

T1: Simulação computacional do Método das Forças

1ª questão do grau G1 (1.0 ponto) - Data da entrega: 11/03/2020

Estude o exemplo de solução de um pórtico com dois hiperestáticos pelo Método das Forças que foi visto em sala de aula (" http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftp_pub/lfm/eng1204roteiroMF.pdf"). Obtenha a programa Ftool e seu manual em "<http://www.ftool.com.br>". Assista o vídeo "Aula 02: Introdução ao Método das Forças" no site da disciplina no Ambiente de Aprendizagem Online da PUC-Rio: "<https://ead.puc-rio.br/login/index.php>". Estude o tutorial sobre o Método das Forças em "http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftp_pub/lfm/metfor1_0_0.exe" (versão *off-line*). Siga os passos descritos nos itens abaixo e escreva um relatório. Este relatório deve conter as figuras que forem necessárias para descrever a simulação e seus valores numéricos.

Item (a) - Estrutura original a ser resolvida

Defina arbitrariamente, usando o programa Ftool, um quadro plano hiperestático com grau de hiperestaticidade no mínimo igual a quatro ($g \geq 4$) e que não contenha ciclos fechados de barras. Defina também as propriedades elásticas e geométricas das barras e as cargas que atuam no quadro. Adote todas as unidades em kN e m. Crie uma figura com a estrutura, suas dimensões e todas as propriedades e cargas utilizadas. Essa figura deve mostrar a configuração deformada da estrutura, com as componentes de reação de apoio indicadas. Anote nessa figura as componentes de reações de apoio que serão escolhidas como incógnitas da solução da estrutura pelo Método das Forças. Estas incógnitas são chamadas de *hiperestáticos* e devem ser identificadas pelo nome X_j , sendo j o número do hiperestático. Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os hiperestáticos com seus nomes, valores e unidades à mão. Anote os valores das reações de apoio (com sinal) selecionadas como incógnitas do problema para usar no item (f).

Item (b) - Sistema Principal

Obtenha uma estrutura isostática a partir da eliminação dos vínculos externos (liberação de restrições de apoio) associados aos hiperestáticos escolhidos no item (a). Essa estrutura será o Sistema Principal (SP) para a resolução do quadro original hiperestático pelo Método das Forças. Crie uma figura com o SP adotado e os hiperestáticos com seus nomes. Embora seja possível, neste trabalho não libere vínculos internos, isto é, não introduza rótulas.

Item (c) - Caso básico (0)

Para o Sistema Principal do item (b) considere valores nulos para os hiperestáticos e aplique o carregamento externo do item (a). Isto corresponde ao caso (0) do Método das Forças. Mostre a configuração deformada dessa estrutura juntamente com o carregamento aplicado, indicando as componentes de deslocamentos e rotações (com valores e unidades) nas direções dos vínculos rompidos para a criação do SP. Essas componentes de deslocamentos e rotações correspondem aos termos de carga δ_0 . Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os nomes, valores (com sinal) e unidades dos termos de carga à mão.

Item (d) - Casos básicos que isolam os hiperestáticos

Retire as cargas utilizadas no item (c) e carregue o Sistema Principal, alternadamente, com os hiperestáticos com valores unitários. Isto deve gerar um caso de carregamento para cada hiperestático (com valor unitário) atuando independentemente, sendo que cada um corresponde a um dos casos (j) do Método das Forças, onde j é o número de um hiperestático. Mostre a configuração deformada da estrutura para cada um dos hiperestáticos unitários impostos, indicando as componentes de deslocamentos e rotações (com valores, sinais e unidades) nas direções dos vínculos rompidos para a criação do SP. Essas componentes de deslocamentos e rotações correspondem aos *coeficientes de flexibilidade* δ_j . Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os nomes, valores, sinais e unidades dos coeficientes de flexibilidade à mão.

Item (e) - Sistema de equações de compatibilidade

Com base nos resultados dos itens (c) e (d), monte o sistema de equações de compatibilidade que resulta da solução do quadro original pelo Método das Forças. Os valores numéricos dos coeficientes deste sistema de equações são obtidos dos termos de carga e dos coeficientes de flexibilidade.

Item (f) - Verificação da solução do sistema de equações de compatibilidade

Com base nos resultados da estrutura original do item (a), verifique se os valores dos hiperestáticos correspondem realmente à solução do sistema de compatibilidade obtido no item (e).

Item (g) - Obtenção de esforços internos

Indique os passos seguintes à solução do sistema de equações de compatibilidade que seriam necessários para complementar o cálculo dos esforços internos da estrutura pelo Método das Forças.

Grau G1 - 2ª Questão - Data: 11/03/2020 - Duração: 0:50 hs - Sem Consulta

2ª Questão (1,0 ponto)

Considere a solução do pórtico plano da figura ao lado pelo Método das Forças.

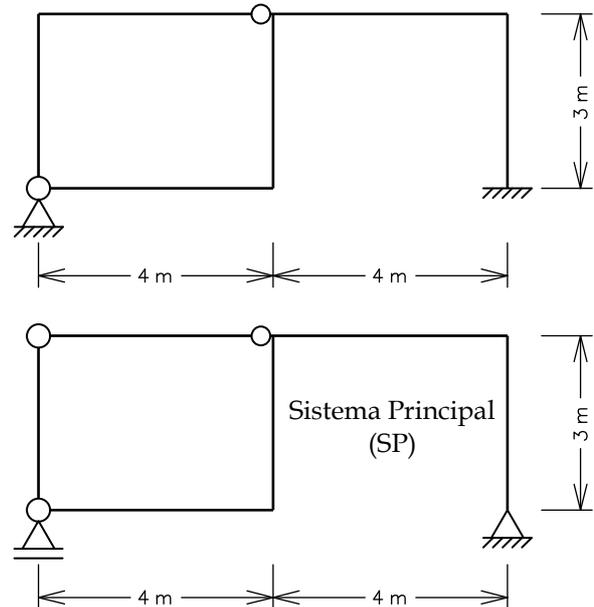
A unidade para distâncias e deslocamentos é metro [m].

A unidade para forças é kilo-Newton [kN].

A unidade para momentos é kilo-Newton-metro [kNm].

A unidade para rotações é radiano [rad] (adimensional).

Na análise pelo Método das Forças, o Sistema Principal (SP) adotado está mostrado na figura inferior.



Pede-se:

Item (a)

Indique em uma figura os hiperestáticos correspondentes ao SP adotado.

Cada hiperestático é identificado pela seguinte notação: X_i , em que i é o seu índice.

Para cada hiperestático, indique se é um esforço externo (reação de apoio) ou um esforço interno.

Se for um esforço externo, indique se o hiperestático é uma força horizontal, uma força vertical ou um momento.

Se for um esforço interno, indique se o hiperestático é um esforço axial (normal), um esforço cortante ou um momento fletor.

Para cada hiperestático, indique sua unidade.

Item (b)

Descreva as interpretações físicas dos termos de carga do caso (0) associados ao SP adotado.

Não precisa mostrar em figuras.

Cada termo de carga é identificado pela seguinte notação: δ_{i0} , em que i é o seu índice.

Para cada termo de carga, indique se é um deslocamento horizontal, um deslocamento axial, um deslocamento vertical, um deslocamento transversal ou uma rotação.

Para cada termo de carga, indique se é uma grandeza absoluta ou relativa.

Para cada termo de carga, indique qual foi o efeito que o provocou.

Para cada termo de carga, indique sua unidade.

Item (c)

Descreva as interpretações físicas dos coeficientes de flexibilidade associados ao SP escolhido.

Não precisa mostrar em figuras.

Cada coeficiente de flexibilidade é identificado pela seguinte notação: δ_{ij} , em que i e j são seus índices.

Para cada coeficiente de flexibilidade, indique se é um deslocamento horizontal, um deslocamento axial, um deslocamento vertical, um deslocamento transversal ou uma rotação.

Para cada coeficiente de flexibilidade, indique se é uma grandeza absoluta ou relativa.

Para cada coeficiente de flexibilidade, indique qual foi o efeito que o provocou.

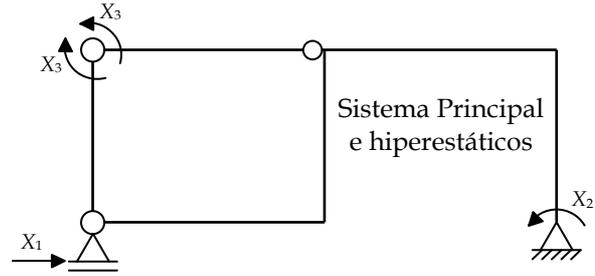
Para cada coeficiente de flexibilidade, indique sua unidade.

G1 - Questão 2 - SOLUÇÃO

Item (a)

Hiperestáticos correspondentes a essa opção do SP:

- X_1 → reação força horizontal (esforço externo) no apoio da esquerda [kN].
- X_2 → reação momento (esforço externo) no apoio da direita [kNm].
- X_3 → momento fletor (esforço interno) nas seções adjacentes ao nó superior esquerdo [kNm].



Item (b)

Caso (0) - Solicitação externa (carregamento) isolada no SP

Interpretações físicas dos termos de carga:

- δ_{10} → deslocamento horizontal absoluto do apoio da esquerda, provocado pela solicitação externa no caso (0) [m].
- δ_{20} → rotação absoluta da seção adjacente ao apoio da direita, provocada pela solicitação externa no caso (0) [rad].
- δ_{30} → rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula introduzida no nó superior esquerdo, provocada pela solicitação externa no caso (0) [rad].

Item (c)

Caso (1) - Hiperestático X_1 isolado no SP

Interpretações físicas dos coeficientes de flexibilidade:

- δ_{11} → deslocamento horizontal absoluto do apoio da esquerda, provocado por $X_1 = 1$ no caso (1) [m/kN].
- δ_{21} → rotação absoluta da seção adjacente ao apoio da direita, provocada por $X_1 = 1$ no caso (1) [rad/kN].
- δ_{31} → rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula introduzida no nó superior esquerdo, provocada por $X_1 = 1$ no caso (1) [rad/kN].

Caso (2) - Hiperestático X_2 isolado no SP

Interpretações físicas dos coeficientes de flexibilidade:

- δ_{12} → deslocamento horizontal absoluto do apoio da esquerda, provocado por $X_2 = 1$ no caso (2) [m/kNm].
- δ_{22} → rotação absoluta da seção adjacente ao apoio da direita, provocada por $X_2 = 1$ no caso (2) [rad/kNm].
- δ_{32} → rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula introduzida no nó superior esquerdo, provocada por $X_2 = 1$ no caso (2) [rad/kNm].

Caso (3) - Hiperestático X_3 isolado no SP

Interpretações físicas dos coeficientes de flexibilidade:

- δ_{13} → deslocamento horizontal absoluto do apoio da esquerda, provocado por $X_3 = 1$ no caso (3) [m/kNm].
- δ_{23} → rotação absoluta da seção adjacente ao apoio da direita, provocada por $X_3 = 1$ no caso (3) [rad/kNm].
- δ_{33} → rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula introduzida no nó superior esquerdo, provocada por $X_3 = 1$ no caso (3) [rad/kNm].

ENG 1204 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 1º Semestre – 2020

Grau G1 – 3ª e 4ª Questões – Entrega: 01/04/2020 até 9:00 hs (não serão aceitas respostas depois desse dia e horário)

As soluções das 3ª e 4ª Questões do grau G1 devem ser entregues em dois arquivos em formato PDF com os seguintes nomes: **ENG1204-201-G1-Q3-matricula.pdf** e **ENG1204-201-G1-Q3-matricula.pdf**, em que **matricula** é o número de matrícula da aluna ou do aluno.

Leia com atenção as instruções abaixo e os enunciados das questões.

As respostas devem ser feitas como um relatório da memória de cálculo. A qualidade da apresentação vai ser considerada na avaliação da resposta.

As soluções podem ser feitas à mão em papel e digitalizadas, criadas digitalmente através de algum editor de texto, ou por uma combinação de trechos e desenhos feitos à mão e digitalizados com trechos editados digitalmente.

Sugere-se que o programa Ftool seja utilizado tanto para auxiliar nos cálculos quanto para geração de figuras das soluções.

Opções de configuração no Ftool:

Unidades gerais adotadas: [kN-m] (configure utilizando a opção *Units & Number Formatting...* do menu *Options*).

Unidade para distâncias: [m]; número de casas decimais para distâncias: 0 (nenhuma casa decimal).

Unidade para forças: [kN]; número de casas decimais para forças: 2.

Unidade para momentos: [kNm]; número de casas decimais para momentos: 2.

Unidade para forças distribuídas: [kN/m]; número de casas decimais para forças distribuídas: 0.

Valor e unidade do módulo de elasticidade (E) do material (*Generic Isotropic*) para todas as barras: 10^8 kN/m² ($1.0e+08$ kN/m²). O demais parâmetros de material não são utilizados nesta solução. Deixar os valores *default*.

Parâmetros de seção transversal (*Generic/Integral Properties*) para todas as barras:

Valor e unidade da área da seção transversal (A): 0.012 m².

Valor e unidade do momento de inércia da seção transversal (I): 0.0012 m⁴.

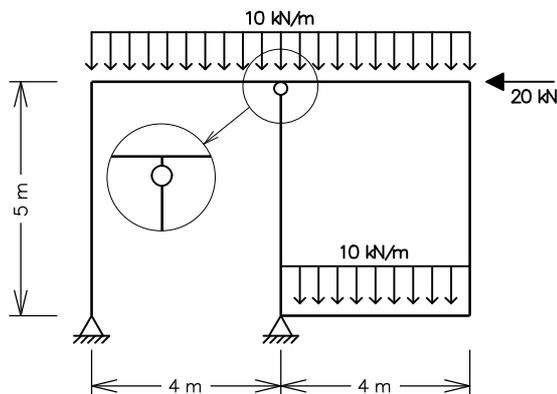
O demais parâmetros de seção transversal não são utilizados nesta solução. Deixar os valores *default* nulos.

Todas as barras dos modelos estruturais são consideradas sem deformação axial e sem deformação por cisalhamento (efeito cortante). Para configurar isso no Ftool, no menu *Deformation Constraints* selecione *Flexible Member* e deixe as opções *Axial Deformation* and *Shear Deformation* NÃO selecionadas. Aplique isso para todas as barras.

3ª Questão (2,0 pontos)

Considere a solução do pórtico plano da figura ao lado pelo Método das Forças.

Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma rigidez à flexão $EI = 1.2 \times 10^5$ kNm².



Item (3.a) – Sistema Principal (0,5 ponto)

Obtenha uma estrutura isostática a partir da eliminação dos vínculos externos (liberação de restrições de apoio) e/ou vínculos internos de continuidade de rotação (introdução de rótulas). Essa estrutura será o Sistema Principal (SP) para a resolução do quadro original hiperestático pelo Método das Forças.

O SP e os hiperestáticos associados aos vínculos eliminados devem ser indicados pelo nome X_j , sendo j o número do hiperestático, através de figuras de duas maneiras:

(3.a.1) Pórtico isostático composto com hiperestáticos indicados.

(3.a.2) Decomposição do pórtico isostático composto em uma sequência de carregamento de pórticos isostáticos simples (biapoiados, triarticulados, e engastados com balanço), com hiperestáticos indicados. Nessa figura, a sequência de carregamento deve ser indicada através de apoios fictícios e de setas que mostram a maneira como um pórtico isostático simples secundário é suportado por outro pórtico isostático simples relativamente principal.

Item (3.b) – Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no Sistema Principal (1,5 pontos)

(3.b.1) Mostre em uma figura a configuração deformada do caso (0) com escala de deslocamentos exagerada, indicando as componentes de deslocamentos e rotações nas direções dos vínculos rompidos para a criação do SP. Essas componentes de deslocamentos e rotações correspondem aos *termos de carga*, com nomes δ_i , sendo i o número do hiperestático correspondente. Os termos de carga devem ser indicados na figura pelos seus nomes. Não precisa indicar valor ou unidade.

(3.b.2) Mostre em uma figura, juntamente com a solicitação externa, as reações de apoio para o caso básico (0), com valores e unidades, nos apoios fictícios e nos apoios originais do pórtico isostático decomposto.

(3.b.3) Mostre em uma figura o diagrama de momentos fletores do caso (0). O diagrama pode ser indicado no pórtico isostático composto do SP ou nos pórticos isostáticos simples resultantes da decomposição deste. A unidade dos momentos fletores deve ser indicada. O diagrama deve ser traçado desenhando as ordenadas do lado da fibra tracionada em cada seção transversal. Os valores dos momentos fletores devem ser indicados nas extremidades de todas as barras e, para as barras carregadas, o diagrama de momento fletor para o carregamento de viga biapoiada da barra deve ser indicado “pendurado” a partir da linha reta que une os valores das extremidades da barra. Não precisa indicar o sinal dos valores dos momentos fletores no diagrama.

4ª Questão (3,0 pontos)

Considere a solução do pórtico plano da questão anterior pelo Método das Forças.

Item (4.a) – Casos básicos dos hiperestáticos isolados no Sistema Principal (1,5 pontos)

Carregue o Sistema Principal, alternadamente, com os hiperestáticos com valores unitários. Isto deve gerar um caso de carregamento para cada hiperestático (com valor unitário) atuando independentemente, sendo que cada um corresponde a um dos casos básicos (j) do Método das Forças, onde j é o número de um hiperestático.

(4.a.1) Mostre figuras com a configuração deformada do SP, com escala de deslocamentos exagerada, para cada um dos hiperestáticos unitários impostos, indicando as componentes de deslocamentos e rotações nas direções dos vínculos rompidos para a criação do SP. Essas componentes de deslocamentos e rotações correspondem aos *coeficientes de flexibilidade*, com nomes δ_j . Os coeficientes de flexibilidade devem ser indicados na figuras pelos seus nomes. Não precisa indicar valor ou unidade.

(4.a.2) Mostre em figuras as reações nos apoios fictícios e nos apoios originais do pórtico isostático decomposto provocadas pelos hiperestáticos com valores unitários em cada caso básico (j). O hiperestático com valor unitário deve ser indicado em cada uma dessas figuras.

(4.a.3) Mostre em figuras os diagramas de momentos fletores dos casos básicos (j). Os diagramas podem ser indicados no pórtico isostático composto do SP ou nos pórticos isostáticos simples resultantes da decomposição deste. Os diagramas devem ser traçados desenhando as ordenadas do lado da fibra tracionada em cada seção transversal. Os valores dos momentos fletores devem ser indicados nas extremidades de todas as barras. Não precisa indicar o sinal dos valores dos momentos fletores nos diagramas.

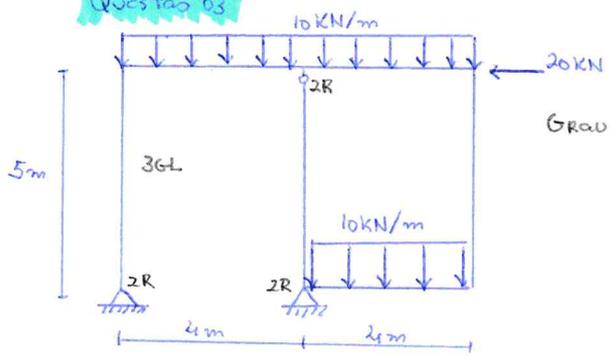
Item (4.b) – Sistema de equações de compatibilidade (1,0 ponto)

Com base nos resultados da 3ª Questão e do item anterior desta questão, monte o sistema de equações de compatibilidade que resulta da solução do quadro original pelo Método das Forças. Os valores numéricos dos termos de carga e dos coeficientes de flexibilidade deste sistema de equações devem ser calculados utilizando o Princípio das Forças Virtuais (PFV), considerando apenas a parcela de energia de deformação por flexão. O sistema de equações de compatibilidade não precisa ser resolvido. Com base nos resultados da estrutura hiperestática original, indique os valores dos hiperestáticos, com sinal e unidades. Demonstre que os valores dos hiperestáticos correspondem realmente à solução do sistema de equações de compatibilidade.

Item (4.c) – Momentos fletores finais (0,5 ponto)

Mostre em uma figura o diagrama de momentos fletores do pórtico hiperestático original. Selecione um valor do diagrama de momentos fletores que recebe influência do caso básico (0) e de todos os demais casos básicos. Demonstre que este valor é obtido pela superposição dos valores correspondentes de cada um dos casos básicos, considerando os valores dos hiperestáticos com sinais.

Questão 03

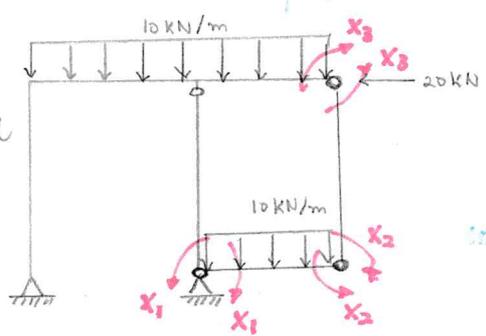


Grav de Hiperestaticidade: $6 - 3 \rightarrow \boxed{GH = 3}$

Item (3.a) - Sistema Principal

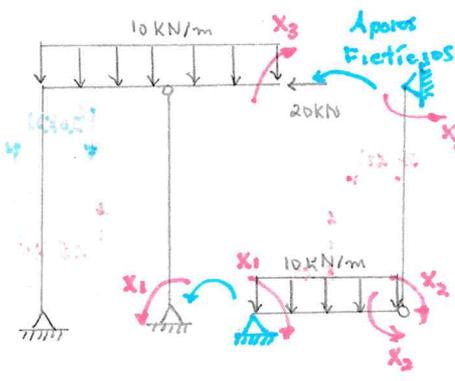
(3.a.1)

Sistema Principal e Hiperestáticos



(3.a.2)

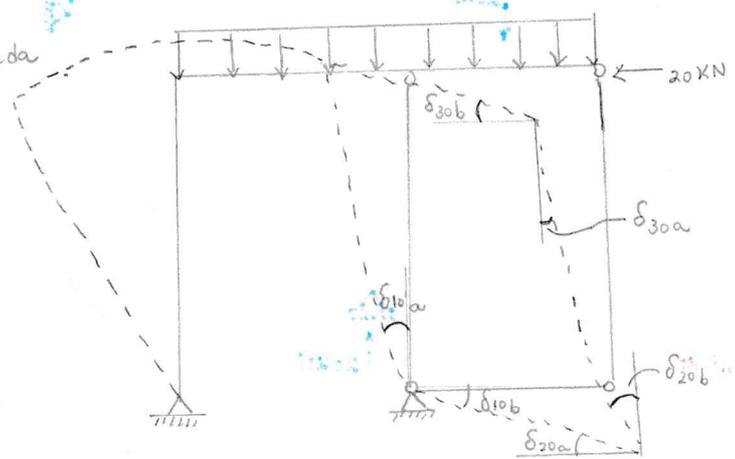
Sistema Principal decompostos



Item (3.b) - Caso (b) - Solicitação externa (carregamento) isolada no SP

(3.b.1)

Configurações deformada do caso (b)

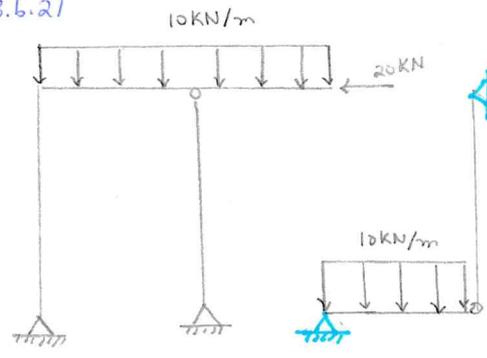


$$\delta_{10} = \delta_{10a} + \delta_{10b}$$

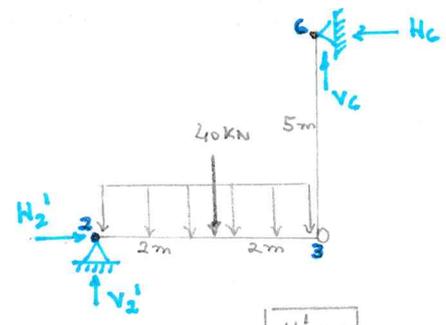
$$\delta_{20} = \delta_{20a} + \delta_{20b}$$

$$\delta_{30} = \delta_{30a} + \delta_{30b}$$

(3.b.2)



Resolvendo o triarticulado



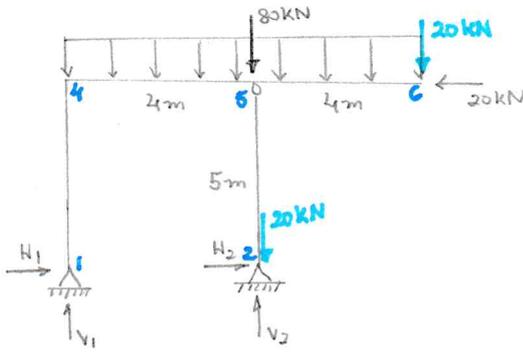
$$\rightarrow \sum F_x = 0 \rightarrow H_2' - H_c = 0 \rightarrow \boxed{H_2' = 0}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow V_2' + V_c = 40 \rightarrow \boxed{V_2' = 20 \text{ kN}}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_2 = 0 \rightarrow -40 \cdot 2 + 5H_c + 4V_c = 0 \rightarrow \boxed{V_c = 20 \text{ kN}}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{R3} = 0 \rightarrow 5H_c = 0 \rightarrow \boxed{H_c = 0}$$

Resolvendo o outro corpo



$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \rightarrow H_1 + H_2 = 20 \rightarrow H_1 = 20 \text{ kN}$$

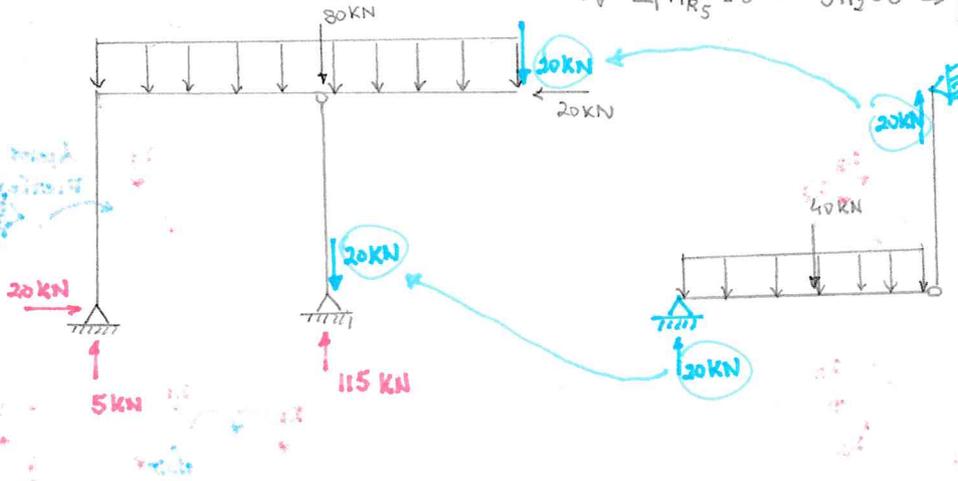
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow V_1 + V_2 - 20 - 20 - 80 = 0$$

$$V_1 + V_2 = 120 \rightarrow V_2 = 115 \text{ kN}$$

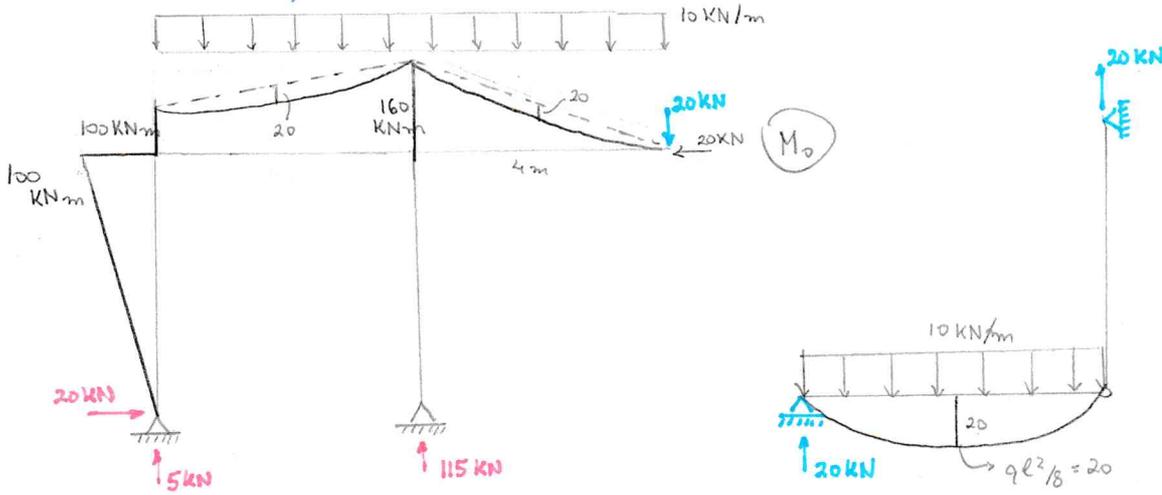
$$+\curvearrowright \sum M_A = 0 \rightarrow -20 \cdot 4 + 20 \cdot 5 - 4V_1 = 0$$

$$V_1 = 5 \text{ kN}$$

$$+\curvearrowright \sum M_B = 0 \rightarrow 5H_2 = 0 \rightarrow H_2 = 0$$



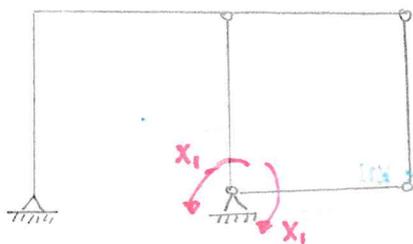
(3.6.3) - Diagrama de Momentos Fletores Caso (c)



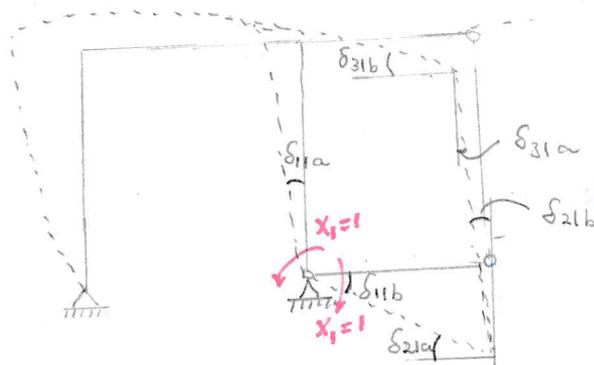
Questões 04

Item (4.a)

Caso (1) - Hiperestática X_1 isolado no SP



(4.a.1) Configurações deformada do SP no Caso (1)

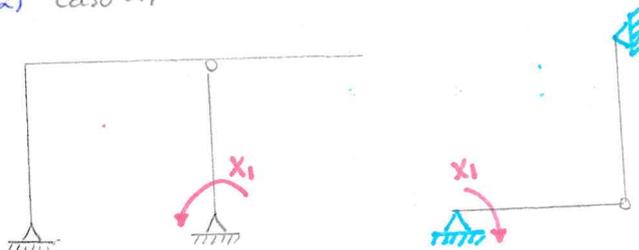


$$\delta_{11} = \delta_{11a} + \delta_{11b}$$

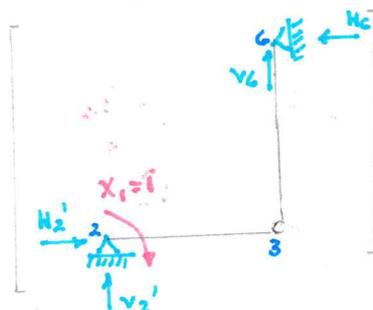
$$\delta_{21} = \delta_{21a} + \delta_{21b}$$

$$\delta_{31} = \delta_{31a} + \delta_{31b}$$

(4.a.2) Caso (1)



Resolvendo o triarticulado



$$\rightarrow \sum F_x = 0 \rightarrow H_2' - H_c = 0$$

$$\boxed{H_2 = 0}$$

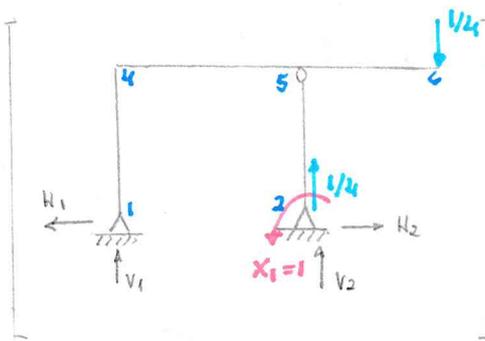
$$\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow V_2' + V_c = 0$$

$$\boxed{V_2' = -1/4 \text{ KN}}$$

$$\uparrow \sum M_2 = 0 \rightarrow -1 + 5H_c + 4V_c = 0 \rightarrow \boxed{V_c = 1/4 \text{ KN}}$$

$$\uparrow \sum M_{R_3} = 0 \rightarrow 5H_c = 0 \rightarrow \boxed{H_c = 0}$$

Resolvendo o outro corpo



$$\rightarrow \sum F_x = 0 \rightarrow H_2 - H_1 = 0 \rightarrow \boxed{H_1 = -1/5 \text{ KN}}$$

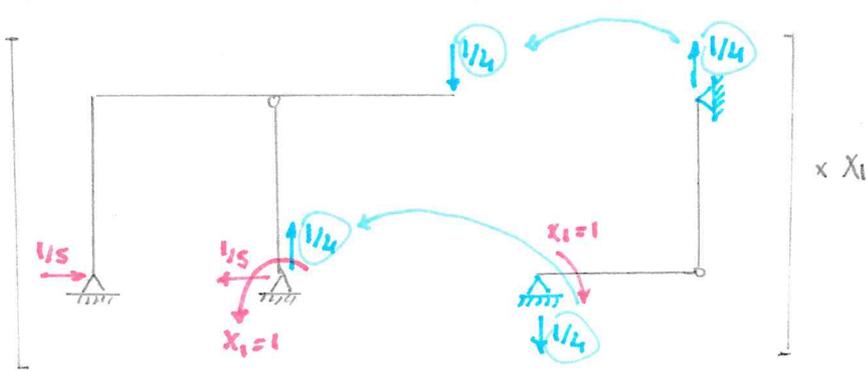
$$\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow V_1 + V_2 + 1/4 - 1/4 = 0 \rightarrow V_1 + V_2 = 0$$

$$\boxed{V_2 = 0}$$

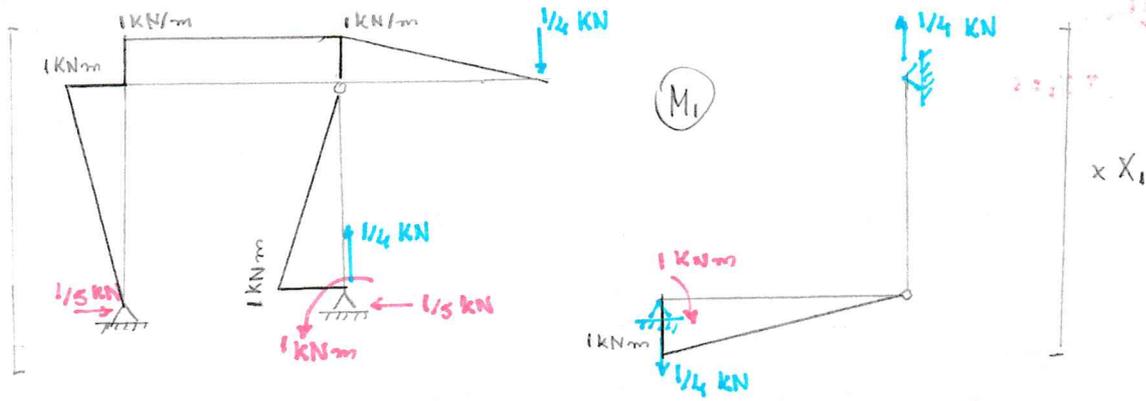
$$\uparrow \sum M_2 = 0 \rightarrow 1 - \frac{1}{4} \cdot 4 - 4V_1 = 0$$

$$\boxed{V_1 = 0}$$

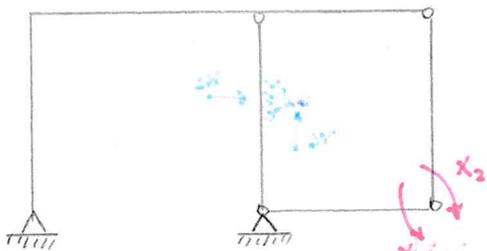
$$\uparrow \sum M_{R_5} = 0 \rightarrow 5H_2 + 1 = 0 \rightarrow \boxed{H_2 = -1/5 \text{ KN}}$$



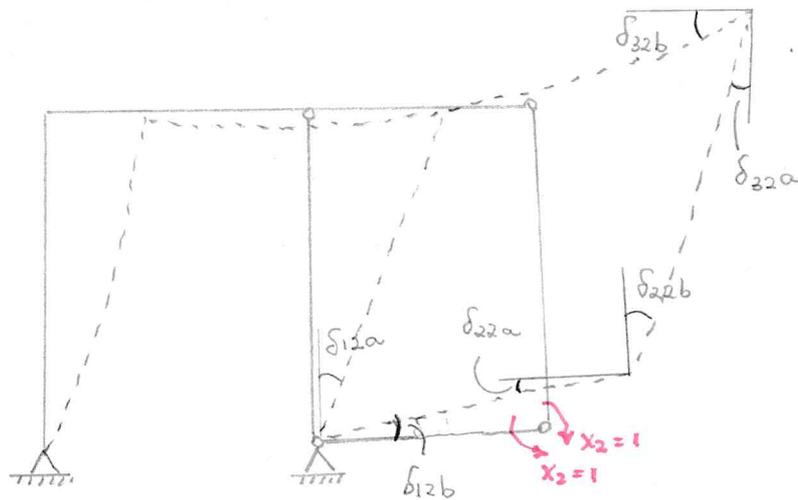
(4.a.3) - DMF Caso (1)



Caso (2) - Hiperestático X_2 isolado no SP



(4.a.1) Configurações deformadas do SP no caso (2)



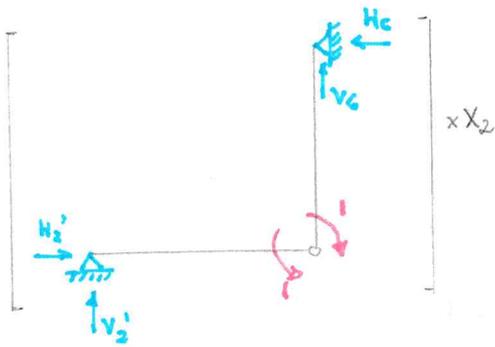
$$\delta_{12} = \delta_{12a} + \delta_{12b}$$

$$\delta_{22} = \delta_{22a} + \delta_{22b}$$

$$\delta_{32} = \delta_{22a} + \delta_{32b}$$

(4.a.2) caso (2)

Resolvendo o triarticulado

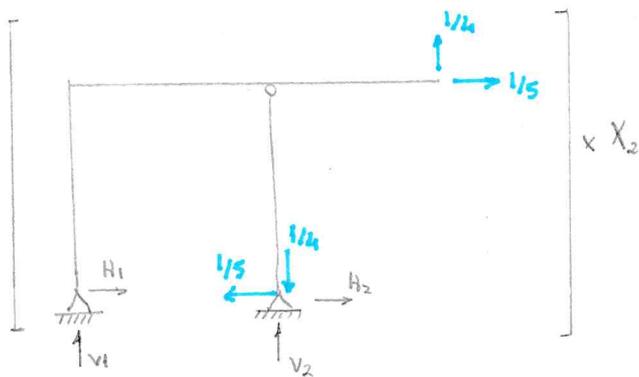


$$\sum F_x = 0 \rightarrow H_2' - H_c = 0 \rightarrow H_2 = 1/5 \text{ KN}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_2' - V_c = 0 \rightarrow V_c = 1/4 \text{ KN}$$

$$\sum M_2 = 0 \rightarrow 1 - 1 - 4V_c + 5H_c = 0 \rightarrow H_c = 1/5 \text{ KN}$$

$$\sum M_{R_3} = 0 \rightarrow 1 - 4V_2' = 0 \rightarrow V_2' = 1/4 \text{ KN}$$



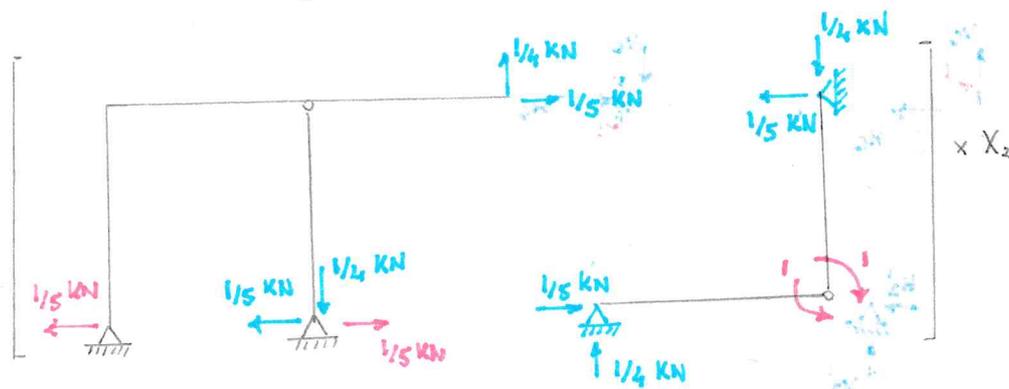
Por equilibrio:

$$H_1 = -1/5 \text{ KN}$$

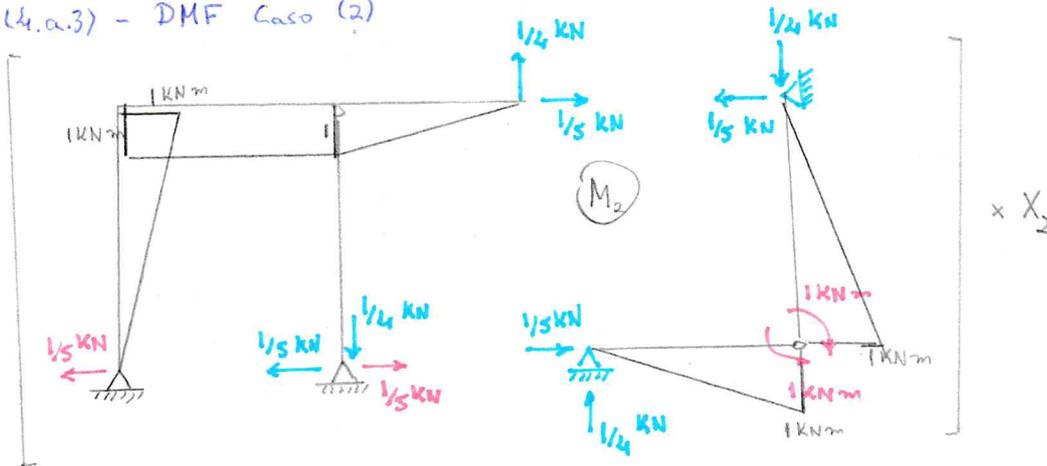
$$V_2 = 0$$

$$V_1 = 0$$

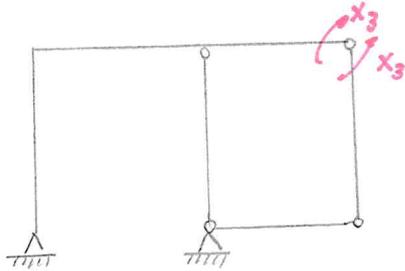
$$H_2 = 1/5 \text{ KN}$$



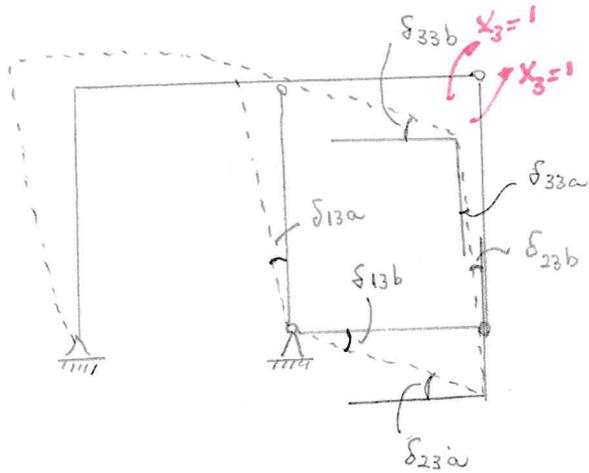
(4.a.3) - DMF caso (2)



Caso (3) - Hiperestático X_3 isolado no SP



(4.a.1) Configurações deformadas caso (3)

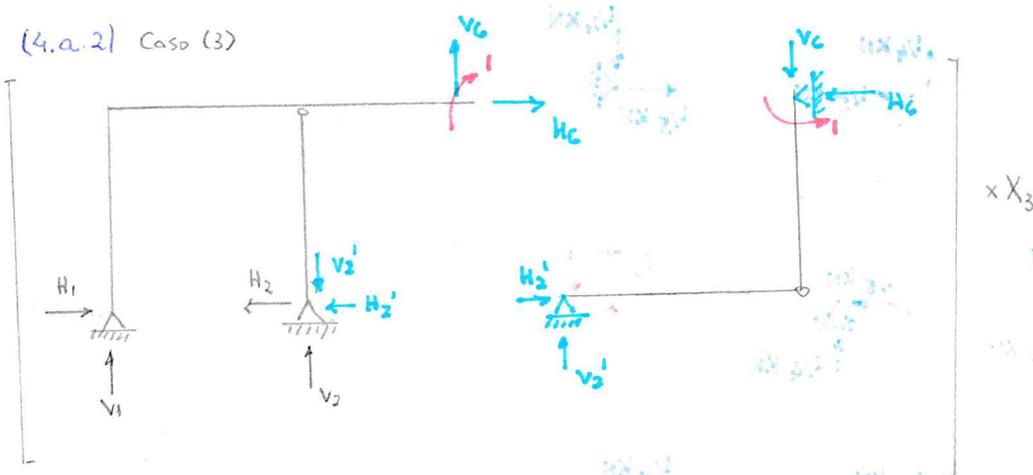


$$\delta_{13} = \delta_{13a} + \delta_{13b}$$

$$\delta_{23} = \delta_{23a} + \delta_{23b}$$

$$\delta_{33} = \delta_{33a} + \delta_{33b}$$

(4.a.2) Caso (3)



Calculando as reações do triarticulado por equilíbrio

$$H_c = -1/5 \text{ KN}$$

$$H'_2 = -1/5 \text{ KN}$$

$$V_c = 0$$

$$V'_2 = 0$$

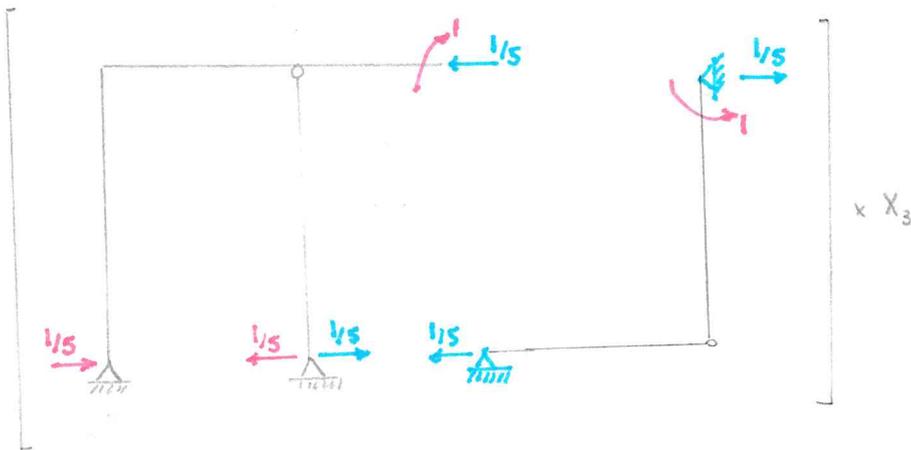
Fazendo o mesmo para o outro corpo tendo transferido

$$H_1 = 1/5 \text{ KN}$$

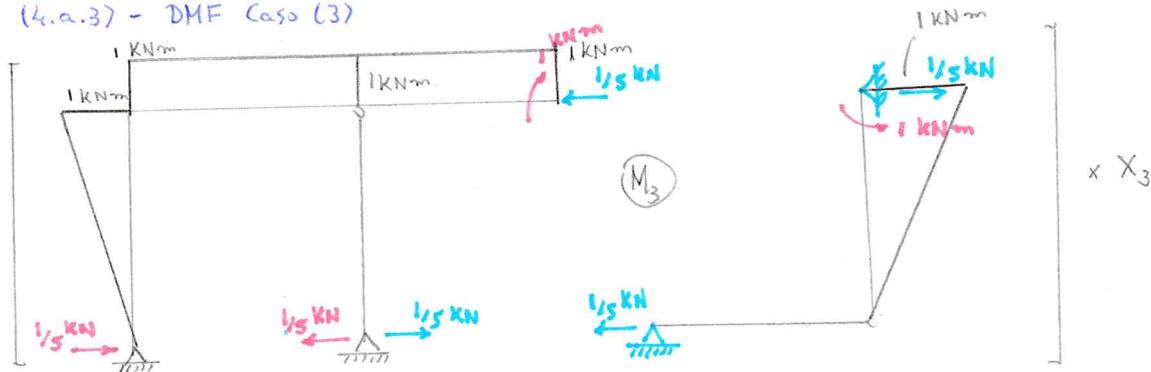
$$H_2 = 1/5 \text{ KN}$$

$$V_2 = 0$$

$$V_1 = 0$$



(4.a.3) - DMF Caso (3)



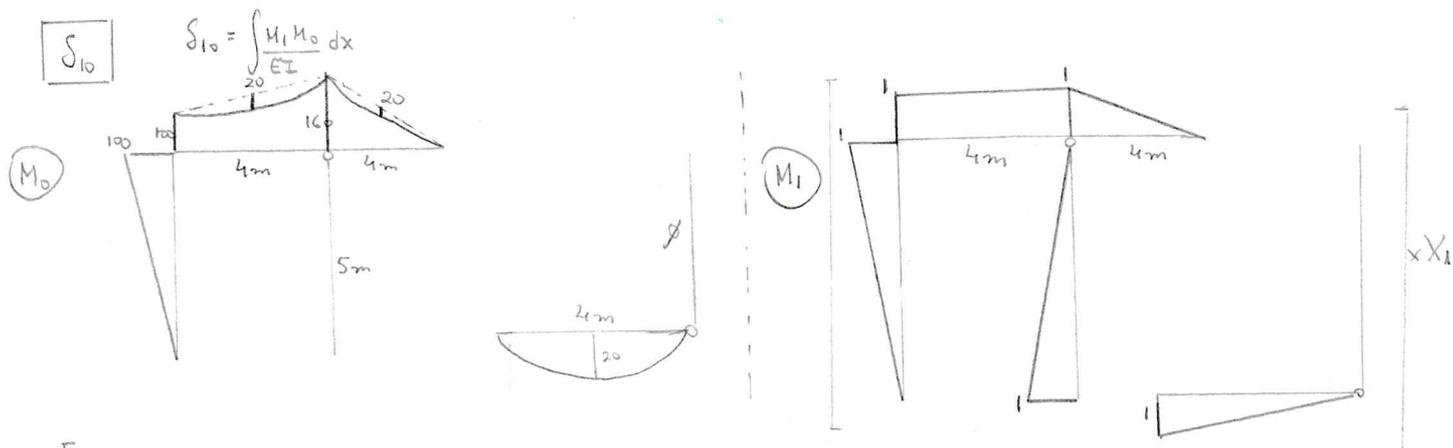
Item (4.b)

Sistema de equações de compatibilidade

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 = 0 \\ \delta_{30} + \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 = 0 \end{cases}$$

Calculando os termos de carga e coeficientes de flexibilidade pela combinação de DMFs

Termos de carga

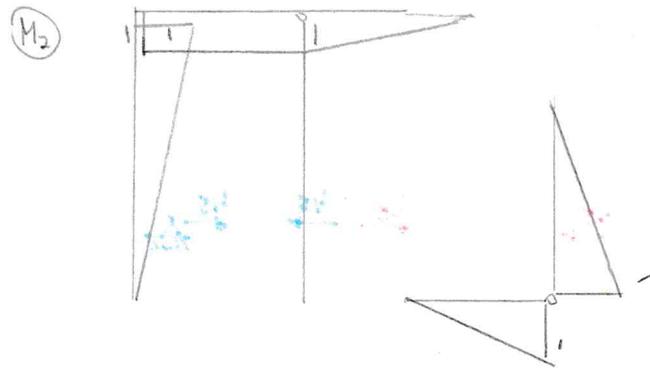
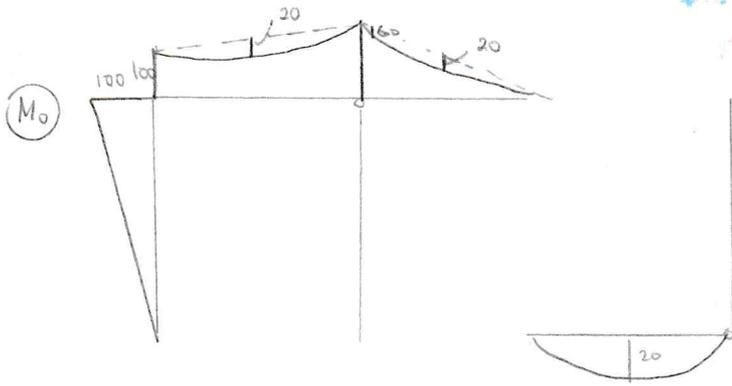


$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 1.5 + \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 1.4 + \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 1.4 - \frac{2}{3} \cdot 20 \cdot 1.4 + \frac{1}{3} \cdot 160 \cdot 1.4 - \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 1.4 + \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 1.4 \right]$$

$$= \frac{1}{EI} \left[\frac{500}{3} + 200 \cdot \frac{1}{3} + 320 \cdot \frac{1}{3} - 160 \cdot \frac{1}{3} + 640 \cdot \frac{1}{3} - 800 \cdot \frac{1}{3} + 800 \cdot \frac{1}{3} \right]$$

$$\delta_{10} = + \frac{1}{EI} \left[\frac{2540}{3} \right]$$

$$\delta_{20} = \int \frac{M_2 M_0}{EI} dx$$



$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \left[\underbrace{-\frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 15}_{-500/3} - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 10}_{-200} - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 160 \cdot 10}_{-320} + \underbrace{\frac{2}{3} \cdot 20 \cdot 10}_{+160/3} - \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 160 \cdot 10}_{-240/3} - \underbrace{\left(\frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 10\right)}_{+80/3} + \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 10}_{+80/3} \right]$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \left[\frac{-500 - 600 - 960 + 160 - 240 + 80 + 80}{3} \right] \rightarrow \delta_{20} = \frac{1}{EI} \left[\frac{-2380}{3} \right]$$

$$\delta_{30}$$

$$\delta_{30} = \frac{1}{EI} \left[\underbrace{+\frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 15}_{500/3} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 10}_{200} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 160 \cdot 10}_{320} - \underbrace{\frac{2}{3} \cdot 20 \cdot 10}_{160/3} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 160 \cdot 10}_{320} - \underbrace{\frac{2}{3} \cdot 20 \cdot 10}_{160/3} \right]$$

$$\delta_{30} = \frac{1}{EI} \left[+900 \right] \rightarrow \delta_{30} = \frac{1}{EI} \left[\frac{+2700}{3} \right]$$

Coefficientes de flexibilidade

$$\delta_{11}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[+\frac{5}{3} + 4 + \frac{4}{3} + \frac{5}{3} + \frac{2}{3} \right] \rightarrow \delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[+10 \right]$$

$$\delta_{12} = \delta_{21}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 15 - 1 \cdot 10 - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 10 + \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 10 \right] = \frac{1}{EI} \left[-\frac{5}{3} - 4 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right] \rightarrow \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \left[\frac{-19}{3} \right]$$

$$\delta_{22}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[+\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 15 + 1 \cdot 10 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 10 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 10 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 15 \right] \rightarrow \delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[+10 \right]$$

$$\delta_{13} = \delta_{31}$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{1}{EI} \left[+\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \right] \rightarrow \delta_{13} = \delta_{31} = \frac{1}{EI} \left[\frac{+23}{3} \right]$$

$$\delta_{23} = \delta_{32}$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 \right] \rightarrow \delta_{23} = \delta_{32} = \frac{1}{EI} \left[\frac{-41}{6} \right]$$

$$\delta_{33}$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EI} \left[+\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 \right] \rightarrow \delta_{33} = \frac{1}{EI} \left[\frac{+34}{3} \right]$$

Equações de compatibilidade:

$$\frac{1}{EI} \begin{bmatrix} +2540/3 \\ -2380/3 \\ +900 \end{bmatrix} + \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} +10 & -19/3 & +23/3 \\ -19/3 & +10 & -41/6 \\ +23/3 & -41/6 & +34/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = -38,21 \text{ KN}\cdot\text{m}$$

$$X_2 = +31,52 \text{ KN}\cdot\text{m}$$

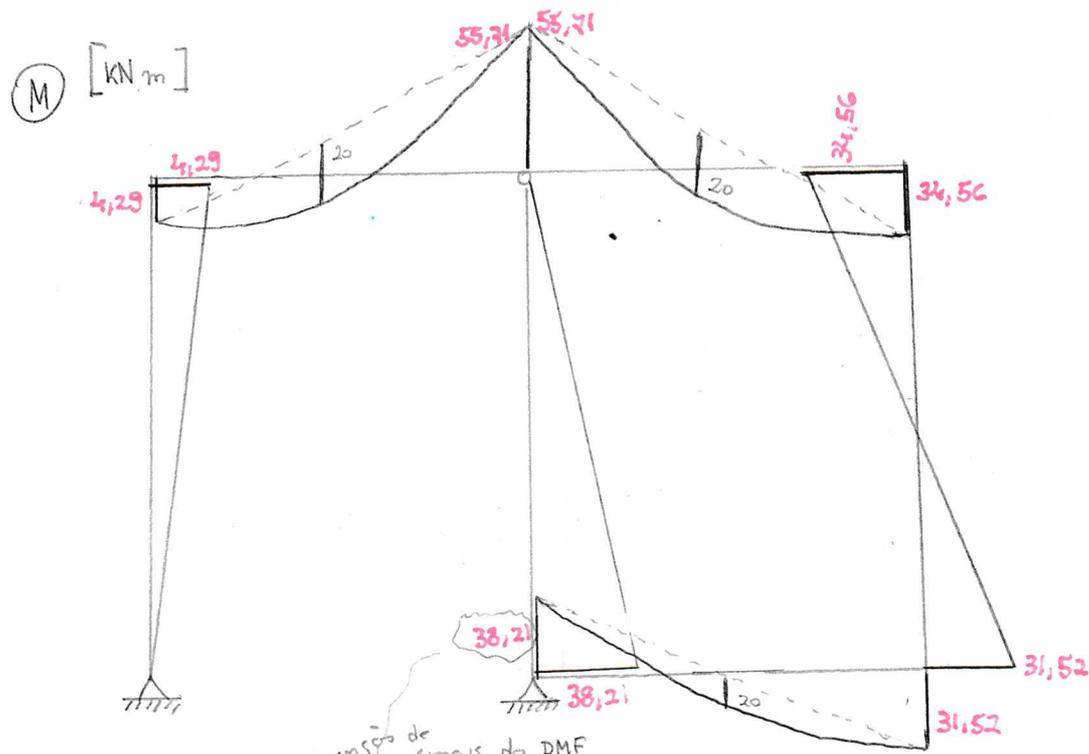
$$X_3 = -34,56 \text{ KN}\cdot\text{m}$$

Demonstrando

$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 = 0 \rightarrow \frac{+2540}{3EI} + \frac{30}{3EI} \cdot (-38,21) + \left(\frac{-19}{3EI} \right) (+31,52) + \frac{23}{3EI} (-34,56) = 0$$

$$+2540 - 1146,3 - 598,88 - 794,88 = 0 \rightarrow 0 = 0 \text{ (V)} \text{ aproximando porque dá } \rightarrow 0,06$$

Item (4.c) - Momentos fletores finais

Momentos fletores finais: $M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_3 X_3$ 

Demonstrando que $38,21 \text{ kNm}$ é obtido pela superposição dos valores correspondentes de cada um dos casos básicos, considerando os valores dos hiperestáticos com sinais convenção de sinais do DMF

$$M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_3 X_3$$

$$M = 0 + 1 \cdot (-38,21) + 0 \cdot (+31,52) + 0 \cdot (-34,56)$$

$$M = -38,21 \text{ kNm}$$

$$\boxed{-38,21 = -38,21}$$

ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 1º Semestre - 2020

Grau G1 - 5ª Questão - Aplicação: 08/04/2020, 9 hs - Entrega: 11/04/2020, 17 hs

A solução da 5ª Questão do grau G1 deve ser entregue na página da disciplina no Moodle/CCEAD em um arquivo em formato PDF com o seguinte nome: **ENG1204-201-G1-Q5-matricula.pdf**, em que **matricula** é o número de matrícula da aluna ou do aluno. Não serão aceitas respostas após 17 hs do dia 11/04/2020.

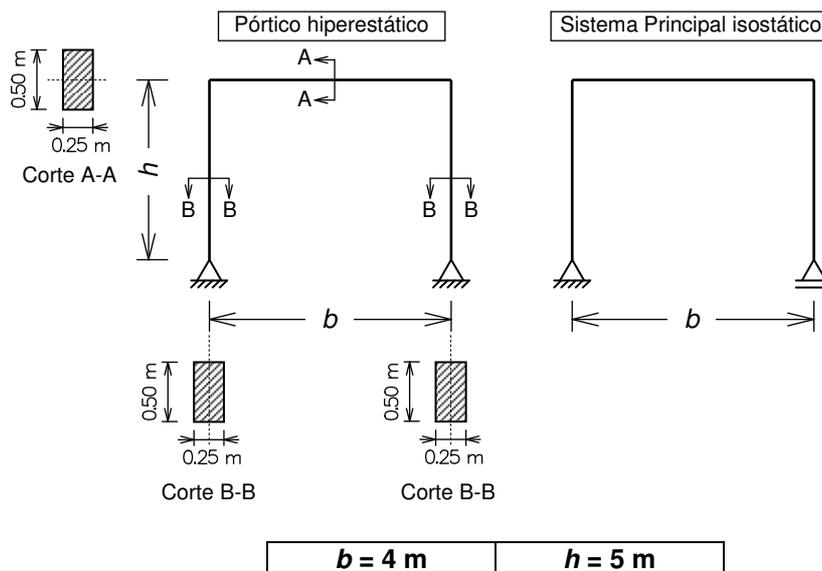
As respostas devem ser feitas como um relatório da memória de cálculo. A qualidade da apresentação vai ser considerada na avaliação da resposta.

As soluções podem ser feitas à mão em papel e digitalizadas, criadas digitalmente através de algum editor de texto, ou por uma combinação de trechos e desenhos feitos à mão e digitalizados com trechos editados digitalmente.

Sugere-se que o programa Ftool seja utilizado tanto para auxiliar nos cálculos quanto para geração de figuras das soluções.

5ª Questão (3,0 pontos)

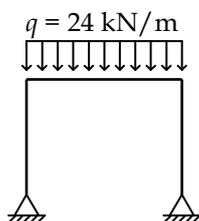
Considere a solução pelo Método das Forças do pórtico hiperestático mostrado na figura da esquerda, cujo Sistema Principal é o pórtico isostático mostrado na figura da direita.



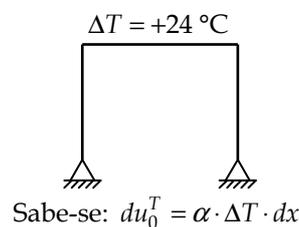
O material utilizado nos pórticos tem módulo de elasticidade $E = 10^{18} \text{ kN/m}^2$ e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$. Despreze deformação por cisalhamento.

Pede-se os diagramas de momentos fletores no pórtico hiperestático para cada uma das solicitações externas mostradas abaixo (isoladamente). Todos os passos da solução pelo Método das Forças têm de ser indicados.

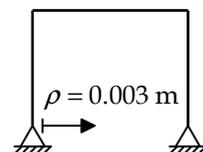
(q) Força uniformemente distribuída atuando na viga



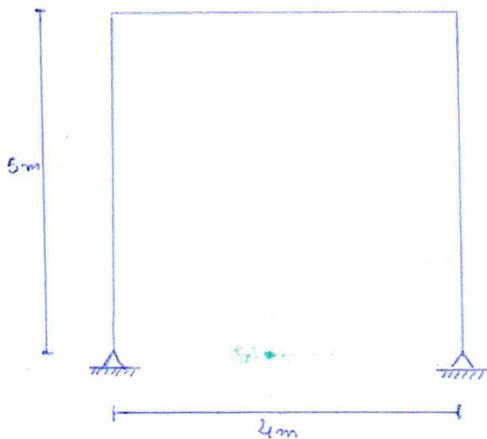
(T) Variação uniforme de temperatura na viga



(ρ) Recalque horizontal no apoio da esquerda



Questões 05



$$E = 10^8 \text{ KN/m}^2$$

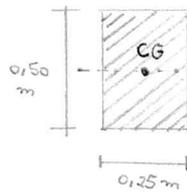
$$A = 0,125 \text{ m}^2$$

$$EA = 1,25 \times 10^7 \text{ KN}$$

$$\text{Viga} \rightarrow EI = 2,6042 \times 10^5 \text{ KNm}^2$$

$$\text{Pilares} \rightarrow EI = 6,5104 \times 10^4 \text{ KNm}^2$$

Seção transversal viga

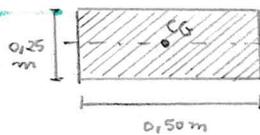


$$A = 0,125 \text{ m}^2$$

$$I_{CG \text{ viga}} = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,25 \cdot (0,50)^3}{12}$$

$$I_{CG \text{ viga}} = 2,6042 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

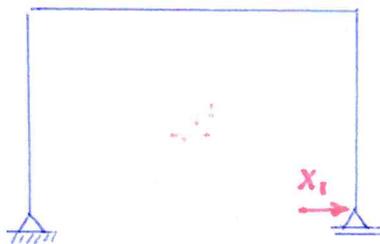
Seção transversal pilares



$$I_{CG \text{ pilares}} = \frac{0,50 (0,25)^3}{12}$$

$$I_{CG \text{ pilares}} = 6,5104 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

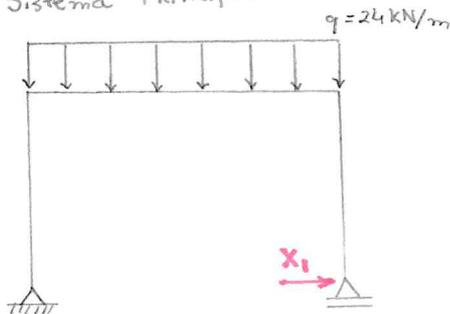
Sistema Principal



Hiperestático X_1

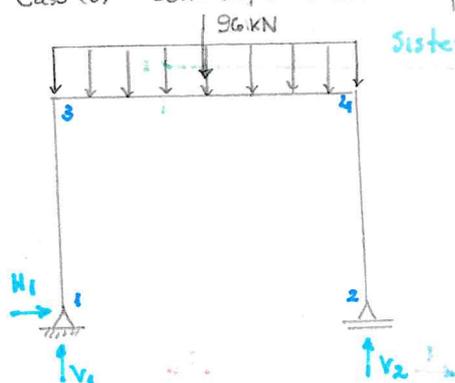
Caso onde a força uniformemente distribuída atua na viga

Sistema Principal



Equações de compatibilidade: $\delta_{10}^q + \delta_{11}^{X_1} = 0$

Caso (b) - Solicitação externa (força uniformemente distribuída) isolada no SP



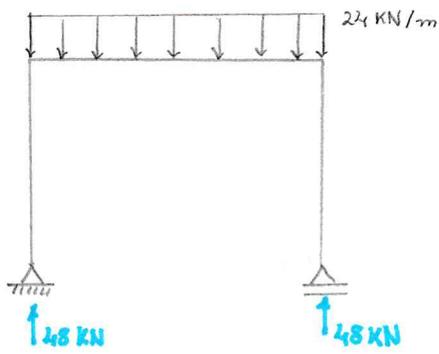
Sistema real (SR)

equilíbrio: $\rightarrow \sum F_x = 0 \rightarrow H_1 = 0$

$\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow V_1 + V_2 = 96 \rightarrow V_1 = 48 \text{ kN}$

$\rightarrow \sum M_1 = 0 \rightarrow -96 \cdot 2 + 4V_2 = 0$

$V_2 = 48 \text{ kN}$



Configurações deformada

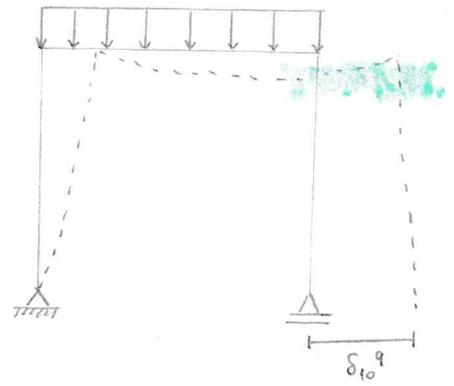


Diagrama de momento fletor

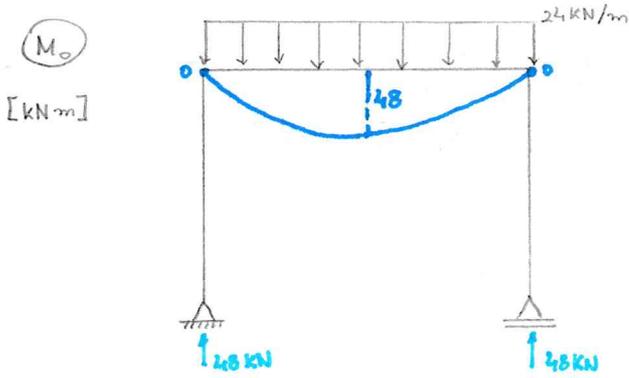
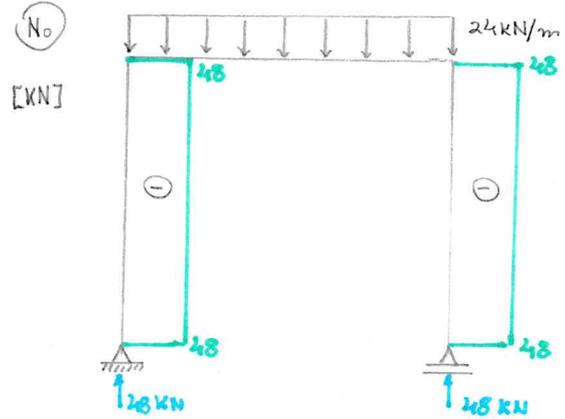
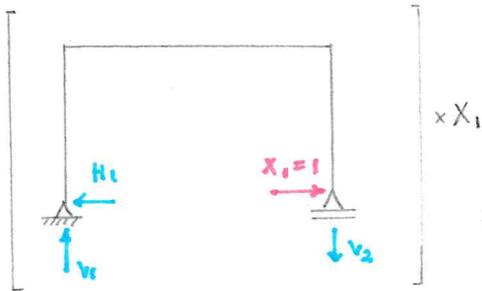
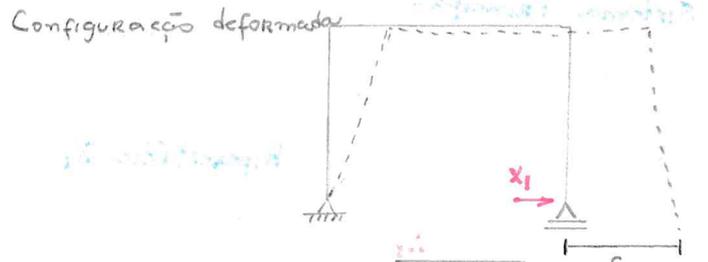


Diagrama de esforço normal



Caso (1) - Hiperestático X_1 isolado no SP
Sistema Virtual (SV)



Equilíbrio: $\sum F_x = 0 \rightarrow 1 - H_1 = 0 \rightarrow H_1 = 1 \text{ kN}$

$\sum F_y = 0 \rightarrow V_1 - V_2 = 0 \rightarrow V_1 = 0$

$\sum M_1 = 0 \rightarrow -2V_2 = 0 \rightarrow V_2 = 0$

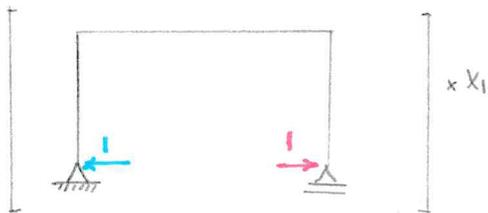


Diagrama de momento fletor

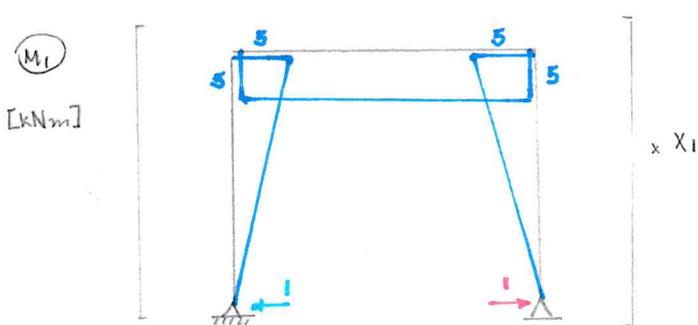
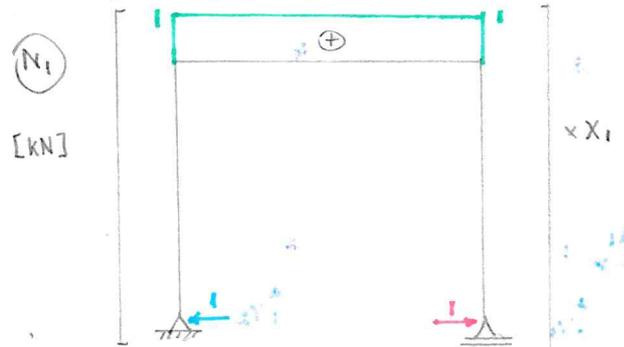
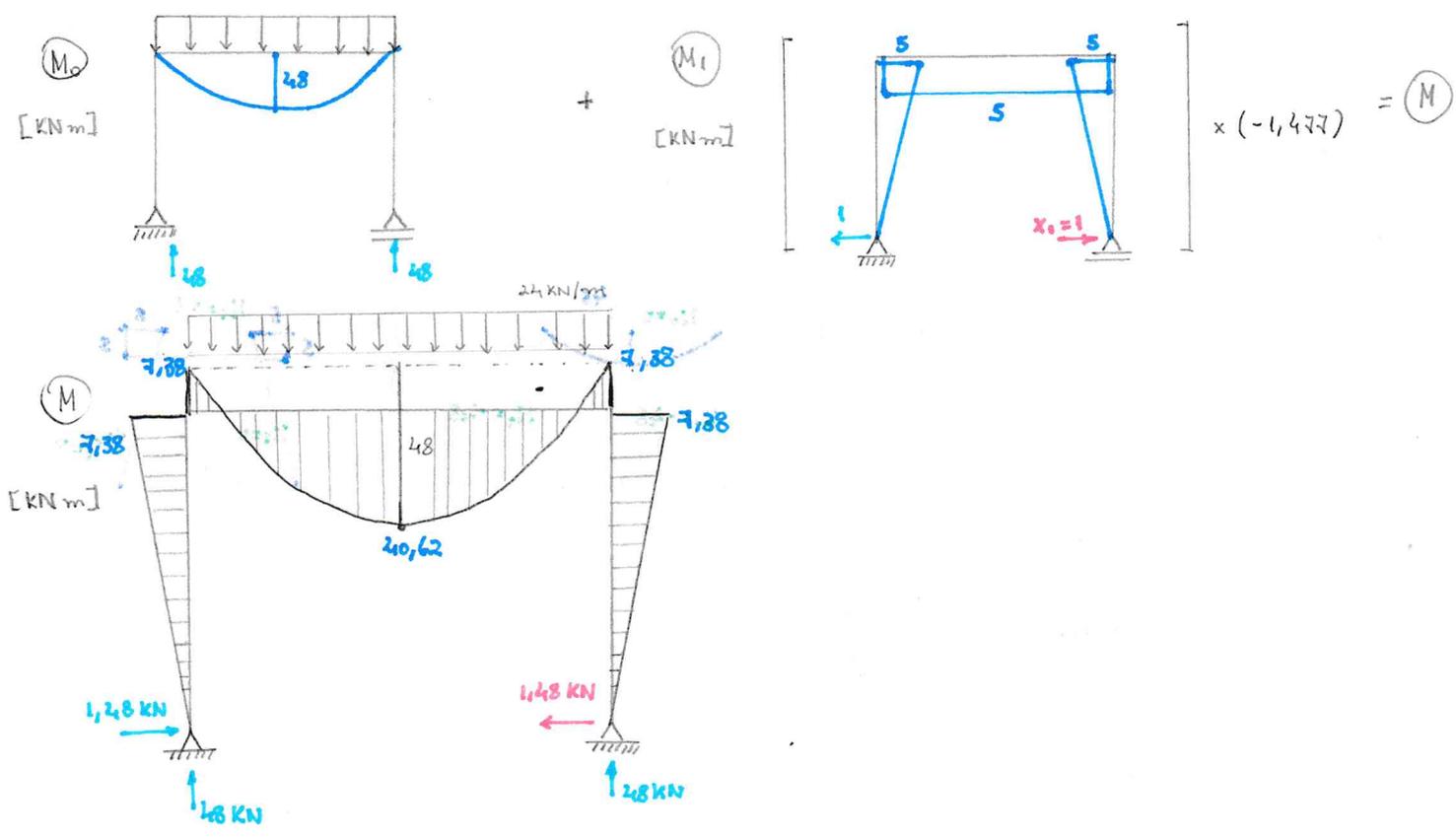


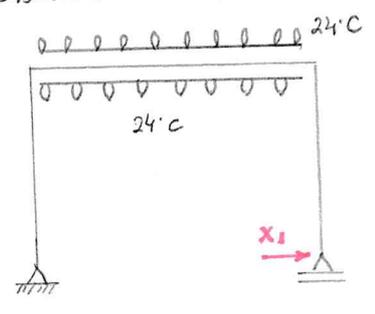
Diagrama de esforço normal





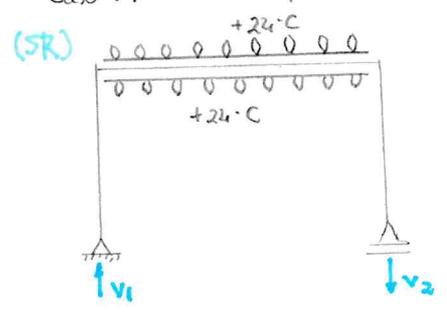
Caso onde ocorre variações uniforme de temperatura na viga

Sistema Principal



Equações de compatibilidade: $\delta_{10}^T + \delta_{11} X_1 = 0$

Caso (0) - Solicitação externa (variações uniforme de temperatura na viga) isolada no SP



A variação de temperatura não provoca esforços internos em estruturas isostáticas, portanto:

$$V_1 = V_2 = 0$$

Logo, $M_0 = 0$ e $N_0 = 0$

(5V) → caso (1) - Hiperestático X_1 isolado no SP

Cálculo do termo de carga e coeficiente de flexibilidade

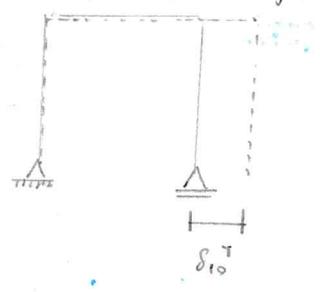
Termo de carga δ_{10}^T

$$\delta_{10}^T = \int_{\text{viga}} M_1 d\theta_0^T + \int_{\text{viga}} N_1 du_0^T$$

$$d\theta_0^T = \frac{\alpha (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx$$

Como é uma variação uniforme de temperatura $\Delta T_i = \Delta T_s = \Delta T_{\text{CG}} = +24$, portanto $d\theta_0^T = 0$

Configurações (Caso (b)) - Variação de Temperatura na viga deformada



$$du_0^T = \alpha \Delta T dx = (10^{-5})(+24) dx$$

$$\delta_{10}^T = \int_{\text{viga}} N_i du_0^T = (10^{-5})(+24) \cdot \int_0^4 N_i dx = (10^{-5})(+24)(+1) \cdot 4$$

$$\delta_{10}^T = 9,60 \times 10^{-4} \text{ m}$$

Coefficiente de flexibilidade δ_{11}

$$\delta_{11} = +1,664 \times 10^{-3} \text{ m/kN}$$

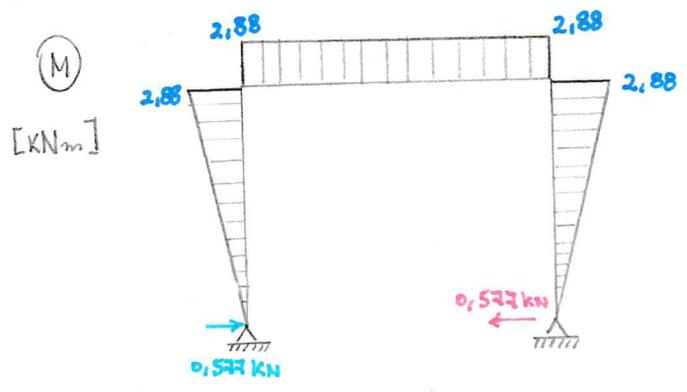
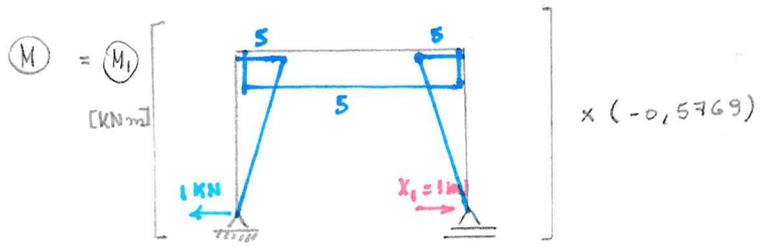
Conforme calculado anteriormente:

$$\delta_{10}^T + \delta_{11} X_1 = 0 \rightarrow (9,60 \times 10^{-4}) + (1,664 \times 10^{-3}) X_1 = 0$$

$$X_1 = -0,5769 \text{ kN}$$

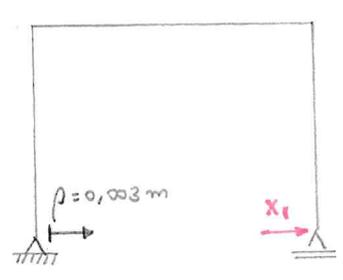
Diagrama de momentos fletores finais para estrutura hiperestática onde ocorre uma variação de temperatura uniforme na viga

$$M = M_0 + M_i X_1$$



Caso onde ocorre recalque horizontal no apoio da esquerda

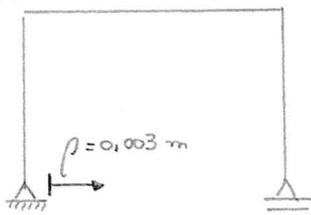
Sistema Principal



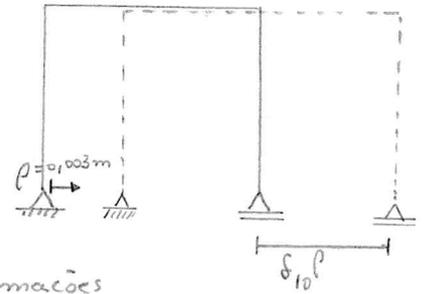
Equações de compatibilidade: $\delta_{10}^P + \delta_{11} X_1 = 0$

Caso (0) - Solicitação externa (recalque horizontal no apoio da esquerda) isolada no SP

(SR)



Configurações deformadas

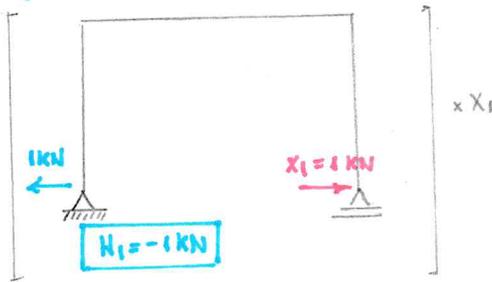


O recalque provoca deslocamento de corpo rígido (sem deformações ou esforços internos) na estrutura isostática do SP. Portanto, os deslocamentos relativos internos são nulos.

Com isso, $M_0 = 0$ e $N_0 = 0 \rightarrow \bar{U} = 0$

Caso (1) - Hiperestático X_1 isolado no SP

(SV)



$$\bar{W}_E = 1 \cdot \delta_{10}^P + H_1 (+\rho)$$

Princípio das Forças Virtuais (PFV): $\bar{W}_E = \bar{U}$

$$1 \cdot \delta_{10}^P + (-1)(+0,003) = 0$$

$$\delta_{10}^P = +3,00 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta_{11} = +1,664 \times 10^{-3} \text{ m/kN}$$

Calculado anteriormente

$$\delta_{10}^P + \delta_{11} X_1 = 0$$

$$(+3,00 \times 10^{-3}) + (+1,664 \times 10^{-3}) X_1 = 0 \rightarrow X_1 = -1,8029 \text{ kN}$$

Diagrama de momentos fletores finais para estrutura hiperestática para o caso de recalque horizontal no apoio da esquerda

$$M = M_0 + M_1 X_1$$

