ENG 1204 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 1º Semestre – 2021

G1-Q1: Simulação computacional do Método das Forças

1ª Questão do Grau G1 (1,0 ponto)– Data da entrega: 08/03/2021

Obtenha a programa Ftool e seu manual em "http://www.ftool.com.br". Estude o exemplo de solução de um pórtico com dois hiperestáticos pelo Método das Forças da "Aula 02: Introdução ao Método das Forças" no site da disciplina no Ambiente de Aprendizagem Online da PUC-Rio: "https://ead.puc-rio.br/login/index.php". Assista o vídeo "Aula 02 - Introdução ao Método das Forças". Siga os passos descritos nos itens abaixo e escreva um relatório. Este relatório deve conter as figuras que forem necessárias para descrever a simulação e seus valores numéricos.

Item (a) – Estrutura original a ser resolvida
Defina arbitrariamente, usando o programa Ftool, um quadro plano hiperestático com grau de hiperestaticidade no mínimo igual a quatro ($g \geq 4$) e que não contenha ciclos fechados de barras. Defina também as propriedades elásticas e geométricas das barras e as cargas que atuam no quadro. Adote todas as unidades em kN e m. Crie uma figura com a estrutura, suas dimensões e todas as propriedades e cargas utilizadas. Essa figura deve mostrar a configuração deformada da estrutura, com as componentes de reação de apoio indicadas. Anote nessa figura as componentes de reações de apoio que serão escolhidas como incógnitas da solução da estrutura pelo Método das Forças. Estas incógnitas são chamadas de *hiperestáticos* e devem ser identificadas pelo nome X_j, sendo j o número do hiperestático. Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os hiperestáticos com seus nomes, valores e unidades à mão. Anote os valores das reações de apoio (com sinal) selecionadas como incógnitas do problema para usar no item (f).

Item (b) – Sistema Principal
Obtenha uma estrutura isostática a partir da eliminação dos vínculos externos (liberação de restrições de apoio) associados aos hiperestáticos escolhidos no item (a). Essa estrutura será o Sistema Principal (SP) para a resolução do quadro original hiperestático pelo Método das Forças. Crie uma figura com o SP adotado e os hiperestáticos com seus nomes. Embora seja possível, neste trabalho não libere vínculos internos, isto é, não introduza rótulas.

Item (c) – Caso básico (0)
Para o Sistema Principal do item (b) considere valores nulos para os hiperestáticos e aplique o carregamento externo do item (a). Isto corresponde ao caso (0) do Método das Forças. Mostre a configuração deformada dessa estrutura juntamente com o carregamento aplicado, indicando as componentes de deslocamentos e rotações (com valores e unidades) nas direções dos vínculos rompidos para a criação do SP. Essas componentes de deslocamentos e rotações correspondem aos termos de carga δ_{i0}. Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os nomes, valores (com sinal) e unidades dos termos de carga à mão.

Item (d) – Casos básicos que isolam os hiperestáticos
Retire as cargas utilizadas no item (c) e carregue o Sistema Principal, alternadamente, com os hiperestáticos com valores unitários. Isto deve gerar um caso de carregamento para cada hiperestático (com valor unitário) atuando independentemente, sendo que cada um corresponde a um dos casos (j) do Método das Forças, onde j é o número de um hiperestático. Mostre a configuração deformada da estrutura para cada um dos hiperestáticos unitários impostos, indicando as componentes de deslocamentos e rotações (com valores, sinais e unidades) nas direções dos vínculos rompidos para a criação do SP. Essas componentes de deslocamentos e rotações correspondem aos *coeficientes de flexibilidade* δ_{ij}. Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os nomes, valores, sinais e unidades dos coeficientes de flexibilidade à mão.

Item (e) – Sistema de equações de compatibilidade
Com base nos resultados dos itens (c) e (d), monte o sistema de equações de compatibilidade que resulta da solução do quadro original pelo Método das Forças. Os valores numéricos dos coeficientes deste sistema de equações são obtidos dos termos de carga e dos coeficientes de flexibilidade.

Item (f) – Verificação da solução do sistema de equações de compatibilidade
Com base nos resultados da estrutura original do item (a), verifique se os valores dos hiperestáticos correspondem realmente à solução do sistema de compatibilidade obtido no item (e).

Item (g) – Obtenção de esforços internos
Indique os passos seguintes à solução do sistema de equações de compatibilidade que seriam necessários para complementar o cálculo dos esforços internos da estrutura pelo Método das Forças.

ENG 1204 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 1º Semestre – 2021

G1-Q2: Escolha do SP e interpretação física do termos de carga e coeficientes de flexibilidade

2ª Questão do Grau G1 (1,0 ponto) – Data da entrega: 15/03/2021

Siga os passos descritos nos itens abaixo e escreva um relatório.

Item (a) – Estrutura original

- Defina arbitrariamente um pórtico plano hiperestático com grau de hiperestaticidade no mínimo igual a três ($g \geq 3$) e mostre em uma figura.
- Indique dimensões, apoios, rótulas (não obrigatório), propriedades de material, propriedades de seção transversal e carregamento.
- Todos os parâmetros têm de ser indicados com valores e unidades consistentes. Escolha unidades e valores adequados.
- O carregamento deve ter pelo menos uma força concentrada aplicada em um nó livre (sem apoios) e pelo menos uma força uniformemente distribuída aplicada em qualquer trecho.

Item (b) – Sistema Principal e hiperestáticos

- Defina um possível Sistema Principal (SP) para a resolução do pórtico hiperestático definido no item (a) pelo Método das Forças. O SP é uma estrutura isostática obtida da estrutura hiperestática original a partir da eliminação de vínculos.
- Pelo menos um vínculo externo deve ser liberado (liberação de restrição de apoio) e pelo menos um vínculo de continuidade interna deve ser liberado.
- Mostre o SP adotado em uma figura e indique os hiperestáticos associados.
- Cada hiperestático é identificado pela seguinte notação: X_i, em que i é o seu índice.
- Para cada hiperestático, indique se é um esforço externo (reação de apoio) ou um esforço interno.
- Se for um esforço externo, indique se o hiperestático é uma força horizontal, uma força vertical ou um momento.
- Se for um esforço interno, indique se o hiperestático é um esforço axial (normal), um esforço cortante ou um momento fletor.
- Para cada hiperestático, indique sua unidade.

Item (c) – Caso básico (0)

- Mostre a configuração deformada do caso básico (0) da solução do pórtico escolhido e indique em uma figura os termos de carga.
- Cada termo de carga é identificado pela seguinte notação: δ_{i0}, em que i é o seu índice.
- Descreva as interpretações físicas dos termos de carga do caso (0) associados ao SP adotado:
  - Para cada termo de carga, indique se é um deslocamento horizontal, um deslocamento axial, um deslocamento vertical, um deslocamento transversal ou uma rotação.
  - Para cada termo de carga, indique se é uma grandeza absoluta ou relativa.
  - Para cada termo de carga, indique qual foi o efeito que o provocou.
  - Para cada termo de carga, indique sua unidade.

Item (d) – Demais casos básicos que isolam os efeitos dos hiperestáticos

- Para caso básico (j) da solução do pórtico escolhido, em que j é o índice do hiperestático correspondente, mostre a configuração deformada em uma figura e indique na figura os coeficientes de flexibilidade do caso básico.
- Cada coeficiente de flexibilidade é identificado pela seguinte notação: δ_{ij}, em que i e j são seus índices.
- Descreva as interpretações físicas de todos os coeficientes de flexibilidade associados ao SP adotado:
  - Para cada coeficiente de flexibilidade, indique se é um deslocamento horizontal, um deslocamento axial, um deslocamento vertical, um deslocamento transversal ou uma rotação.
  - Para cada coeficiente de flexibilidade, indique se é uma grandeza absoluta ou relativa.
  - Para cada coeficiente de flexibilidade, indique qual foi o efeito que o provocou.
  - Para cada coeficiente de flexibilidade, indique sua unidade.

Item (e) – Sistema de equações de compatibilidade

Mostre literalmente (sem valores numéricos) as equações de compatibilidade resultantes da solução do modelo estrutural escolhido pelo Método das Forças de acordo com o SP adotado. Escreva o que cada equação de compatibilidade impõe.

ENG 1204 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 1º Semestre – 2021

Grau G1 – 3ª Questão – Entrega: 05/04/2021 até 9:00 hs (não serão aceitas respostas depois desse dia e horário)

A solução da 3ª Questão do grau G1 deve ser entregue em um arquivo em formato PDF com o seguinte nome: **`ENG1204-211-G1-Q3-matricula.pdf`**, em que **`matricula`** é o número de matrícula da aluna ou do aluno.

Além do relatório, deverá ser entregue um vídeo gravado, com imagem e áudio do próprio aluno, com uma explicação sucinta sobre a solução adotada. O arquivo do vídeo deve ter o seguinte nome **`ENG1204-211-G1-Q3-matricula.EXT`**, em que **`EXT`** é a extensão do nome do arquivo de acordo com o formato do vídeo.

Leia com atenção as instruções abaixo e os enunciados dos itens da questão.

As respostas devem ser feitas como um relatório da memória de cálculo. A qualidade da apresentação vai ser considerada na avaliação da resposta.

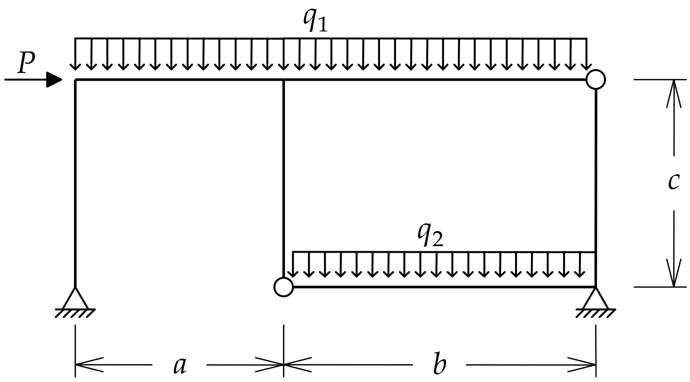
As soluções podem ser feitas à mão em papel e digitalizadas, criadas digitalmente através de algum editor de texto, ou por uma combinação de trechos e desenhos feitos à mão e digitalizados com trechos editados digitalmente.

Cada aluna ou aluno tem um conjunto de valores para as dimensões do pórtico e carregamento aplicado. Consulte pelo seu número de matrícula os dados do seu modelo na tabela fornecida.

3ª Questão (4,5 pontos)
Empregando-se o Método das Forças, obter os diagramas de momentos fletores para o pórtico plano da figura ao lado.

Todos os passos da solução têm de ser indicados.

Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma rigidez à flexão EI = 1.2x10^5 kNm^2.



Matrícula	a [m]	b [m]	c [m]	P [kN]	q_1 [kN/m]	q_2 [kN/m]
1512416	3	3	6	6	10	10
1512499	4	4	5	8	8	8
1512657	5	5	4	10	6	6
1520955	6	6	3	12	4	4
1521044	3	4	5	8	10	8
1611677	4	5	4	10	8	6
1612658	5	6	3	12	6	4
1612740	6	3	6	6	4	10
1620386	3	5	4	10	10	6
1620810	4	6	3	12	8	4
1620874	5	3	6	6	6	10
1711383	6	4	5	8	4	8
1711652	3	6	3	12	10	4
1711979	4	3	6	6	8	10
1720533	5	4	5	8	6	8
1721531	6	5	4	10	4	6

Sugere-se que o programa Ftool seja utilizado tanto para auxiliar nos cálculos quanto para geração de figuras das soluções.

Opções de configuração no Ftool:

Unidades gerais adotadas: [kN-m] (configure utilizando a opção *Units* & *Number Formatting...* do menu *Options*).

Unidade para distâncias: [m]; número de casas decimais para distâncias: 0 (nenhuma casa decimal).

Unidade para forças: [kN]; número de casas decimais para forças: 2.

Unidade para momentos: [kNm]; número de casas decimais para momentos: 2.

Unidade para forças distribuídas: [kN/m]; número de casas decimais para forças distribuídas: 0.

Valor e unidade do módulo de elasticidade (E) do material (*Generic Isotropic*) para todas as barras: 10^8 kN/m^2 (1.0e+08 kN/m^2). Os demais parâmetros de material não são utilizados nesta solução. Deixar os valores *default*.

Parâmetros de seção transversal (*Generic/Integral Properties*) para todas as barras:
Valor e unidade da área da seção transversal (A): 0.012 m^2.
Valor e unidade do momento de inércia da seção transversal (I): 0.0012 m^4.
Os demais parâmetros de seção transversal não são utilizados nesta solução. Deixar os valores *default* nulos.

Todas as barras dos modelos estruturais são consideradas sem deformação axial e sem deformação por cisalhamento (efeito cortante). Para configurar isso no Ftool, no menu *Deformation Constraints* selecione *Flexible Member* e deixe as opções *Axial Deformation* and *Shear Deformation* NÃO selecionadas. Aplique isso para todas as barras.

Item (3.a) – **Sistema Principal** (0,5 ponto)
Obtenha uma estrutura isostática a partir da eliminação dos vínculos externos (liberação de restrições de apoio) e/ou vínculos internos de continuidade de rotação (introdução de rótulas). Essa estrutura será o Sistema Principal (SP) para a resolução do quadro original hiperestático pelo Método das Forças.
O SP e os hiperestáticos associados aos vínculos eliminados devem ser indicados pelo nome X_j, sendo j o número do hiperestático, através de figuras de duas maneiras:
(3.a.1) Pórtico isostático composto com hiperestáticos indicados.
(3.a.2) Decomposição do pórtico isostático composto em uma sequência de carregamento de pórticos isostáticos simples (biapoiados, triarticulados, e engastados com balanço), com hiperestáticos indicados. Nessa figura, a sequência de carregamento deve ser indicada através de apoios fictícios e de setas que mostram a maneira como um pórtico isostático simples secundário é suportado por outro pórtico isostático simples relativamente principal.

Item (3.b) – **Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no Sistema Principal** (1,0 ponto)
(3.b.1) Mostre em uma figura a configuração deformada do caso (0) com escala de deslocamentos exagerada, indicando as componentes de deslocamentos e rotações nas direções dos vínculos rompidos para a criação do SP. Essas componentes de deslocamentos e rotações correspondem aos *termos de carga*, com nomes δ_{i0}, sendo i o número do hiperestático correspondente. Os termos de carga devem ser indicados na figura pelos seus nomes. Não precisa indicar valor ou unidade.
(3.b.2) Mostre em uma figura, juntamente com a solicitação externa, as reações de apoio para o caso básico (0), com valores e unidades, nos apoios fictícios e nos apoios originais do pórtico isostático decomposto.
(3.b.3) Mostre em uma figura o diagrama de momentos fletores do caso (0). O diagrama pode ser indicado no pórtico isostático composto do SP ou nos pórticos isostáticos simples resultantes da decomposição deste. A unidade dos momentos fletores deve ser indicada. O diagrama deve ser traçado desenhando as ordenadas do lado da fibra tracionada em cada seção transversal. Os valores dos momentos fletores devem ser indicados nas extremidades de todas a barras e, para as barras carregadas, o diagrama de momento fletor para o carregamento de viga biapoiada da barra deve ser indicado "pendurado" a partir da linha reta que une os valores das extremidades da barra. Não precisa indicar o sinal dos valores dos momentos fletores no diagrama.

Item (3.c) – **Casos básicos dos hiperestáticos isolados no Sistema Principal** (1,5 pontos)
Carregue o Sistema Principal, alternadamente, com os hiperestáticos <u>com valores unitários</u>. Isto deve gerar um caso de carregamento para cada hiperestático (com valor unitário) atuando independentemente, sendo que cada um corresponde a um dos casos básicos (j) do Método das Forças, onde j é o número de um hiperestático.
(3.c.1) Mostre figuras com a configuração deformada do SP, com escala de deslocamentos exagerada, para cada um dos hiperestáticos unitários impostos, indicando as componentes de deslocamentos e rotações nas direções dos vínculos rompidos para a criação do SP. Essas componentes de deslocamentos e rotações correspondem aos *coeficientes*

de flexibilidade, com nomes δ_{ij}. Os coeficientes de flexibilidade devem ser indicados na figuras pelos seus nomes. Não precisa indicar valor ou unidade.

(3.c.2) Mostre em figuras as reações nos apoios fictícios e nos apoios originais do pórtico isostático decomposto provocadas pelos hiperestáticos com valores unitários em cada caso básico (*j*). O hiperestático com valor unitário deve ser indicado em cada uma dessas figuras.

(3.c.3) Mostre em figuras os diagramas de momentos fletores dos casos básicos (*j*). Os diagramas podem ser indicados no pórtico isostático composto do SP ou nos pórticos isostáticos simples resultantes da decomposição deste. Os diagramas devem ser traçados desenhando as ordenadas do lado da fibra tracionada em cada seção transversal. Os valores dos momentos fletores devem ser indicados nas extremidades de todas a barras. Não precisa indicar o sinal dos valores dos momentos fletores nos diagramas.

Item (3.d) – Sistema de equações de compatibilidade (1,0 ponto)

Com base nos resultados da 3ª Questão e do item anterior desta questão, monte o sistema de equações de compatibilidade que resulta da solução do quadro original pelo Método das Forças. Os valores numéricos dos termos de carga e dos coeficientes de flexibilidade deste sistema de equações devem ser calculados utilizando o Princípio das Forças Virtuais (PFV), considerando apenas a parcela de energia de deformação por flexão. O sistema de equações de compatibilidade não precisa ser resolvido. Com base nos resultados da estrutura hiperestática original, indique os valores dos hiperestáticos, com sinal e unidades. Demonstre que os valores dos hiperestáticos correspondem realmente à solução do sistema de equações de compatibilidade.

Item (3.e) – Momentos fletores finais (0,5 ponto)

Mostre em uma figura o diagrama de momentos fletores do pórtico hiperestático original. Selecione um valor do diagrama de momentos fletores que recebe influência do caso básico (0) e de todos os demais casos básicos. Demonstre que este valor é obtido pela superposição dos valores correspondentes de cada um dos casos básicos, considerando os valores dos hiperestáticos com sinais.

ENG1024 - Análise de Estruturas 2
Grau 1 - Questão 3

Apresentação do problema

O problema aqui resolvido consiste em empregar o método das forças para obter o diagrama de momentos fletores da estrutura hiperestática descrita na Figura 1. Somente será considerada a energia de deformação devido à flexão. Todos os passos do cálculo serão detalhados e resolvidos de forma simbólica em função de a, b, c, P, q_1 e q_2. A estrutura deformada é ilustrada na Figura 2.

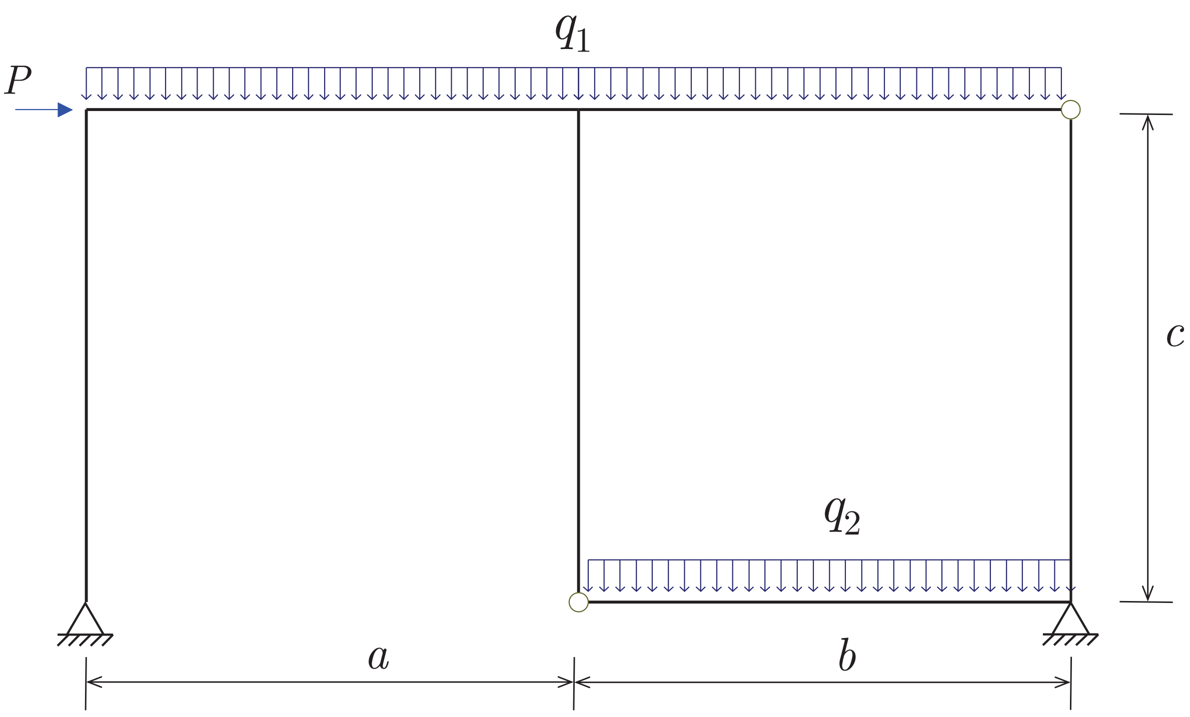


Figura 1: Estrutura hiperestática a ser resolvida.

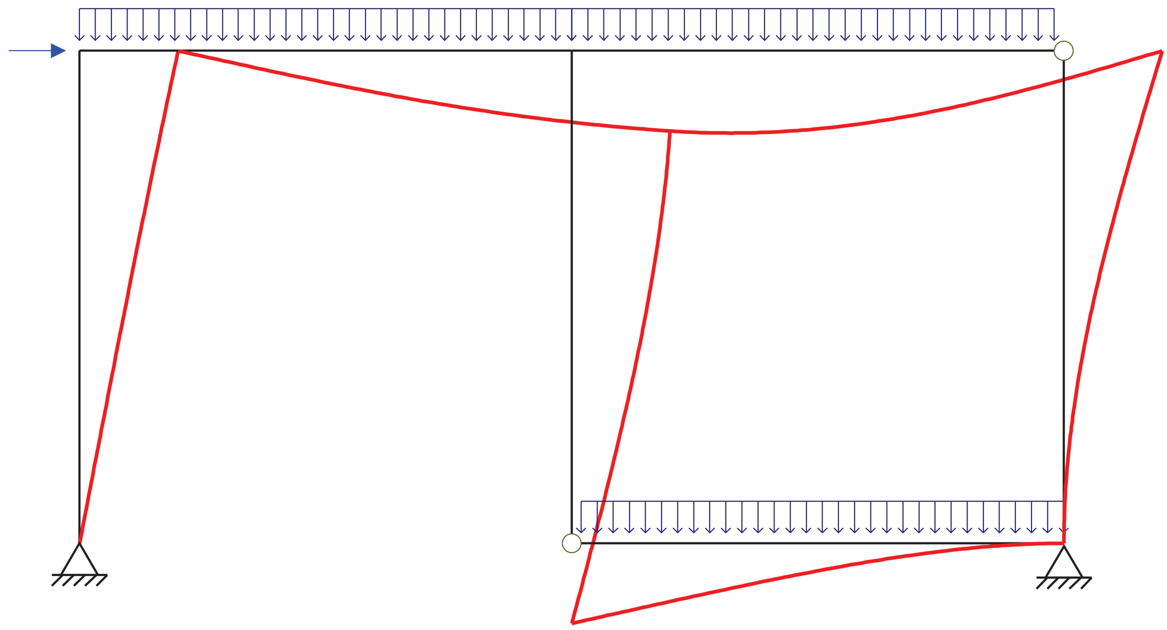


Figura 2: Estrutura hiperestática com sua configuração deformada em vermelho.

Item (3.a) - Sistema Principal

Como é possível notar, a estrutura descrita na Figura 1 se trata de uma estrutura hiperestática, isso porque apresenta mais incógnitas do que equações disponíveis. No caso específico da estrutura em questão é possível notar que sete incógnitas fazem parte do problema: quatro reações de apoio e três esforços internos devido ao anel fechado. Em contrapartida, apenas cinco equações estão disponíveis para determinar essas incógnitas: três equações de equilíbrio e duas equações de momentos nulos nas duas rótulas responsáveis por eliminar a continuidade da rotação em determinados pontos. Como a estrutura apresenta sete incógnitas e apenas cinco equações, pode-se afirmar que seu grau de hiperestaticidade é 2, $g = 2$. Logo, para determinação do sistema principal, deve-se eliminar dois vínculos externos (restrições de apoio) ou dois vínculos internos de continuidade de rotação (introdução de rótulas). É possível também eliminar um vínculo externo e adicionar uma rótula, de acordo com a preferência de quem estiver solucionando o problema. Para esse caso, foi escolhido a introdução de duas rótulas, uma exatamente no nó onde o apoio da direita se encontra e outra a extremidade superior da barra central, sem tirar a continuidade de rotação da barra horizontal superior. O sistema principal é ilustrado na Figura 3.

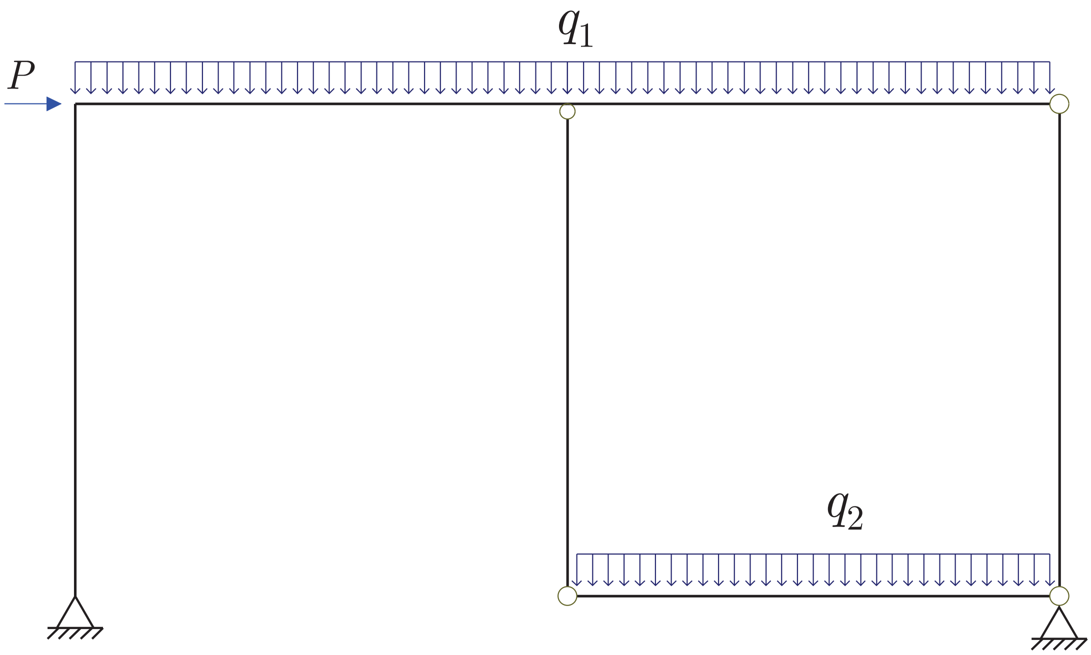


Figura 3: Sistema Principal.

Item (3.a.1) - Pórtico isostático Composto com hiperestáticos

Ao liberar vínculos de uma estrutura, sejam de continuidade interna ou externa, surgem os hiperestáticos que devem ser determinados pelo método das forças para garantir as equações de compatibilidade da estrutura. No caso em questão, como houve a adição de duas rótulas (eliminação de vínculos internos de continuidade de rotação) aparecem dois hiperestáticos que são momentos, com a função de restabelecer a compatibilidade de deslocamentos e deformações da estrutura hiperestática.Os hiperestáticos associados aos vínculos eliminados são indicados pelo nome X_j, sendo j o número do hiperestático em questão. A Figura 4 ilustra o sistema principal e os hiperestáticos.

Item (3.a.2) - Decomposição de pórtico isostático composto

Como é possível notar, a estrutura se trata de um pórtico hiperestático composto, ou seja, para resolvê-lo, o mesmo deve ser decomposto em pórticos isostáticos simples. Sendo que um pórtico deve ser resolvido primeiro e através de apoios fictícios transfere suas reações como ações para o outro. A Figura 5 ilustra a decomposição do pórtico isostático e destaca as reações de apoio e os apoios fictícios (em verde).

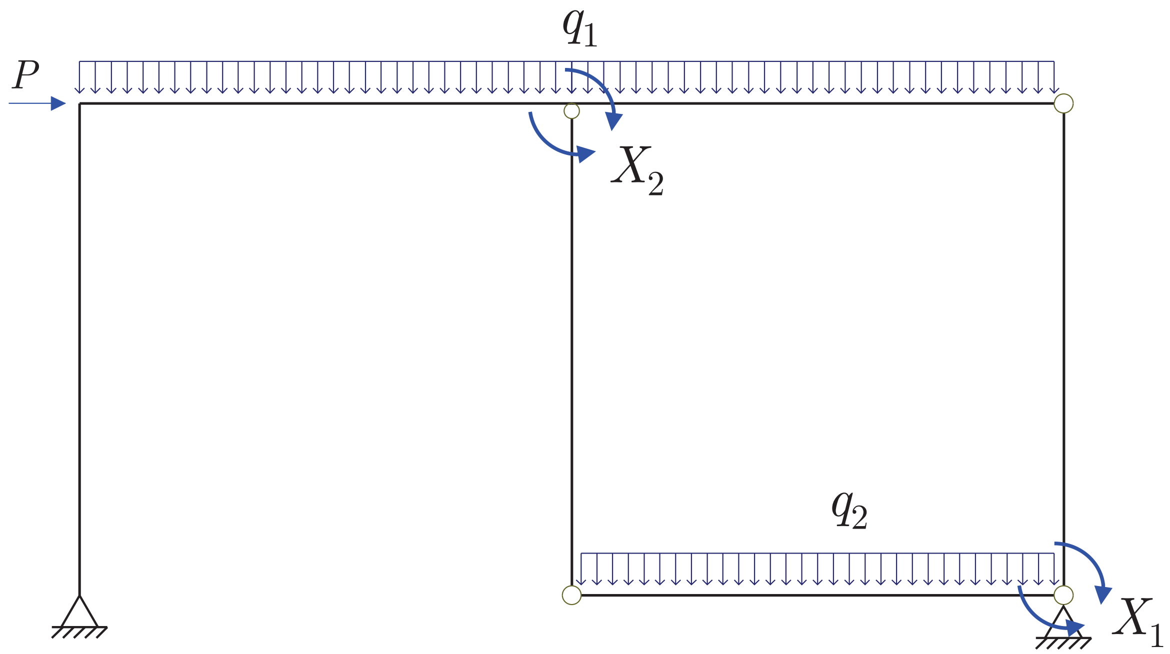


Figura 4: Sistema Principal composto com hiperestáticos.

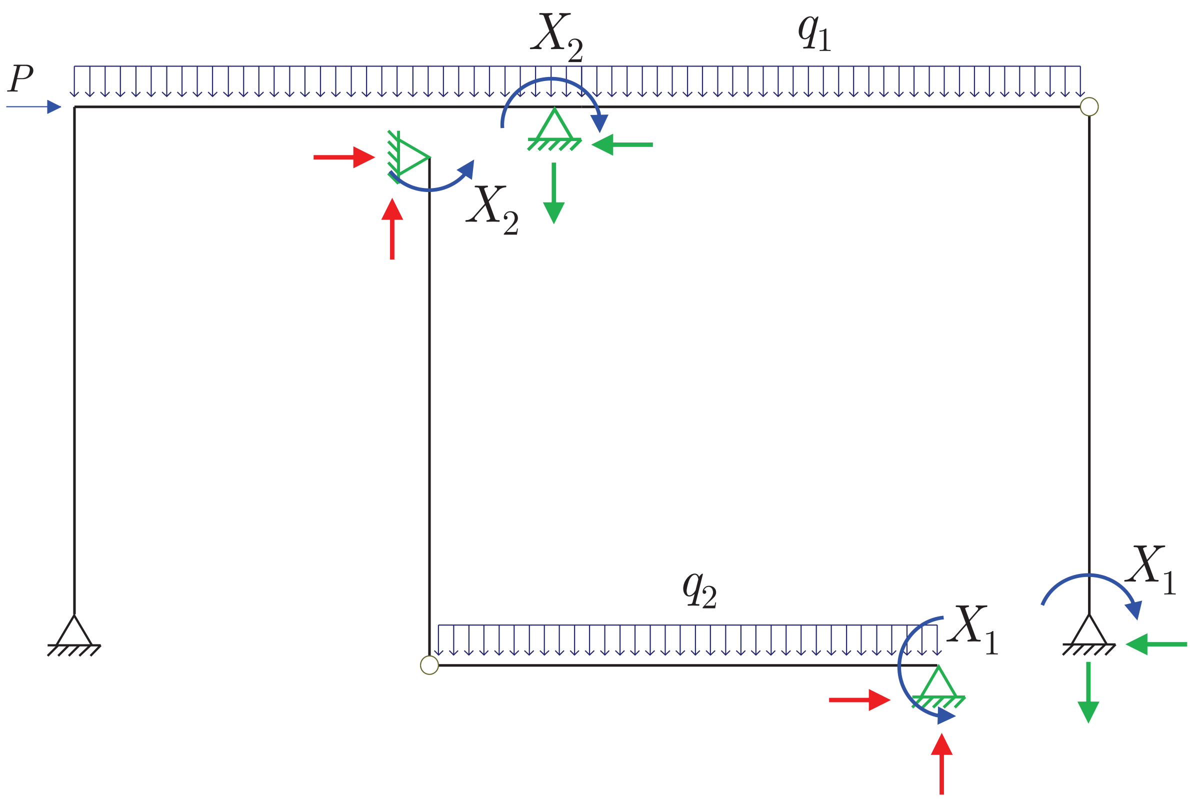


Figura 5: Sistema Principal decomposto com hiperestáticos.

Item (3.b) - Caso (0) - Solicitação externa isolada no sistema principal

O caso (0) consiste em um estado de deformação do sistema principal sem a influência do efeito dos hiperestáticos, através desse caso é possível determinar os **termos de carga**, que são componentes de deslocamentos e rotações nas direções dos hiperestáticos aplicados. Os termos de carga são designados por δ_{i0}, onde i faz referência ao i-ésimo hiperestático. No caso deste exercício, como o sistema principal foi obtido por meio da adição de rótulas e consequentemente os hiperestáticos são momentos concentrados, os termos de carga se tratam de uma **rotação relativa**.

Item (3.b.1) - Caso (0) - Configuração deformada

A Figura 6 ilustra a configuração deformada do caso (0) destacando os termos de carga δ_{10} e δ_{20}, relativos aos hiperestáticos X_1 e X_2. É interessante fazer uma comparação com a deformada da estrutura hiperestática (Figura 2), na qual é possível notar que a rotação relativa onde não existia rótula era nula, isto é, o ângulo entre as barras se mantinha 90 graus mesmo na configuração deformada. Isso não acontece na configuração deformada do sistema principal, ao introduzir rótulas e liberar a rotação relativa em determinados pontos o ângulo presente nas barras na configuração indeformada não se conserva, essas rotações relativas que aparecem são exatamente os termos de carga.

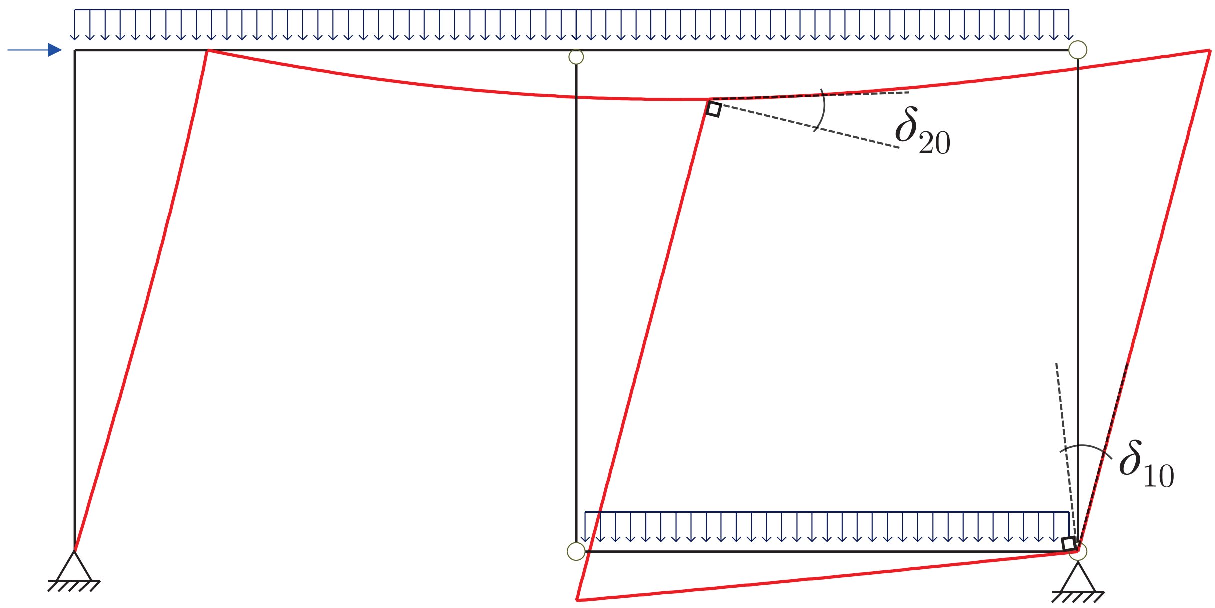


Figura 6: Caso (0) - Configuração deformada e termos de carga δ_{i0}.

Item (3.b.2) - Caso (0) - Reações de apoio

Para a determinação das reações de apoio, primeiramente deve-se resolver o pórtico que encontra-se apoiado no principal. Esse pórtico, localizado à direita inferior, está solicitado apenas a um carregamento distribuído vertical simétrico, logo suas reações de apoio, que serão ações no pórtico principal correspondem à metade do carregamento cada uma. A Figura 7 ilustra o caso (0) e suas reações de apoio, faltando a determinação das reações que foram designadas H_A, V_A, H_B e V_B. Como as expressões podem ficar grandes devido ao número de variáveis do problema (a, b, c, P, q_1 e q_2) elas serão definidas no texto e não terão seus valores indicados na Figura.

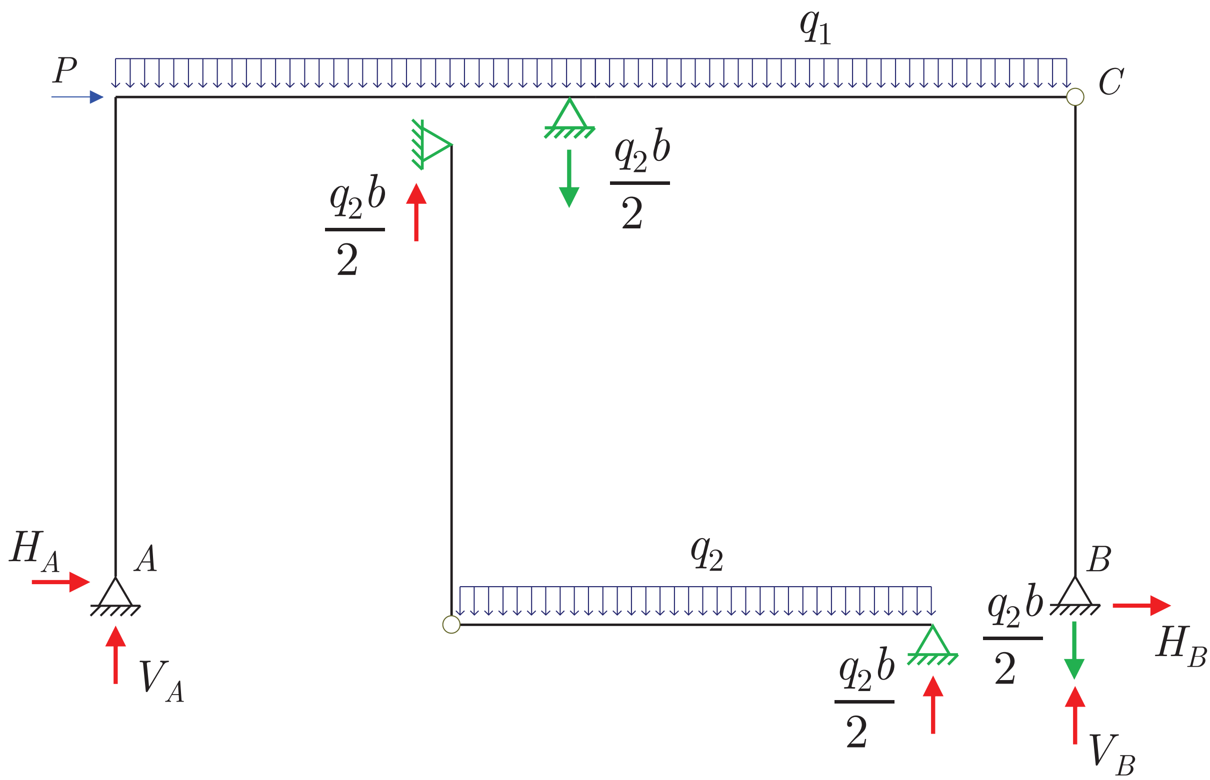


Figura 7: Caso (0) - Reações de apoio.

A reação horizontal em B, H_B é nula e diretamente determinada pelo equilíbrio de momentos em C (Equação 1).

$$\sum M_C = 0 \implies H_B = 0 \tag{1}$$

Com isso, é facilmente determinada a reação H_A pelo equilíbrio das forças horizontais (Equação 2).

$$\sum F_x = 0 \implies H_A = -P \tag{2}$$

A reação vertical em A é determinada pela Equação 3, que define que o momento fletor em B é nulo. V_A é definida na Equação 4.

$$\sum M_B = 0 \implies \frac{q_2 b}{2} + \frac{q_1 (a+b)^2}{2} - Pc - V_A (a+b) = 0 \tag{3}$$

$$V_A = \frac{\dfrac{q_2 b^2}{2} + \dfrac{q_1 (a+b)^2}{2} - Pc}{(a+b)} \tag{4}$$

Com isso, finalmente determina-se V_B através do equilíbrio das forças verticais (Equação 5). A expressão de define V_B é descrita na Equação 6.

$$\sum F_y = 0 \implies V_B = \frac{q_2 b}{2} + q_1 (a+b) - V_A \tag{5}$$

$$V_B = \frac{2Pc + a^2 q_1 + b^2 q_1 + 2abq_1 + abq_2}{2(a+b)} \tag{6}$$

Item (3.b.3) - Caso (0) - Diagrama de momento fletor

Para facilitar nos passos seguintes do método, o pórtico será dividido em barras (trechos) discretas numeradas. Primeiramente, a barra superior é dividida em duas barras (1 e 2) em função da carga vertical concentrada proveniente da barra vertical central, essa carga gera um bico e divide a barra superior em dois trechos. A barra horizontal inferior é nomeada 3 e as verticais, da esquerda pra direita, 4, 5 e 6, respectivamente. A Figura 8 ilustra a discretização do pórtico.

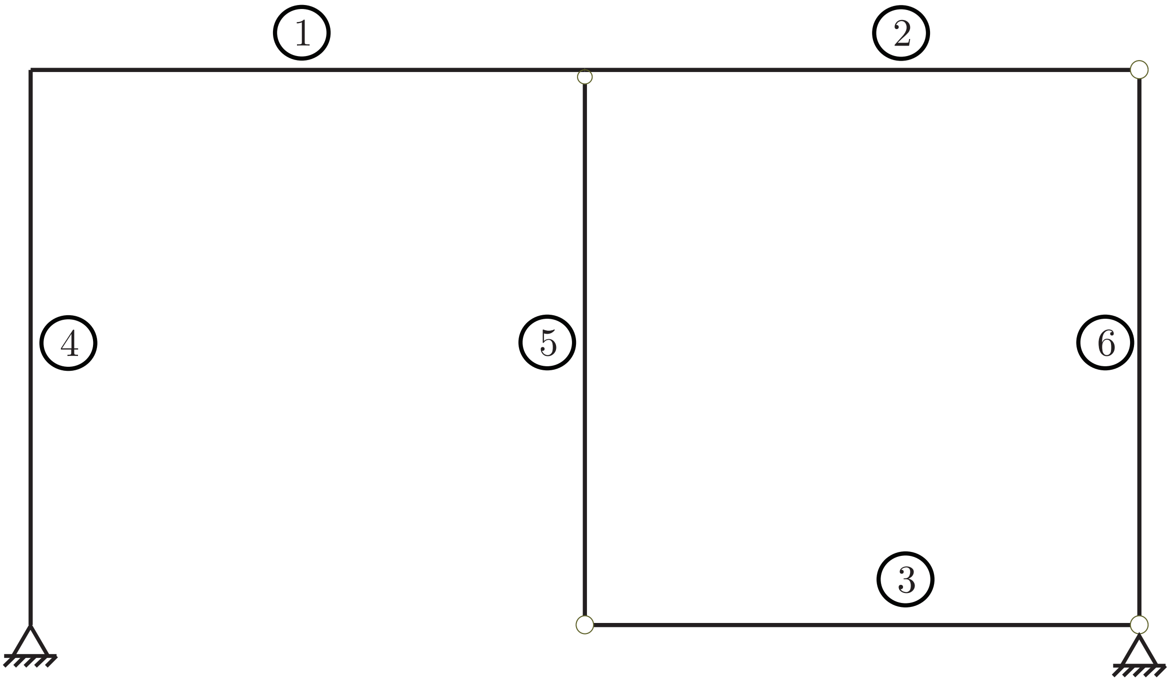


Figura 8: Discretização adotada no pórtico.

Feito isso e de posse das reações de apoio, o diagrama de momento fletor é diretamente calculado determinando os momentos nas extremidades de cada barra e definindo seu comportamento no interior do elemento, podendo ser linear (barras sem carregamento distribuído) ou parabólico (barras com carregamento distribuído). A Figura 9 ilustra o diagrama de momento fletor do caso (0) com as barras separadas por conveniência.

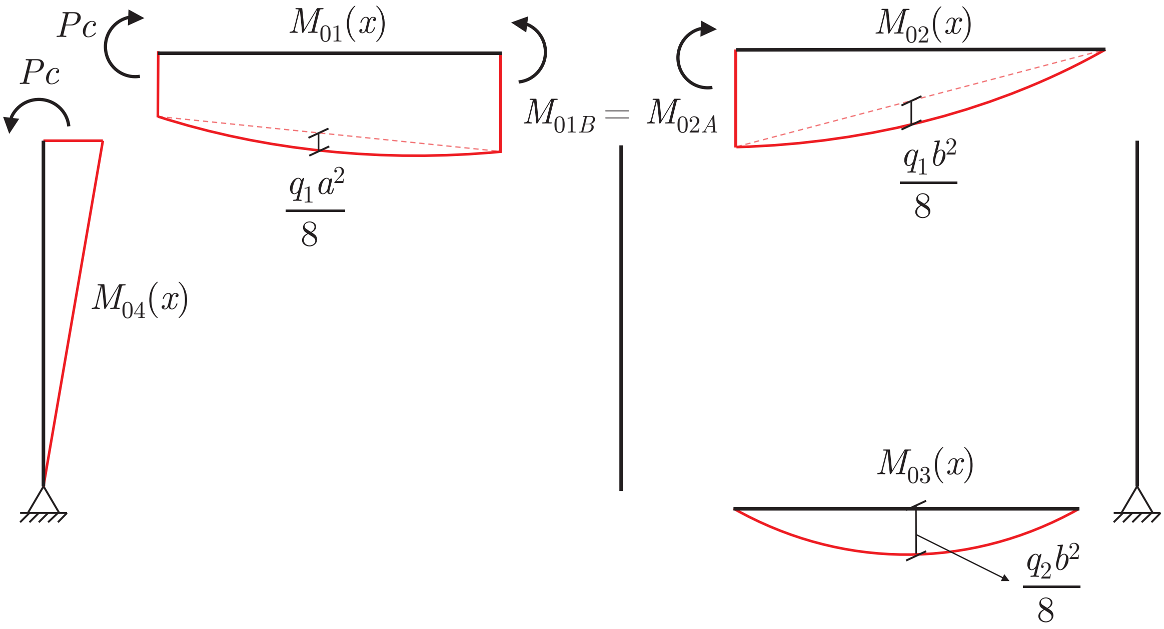


Figura 9: Caso (0) - Diagrama de momento fletor.

Na Figura 9, $M_{ij}(x)$ representa a equação que descreve o momento fletor ao longo da barra j no caso i. M_{ijA} e M_{ijB} é o momento fletor à esquerda e à direita da barra j no caso i, respectivamente. O momento à esquerda da barra 1 é igual ao direito da barra 4, por se tratar de uma ligação rígida. Esse momento é diretamente obtido multiplicando a reação horizontal em A pela altura c do pórtico. Logo, $M_{01A} = M_{04B} = Pc$. O momento à direita da barra 1, que é igual ao esquerdo da barra 2 ($M_{01B} = M_{02A}$), é obtido pela Equação 7. A expressão aberta que define o momento à direita da barra 1 e à esquerda da barra 2 é definida na Equação 8. A barra 3 apresenta um diagrama semelhante à uma viga bi-apoiada, a barra 4 apresenta um diagrama linear e as barras 5 e 6 não são solicitadas à flexão. As funções que definem o diagrama de momento fletor nas barras 1, 2, 3 e 4 são descritas nas Equações 9, 10, 11 e 12.

$$M_{01B} = V_A a + H_A c - \frac{q_1 a^2}{2} \tag{7}$$

$$M_{01B} = M_{02A} = \frac{b\left(2Pc + a^2 q_1 + abq_1 + abq_2\right)}{2ab} \tag{8}$$

$$M_{01}(x) = Pc - \frac{q_1 x^2}{2} + \frac{x\left(\frac{q_1\,(a+b)^2}{2} - Pc + \frac{b^2 q_2}{2}\right)}{2\,(a+b)} \tag{9}$$

$$M_{02}(x) = \frac{(b-x)\left(2Pc + a^2 q_1 + abq_1 + abq_2 + aq_1 x + bq_x\right)}{2\,(a+b)} \tag{10}$$

$$M_{03}(x) = \frac{-q_2 x\,(b-x)}{2} \tag{11}$$

$$M_{04}(x) = Px \tag{12}$$

Item (3.c) - Casos básicos dos hiperestáticos isolados no Sistema Principal

Com o intuito de futuramente reestabelecer as condições de compatibilidade da estrutura hiperestática, violadas após o rompimento de vínculos, deve-se analisar casos básicos que consistem em casos nos quais os hiperestáticos atuam de forma isolada na estrutura. Portanto, no método das forças, uma estrutura hiperestática tem o número de casos básicos igual ao número do seu grau de hiperestaticidade. No caso do exemplo em questão, haverá dois casos básicos se serão designados caso(i), onde o hiperestático X_i atua isoladamente. Como X_i são incógnitas do problema, os casos básicos são resolvidos para um hiperestático unitário que multiplica o valor real de X_i a ser determinado. Os deslocamento e rotações nas direções dos hiperestáticos, provenientes dos casos básicos com solicitação unitária, são designados **coeficientes de flexibilidade**. Logo, define-se o coeficiente de flexibilidade δ_{ij} como sendo o deslocamento ou rotação na direção do vínculo eliminado associado ao hiperestático X_i provocado por um valor unitário do hiperestático X_j atuando isoladamente no Sistema Principal [1].

Item (3.c.1) - Casos básicos - Configuração deformada

Os casos básicos constem no caso (1), em que o hiperestático $X_1 = 1$ e o caso (2) em que o hiperestático $X_2 = 1$. Da configuração deformada dos casos básicos é possível vislumbrar fisicamente os coeficientes de flexibilidade que nada mais são que deslocamentos e rotações. Esses coeficientes formarão, a posteriori, uma matriz que será utilizada na solução do sistema de equações de compatibilidade. As Figuras 10 e 11 ilustram a configuração deformada dos casos (1) e (2), respectivamente, destacando os coeficientes de flexibilidade δ_{ij}.

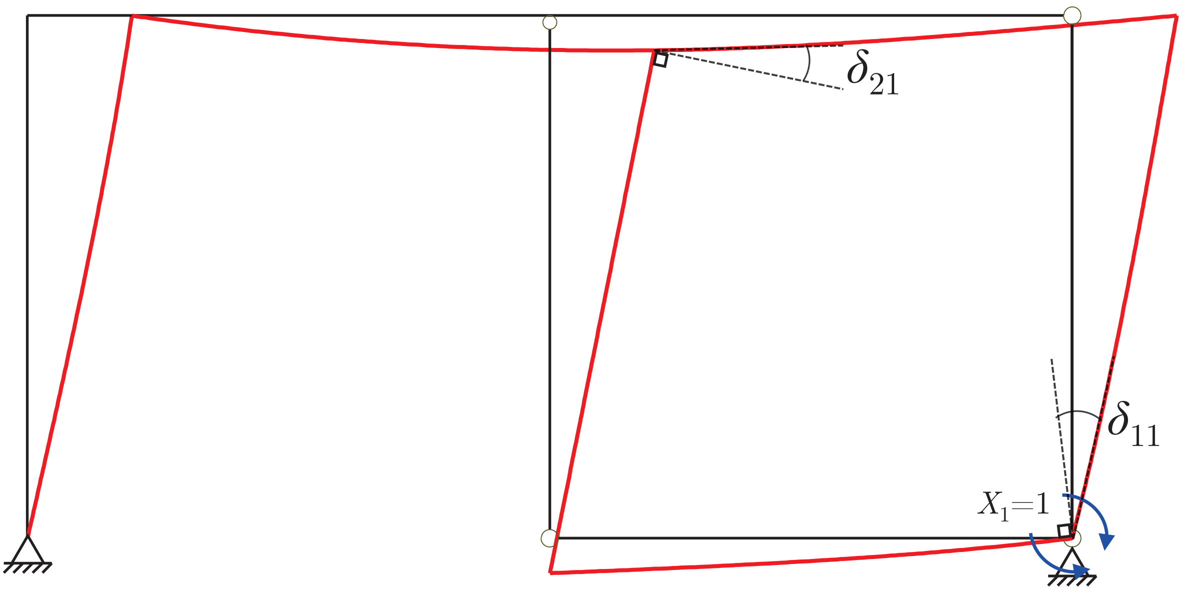


Figura 10: Caso (1) - Configuração deformada e coeficientes de flexibilidade.

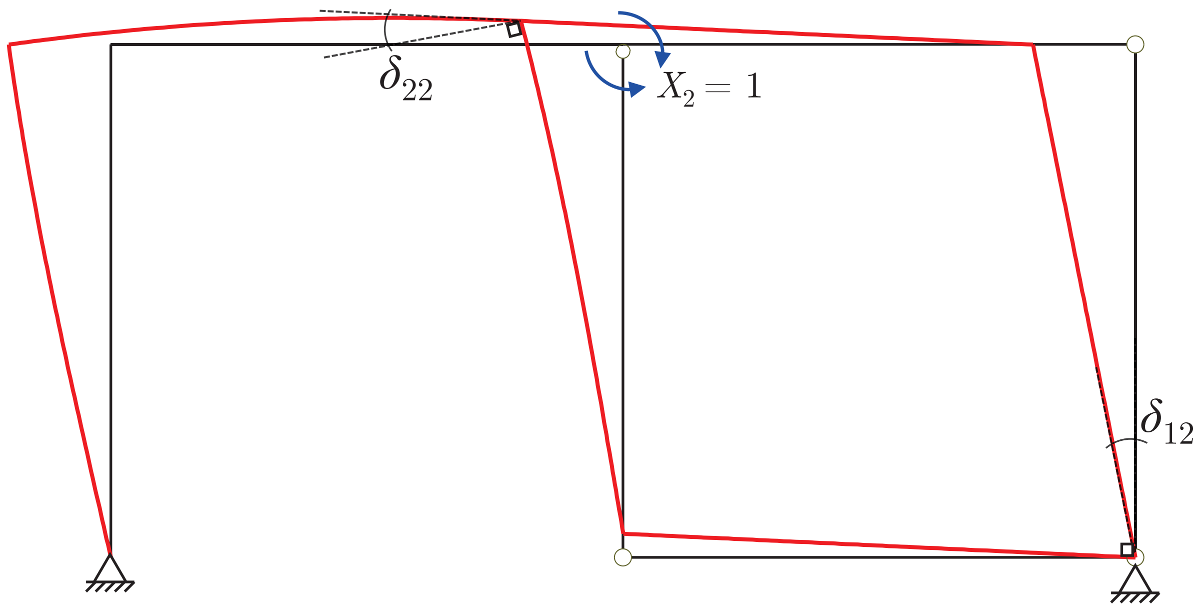


Figura 11: Caso (2) - Configuração deformada e coeficientes de flexibilidade.

Item (3.c.2) - Casos básicos -Reações de Apoio

As Figuras 12 e 13 ilustram as reações de apoio no pórtico decomposto para o caso (1) e (2), respectivamente.

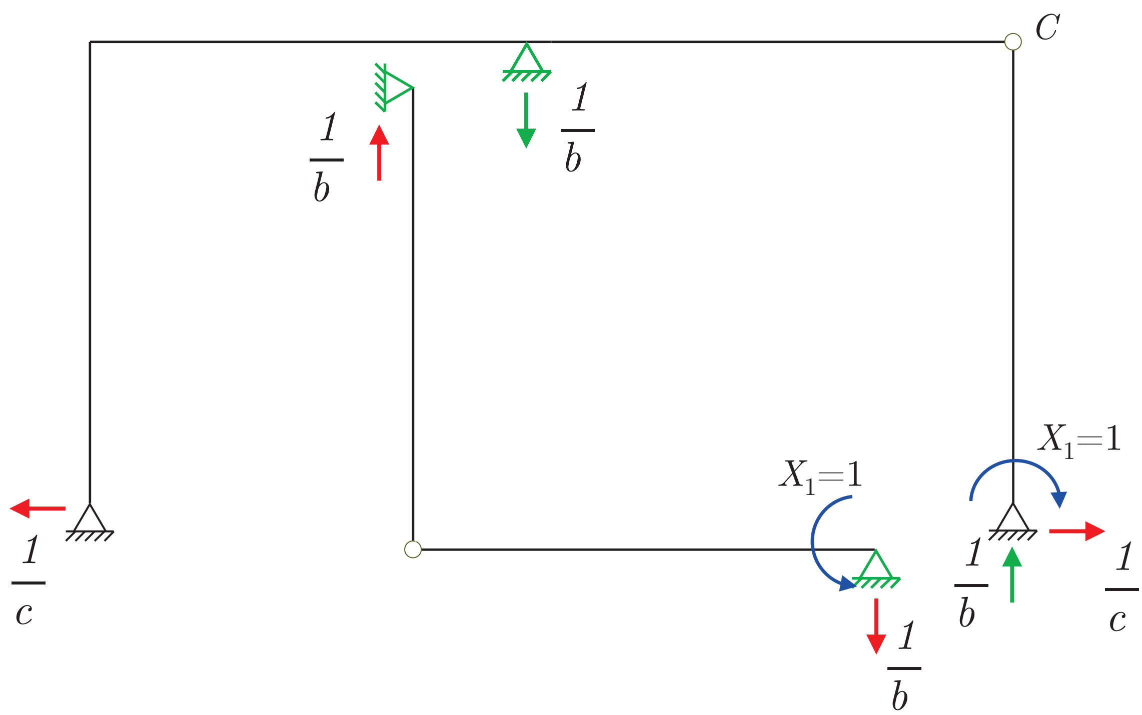


Figura 12: Caso (1) - Pórtico decomposto com reações de apoio.

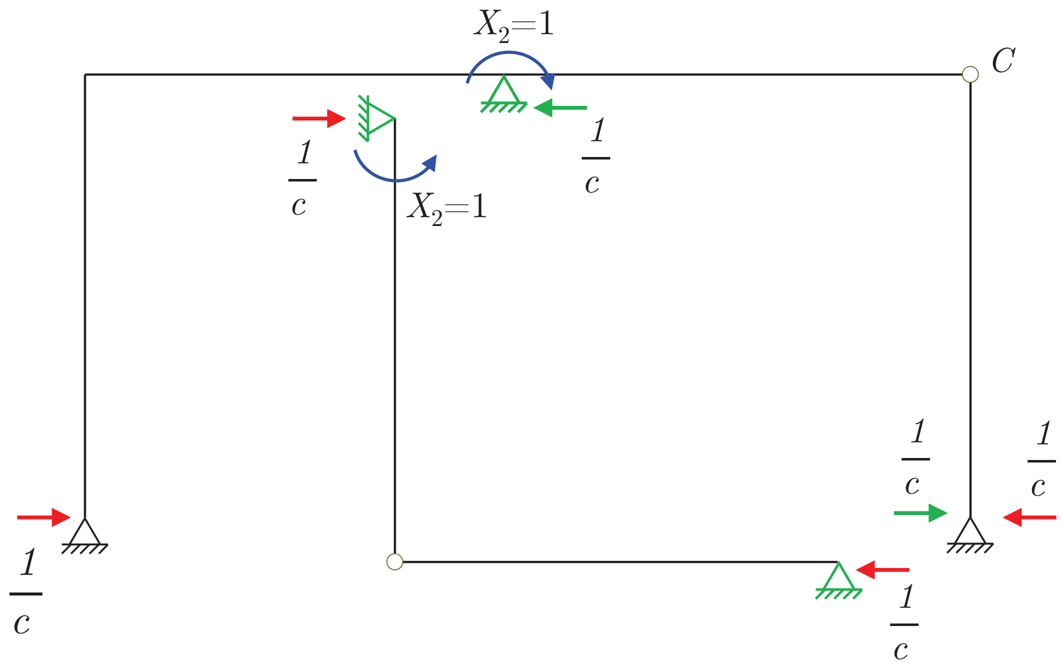


Figura 13: Caso (2) - Pórtico decomposto com reações de apoio.

Item (3.c.3) - Casos básicos - Diagrama de momento fletor

De posse das reações de apoio e, como não há carregamento distribuído em nenuma barra nos casos básicos, os diagramas de momento fletor são obtidos de forma direta e ilustrados nas Figuras 14 e 15, para o caso (1) e (2), respectivamente.

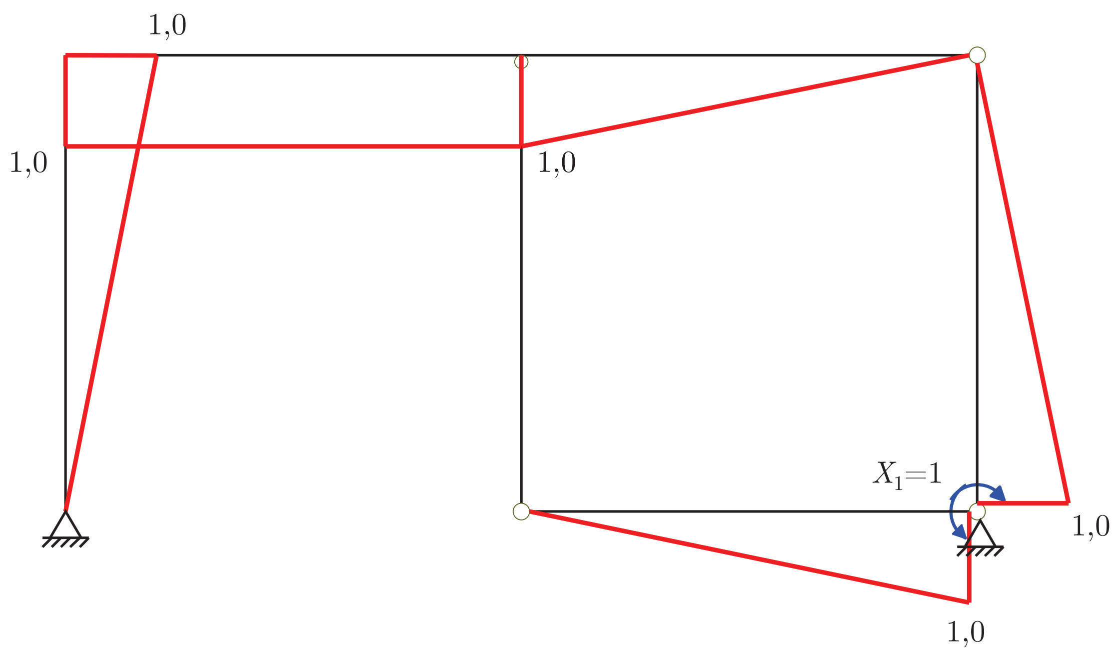


Figura 14: Caso (1) - Diagrama de momento fletor.

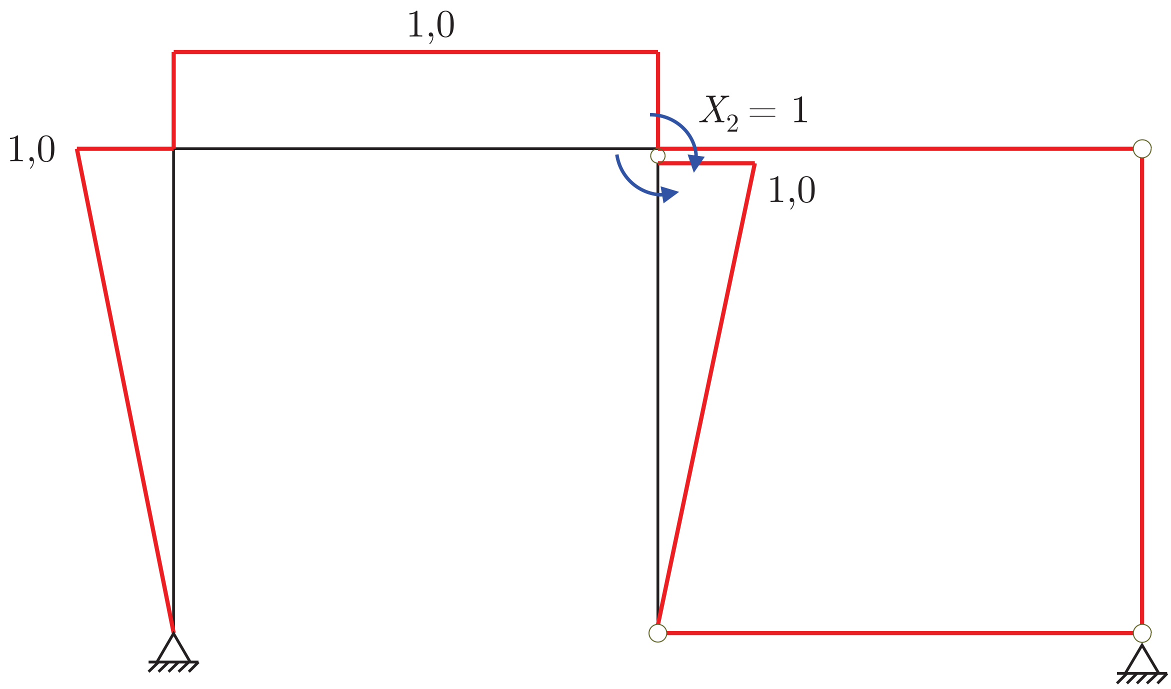


Figura 15: Caso (2) - Diagrama de momento fletor.

É importante definir as equações que descrevem os momentos fletores ao longo das barras, mesmo que triviais, pois futuramente serão usadas para cálculo dos coeficientes de flexibilidade e termos de carga. Seguindo a numeração das barras descrita na Figura 8, é possível afirmar que no caso (1) apenas a barra 5 não é solicitada à flexão ($M_{15}(x) = 0$), a barra 1 tem um momento fletor constante ($M_{11}(x) = 1$) e as barras 2, 3, 4 e 6 apresentam um diagrama linear (Equação 13). Observando o caso (2) nota-se que somente as barras 1, 4 e 5 são solicitadas sendo a barra 1 constante ($M_{21}(x) = -1$) e as barras 4 e 5 lineares (Equação 14). Uma observação é que, nas equações o momento é considerado positivo quando traciona as fibras inferiores das barras horizontais e as fibras da direta das barras verticais.

$$M_{12}(x) = 1 - \frac{x}{b}; \qquad M_{13}(x) = \frac{x}{b}; \qquad M_{14}(x) = \frac{x}{c}; \qquad M_{16}(x) = 1 - \frac{x}{c}; \tag{13}$$

$$M_{24}(x) = -\frac{x}{c}; \qquad M_{25}(x) = \frac{x}{c}; \tag{14}$$

Item (3.d) - Sistema de equações de compatibilidade

As condições de compatibilidade da estrutura hiperestática original, violadas no sistema principal ao se remover vínculos ou adicionar rótulas, devem ser reestabelecidas pela superposição dos efeitos dos caso (0) e dos casos básicos. Isso significa que o valor dos hiperestáticos X_i devem ser tais que, ao serem aplicados no sistema principal garantam que as condições iniciais do problema hiperestático sejam recuperadas. No caso específico desse problema, ao qual foram adicionadas duas rótulas ao sistema principal para remoção de continuidade interna de rotação, rotações relativas apareceram em tais pontos no SP. Para que as condições de compatibilidade sejam satisfeitas, após a superposição de efeitos dos casos, essa rotação relativa deve voltar a ser nula. A Equação 15 explicita a superposição de rotações relativas no nó inferior direito e a Equação 16 no nó superior central. O sistema composto dessas duas equações pode ser escrito na forma matricial (Equação 17).

$$\delta_{10} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} = 0 \tag{15}$$

$$\delta_{20} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} = 0 \tag{16}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{cc} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\} \tag{17}$$

Feito isso, e de posse dos diagramas de momento fletor em todos casos, o problema de determinação dos hiperestáticos se resume em determinar os termos de carga e os coeficientes da matriz de flexibilidade. Pelo princípio das forças virtuais e considerando somente a energia de deformação à flexão, os coeficientes de flexibilidade e termos de carga δ_{ij} são determinados segundo à Equação 18. Onde M_i é o momento devido ao hiperestático X_i e M_j o momento devido ao hiperestático j. Para os termos de carga, como $j = 0$, M_0 é o momento devido ao carregamento externo no sistema principal. O módulo de elasticidade longitudinal do material é designado por E e o momento de inércia da seção em torno do eixo perpendicular ao plano é designado por I.

$$\delta_{ij} = \int_{estrutura} \frac{M_i M_j}{EI} dx \tag{18}$$

Como a estrutura é formada de barras discretas, a integral que determina os coeficientes de flexibilidade ou termos de cargas pode ser expressa como um somatório de integrais ao longo de cada barra (Equação 19).

$$\delta_{ij} = \sum_{n=1}^{nbarras} \left[\int_{barra} \frac{M_i M_j}{EI} dx \right] \tag{19}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^a M_{11}M_{01}dx + \int_0^b M_{12}M_{02}dx + \int_0^b M_{13}M_{03}dx + \int_0^c M_{14}M_{04}dx \right] \tag{20}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^a M_{21}M_{01}dx + \int_0^c M_{24}M_{04}dx \right] \tag{21}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^a M_{11}^2 dx + \int_0^b M_{12}^2 dx + \int_0^b M_{13}^2 dx + \int_0^c M_{14}^2 dx + \int_0^c M_{16}^2 dx \right] \tag{22}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^a M_{11}M_{21}dx + \int_0^c M_{14}M_{24}dx \right] \tag{23}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^a M_{21}^2 dx + \int_0^c M_{24}^2 dx + \int_0^c M_{25}^2 dx\right] \tag{24}$$

Ao calcular os termos de carga e os coeficientes da matriz de flexibilidade, obtém-se diretamente os hiperestáticos X_1 e X_2 ao resolver o sistema descrito na Equação 17. Os valores dos coeficientes de flexibilidade encontrados são detalhados na Equação 25, como as expressões que descrevem os termos de carga são muito grandes, esses continuarão a ser designados por δ_{10} e δ_{20}. Os valores dos hiperestáticos em termos das variáveis do problema (a, b, c, P, q_1 e q_2) também são expressões muito grandes e não serão descritas nesse documento, porém uma rotina em MATLAB® resolve esse problema simbolicamente onde é possível extrair tais valores.

$$\left\{\begin{array}{c}\delta_{10}\\ \delta_{20}\end{array}\right\} + \frac{1}{EI}\left[\begin{array}{cc} a+\dfrac{2b}{3}+\dfrac{2c}{3} & -a-\dfrac{c}{3} \\ \\ -a-\dfrac{c}{3} & a+\dfrac{2c}{3}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}X_1\\ X_2\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}0\\ 0\end{array}\right\} \tag{25}$$

Item (3.e) - Momentos fletores finais

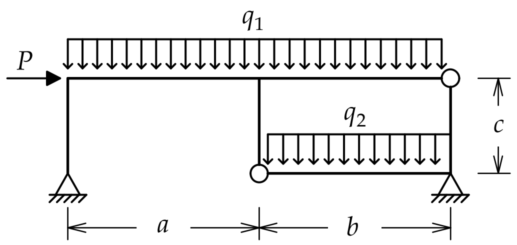
Após a determinação dos hiperestáticos para determinar os momentos fletores finais, basta fazer a superposição de efeitos do caso (0), do caso (1) ponderado pelo hiperestático X_1 e do caso (2) ponderado pelo hiperestático X_2 (Equação 26). De forma análoga, as reações de apoio finais podem ser determinadas pela superposição de efeitos do caso (0) com os casos básicos ponderados pelos hiperestáticos. Os momentos e reações também são resolvidos na rotina do MATLAB®.

$$M(x) = M_0(x) + M_1(x)X_1 + M_2(x)X_2 \tag{26}$$

Referências

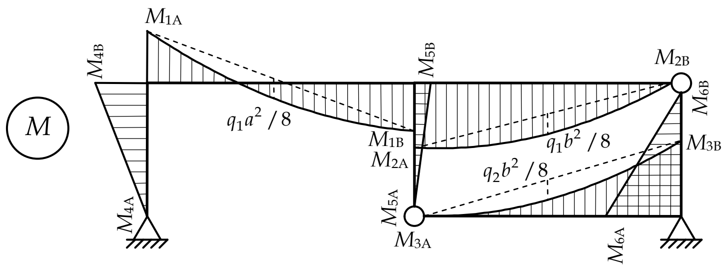
1 MARTHA, L. **Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos**. Rio de Janeiro: Elsevier Brasil, 2010.

ENG 1204 – 2021.1 – Grau G1 – 3ª Questão – Tabela de soluções



Momentos Fletores Finais:

$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$

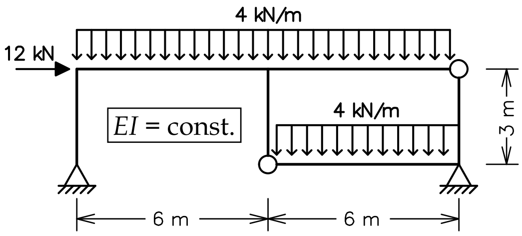


Matrícula	a [m]	b [m]	c [m]	P [kN]	q_1 [kN/m]	q_2 [kN/m]
1512416	3	3	6	6	10	10
1512499	4	4	5	8	8	8
1512657	5	5	4	10	6	6
1520955	6	6	3	12	4	4
1521044	3	4	5	8	10	8
1611677	4	5	4	10	8	6
1612658	5	6	3	12	6	4
1612740	6	3	6	6	4	10
1620386	3	5	4	10	10	6
1620810	4	6	3	12	8	4
1620874	5	3	6	6	6	10
1711383	6	4	5	8	4	8
1711652	3	6	3	12	10	4
1711979	4	3	6	6	8	10
1720533	5	4	5	8	6	8
1721531	6	5	4	10	4	6

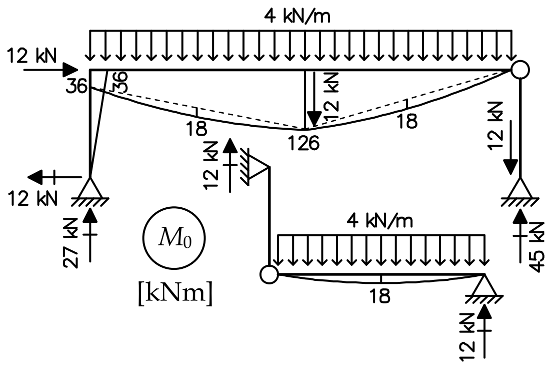
Valores dos hiperestáticos e momentos fletores em [kNm]:

Matrícula	X_1	X_2	M_{1A}	M_{1B}	M_{2A}	M_{2B}	M_{3A}	M_{3B}	M_{4A}	M_{4B}	M_{5A}	M_{5B}	M_{6A}	M_{6B}
1512416	-34.5	14.9	-13.4	36.1	51.0	0.0	0.0	-34.5	0.0	-13.4	0.0	14.9	-34.5	0.0
1512499	-52.1	17.2	-29.3	46.7	63.9	0.0	0.0	-52.1	0.0	-29.3	0.0	17.2	-52.1	0.0
1512657	-65.6	17.2	-42.8	49.7	66.9	0.0	0.0	-65.6	0.0	-42.8	0.0	17.2	-65.6	0.0
1520955	-67.8	14.9	-46.7	43.3	58.2	0.0	0.0	-67.8	0.0	-46.7	0.0	14.9	-67.8	0.0
1521044	-50.0	12.9	-22.8	47.5	60.3	0.0	0.0	-50.0	0.0	-22.8	0.0	12.9	-50.0	0.0
1611677	-67.7	12.9	-40.6	54.9	67.8	0.0	0.0	-67.7	0.0	-40.6	0.0	12.9	-67.7	0.0
1612658	-77.3	11.6	-52.8	53.6	65.1	0.0	0.0	-77.3	0.0	-52.8	0.0	11.6	-77.3	0.0
1612740	-34.1	21.3	-19.4	22.6	43.9	0.0	0.0	-34.1	0.0	-19.4	0.0	21.3	-34.1	0.0
1620386	-65.8	7.6	-33.4	54.8	62.3	0.0	0.0	-65.8	0.0	-33.4	0.0	7.6	-65.8	0.0
1620810	-81.4	6.1	-51.5	58.9	65.0	0.0	0.0	-81.4	0.0	-51.5	0.0	6.1	-81.4	0.0
1620874	-36.5	20.6	-21.1	29.5	50.1	0.0	0.0	-36.5	0.0	-21.1	0.0	20.6	-36.5	0.0
1711383	-47.3	21.8	-29.1	33.3	55.1	0.0	0.0	-47.3	0.0	-29.1	0.0	21.8	-47.3	0.0
1711652	-80.3	-0.4	-44.0	58.0	57.7	0.0	0.0	-80.3	0.0	-44.0	0.0	-0.4	-80.3	0.0
1711979	-36.5	18.3	-18.7	34.4	52.7	0.0	0.0	-36.5	0.0	-18.7	0.0	18.3	-36.5	0.0
1720533	-51.3	20.4	-31.8	41.6	62.0	0.0	0.0	-51.3	0.0	-31.8	0.0	20.4	-51.3	0.0
1721531	-59.2	19.4	-38.6	40.4	59.9	0.0	0.0	-59.2	0.0	-38.6	0.0	19.4	-59.2	0.0

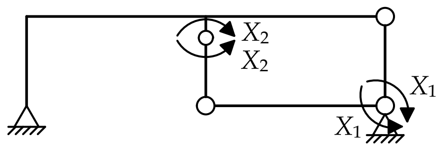
ENG 1204 – 2021.1 – Grau G1 – 3ª Questão – Solução para o conjunto de dados da 4ª linha



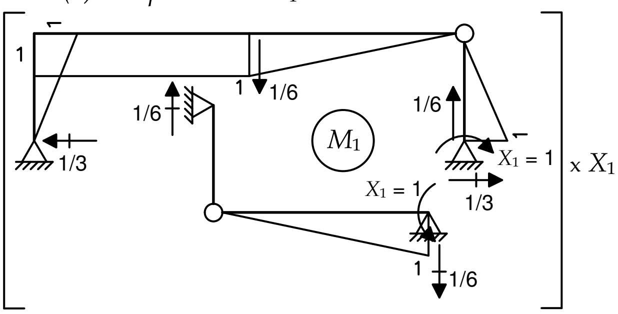
Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



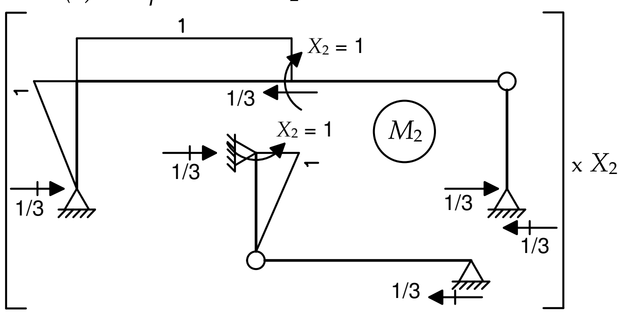
Sistema Principal (SP) e Hiperestáticos (g = 2)



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP



Equações de compatibilidade:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} +918 \\ -594 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} +12 & -7 \\ -7 & +8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = -67.8 \text{ kNm} \\ X_2 = +14.9 \text{ kNm} \end{cases}$$

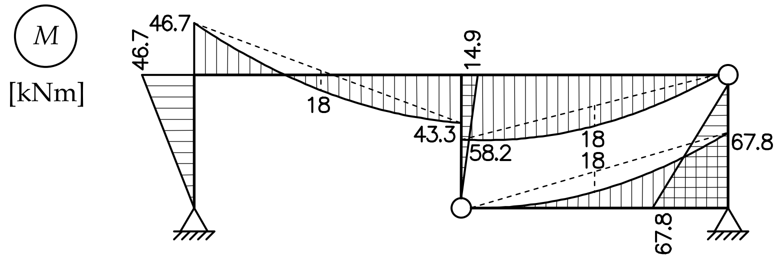
$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\cdot\left[+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 36\cdot 6 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 126\cdot 6 + \frac{2}{3}\cdot 1\cdot 18\cdot 6 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 126\cdot 6 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 18\cdot 6 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 36\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 18\cdot 6\right] = +\frac{918}{EI}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI}\cdot\left[-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 36\cdot 6 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 126\cdot 6 - \frac{2}{3}\cdot 1\cdot 18\cdot 6 - \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 36\cdot 3\right] = -\frac{594}{EI}$$

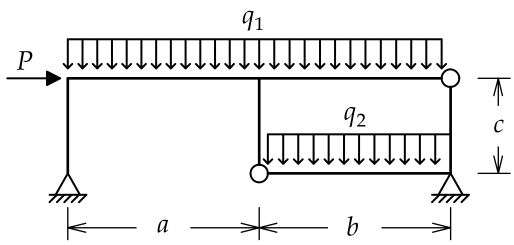
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\cdot\left[+1\cdot 1\cdot 6 + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6\right) + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right)\right] = +\frac{12}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI}\cdot\left[+1\cdot 1\cdot 6 + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right)\right] = +\frac{8}{EI} \qquad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI}\cdot\left[-1\cdot 1\cdot 6 - \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right] = -\frac{7}{EI}$$

Momentos Fletores Finais:
$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$

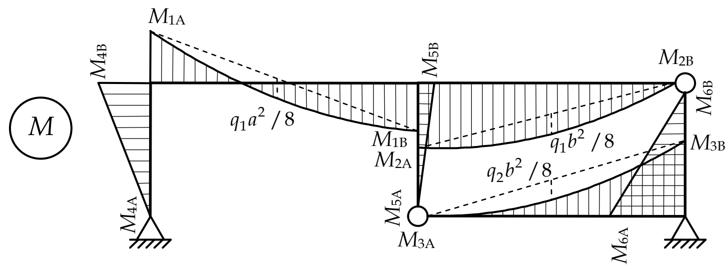


ENG 1204 – 2021.1 – Grau G1 – 3ª Questão – Tabela de soluções



Momentos Fletores Finais:

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$$

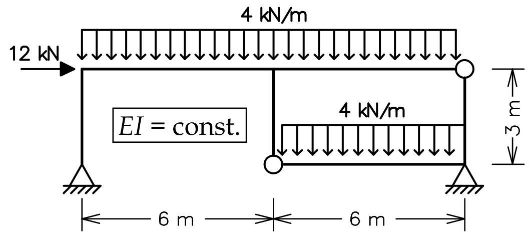


Matrícula	*a* [m]	*b* [m]	*c* [m]	*P* [kN]	q_1 [kN/m]	q_2 [kN/m]
1512416	3	3	6	6	10	10
1512499	4	4	5	8	8	8
1512657	5	5	4	10	6	6
1520955	6	6	3	12	4	4
1521044	3	4	5	8	10	8
1611677	4	5	4	10	8	6
1612658	5	6	3	12	6	4
1612740	6	3	6	6	4	10
1620386	3	5	4	10	10	6
1620810	4	6	3	12	8	4
1620874	5	3	6	6	6	10
1711383	6	4	5	8	4	8
1711652	3	6	3	12	10	4
1711979	4	3	6	6	8	10
1720533	5	4	5	8	6	8
1721531	6	5	4	10	4	6

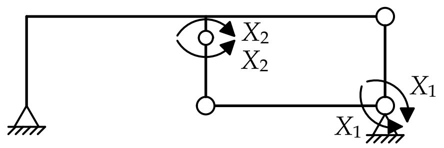
Valores dos hiperestáticos e momentos fletores em [kNm]:

Matrícula	X_1	X_2	M_{1A}	M_{1B}	M_{2A}	M_{2B}	M_{3A}	M_{3B}	M_{4A}	M_{4B}	M_{5A}	M_{5B}	M_{6A}	M_{6B}
1512416	-34.5	14.9	-13.4	36.1	51.0	0.0	0.0	-34.5	0.0	-13.4	0.0	14.9	-34.5	0.0
1512499	-52.1	17.2	-29.3	46.7	63.9	0.0	0.0	-52.1	0.0	-29.3	0.0	17.2	-52.1	0.0
1512657	-65.6	17.2	-42.8	49.7	66.9	0.0	0.0	-65.6	0.0	-42.8	0.0	17.2	-65.6	0.0
1520955	-67.8	14.9	-46.7	43.3	58.2	0.0	0.0	-67.8	0.0	-46.7	0.0	14.9	-67.8	0.0
1521044	-50.0	12.9	-22.8	47.5	60.3	0.0	0.0	-50.0	0.0	-22.8	0.0	12.9	-50.0	0.0
1611677	-67.7	12.9	-40.6	54.9	67.8	0.0	0.0	-67.7	0.0	-40.6	0.0	12.9	-67.7	0.0
1612658	-77.3	11.6	-52.8	53.6	65.1	0.0	0.0	-77.3	0.0	-52.8	0.0	11.6	-77.3	0.0
1612740	-34.1	21.3	-19.4	22.6	43.9	0.0	0.0	-34.1	0.0	-19.4	0.0	21.3	-34.1	0.0
1620386	-65.8	7.6	-33.4	54.8	62.3	0.0	0.0	-65.8	0.0	-33.4	0.0	7.6	-65.8	0.0
1620810	-81.4	6.1	-51.5	58.9	65.0	0.0	0.0	-81.4	0.0	-51.5	0.0	6.1	-81.4	0.0
1620874	-36.5	20.6	-21.1	29.5	50.1	0.0	0.0	-36.5	0.0	-21.1	0.0	20.6	-36.5	0.0
1711383	-47.3	21.8	-29.1	33.3	55.1	0.0	0.0	-47.3	0.0	-29.1	0.0	21.8	-47.3	0.0
1711652	-80.3	-0.4	-44.0	58.0	57.7	0.0	0.0	-80.3	0.0	-44.0	0.0	-0.4	-80.3	0.0
1711979	-36.5	18.3	-18.7	34.4	52.7	0.0	0.0	-36.5	0.0	-18.7	0.0	18.3	-36.5	0.0
1720533	-51.3	20.4	-31.8	41.6	62.0	0.0	0.0	-51.3	0.0	-31.8	0.0	20.4	-51.3	0.0
1721531	-59.2	19.4	-38.6	40.4	59.9	0.0	0.0	-59.2	0.0	-38.6	0.0	19.4	-59.2	0.0

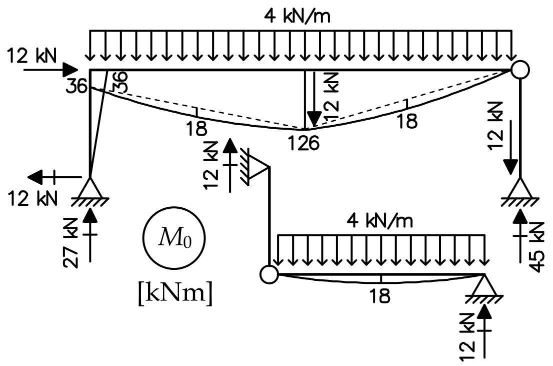
ENG 1204 – 2021.1 – Grau G1 – 3ª Questão – Solução para o conjunto de dados da 4ª linha



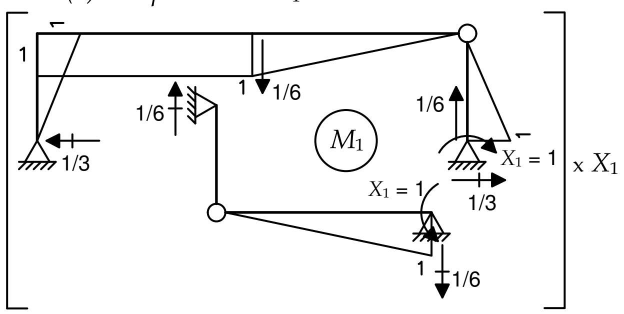
Sistema Principal (SP) e Hiperestáticos (g = 2)



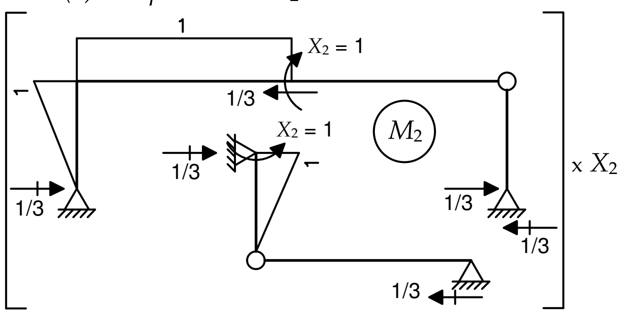
Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP



Equações de compatibilidade:

$$\begin{cases}\delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix}+918 \\ -594\end{Bmatrix} + \frac{1}{EI}\begin{bmatrix}+12 & -7 \\ -7 & +8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1 \\ X_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0 \\ 0\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}X_1 = -67.8 \text{ kNm} \\ X_2 = +14.9 \text{ kNm}\end{cases}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\cdot\left[+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 36\cdot 6 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 126\cdot 6 + \frac{2}{3}\cdot 1\cdot 18\cdot 6 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 126\cdot 6 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 18\cdot 6 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 36\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 18\cdot 6\right] = +\frac{918}{EI}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI}\cdot\left[-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 36\cdot 6 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 126\cdot 6 - \frac{2}{3}\cdot 1\cdot 18\cdot 6 - \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 36\cdot 3\right] = -\frac{594}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\cdot\left[+1\cdot 1\cdot 6 + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6\right) + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right)\right] = +\frac{12}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI}\cdot\left[+1\cdot 1\cdot 6 + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right)\right] = +\frac{8}{EI} \qquad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI}\cdot\left[-1\cdot 1\cdot 6 - \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right] = -\frac{7}{EI}$$

Momentos Fletores Finais:

$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$