ENG 1204 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 1º Semestre – 2022

G1-Q1: Simulação computacional do Método das Forças

1ª Questão do Grau G1 (1,0 ponto)– Data da entrega: 16/03/2022

Obtenha a programa Ftool e seu manual em "http://www.ftool.com.br". Estude o exemplo de solução de um pórtico com dois hiperestáticos pelo Método das Forças da "Aula 02: Introdução ao Método das Forças" no site da disciplina no Ambiente de Aprendizagem Online da PUC-Rio: "https://ead.puc-rio.br/login/index.php". Assista o vídeo "Aula 02 - Introdução ao Método das Forças". Siga os passos descritos nos itens abaixo e escreva um relatório. Este relatório deve conter as figuras que forem necessárias para descrever a simulação e seus valores numéricos.

Item (a) – Estrutura original a ser resolvida
Defina arbitrariamente, usando o programa Ftool, um quadro plano hiperestático com grau de hiperestaticidade no mínimo igual a quatro ($g \geq 4$) e que não contenha ciclos fechados de barras. Defina também as propriedades elásticas e geométricas das barras e as cargas que atuam no quadro. Adote todas as unidades em kN e m. Crie uma figura com a estrutura, suas dimensões e todas as propriedades e cargas utilizadas. Essa figura deve mostrar a configuração deformada da estrutura, com as componentes de reação de apoio indicadas. Anote nessa figura as componentes de reações de apoio que serão escolhidas como incógnitas da solução da estrutura pelo Método das Forças. Estas incógnitas são chamadas de *hiperestáticos* e devem ser identificadas pelo nome X_j, sendo j o número do hiperestático. Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os hiperestáticos com seus nomes, valores e unidades à mão. Anote os valores das reações de apoio (com sinal) selecionadas como incógnitas do problema para usar no item (f).

Item (b) – Sistema Principal
Obtenha uma estrutura isostática a partir da eliminação dos vínculos externos (liberação de restrições de apoio) associados aos hiperestáticos escolhidos no item (a). Essa estrutura será o Sistema Principal (SP) para a resolução do quadro original hiperestático pelo Método das Forças. Crie uma figura com o SP adotado e os hiperestáticos com seus nomes. Embora seja possível, neste trabalho não libere vínculos internos, isto é, não introduza rótulas.

Item (c) – Caso básico (0)
Para o Sistema Principal do item (b) considere valores nulos para os hiperestáticos e aplique o carregamento externo do item (a). Isto corresponde ao caso (0) do Método das Forças. Mostre a configuração deformada dessa estrutura juntamente com o carregamento aplicado, indicando as componentes de deslocamentos e rotações (com valores e unidades) nas direções dos vínculos rompidos para a criação do SP. Essas componentes de deslocamentos e rotações correspondem aos termos de carga δ_{i0}. Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os nomes, valores (com sinal) e unidades dos termos de carga à mão.

Item (d) – Casos básicos que isolam os hiperestáticos
Retire as cargas utilizadas no item (c) e carregue o Sistema Principal, alternadamente, com os hiperestáticos <u>com valores unitários</u>. Isto deve gerar um caso de carregamento para cada hiperestático (com valor unitário) atuando independentemente, sendo que cada um corresponde a um dos casos (j) do Método das Forças, onde j é o número de um hiperestático. Mostre a configuração deformada da estrutura para cada um dos hiperestáticos unitários impostos, indicando as componentes de deslocamentos e rotações (com valores, sinais e unidades) nas direções dos vínculos rompidos para a criação do SP. Essas componentes de deslocamentos e rotações correspondem aos *coeficientes de flexibilidade* δ_{ij}. Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os nomes, valores, sinais e unidades dos coeficientes de flexibilidade à mão.

Item (e) – Sistema de equações de compatibilidade
Com base nos resultados dos itens (c) e (d), monte o sistema de equações de compatibilidade que resulta da solução do quadro original pelo Método das Forças. Os valores numéricos dos coeficientes deste sistema de equações são obtidos dos termos de carga e dos coeficientes de flexibilidade.

Item (f) – Verificação da solução do sistema de equações de compatibilidade
Com base nos resultados da estrutura original do item (a), verifique se os valores dos hiperestáticos correspondem realmente à solução do sistema de compatibilidade obtido no item (e).

Item (g) – Obtenção de esforços internos
Indique os passos seguintes à solução do sistema de equações de compatibilidade que seriam necessários para complementar o cálculo dos esforços internos da estrutura pelo Método das Forças.

ENG 1204 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 1º Semestre – 2022

G1-Q2: Escolha do SP e interpretação física do termos de carga e coeficientes de flexibilidade

2ª Questão do Grau G1 (1,0 ponto) – Data da entrega: 28/03/2022

Siga os passos descritos nos itens abaixo e escreva um relatório.

Item (a) – Estrutura original
- Defina arbitrariamente um pórtico plano hiperestático com grau de hiperestaticidade no mínimo igual a três ($g \geq 3$) e mostre em uma figura.
- Indique dimensões, apoios, rótulas (não obrigatório), propriedades de material, propriedades de seção transversal e carregamento.
- Todos os parâmetros têm de ser indicados com valores e unidades consistentes. Escolha unidades e valores adequados.
- O carregamento deve ter pelo menos uma força concentrada aplicada em um nó livre (sem apoios) e pelo menos uma força uniformemente distribuída aplicada em qualquer trecho.

Item (b) – Sistema Principal e hiperestáticos
- Defina um possível Sistema Principal (SP) para a resolução do pórtico hiperestático definido no item (a) pelo Método das Forças. O SP é uma estrutura isostática obtida da estrutura hiperestática original a partir da eliminação de vínculos.
- Pelo menos um vínculo externo deve ser liberado (liberação de restrição de apoio) e pelo menos um vínculo de continuidade interna deve ser liberado.
- Mostre o SP adotado em uma figura e indique os hiperestáticos associados.
- Cada hiperestático é identificado pela seguinte notação: X_i, em que i é o seu índice.
- Para cada hiperestático, indique se é um esforço externo (reação de apoio) ou um esforço interno.
- Se for um esforço externo, indique se o hiperestático é uma força horizontal, uma força vertical ou um momento.
- Se for um esforço interno, indique se o hiperestático é um esforço axial (normal), um esforço cortante ou um momento fletor.
- Para cada hiperestático, indique sua unidade.

Item (c) – Caso básico (0)
- Mostre a configuração deformada do caso básico (0) da solução do pórtico escolhido e indique em uma figura os termos de carga.
- Cada termo de carga é identificado pela seguinte notação: δ_{i0}, em que i é o seu índice.
- Descreva as interpretações físicas dos termos de carga do caso (0) associados ao SP adotado:
    - Para cada termo de carga, indique se é um deslocamento horizontal, um deslocamento axial, um deslocamento vertical, um deslocamento transversal ou uma rotação.
    - Para cada termo de carga, indique se é uma grandeza absoluta ou relativa.
    - Para cada termo de carga, indique qual foi o efeito que o provocou.
    - Para cada termo de carga, indique sua unidade.

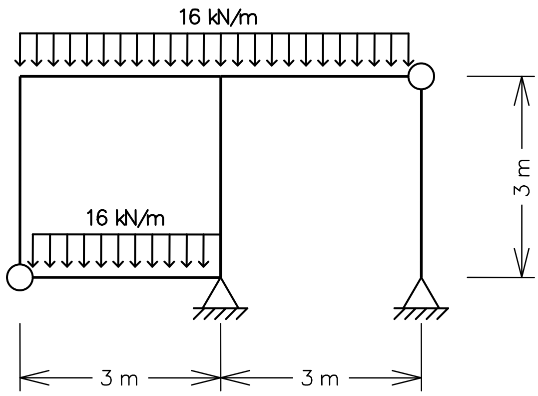
Item (d) – Demais casos básicos que isolam os efeitos dos hiperestáticos
- Para caso básico (j) da solução do pórtico escolhido, em que j é o índice do hiperestático correspondente, mostre a configuração deformada em uma figura e indique na figura os coeficientes de flexibilidade do caso básico.
- Cada coeficiente de flexibilidade é identificado pela seguinte notação: δ_{ij}, em que i e j são seus índices.
- Descreva as interpretações físicas de todos os coeficientes de flexibilidade associados ao SP adotado:
    - Para cada coeficiente de flexibilidade, indique se é um deslocamento horizontal, um deslocamento axial, um deslocamento vertical, um deslocamento transversal ou uma rotação.
    - Para cada coeficiente de flexibilidade, indique se é uma grandeza absoluta ou relativa.
    - Para cada coeficiente de flexibilidade, indique qual foi o efeito que o provocou.
    - Para cada coeficiente de flexibilidade, indique sua unidade.

Item (e) – Sistema de equações de compatibilidade
Mostre literalmente (sem valores numéricos) as equações de compatibilidade resultantes da solução do modelo estrutural escolhido pelo Método das Forças de acordo com o SP adotado. Escreva o que cada equação de compatibilidade impõe.

ENG 1204 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 1º Semestre – 2022

Grau G1 – 3ª Questão – Data: 04/04/2022 – Duração: 1:30 hs

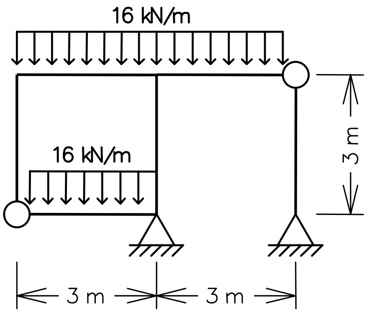
1ª Questão (5,0 pontos)
Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão EI = 2.4x10⁴ kNm².



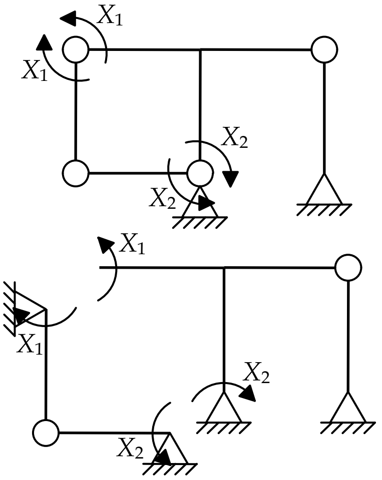
Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas:

$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \dfrac{bf - de}{ad - bc} \\[2ex] X_2 = \dfrac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

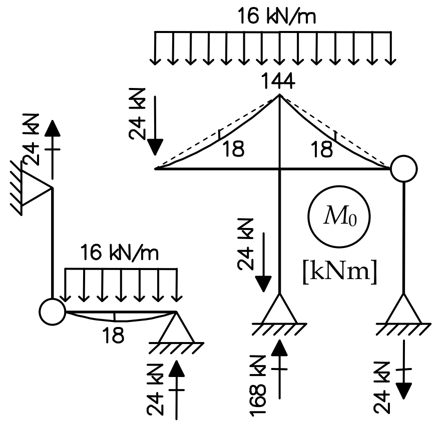
ENG 1204 – Análise de Estruturas II – 2022.1 – Grau G1 – 3ª Questão – Solução – Primeira opção de SP



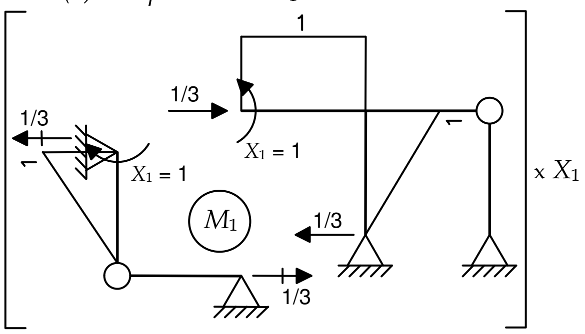
Sistema Principal (SP) e Hiperestáticos (g = 2)



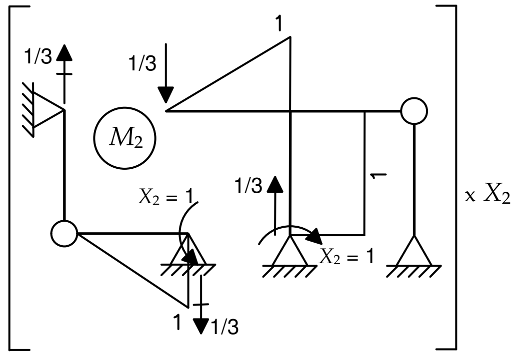
Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP



Equações de compatibilidade:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} +180 \\ +144 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} +5 & +3 \\ +3 & +5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = -29.25\ \text{kNm} \\ X_2 = -11.25\ \text{kN} \end{cases}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\cdot\left[+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 144\cdot 3 - \frac{2}{3}\cdot 1\cdot 18\cdot 3\right] = +\frac{180}{EI}$$

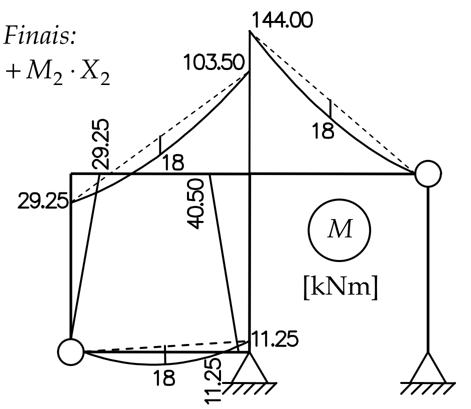
$$\delta_{20} = \frac{1}{EI}\cdot\left[+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 144\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 18\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 18\cdot 3\right] = +\frac{144}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\cdot\left[+1\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right)\right] = +\frac{5}{EI} \qquad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI}\cdot\left[+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right] = +\frac{3}{EI}$$

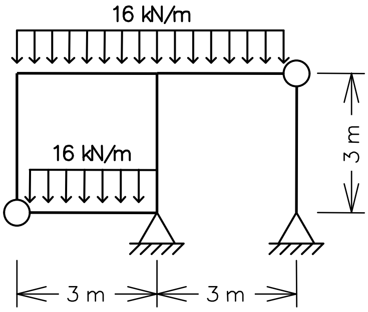
$$\delta_{22} = \frac{1}{EI}\cdot\left[+1\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right)\right] = +\frac{5}{EI}$$

Momentos Fletores Finais:

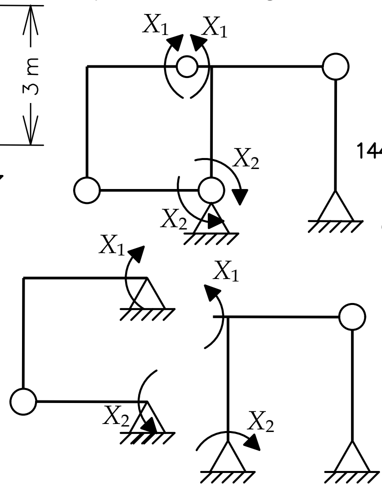
$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$$



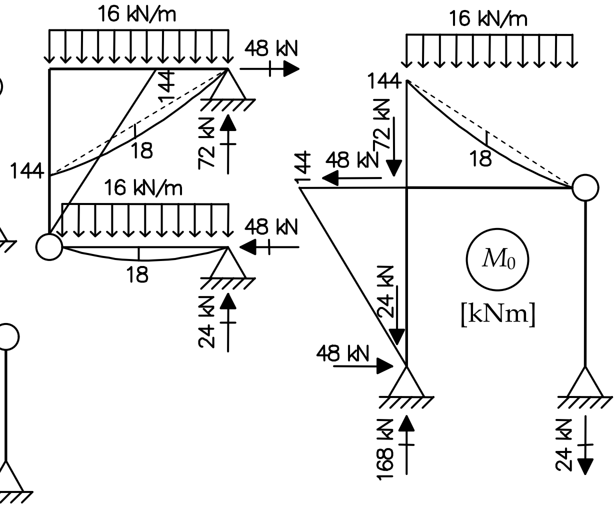
ENG 1204 – Análise de Estruturas II – 2022.1 – Grau G1 – 3ª Questão – Solução – Segunda opção de SP



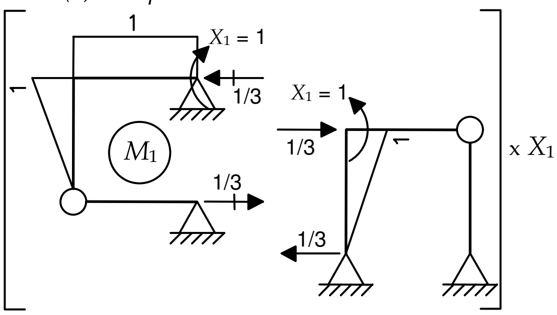
Sistema Principal (SP) e Hiperestáticos (g = 2)



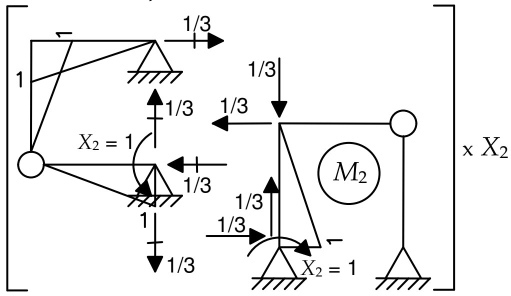
Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP



Equações de compatibilidade:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} -540 \\ +252 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} +5 & -2 \\ -2 & +4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = +103.50 \text{ kNm} \\ X_2 = -11.25 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\cdot\left[-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 144\cdot 3 - \frac{2}{3}\cdot 1\cdot 18\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 144\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 144\cdot 3\right] = -\frac{540}{EI}$$

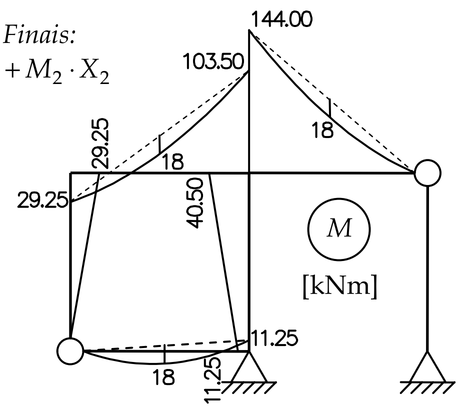
$$\delta_{20} = \frac{1}{EI}\cdot\left[+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 144\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 18\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 144\cdot 3 - \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 144\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 18\cdot 3\right] = +\frac{252}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\cdot\left[+1\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right)\right] = +\frac{5}{EI} \qquad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI}\cdot\left[-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right] = -\frac{2}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI}\cdot\left[+4\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right)\right] = +\frac{4}{EI}$$

Momentos Fletores Finais:

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$$



ENG 1204 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 1º Semestre – 2022

Grau G1 – 4ª Questão – Aplicação: 11/04/2022 – Entrega: 25/04/2022

A solução da 4ª Questão do grau G1 deve ser entregue em um arquivo em formato PDF com o seguinte nome: **`ENG1204-221-G1-Q4-matricula.pdf`**, em que **`matricula`** é o número de matrícula da aluna ou do aluno.

Além do relatório, deverá ser entregue um vídeo gravado, com imagem e áudio do próprio aluno, com uma explicação sucinta sobre a solução adotada. O arquivo do vídeo deve ter o seguinte nome **`ENG1204-221-G1-Q4-matricula.EXT`**, em que **`EXT`** é a extensão do nome do arquivo de acordo com o formato do vídeo.

Leia com atenção as instruções abaixo e os enunciados dos itens da questão.

As respostas devem ser feitas como um relatório da memória de cálculo. A qualidade da apresentação vai ser considerada na avaliação da resposta.

As soluções podem ser feitas à mão em papel e digitalizadas, criadas digitalmente através de algum editor de texto, ou por uma combinação de trechos e desenhos feitos à mão e digitalizados com trechos editados digitalmente.

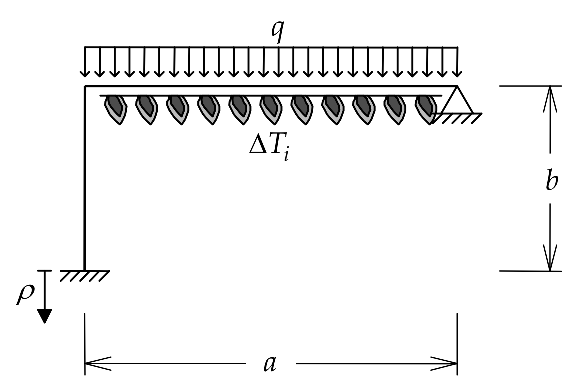
Cada aluna ou aluno tem um conjunto de valores para as dimensões do pórtico e para as solicitações externas aplicadas. Consulte pelo seu número de matrícula os dados do seu modelo na tabela fornecida.

4ª Questão (3,0 pontos)
Empregando-se o Método das Forças, obter os diagramas de momentos fletores para o pórtico plano ao lado.

O material tem módulo de elasticidade $E = 10^7$ kN/m² e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5}$ /°C. A viga e o pilar do pórtico têm uma seção transversal retangular, com altura 0.60 m e base 0.20 m.

As seguintes solicitações atuam no pórtico concomitantemente:

- Carregamento com força uniformemente distribuída q [kN/m] atuando na viga.
- Aquecimento de ΔT_i [°C] na face inferior da viga.
- Recalque vertical, para baixo, ρ [m] do apoio da esquerda (engaste).



Matrícula	a [m]	b [m]	q [kN/m]	ΔT_i [°C]	ρ [m]
1711629	4.5	2.5	10	6	0.003
1712109	5.0	2.5	10	8	0.003
1720329	5.5	2.5	10	10	0.003
1812132	6.0	2.5	10	12	0.003
1820449	6.5	2.5	12	8	0.003
1820493	4.5	3.5	12	10	0.003
1820664	5.0	3.5	12	12	0.003
1820705	5.5	3.5	12	6	0.003
1820809	6.0	3.5	14	10	0.003
1911308	4.5	3.0	14	12	0.003
1911338	5.0	3.0	14	6	0.003
1912968	5.5	3.0	14	8	0.003
1920622	6.0	3.0	16	12	0.003
2111170	6.5	3.0	16	6	0.003

Sugere-se que o programa Ftool seja utilizado tanto para auxiliar nos cálculos quanto para geração de figuras das soluções.

Opções de configuração no Ftool:

Unidades gerais adotadas: [kN-m] (configure utilizando a opção *Units* & *Number Formatting...* do menu *Options*).

Unidade para distâncias: [m]; número de casas decimais para distâncias: 1.

Unidade para forças: [kN]; número de casas decimais para forças: 2.

Unidade para momentos: [kNm]; número de casas decimais para momentos: 2.

Unidade para forças distribuídas: [kN/m]; número de casas decimais para forças distribuídas: 0.

Valor e unidade do módulo de elasticidade (E) do material (*Generic Isotropic*) para todas as barras: 10^7 kN/m² (1.0e+07 kN/m²). Coeficiente de dilatação térmica (*Thermal Expansion Coeff.*): 0.00001 /°C (10^{-5} /°C).

Seção transversal retangular com altura 0.60 m e base 0.20 m para todas as barras:
Valor e unidade da área da seção transversal (A): 0.12 m².
Valor e unidade do momento de inércia da seção transversal (I): 0.0036 m⁴.
Os demais parâmetros de seção transversal não são utilizados nesta solução. Deixar os valores *default* nulos.

Todas as barras do modelo estrutural são consideradas com deformação axial e sem deformação por cisalhamento (efeito cortante). Para configurar isso no Ftool, no menu *Deformation Constraints* selecione *Flexible Member* e deixe a opção *Axial Deformation* selecionada e a opção *Shear Deformation* NÃO selecionada. Aplique isso para todas as barras.

Item (4.a) – Sistema Principal (não vale ponto)
Obtenha uma estrutura isostática a partir da eliminação dos vínculos externos (liberação de restrições de apoio) e/ou vínculos internos de continuidade de rotação (introdução de rótulas). Essa estrutura será o Sistema Principal (SP) para a resolução do quadro original hiperestático pelo Método das Forças. O SP e os hiperestáticos associados aos vínculos eliminados devem ser indicados pelo nome X_j, sendo j o número do hiperestático.

Item (4.b) – Caso (0) – Solicitações externas (carregamento, variação de temperatura e recalque de apoio) isoladas no Sistema Principal (1,0 ponto)
(4.b.1) Mostre em uma figura a configuração deformada do caso (0) com escala de deslocamentos exagerada, indicando as componentes de deslocamentos e rotações nas direções dos vínculos rompidos para a criação do SP. Essas componentes de deslocamentos e rotações correspondem aos *termos de carga*, com nomes δ_{i0}, sendo i o número do hiperestático correspondente. Os termos de carga devem ser indicados na figura pelos seus nomes. Não precisa indicar valor ou unidade.
(4.b.2) Mostre em uma figura, juntamente com a solicitação externa, as reações de apoio para o caso básico (0), com valores e unidades.
(4.b.3) Mostre em figuras os diagramas de esforço normal (axial) e de momentos fletores do caso (0). As unidades dos esforços normais e dos momentos fletores devem ser indicadas. O diagrama de momentos fletores deve ser traçado desenhando as ordenadas do lado da fibra tracionada em cada seção transversal. Os valores dos momentos fletores devem ser indicados nas extremidades de todas as barras e, para a barra carregada, o diagrama de momento fletor para o carregamento de viga biapoiada da barra deve ser indicado "pendurado" a partir da linha reta que une os valores das extremidades da barra. Indique o sinal dos valores dos esforços normais e dos momentos fletores nos diagramas.

Item (4.c) – Casos básicos dos hiperestáticos isolados no Sistema Principal (1,0 ponto)
Carregue o Sistema Principal, alternadamente, com os hiperestáticos <u>com valores unitários</u>. Isto deve gerar um caso de carregamento para cada hiperestático (com valor unitário) atuando independentemente, sendo que cada um corresponde a um dos casos básicos (j) do Método das Forças, onde j é o número de um hiperestático.
(4.c.1) Mostre figuras com a configuração deformada do SP, com escala de deslocamentos exagerada, para cada um dos hiperestáticos unitários impostos, indicando as componentes de deslocamentos e rotações nas direções dos vínculos rompidos para a criação do SP. Essas componentes de deslocamentos e rotações cor-

respondem aos *coeficientes de flexibilidade*, com nomes δ_{ij}. Os coeficientes de flexibilidade devem ser indicados na figuras pelos seus nomes. Não precisa indicar valor ou unidade.

(4.c.2) Mostre em figuras os diagramas de esforço normal (axial) e de momentos fletores dos casos básicos (*j*). Os diagramas de momentos fletores devem ser traçados desenhando as ordenadas do lado da fibra tracionada em cada seção transversal. Os valores dos esforços normais e dos momentos fletores devem ser indicados nas extremidades de todas a barras. Indique o sinal dos valores dos esforços normais e dos momentos fletores nos diagramas.

Item (4.d) – Sistema de equações de compatibilidade (0,5 ponto)

Com base nos resultados dos itens (4.b) e (4.c), monte o sistema de equações de compatibilidade que resulta da solução do quadro original pelo Método das Forças. Os termos de carga devem ser calculados por parcelas, cada uma correspondendo a um tipo de solicitação externa (carregamento, variação de temperatura e recalque de apoio). As expressões numéricas dos termos de carga e dos coeficientes de flexibilidade deste sistema de equações devem ser mostradas integralmente utilizando o Princípio das Forças Virtuais (PFV), considerando as parcelas de energia de deformação axial e por flexão. Os valores numéricos dos termos de carga e dos coeficientes de flexibilidade devem ser calculados e indicados com unidades. Resolva o sistema de equações de compatibilidade e indique os valores calculados para os hiperestáticos com sinal e unidades. Demonstre que os valores dos hiperestáticos correspondem realmente à solução do sistema de equações de compatibilidade comparando com os resultados da estrutura hiperestática original.

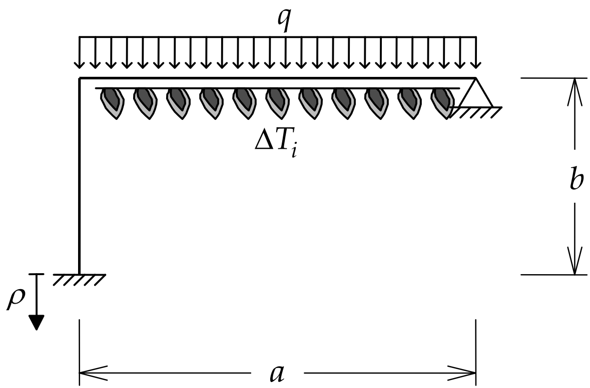
Item (4.e) – Momentos fletores finais (0,5 ponto)

Mostre em uma figura o diagrama de momentos fletores do pórtico hiperestático original. Selecione um valor do diagrama de momentos fletores que recebe influência do caso básico (0) e de todos os demais casos básicos. Demonstre que este valor é obtido pela superposição dos valores correspondentes de cada um dos casos básicos, considerando os valores dos hiperestáticos com sinais.

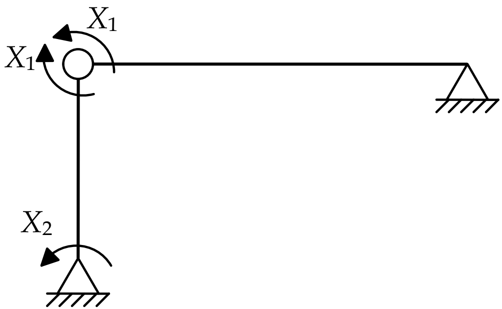
ENG 1204 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 1º Semestre – 2022
Grau G1 – 4ª Questão

Empregando-se o Método das Forças, obter os diagramas de momentos fletores para o pórtico plano abaixo. As solicitações indicadas atuam no pórtico concomitantemente.

O material tem módulo de elasticidade $E = 10^7$ kN/m² e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5}$ /°C. A viga e o pilar do pórtico têm uma seção transversal retangular, com altura 0.60 m e base 0.20 m.



Sistema Principal adotado e hiperestáticos



Sistema de equações de compatibilidade

Equações de compatibilidade:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0 \end{cases}$$

Termos de carga:

$$\delta_{10} = \delta_{10}^{q} + \delta_{10}^{T} + \delta_{10}^{\rho}$$

$$\delta_{20} = \delta_{20}^{q} + \delta_{20}^{T} + \delta_{20}^{\rho}$$

Caso (0) – Solicitação externa de carga aplicada isolada no Sistema Principal

Termo de carga δ_{10}^{q} : rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula associada ao hiperestático X_1 provocada pela carga aplicada.

Termo de carga δ_{20}^{q} : rotação absoluta da seção do apoio da esquerda associada ao hiperestático X_2 provocada pela carga aplicada.

Caso (0) – Solicitação externa de variação de temperatura isolada no Sistema Principal

Termo de carga δ_{10}^{T}: rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula associada ao hiperestático X_1 provocada pela variação de temperatura.

Termo de carga δ_{20}^{T}: rotação absoluta da seção do apoio da esquerda associada ao hiperestático X_2 provocada pela variação de temperatura.

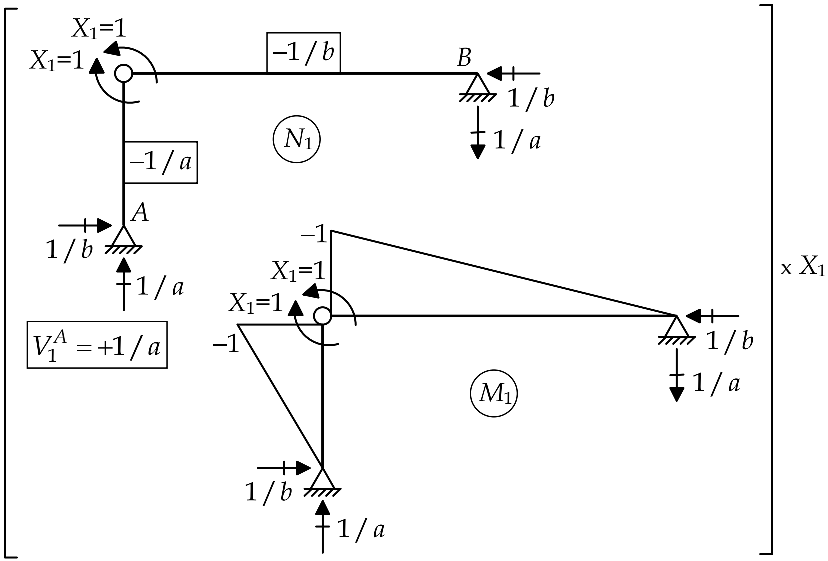
Caso (0) – Solicitação externa de recalque de apoio isolado no Sistema Principal

Termo de carga δ_{10}^{ρ} : rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula associada ao hiperestático X_1 provocada pelo recalque de apoio.

Termo de carga δ_{20}^{ρ} : rotação absoluta da seção do apoio da esquerda associada ao hiperestático X_2 provocada pelo recalque de apoio.

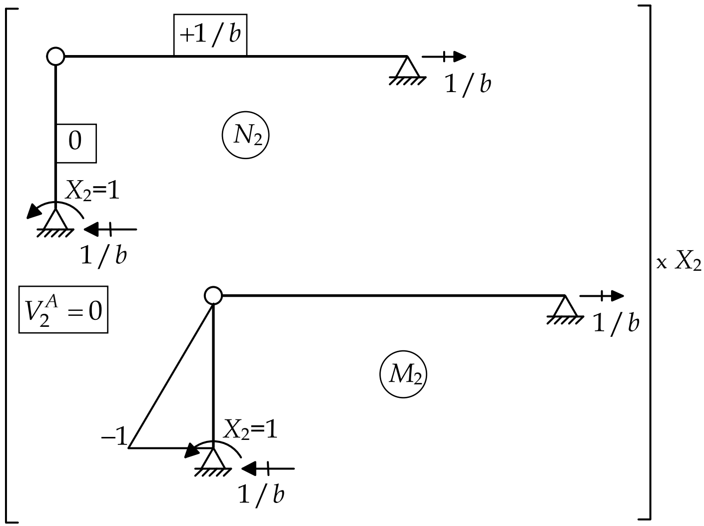
Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP

Diagrama de esforços normais e diagrama de momentos fletores



Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP

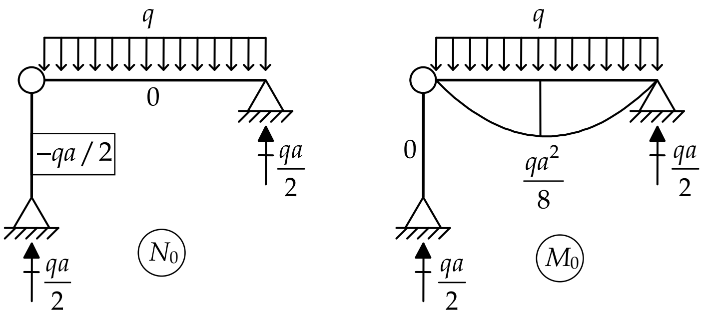
Diagrama de esforços normais e diagrama de momentos fletores



Caso (0) – Termos de carga para carga aplicada pelo PFV

$$\delta_{i0} = \int_{estrutura} \frac{N_i N_0}{EA} dx + \int_{estrutura} \frac{M_i M_0}{EI} dx = \sum_{barras} \left[\frac{1}{EA} N_i N_0 l \right] + \sum_{barras} \left[\frac{1}{EI} \int_{barra} M_i M_0 dx \right]$$

Diagrama de esforços normais e diagrama de momentos fletores



Caso (0) – Termos de carga para carga aplicada pelo PFV

$$\delta_{10}^{q} = \frac{1}{EA}\cdot\left[\left(-\frac{1}{a}\right)\cdot\left(-\frac{qa}{2}\right)\cdot b\right] + \frac{1}{EI}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{qa^2}{8}\cdot a\right]$$

$$\boxed{\delta_{10}^{q} = \frac{qb}{2EA} - \frac{qa^3}{24EI}}$$

$$\boxed{\delta_{20}^{q} = \frac{1}{EA}\cdot[0] + \frac{1}{EI}\cdot[0] = 0}$$

Caso (0) – Termos de carga para variação de temperatura pelo PFV

$$N_0^T = 0 \qquad\qquad M_0^T = 0$$

$$\boxed{\delta_{i0}^T = \int_{anel} N_i \cdot du_0^T + \int_{anel} M_i \cdot d\theta_0^T} \quad \boxed{du_0^T = \alpha \cdot \Delta T_{CG} dx} \quad \boxed{d\theta_0^T = \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx}$$

$$\boxed{\delta_{i0}^T = \sum_{barras} \left[\alpha \cdot \Delta T_{CG} \cdot \int N_i \cdot dx \right]_{barra} + \sum_{barras} \left[\frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} \cdot \int M_i \cdot dx \right]_{barra}}$$

$\alpha = 10^{-5}$ /°C Altura da seção transversal: $h = 0.60$ m

Centro de gravidade da seção transversal se situa no meio da altura (todas as barras do anel) $\Rightarrow \Delta T_{CG} = (\Delta T_i + \Delta T_s)/2 \;\Rightarrow \Delta T_{CG} = +\Delta T_i / 2$

Barra horizontal (viga): ΔT_i $\qquad \Delta T_s = 0°C$

Barra vertical (pilar): $\Delta T_i = 0°C \qquad \Delta T_s = 0°C$

Caso (0) – Termos de carga para variação de temperatura pelo PFV

$$\delta_{10}^{T} = \alpha \cdot \frac{\Delta T_i}{2} \cdot \left[\frac{-1}{b} \cdot a \right] + \alpha \cdot \frac{\Delta T_i}{0.60} \cdot \left[\frac{-1 \cdot a}{2} \right] \qquad \boxed{\delta_{10}^{T} = -\alpha \cdot \Delta T_i \cdot \left[\frac{a}{2b} + \frac{5a}{6} \right]}$$

$$\delta_{20}^{T} = \alpha \cdot \frac{\Delta T_i}{2} \cdot \left[\frac{+1}{b} \cdot a \right] + \alpha \cdot \frac{\Delta T_i}{0.60} . [0] \qquad \boxed{\delta_{20}^{T} = \alpha \cdot \Delta T_i \cdot \left[\frac{a}{2b} \right]}$$

Caso (0) – Termos de carga para recalque de apoio no caso (0)

$$N_0^{\rho} = 0 \qquad M_0^{\rho} = 0$$

Recalques provocam deslocamentos de corpo rígido (sem deformações ou esforços internos) nas barras do Sistema Principal isostático. Portanto, os deslocamentos relativos internos são nulos:

$$\boxed{du_0^{\rho} = 0} \qquad \boxed{dh_0^{\rho} = 0} \qquad \boxed{d\theta_0^{\rho} = 0} \qquad \Rightarrow \boxed{\overline{U} = 0}$$

Por outro lado, o trabalho das forças externas do sistema virtual - caso (*i*) – deve considerar também o trabalho da reação vertical V_i^A no apoio que sofre o recalque vertical $\rho_0^A = -\rho$:

$$\overline{W_E} = 1 \cdot \delta_{i0}^{\rho} + V_i^A \cdot \rho_0^A$$

$$\text{PFV: } \overline{W_E} = \overline{U} \Rightarrow \boxed{\delta_{i0}^{\rho} = V_i^A \cdot \rho}$$

$$\boxed{\delta_{10}^{\rho} = V_1^A \cdot \rho = +\frac{\rho}{a}} \qquad \boxed{\delta_{20}^{\rho} = V_2^A \cdot \rho = 0}$$

Coeficientes de flexibilidade

$$\delta_{ij} = \int_{estrutura} \frac{N_i N_j}{EA} dx + \int_{estrutura} \frac{M_i M_j}{EI} dx = \sum_{barras} \left[\frac{1}{EA} N_i N_j l \right] + \sum_{barras} \left[\frac{1}{EI} \int_{barra} M_i M_j dx \right]$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA} \cdot \left[\left(\frac{-1}{b} \right) \cdot \left(\frac{-1}{b} \right) \cdot a + \left(\frac{-1}{a} \right) \cdot \left(\frac{-1}{a} \right) \cdot b \right] + \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot a + \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot b \right]$$

$$\boxed{\delta_{11} = \frac{1}{EA} \cdot \left[\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \right] + \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{a}{3} + \frac{b}{3} \right]}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EA} \cdot \left[\left(\frac{-1}{b} \right) \cdot \left(\frac{+1}{b} \right) \cdot a \right] + \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{6} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot b \right]$$

$$\boxed{\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EA} \cdot \left[\frac{-a}{b^2} \right] + \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{b}{6} \right]}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EA} \cdot \left[\left(\frac{+1}{b} \right) \cdot \left(\frac{+1}{b} \right) \cdot a \right] + \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot b \right]$$

$$\boxed{\delta_{22} = \frac{1}{EA} \cdot \left[\frac{a}{b^2} \right] + \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{b}{3} \right]}$$

Sistema de Equações de Compatibilidade

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{12} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{12} & \delta_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = - \frac{1}{\delta_{11}\,\delta_{22} - \delta_{12}{}^2} \begin{bmatrix} \delta_{22} & -\delta_{12} \\ -\delta_{12} & \delta_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix}$$

Solução das Equações de Compatibilidade

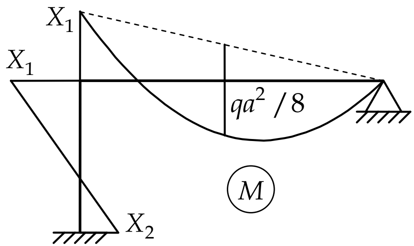
Propriedades mecânicas

E	10000000
a	0.00001
base	0.2
altura	0.6
area	0.12
Inercia	0.0036

						Fatores de carga								Coeficientes de flexibilidade			Hiperestáticos	
Matrícula	a [m]	b [m]	q [kN/m]	ΔT_i [°C]	ρ [m]	δ_{10}^{q}	δ_{10}^{T}	δ_{10}^{ρ}	δ_{10}	δ_{20}^{q}	δ_{20}^{T}	δ_{20}^{ρ}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	$X1$	$X2$
1711629	4.5	2.5	10	6	0.003	-0.001044271	-0.000279	0.000666667	-0.000656604	0	0.000054	0	0.000054	6.55177E-05	1.09741E-05	2.37481E-05	11.28	-7.48
1712109	5	2.5	10	8	0.003	-0.001436343	-0.000413333	0.0006	-0.001249676	0	0.00008	0	0.00008	7.01944E-05	1.09074E-05	2.38148E-05	19.73	-12.40
1720329	5.5	2.5	10	10	0.003	-0.00191522	-0.000568333	0.000545455	-0.001938099	0	0.00011	0	0.00011	7.48763E-05	1.08407E-05	2.38815E-05	28.42	-17.51
1812132	6	2.5	10	12	0.003	-0.002489583	-0.000744	0.0005	-0.002733583	0	0.000144	0	0.000144	7.95616E-05	1.07741E-05	2.39481E-05	37.45	-22.86
1820449	6.5	2.5	12	8	0.003	-0.003801736	-0.000537333	0.000461538	-0.003877531	0	0.000104	0	0.000104	8.42493E-05	1.07074E-05	2.40148E-05	49.37	-26.34
1820493	4.5	3.5	12	10	0.003	-0.001248125	-0.000439286	0.000666667	-0.001020744	0	6.42857E-05	0	6.42857E-05	7.45242E-05	1.58976E-05	3.27135E-05	15.75	-9.62
1820664	5	3.5	12	12	0.003	-0.001718611	-0.000585714	0.0006	-0.001704325	0	8.57143E-05	0	8.57143E-05	7.91605E-05	1.58636E-05	3.27475E-05	24.43	-14.45
1820705	5.5	3.5	12	6	0.003	-0.002293264	-0.000322143	0.000545455	-0.002069952	0	4.71429E-05	0	4.71429E-05	8.38039E-05	1.58296E-05	3.27816E-05	27.48	-14.71
1820809	6	3.5	14	10	0.003	-0.003479583	-0.000585714	0.0005	-0.003565298	0	8.57143E-05	0	8.57143E-05	8.84521E-05	1.57955E-05	3.28156E-05	44.61	-24.08
1911308	4.5	3	14	12	0.003	-0.001459063	-0.00054	0.000666667	-0.001332396	0	0.00009	0	0.00009	6.99846E-05	1.34722E-05	2.81944E-05	21.64	-13.53
1911338	5	3	14	6	0.003	-0.002007963	-0.0003	0.0006	-0.001707963	0	0.00005	0	0.00005	7.4637E-05	1.34259E-05	2.82407E-05	25.37	-13.83
1912968	5.5	3	14	8	0.003	-0.002678391	-0.00044	0.000545455	-0.002572937	0	7.33333E-05	0	7.33333E-05	7.92956E-05	1.33796E-05	2.8287E-05	35.74	-19.50
1920622	6	3	16	12	0.003	-0.00398	-0.00072	0.0005	-0.0042	0	0.00012	0	0.00012	8.39583E-05	1.33333E-05	2.83333E-05	54.79	-30.02
2111170	6.5	3	16	6	0.003	-0.005065648	-0.00039	0.000461538	-0.00499411	0	0.000065	0	0.000065	8.8624E-05	1.3287E-05	2.83796E-05	60.98	-30.84

Diagrama de Momentos Fletores Finais

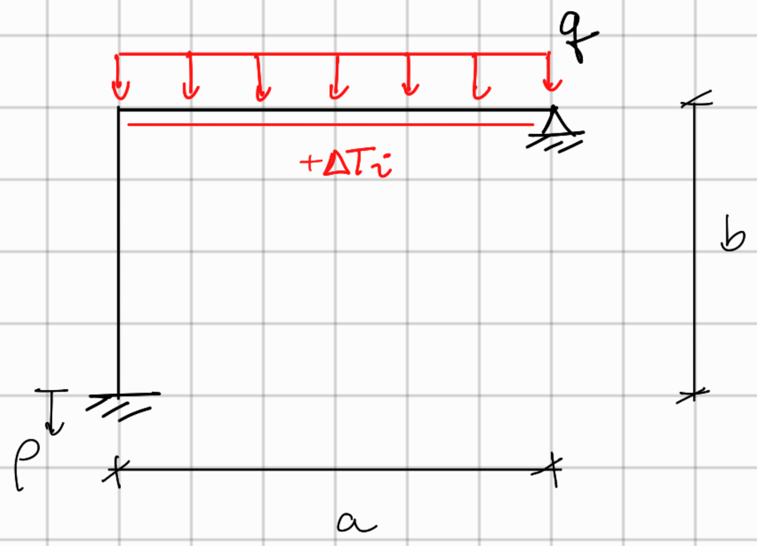
Momentos Fletores Finais: $M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$



Grau 01 - Questão 04

Verificação

Empregando o método das Forças, obter os diagramas de momentos fletores para o pórtico plano.



Propriedades mecânicas:

$E = 10^7 \ kN/m^2$

$\alpha = 10^{-5} / °C$

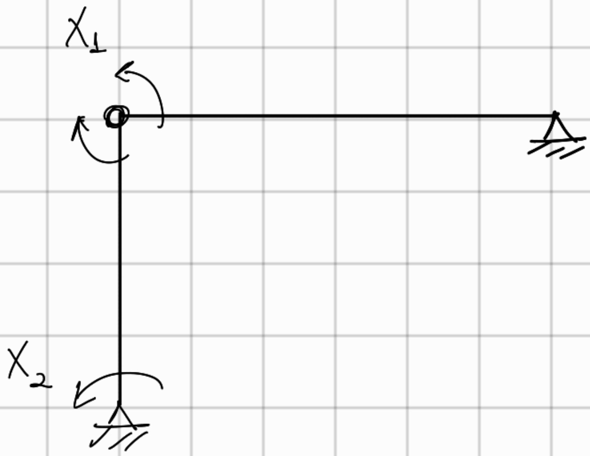
Seção: $0,2 \times 0,6$ m

$A = 0,12 \ m^2$

$I_z = 0,0036 \ m^4$

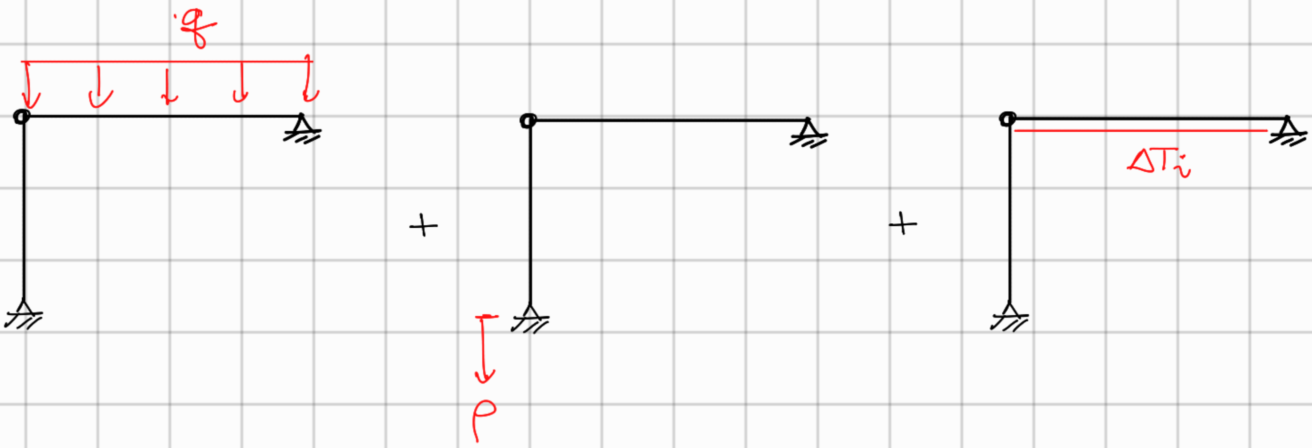
RESOLUÇÃO:

① Sistema Principal adotado:



Grau de hiperasticidade: 2

② caso básico 0: solicitação externa isolada no sistema principal



a) ação da carga distribuída q:

Diagrama de momento fletor

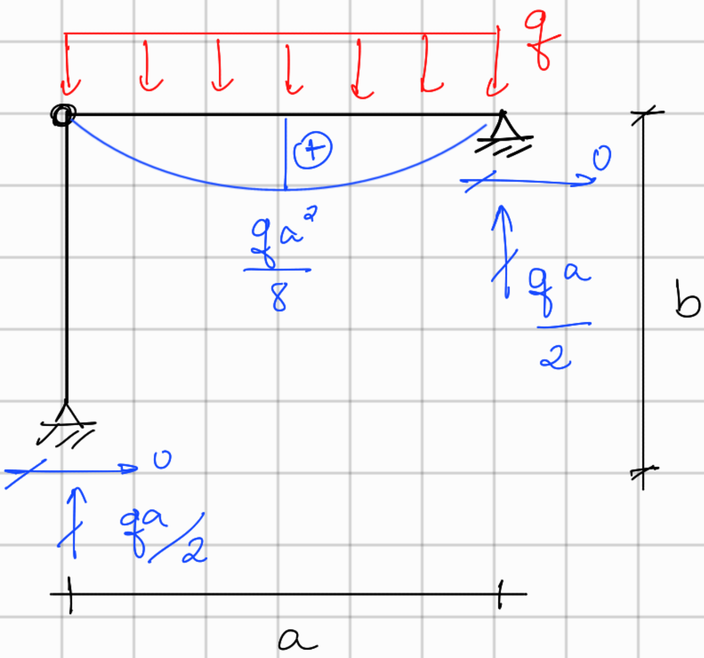
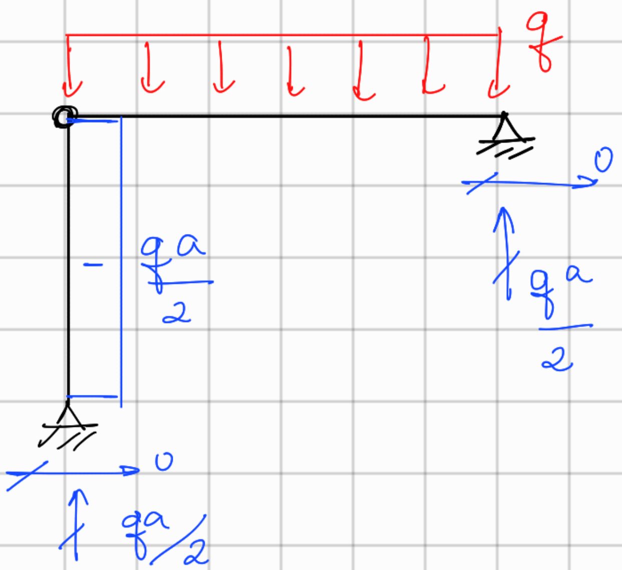
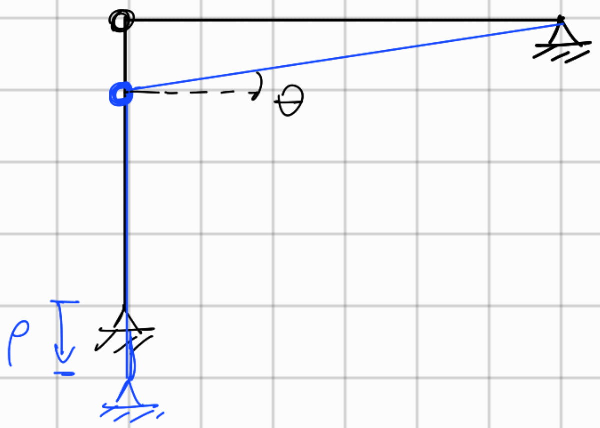


Diagrama de esforço normal



b) ação do recalque de apoio:



Estrutura sofre um deslocamento de corpo rígido, ou seja, os esforços internos <u>não</u> são mobilizados.

considerando que o valor do recalque é pequeno:

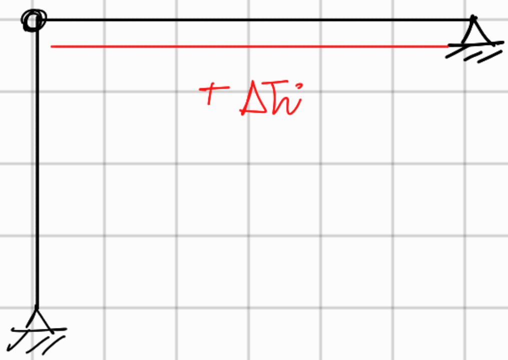
$\theta \simeq \tan\theta$ (valor de θ é pequeno)

$\theta = \dfrac{\rho}{a}$ → Esse é o termo de carga para o recalque de apoio no caso básico 0 associado ao hiperestático 1 (δ_{10}^{ρ})

Tem-se ainda que: $\delta_{20}^{\rho} = 0$ (a barra vertical não tem sua inclinação alterada)

c) ação da variação de temperatura

É aplicado um aquecimento nas fibras inferiores da viga:



como a estrutura é isostática, a variação de temperatura não promove esforços internos.

É importante definir:

- Variação de temperatura no centro de gravidade: $\Delta T_{CG} = \dfrac{\Delta T_i + \Delta T_s}{2}$

$$\Delta T_{CG} = \frac{\Delta T_i}{2}$$

③ caso básico 1: Hiperestático X_1 isolado no SP

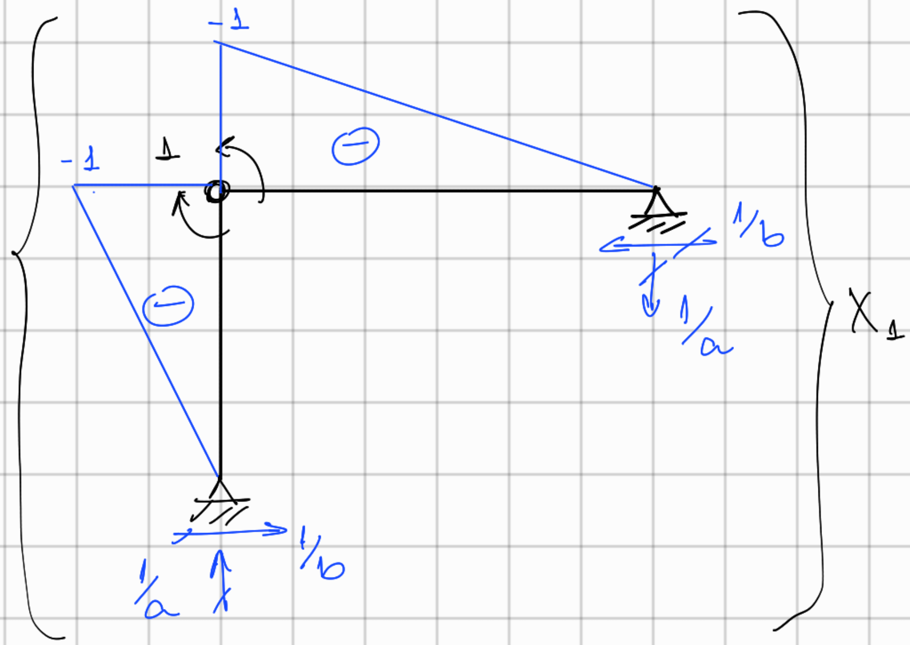


Diagrama de momento fletor

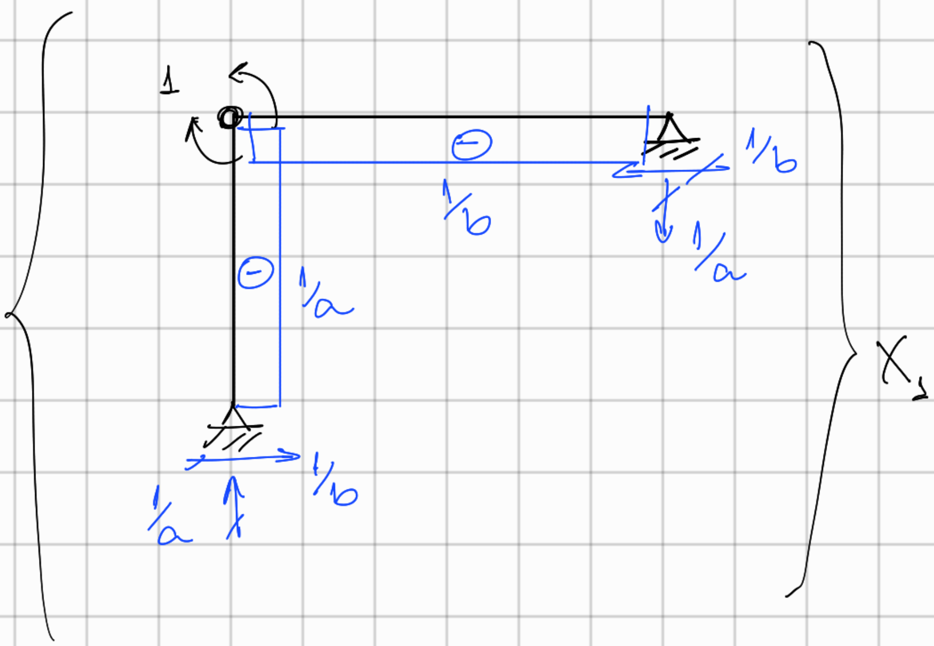


Diagrama de esforço normal

③ caso básico 2: Hiperestático X_2 isolado no SP

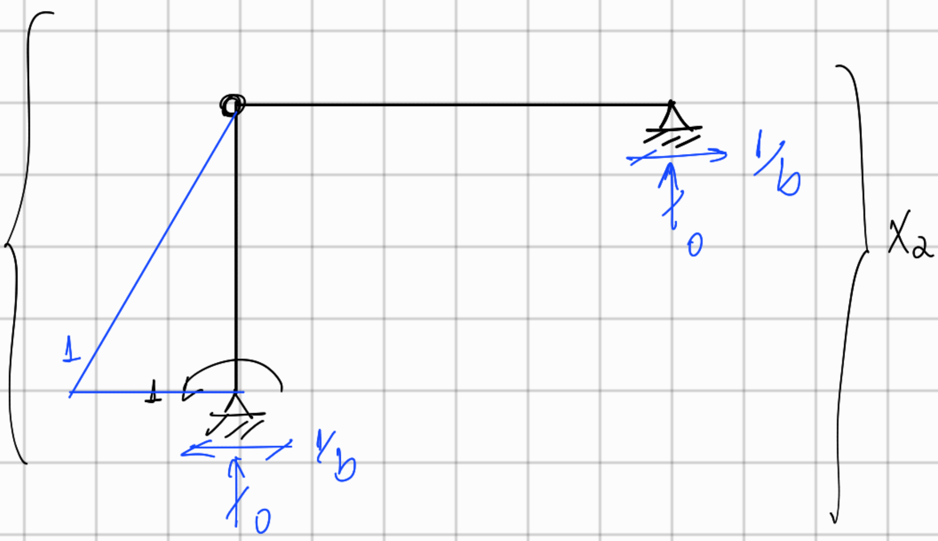
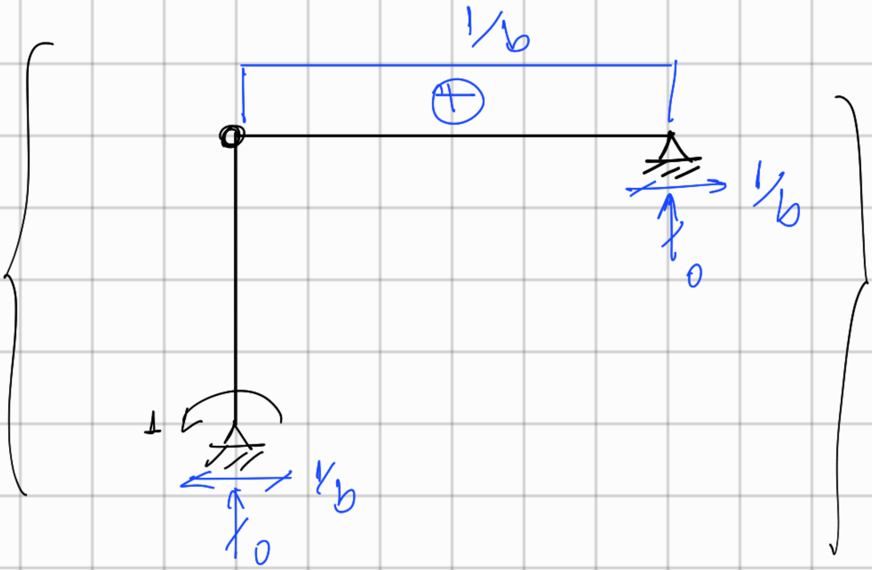


Diagrama de momento fletor



X_2 Diagrama de esforço normal

4) Obtenção dos termos de carga:

$$\delta_{10} = \delta_{10}^{q} + \delta_{10}^{P} + \delta_{10}^{T}$$
$$\delta_{20} = \delta_{20}^{q} + \delta_{20}^{P} + \delta_{20}^{T}$$

a) $$\delta_{i0}^{q} = \int_{est.} \frac{N_i N_0}{EA}\,dx + \int_{est} \frac{M_i M_0}{EI_z}\,dx$$

$$\delta_{10}^{q} = \frac{1}{EA}\left(-\frac{1}{a}\right)\left(-\frac{qa}{2}\right)b + \frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{3}(-1)\left(\frac{q\cdot a^2}{8}\right)\cdot a\right]$$

$$\boxed{\delta_{10}^{q} = \frac{qb}{2EA} - \frac{qa^3}{24EI_z}}$$

$$\boxed{\delta_{20}^{q} = 0}$$

b) δ_{i0}^{P}

$$\boxed{\begin{aligned}\delta_{10}^{P} &= P/a \\ \delta_{20}^{P} &= 0\end{aligned}}$$

c) $$\delta_{10}^{T} = \int_{est} N_i \alpha \Delta T_{CG_i} \, dx + \int_{est} M_i \alpha \frac{(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx$$

$$\delta_{10}^{T} = \alpha \left(\frac{\Delta T_i}{2} \right) \left(-\frac{1}{b} \right) a + \alpha \cdot \frac{\Delta T_i}{0{,}60} \left(\frac{(-1) \cdot a}{2} \right)$$

$$\delta_{10}^{T} = -\alpha \Delta T_i \, a \left(\frac{1}{2b} + \frac{1}{1{,}2} \right)$$

$$\boxed{\delta_{10}^{T} = -\alpha \Delta T_i \, a \left(\frac{1}{2b} + \frac{5}{6} \right)}$$

$$\delta_{20}^{T} = \alpha \left(\frac{\Delta T_i}{2} \right) \left(\frac{1}{b} \right) a$$

$$\boxed{\delta_{20}^{T} = \alpha \Delta T_i \frac{a}{2b}}$$

$$\therefore \delta_{10} = \frac{q b}{2EA} - \frac{q a^3}{24 EI_z} + \frac{\rho}{a} - \alpha \Delta T_i \, a \left(\frac{1}{2b} + \frac{5}{6} \right)$$

$$\delta_{20} = \alpha \Delta T_i \frac{a}{2b}$$

5 Obtenção dos coeficientes de flexibilidade

$$\delta_{ij} = \int_{est.} \frac{N_i N_j}{EA} dx + \int_{est} \frac{M_i M_j}{EI_z} dx$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA}\left[\left(-\frac{1}{b}\right)\left(-\frac{1}{b}\right)a + \left(-\frac{1}{a}\right)\left(-\frac{1}{a}\right)b\right]$$

$$+ \frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{3}(-1)(-1)\,a + \frac{1}{3}(-1)(-1)\,b\right]$$

$$\Rightarrow \delta_{11} = \frac{1}{EA}\left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}\right) + \frac{1}{EI_z}\left(\frac{a}{3} + \frac{b}{3}\right)$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EA}\left[\left(\frac{-1}{b}\right)\left(\frac{1}{b}\right)a\right] + \frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{6}(-1)(-1)\,b\right]$$

$$\Rightarrow \delta_{12} = \frac{1}{EA}\left(-\frac{a}{b^2}\right) + \frac{1}{EI_z}\left(\frac{b}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \delta_{21} = \delta_{12}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EA}\left[\left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b}\right)a\right] + \frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{3}(-1)(-1)\,b\right]$$

$$\Rightarrow \delta_{22} = \frac{1}{EA}\left(\frac{a}{b^2}\right) + \frac{1}{EI_z}\left(\frac{b}{3}\right)$$