ENG 1204 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 1º Semestre – 2019

T1: Simulação computacional do Método das Forças

1ª questão do grau G1 (1.0 ponto)– Data da entrega: 20/03/2019

Estude o exemplo de solução de um pórtico com dois hiperestáticos pelo Método das Forças que foi visto em sala de aula ("http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftp_pub/lfm/eng1204roteiroMF.pdf"). Obtenha a programa Ftool e seu manual em "http://www.ftool.com.br". Assista o vídeo "Aula 02: Introdução ao Método das Forças" no site da disciplina no Ambiente de Aprendizagem Online da PUC-Rio: "https://ead.puc-rio.br/login/index.php". Estude o tutorial sobre o Método das Forças em "http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftp_pub/lfm/metfor1_0_0.exe" (versão *off-line*). Siga os passos descritos nos itens abaixo e escreva um relatório. Este relatório deve conter as figuras que forem necessárias para descrever a simulação e seus valores numéricos.

Item (a) – Estrutura original a ser resolvida
Defina arbitrariamente, usando o programa Ftool, um quadro plano hiperestático com grau de hiperestaticidade no mínimo igual a quatro ($g \geq 4$) e que não contenha ciclos fechados de barras. Defina também as propriedades elásticas e geométricas das barras e as cargas que atuam no quadro. Adote todas as unidades em kN e m. Crie uma figura com a estrutura, suas dimensões e todas as propriedades e cargas utilizadas. Essa figura deve mostrar a configuração deformada da estrutura, com as componentes de reação de apoio indicadas. Anote nessa figura as componentes de reações de apoio que serão escolhidas como incógnitas da solução da estrutura pelo Método das Forças. Estas incógnitas são chamadas de *hiperestáticos* e devem ser identificadas pelo nome X_j, sendo j o número do hiperestático. Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os hiperestáticos com seus nomes, valores e unidades à mão. Anote os valores das reações de apoio (com sinal) selecionadas como incógnitas do problema para usar no item (f).

Item (b) – Sistema Principal
Obtenha uma estrutura isostática a partir da eliminação dos vínculos externos (liberação de restrições de apoio) associados aos hiperestáticos escolhidos no item (a). Essa estrutura será o Sistema Principal (SP) para a resolução do quadro original hiperestático pelo Método das Forças. Crie uma figura com o SP adotado e os hiperestáticos com seus nomes. Embora seja possível, neste trabalho não libere vínculos internos, isto é, não introduza rótulas.

Item (c) – Caso básico (0)
Para o Sistema Principal do item (b) considere valores nulos para os hiperestáticos e aplique o carregamento externo do item (a). Isto corresponde ao caso (0) do Método das Forças. Mostre a configuração deformada dessa estrutura juntamente com o carregamento aplicado, indicando as componentes de deslocamentos e rotações (com valores e unidades) nas direções dos vínculos rompidos para a criação do SP. Essas componentes de deslocamentos e rotações correspondem aos termos de carga δ_{i0}. Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os nomes, valores (com sinal) e unidades dos termos de carga à mão.

Item (d) – Casos básicos que isolam os hiperestáticos
Retire as cargas utilizadas no item (c) e carregue o Sistema Principal, alternadamente, com os hiperestáticos <u>com valores unitários</u>. Isto deve gerar um caso de carregamento para cada hiperestático (com valor unitário) atuando independentemente, sendo que cada um corresponde a um dos casos (j) do Método das Forças, onde j é o número de um hiperestático. Mostre a configuração deformada da estrutura para cada um dos hiperestáticos unitários impostos, indicando as componentes de deslocamentos e rotações (com valores, sinais e unidades) nas direções dos vínculos rompidos para a criação do SP. Essas componentes de deslocamentos e rotações correspondem aos *coeficientes de flexibilidade* δ_{ij}. Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os nomes, valores, sinais e unidades dos coeficientes de flexibilidade à mão.

Item (e) – Sistema de equações de compatibilidade
Com base nos resultados dos itens (c) e (d), monte o sistema de equações de compatibilidade que resulta da solução do quadro original pelo Método das Forças. Os valores numéricos dos coeficientes deste sistema de equações são obtidos dos termos de carga e dos coeficientes de flexibilidade.

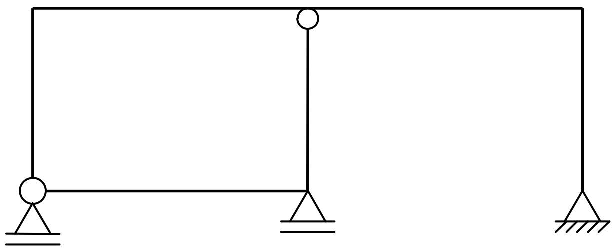
Item (f) – Verificação da solução do sistema de equações de compatibilidade
Com base nos resultados da estrutura original do item (a), verifique se os valores dos hiperestáticos correspondem realmente à solução do sistema de compatibilidade obtido no item (e).

Item (g) – Obtenção de esforços internos
Indique os passos seguintes à solução do sistema de equações de compatibilidade que seriam necessários para complementar o cálculo dos esforços internos da estrutura pelo Método das Forças.

ENG 1204 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 1º Semestre – 2019

Grau G1 – 2ª Questão – Data: 20/03/2019 – Duração: 0:50 hs – Sem Consulta

2ª Questão (1,0 ponto)
Considere o pórtico plano hiperestático ao lado e sua solução pelo Método das Forças.
A unidade para distâncias e deslocamentos é metro [m].
A unidade para forças é kilo-Newton [kN].
A unidade para rotações é radiano [rad] (adimensional).



Pede-se:

Item (a)
Escolha um Sistema Principal (SP) isostático válido, isto é, que seja estável.

Item (b)
Indique em uma figura os hiperestáticos associados ao SP escolhido.
Cada hiperestático é identificado pela seguinte notação: X_i, em que i é o seu índice.
Para cada hiperestático, indique se é um esforço externo (reação de apoio) ou um esforço interno.
Para cada hiperestático, indique se é uma força horizontal, uma força vertical ou um momento.
Para cada hiperestático, indique sua unidade.

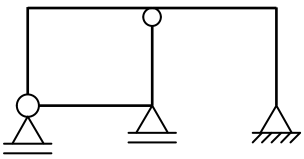
Item (c)
Indique em uma figura os termos de carga do caso (0) associados ao SP escolhido.
Cada termo de carga é identificado pela seguinte notação: δ_{i0}, em que i é o seu índice.
Dê a interpretação física dos termos de carga associados ao SP escolhido, isto é:
Para cada termo de carga, indique se é um deslocamento horizontal, um deslocamento vertical ou uma rotação.
Para cada termo de carga, indique se é uma grandeza absoluta ou relativa.
Para cada termo de carga, indique qual foi o efeito que o provocou.
Para cada termo de carga, indique sua unidade.

Item (d)
Indique os coeficientes de flexibilidade associados ao SP escolhido. Não precisa mostrar em figuras.
Cada coeficiente de flexibilidade é identificado pela seguinte notação: δ_{ij}, em que i e j são seus índices.
Dê a interpretação física dos coeficientes de flexibilidade, isto é:
Para cada coeficiente de flexibilidade, indique se é um deslocamento horizontal, um deslocamento vertical ou uma rotação.
Para cada coeficiente de flexibilidade, indique se é uma grandeza absoluta ou relativa.
Para cada coeficiente de flexibilidade, indique qual foi o efeito que o provocou.
Para cada coeficiente de flexibilidade, indique sua unidade.

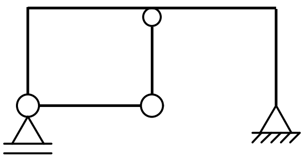
Grau G1 – 2ª Questão

Item (a)

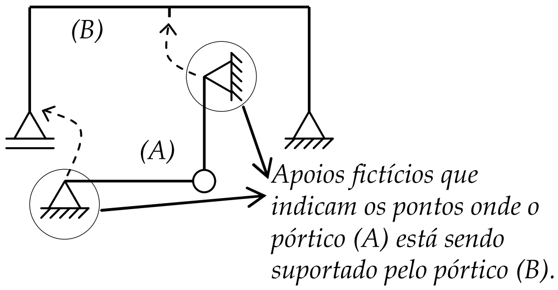
Modelo estrutural original hiperestático



Sistema Principal (SP) (g = 2)

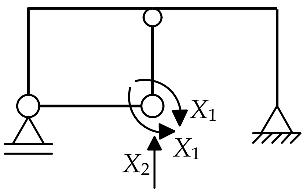


Decomposição do SP isostático em uma sequência ACÍCLICA de carregamento de dois pórticos simples: o pórtico triarticulado (A) está sendo suportado pelo pórtico biapoiado (B), ambos com estabilidade. Isso demonstra a viabilidade do SP adotado.



Item (b)

Sistema Principal (SP) e Hiperestáticos (g = 2)



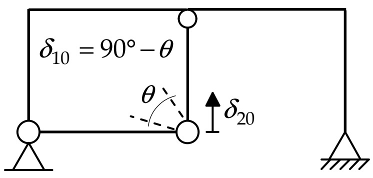
Hiperestáticos

X_1 é o momento fletor (esforço interno) nas seções adjacentes ao nó central inferior do modelo estrutural original [kNm].

X_2 é a reação força vertical (esforço externo) no apoio do nó central inferior do modelo estrutural original [kN].

Item (c)

Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Termos de carga

δ_{10} é a rotação relativa entre as seções adjacentes à rotula introduzida na criação do SP (associada a X_1) provocada pela solicitação externa atuando no caso (0) [rad].

δ_{20} é o deslocamento vertical absoluto do nó central inferior (que teve o apoio do 1º gênero associado a X_2 eliminado na criação do SP) provocado pela solicitação externa atuando no caso (0) [m].

Item (d)

Coeficientes de flexibilidade

δ_{11} é a rotação relativa entre as seções adjacentes à rotula introduzida na criação do SP (associada a X_1) provocada por $X_1 = 1$ no caso (1), isto é, provocada pelo hiperestático X_1 com valor unitário [rad/kNm].

δ_{21} é o deslocamento vertical absoluto do nó central inferior (que teve o apoio do 1º gênero associado a X_2 eliminado na criação do SP) provocado por $X_1 = 1$ no caso (1), isto é, provocado pelo hiperestático X_1 com valor unitário [m/kNm].

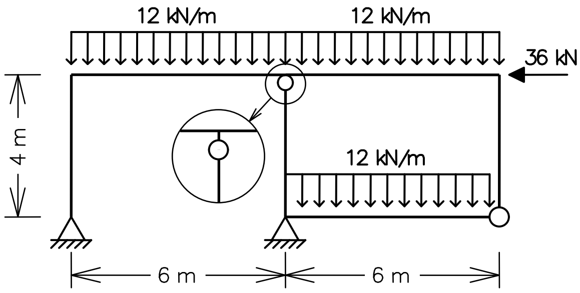
δ_{12} é a rotação relativa entre as seções adjacentes à rotula introduzida na criação do SP (associada a X_1) provocada por $X_2 = 1$ no caso (2), isto é, provocada pelo hiperestático X_2 com valor unitário [rad/kN].

δ_{22} é o deslocamento vertical absoluto do nó central inferior (que teve o apoio do 1º gênero associado a X_2 eliminado na criação do SP) provocado por $X_2 = 1$ no caso (2), isto é, provocado pelo hiperestático X_2 com valor unitário [m/kN].

ENG 1204 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 1º Semestre – 2019

Grau G1 – 3ª Questão – Data: 03/04/2019 – Duração: 1:50 hs – Sem Consulta

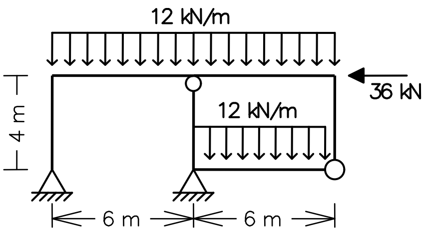
3ª Questão (5,0 pontos)
Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 10^5$ kNm².



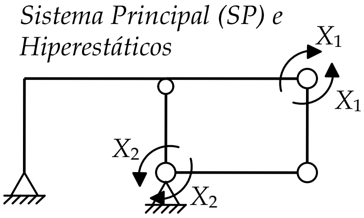
Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas:

$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \dfrac{bf - de}{ad - bc} \\ X_2 = \dfrac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

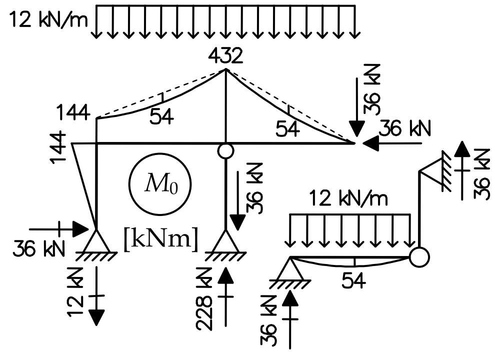
Grau G1 – 3ª Questão



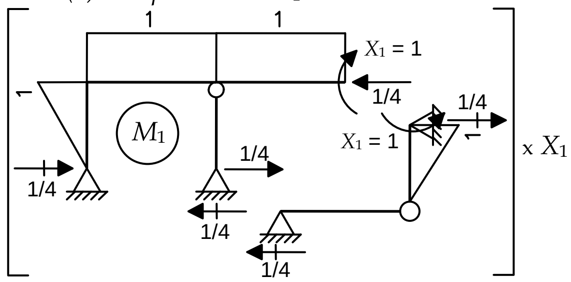
Sistema Principal (SP) e Hiperestáticos



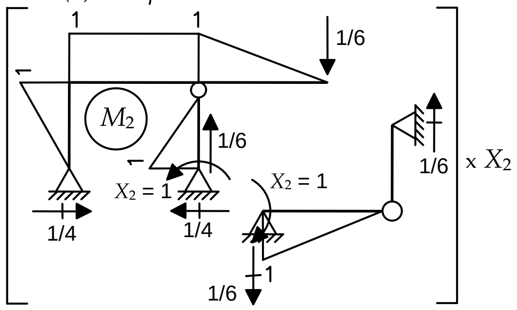
Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP



Equações de compatibilidade:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} +2784 \\ +2568 \end{Bmatrix} + \frac{1}{3EI}\begin{bmatrix} +44 & +31 \\ +31 & +38 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = -110.5 \text{ kNm} \\ X_2 = -112.6 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\cdot\left[+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 144\cdot 6 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 432\cdot 6 - \frac{2}{3}\cdot 1\cdot 54\cdot 6 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 432\cdot 6 - \frac{2}{3}\cdot 1\cdot 54\cdot 6 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 144\cdot 4\right] = +\frac{2784}{EI}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI}\cdot\left[+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 144\cdot 6 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 432\cdot 6 - \frac{2}{3}\cdot 1\cdot 54\cdot 6 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 432\cdot 6 - \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 54\cdot 6 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 144\cdot 4 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 54\cdot 6\right] = +\frac{2568}{EI}$$

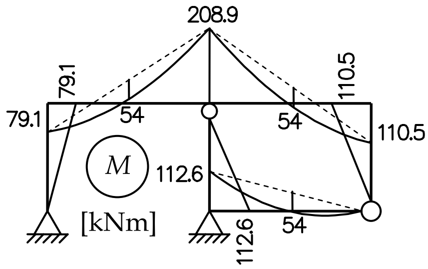
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\cdot\left[+2\cdot(1\cdot 1\cdot 6) + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 4\right)\right] = +\frac{44}{3EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI}\cdot\left[+1\cdot 1\cdot 6 + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6\right) + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 4\right)\right] = +\frac{38}{3EI}$$

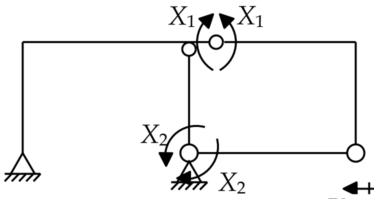
$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI}\cdot\left[+1\cdot 1\cdot 6 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 6 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 4\right] = +\frac{31}{3EI}$$

Momentos Fletores Finais:

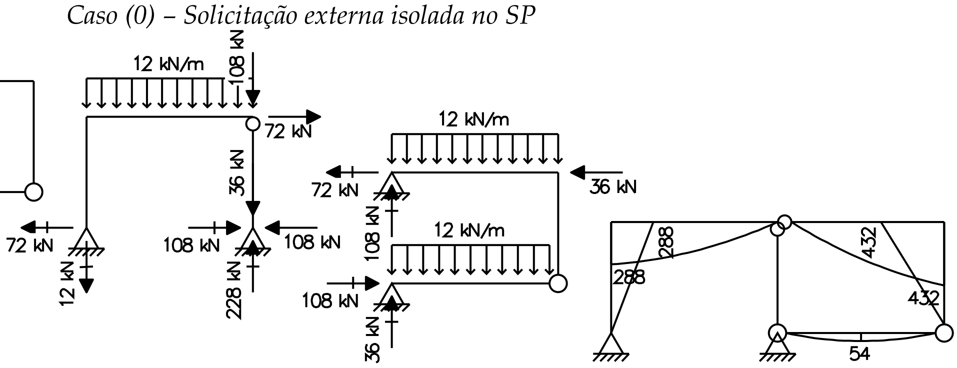
$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$



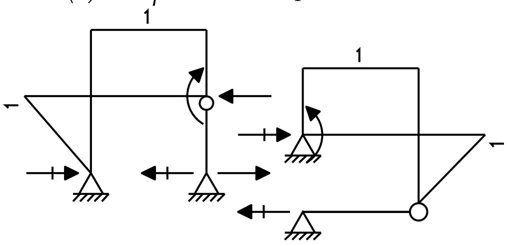
Alternativa para SP - A



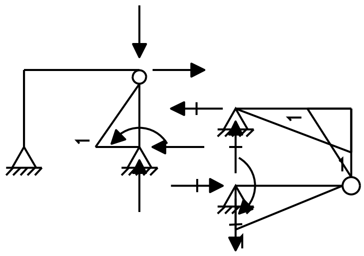
Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



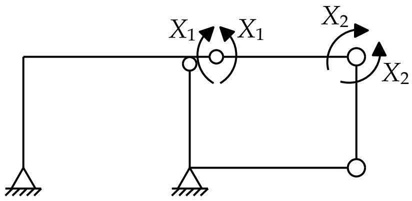
Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



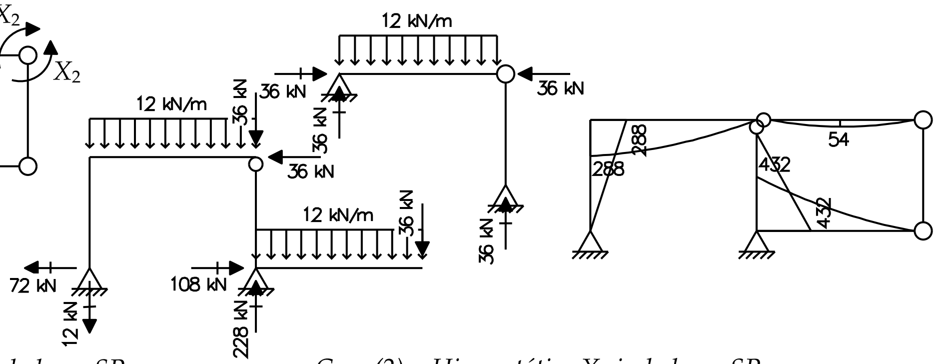
Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP



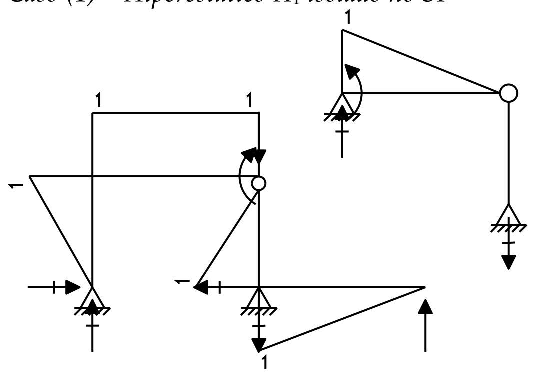
Alternativa para SP - B



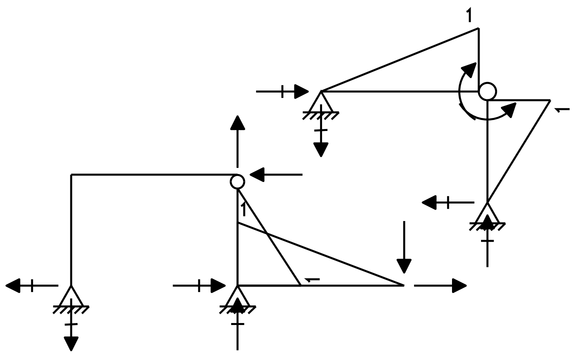
Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



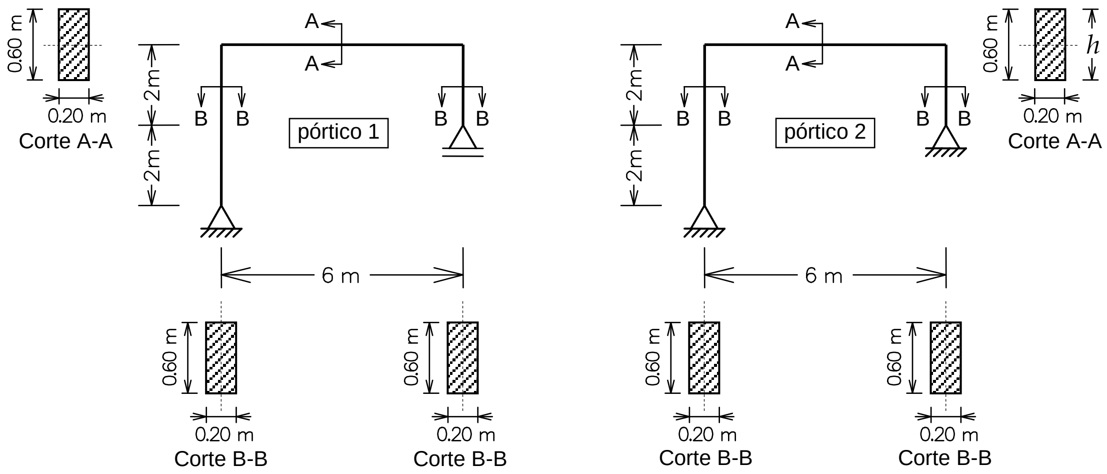
Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP



ENG 1204 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 1º Semestre – 2019

Grau G1 – 4ª Questão – Data: 24/04/2019 – Duração: 1:50 hs – Sem Consulta

4ª Questão (3,0 pontos)
Na figura a seguir, são mostrados dois pórticos: pórtico 1 (isostático) e pórtico 2 (hiperestático). As seções transversais das vigas e pilares são retângulos idênticos, porém com orientações distintas: as vigas têm seção transversal orientada no sentido de maior inércia e os pilares têm seção transversal orientada no sentido de menor inércia.



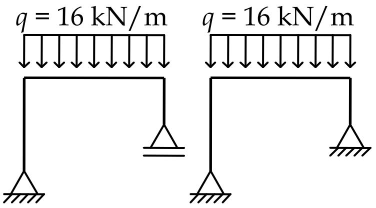
O material utilizado nos pórticos tem módulo de elasticidade $E = 10^{+8}$ kN/m^2 e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5}$ /°C. Despreze deformação por cisalhamento, isto é, considere deformação axial e deformação por flexão.

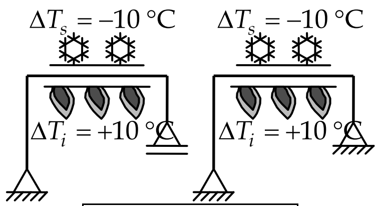
Considere as seguintes solicitações externas:

(q) Força uniformemente distribuída na viga

(T) Gradiente transversal de temperatura na viga

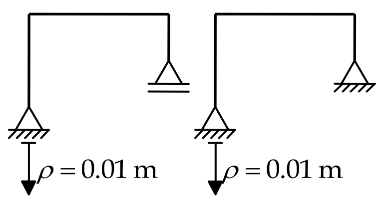
(ρ) Recalque vertical para baixo do apoio da esquerda





$$du_0^T = \alpha \cdot \Delta T_{CG} \cdot dx$$

$$d\theta_0^T = \alpha \cdot \frac{\Delta T_i - \Delta T_s}{h} \cdot dx$$



Considere a solução do pórtico 2 pelo Método das Forças utilizando o pórtico 1 como Sistema Principal (SP).
Pede-se:

4.a Mostre os aspectos dos diagramas de momentos fletores finais dos pórticos 1 e 2 para cada uma das solicitações externas. A convenção para traçado do diagrama é tal que as ordenadas dos diagramas são traçadas do lado da fibra tracionada de cada seção transversal. Indique os momentos fletores utilizando a seguinte notação: M_A, M_B, M_C etc. Não é necessário fazer nenhum cálculo para responder este item. Não precisa colocar valores numéricos dos momentos fletores. Os aspectos dos diagramas de momentos fletores podem ser obtidos com base na configuração deformada de cada estrutura (1,0 ponto).

4.b Mostre os diagramas de momentos fletores e de esforços normais do caso (1) – hiperestático X_1 isolado no SP para $X_1 = 1$ (0,5 ponto).

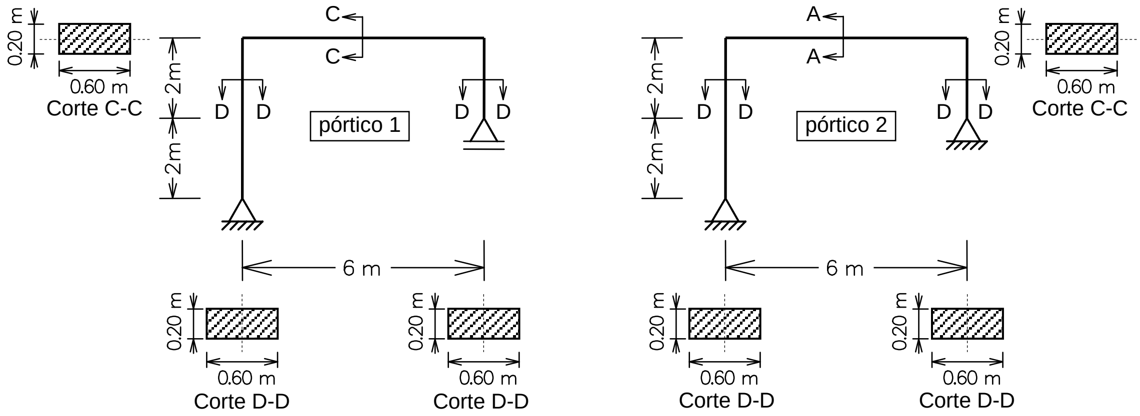
4.c Calcule o termo de carga δ_{10}^{q} provocado pela força uniformemente distribuída (q) na viga (0,5 ponto).

4.d Calcule o termo de carga δ_{10}^{T} provocado pelo gradiente transversal de temperatura (T) na viga (0,5 ponto).

4.e Calcule o termo de carga δ_{10}^{ρ} provocado pelo recalque vertical (ρ) da apoio da esquerda (0,5 ponto).

Ponto extra:

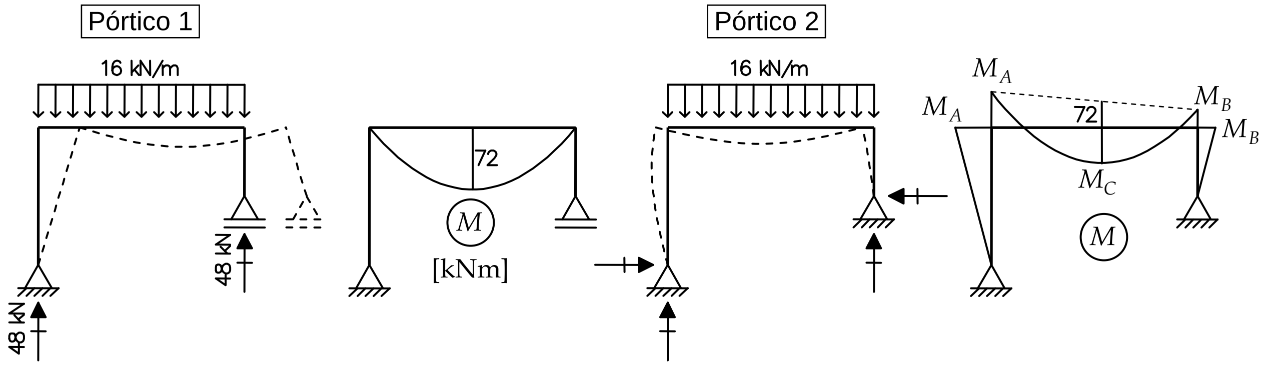
4.f Considere que os sentidos das seções transversais da vigas e dos pilares foram invertidos, conforme indicado na figura a seguir. Mostre os aspectos dos diagramas de momentos fletores finais dos pórticos 1 e 2 somente para a solicitação externa de força uniformemente aplicada na viga. A convenção para traçado do diagrama é tal que as ordenadas dos diagramas são traçadas do lado da fibra tracionada de cada seção transversal. Indique os momentos fletores utilizando a seguinte notação: M_A^{inv} , M_B^{inv} , M_C^{inv} etc., comparando com as intensidades dos momentos fletores indicados no item **4.a**. Não é necessário fazer nenhum cálculo para responder este item. Não precisa colocar valores numéricos dos momentos fletores. Os aspectos dos diagramas de momentos fletores podem ser obtidos com base na configuração deformada de cada estrutura (1,0 ponto extra).



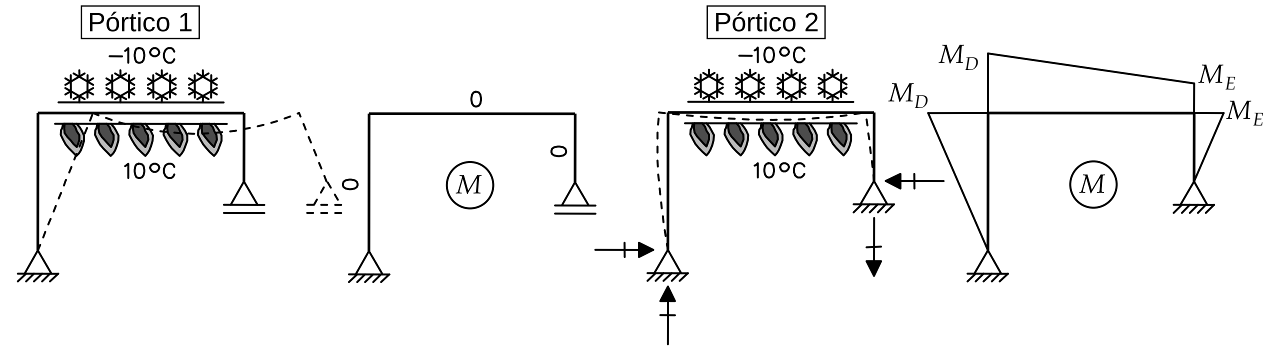
Grau G1 – 4ª Questão

Item 4.a

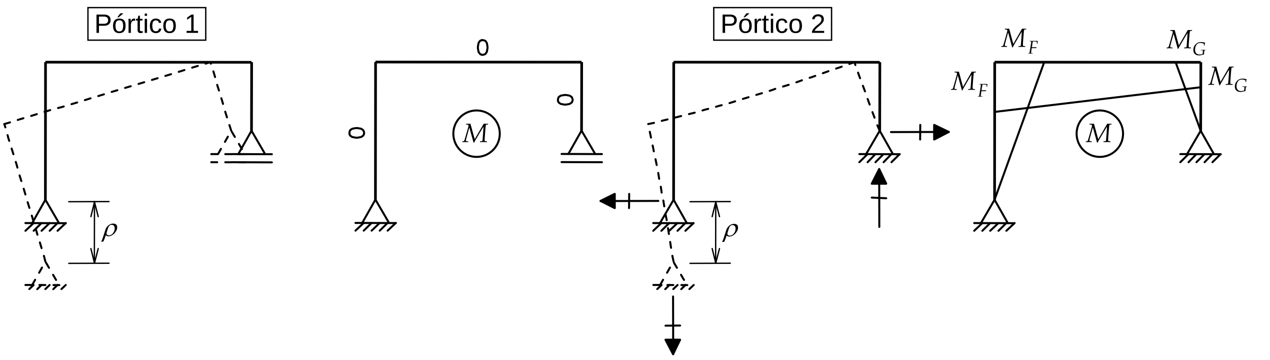
Solicitação de força uniformemente distribuída na viga



Solicitação de gradiente de temperatura na viga

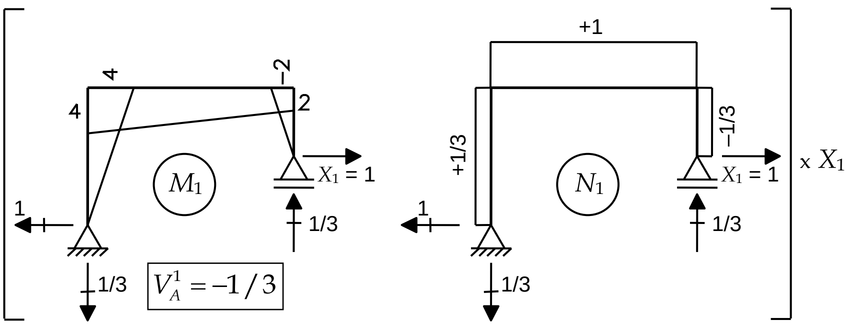


Solicitação de recalque vertical do apoio da esquerda



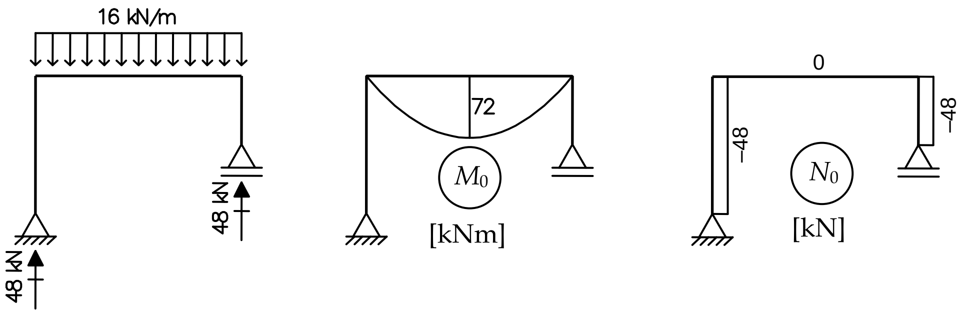
Item 4.b

Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Item 4.c

Caso (0) – Solicitação de força uniformemente distribuída na viga isolada no SP



$$\delta_{10}^{q} = \int\limits_{pórtico} \frac{M_1 M_0}{EI}dx + \int\limits_{pórtico} \frac{N_1 N_0}{EA}dx$$

$$\delta_{10}^{q} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}\cdot(+4)\cdot(+72)\cdot 6 + \frac{1}{3}\cdot(+2)\cdot(+72)\cdot 6\right] + \frac{1}{EA}\left[\left(+\frac{1}{3}\right)\cdot(-48)\cdot 4 + \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(-48)\cdot 2\right]$$

$E = 10^8 \text{ kN/m}^2$, $A = 0.6\cdot 0.2 = 0.12 \text{ m}^2$, $I = 0.2\cdot 0.6^3/12 = 0.0036 \text{ m}^4$

$$\delta_{10}^{q} = 240\cdot 10^{-5} - \frac{0.8}{3}\cdot 10^{-5} \qquad \boxed{\delta_{10}^{q} = +2.397\cdot 10^{-3} \text{ m}}$$

Item 4.d

$$\delta_{10}^{T} = \int\limits_{viga} M_1 d\theta_0^T + \int\limits_{viga} N_1 du_0^T$$

$$d\theta_0^T = \frac{\alpha\cdot(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h}dx = \frac{\alpha\cdot(+10-(-10))}{0.60}dx = +\alpha\cdot\frac{100}{3}\cdot dx$$

$$du_0^T = \alpha\cdot\Delta T_{CG}\cdot dx = \alpha\cdot\left[(10-10)\div 2\right]\cdot dx = 0$$

$$\delta_{10}^{T} = \int_0^6 M_1 d\theta_0^T + \int_0^6 N_1 du_0^T = +\alpha\cdot\frac{100}{3}\cdot\int_0^6 M_1 dx + 0$$

$$\delta_{10}^{T} = +\alpha\cdot\frac{100}{3}\cdot\left[\frac{4+2}{2}\cdot 6\right];\ \alpha = 10^{-5}\ /°\text{C} \qquad \boxed{\delta_{10}^{T} = +6\cdot 10^{-3} \text{ m}}$$

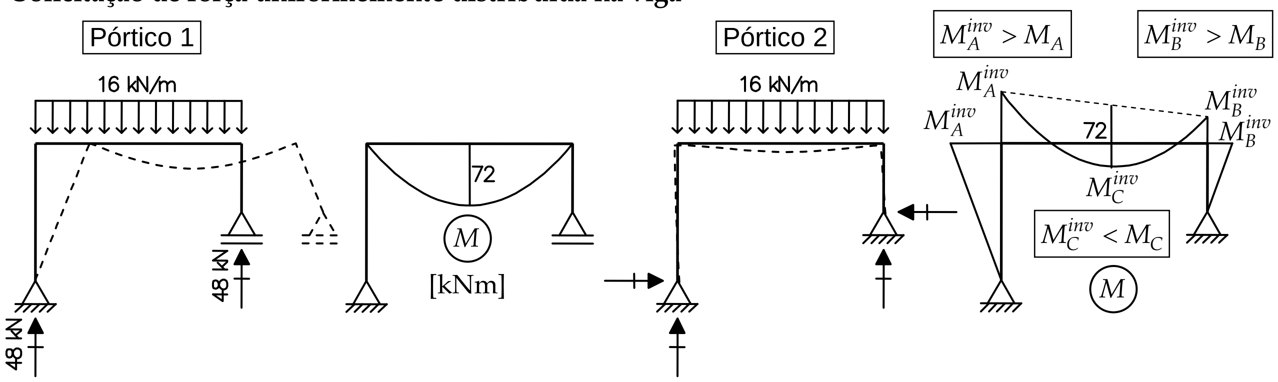
Item 4.e

$$1\cdot\delta_{10}^{\rho} + V_A^1\cdot(-\rho) = 0 \ \Rightarrow\ \delta_{10}^{\rho} = -V_A^1\cdot(-\rho)$$

$$\delta_{10}^{\rho} = -\left[(-1/3)\cdot(-0.01)\right] \qquad \boxed{\delta_{10}^{\rho} = -3.333\cdot 10^{-3} \text{ m}}$$

Item 4.f

Solicitação de força uniformemente distribuída na viga



Explicação: O aumento da rigidez relativa dos pilares em relação à viga faz com que o comportamento da viga se aproxime do comportamento de uma viga biengastada, pois as rotações em suas extremidades ficam mais restritas. Dessa maneira os momentos fletores nas extremidades da viga são maiores do que os momentos fletores do item **1.a**. Ou seja, $M_A^{inv} > M_A$ e $M_B^{inv} > M_B$. Por outro lado, o momento fletor no meio do vão da viga é menor $\left(M_C^{inv} < M_C\right)$.