradas a linha de influência de esforço cortante na seção  $S_1$  e a linha de influência de momento fletor na seção C de uma ponte. Os valores das ordenadas estão indicados a cada 2 metros. Também está indicada a linha de influência de momentos fletores na seção  $S_2$ . Calcule a ordenada indicada na LI  $M_{S_2}$ .



### SOLUÇÃO

