

**Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro — PUC-Rio**  
**Departamento de Engenharia Civil**

***NOTAS DE AULA DO CURSO***

***CIV 2118 – MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS***

***Luiz Fernando Martha***

**Rio de Janeiro, Agosto de 1994**



## CIV 2118 – MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

**Prof.:** Luiz Fernando Martha

**Sala:** 319-L e ICAD, no prédio do ITS (anexo ao RDC)

### **Referências Básicas:**

1. Cook, R.D., Malkus, D.S., and Plesha, M.E., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, Terceira Edição, John Wiley & Sons, 1989.
2. Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., *The Finite Element Method – Volume 1 Basic Formulation and Linear Problems*, Quarta Edição, McGraw-Hill, 1989.

### **Referências Adicionais:**

3. Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, 1987.
4. Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., *The Finite Element Method – Volume 2 Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-linearity*, Quarta Edição, McGraw-Hill, 1991.
5. Szabó, B. and Babuska, I., *Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, 1991.
6. Bathe, K.-J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, 1982.
7. Burnett, D.S., *Finite Element Analysis – From Concepts to Applications*, Addison-Wesley, 1987.
8. Gallagher, R.H., *Finite Element Analysis: Fundamentals*, Prentice-Hall, 1975.
9. Strang, G. and Fix, G.J., *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, 1973.
10. McGuire, W. and Gallagher, R.H., *Matrix Structural Analysis*, John Wiley & Sons, 1979.
11. Desai, C.S. and Abel, J.F., *Introduction to the Finite Element Method*, Van Nostrand-Reinhold, 1972.
12. Tauchert, T.R., *Energy Principles in Structural Mechanics*, McGraw-Hill, 1974.
13. Martha, L.F., *O Método da Rigidez Direta sob um Enfoque Matricial*, apostila fornecida. Editada pela primeira vez pela Coordenação de Extensão e Treinamento Profissional – Escritório Técnico da Escola de Engenharia, UERJ, 1984.



## MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE ESTRUTURAL

*Marcelo Gattass e Luiz F. Martha*

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é bastante difundido na prática de engenharia para analisar diversos tipos de problemas. Ele permite, por exemplo, o estudo dos deslocamentos e tensões em peças mecânicas, barragens, minas e estruturas das mais diversas formas, tais como: torres, edifícios e coberturas. Tal método é também utilizado para determinar percolação, adensamento, pressão neutra, fluxo de calor, e muitas outras análises utilizadas em engenharia. Todas as análises mencionadas têm em comum o fato que elas se baseiam na solução de um problema onde são estabelecidas equações diferenciais parciais relacionando variáveis de campo fundamentais dentro de um determinado domínio, tendo que satisfazer condições de restrições para as variáveis fundamentais e suas derivadas na fronteira do domínio.

O MEF pode ser interpretado como uma generalização dos procedimentos adotados em uma análise estrutural convencional de sistemas reticulados. De fato, a formulação matricial pelo Método dos Deslocamentos de estruturas aperticadas é o próprio MEF na sua formulação em deslocamentos. A diferença básica entre a análise de quadros e o MEF está no próprio modelo estrutural. Em ambos os casos o modelo estrutural é formado pela montagem de componentes ou elementos estruturais individuais. No primeiro caso, os elementos aparecem quase que naturalmente a partir da própria concepção da estrutura (Fig. 1.0-a). No segundo, a estrutura é modelada (idealizada) por um número finito de elementos (regiões) para representar um meio contínuo, exemplificado pela seção transversal de uma barragem de gravidade mostrada na Fig. 1.0-b.

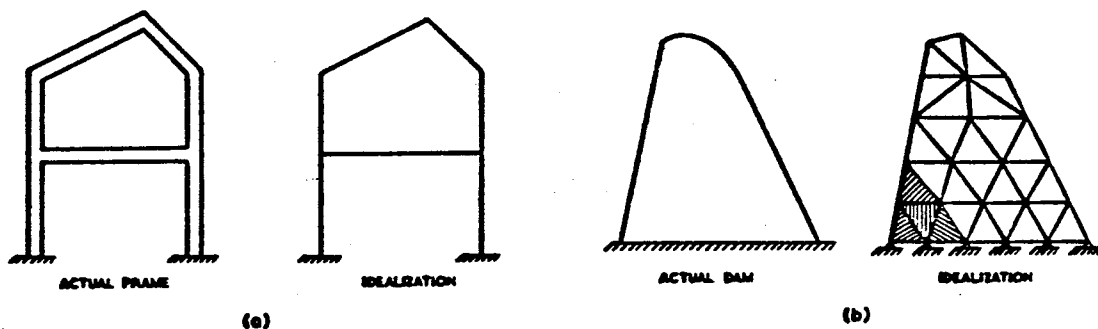


Fig. 1.0 – Idealizações de estruturas por elementos finitos [CLOU65], mostrando (a) elementos unidimensionais e (b) elementos bidimensionais.

### 1.1. CONSIDERAÇÕES SOBRE A GEOMETRIA DO MODELO

Tanto na análise estrutural de sistemas reticulados como na de meios contínuos, o objetivo é obter a solução para distribuições de tensões e deformações e o campo de deslocamentos em todo o domínio (em todos os pontos) da estrutura. Os problemas analisados podem variar desde treliças e quadros planos, distribuições de tensão em meios bidimensionais (chapas), sólidos com simetria axial, placas (lajes), quadros espaciais, cascas, até sólidos tridimensionais. No entanto, estes tipos de análises se diferem quanto à natureza da geometria do modelo estrutural (modelo matemático) adotado.

Os domínios dos modelos matemáticos adotados são definidos a partir da forma geométrica dos objetos e de hipóteses básicas sob o problema. A forma geométrica dos objetos é um dado do

problema e esta seção procura discutir algumas destas hipóteses básicas que modificam o domínio do MEF.

Em análises de tensões de objetos do tipo mostrado na Fig. 1.1, por exemplo, o domínio é bem próximo da forma real do objeto. Para estes problemas a definição do domínio das equações praticamente se confunde com a modelagem geométrica do sólido.

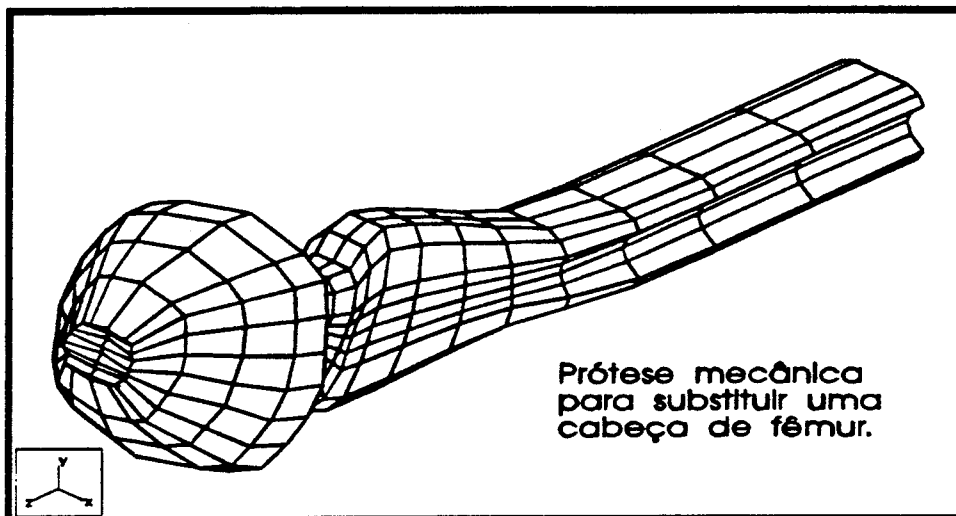


Fig. 1.1 - Domínio da equação diferencial e forma do objeto

Existem problemas, entretanto, em o domínio das equações diferenciais que modelam o comportamento de objetos tridimensionais é plano. Esta simplificação ocorre quando, por exemplo, a geometria do objeto pode ser descrita através do arrasto (*sweeping*) de uma seção transversal constante e a componente do campo que se pretende determinar possa ser suposto não variar na direção do arrasto. A Fig. 1.2 mostra exemplos onde a geometria do objeto é descrita por um arrasto ao longo de um segmento de reta e de um círculo.

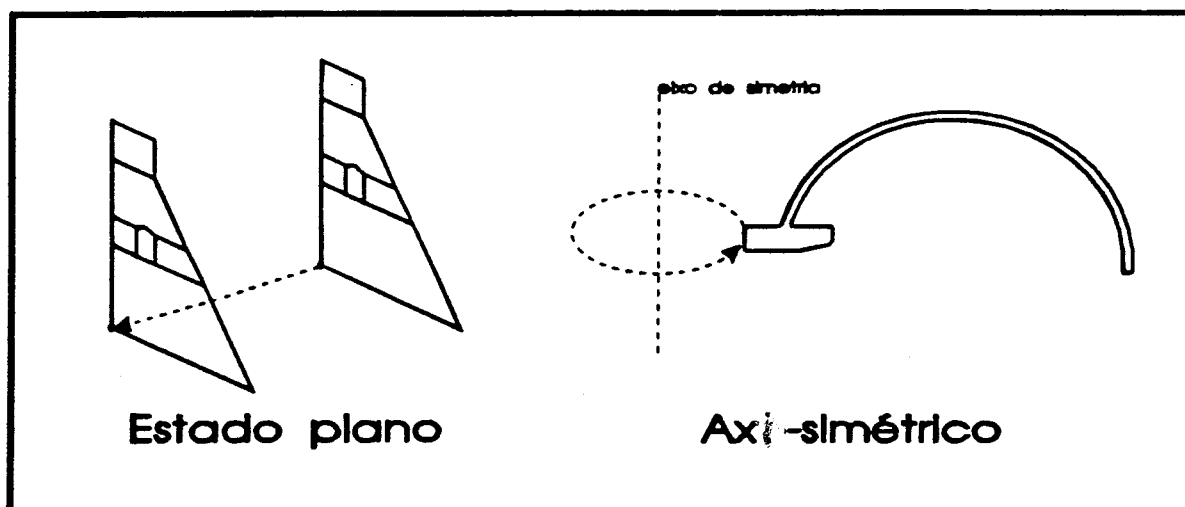


Fig. 1.2 - Modelos planos de objetos tridimensionais

As simplificações dos domínios nem sempre seguem hipóteses tão óbvias quanto as mostradas na Fig. 1.2. A análise estrutural, por exemplo, se baseia em três simplificações de geometria presentes nos modelos de barras, placas e cascas.

Barras são objetos caracterizados por uma seção transversal de dimensões pequenas quando comparadas com o seu comprimento. A análise de tensões em barras fletidas se baseia na hipótese de que seções transversais permanecem planas e ortogonais a curva definida pelo seu eixo. Esta hipótese foi primeiramente proposta pelo matemático holandês, Jacob Bernoulli (1645-1705), com um erro ilustrado na Fig. 1.3 (a seção é suposta girar em torno do base e não do centróide da seção).

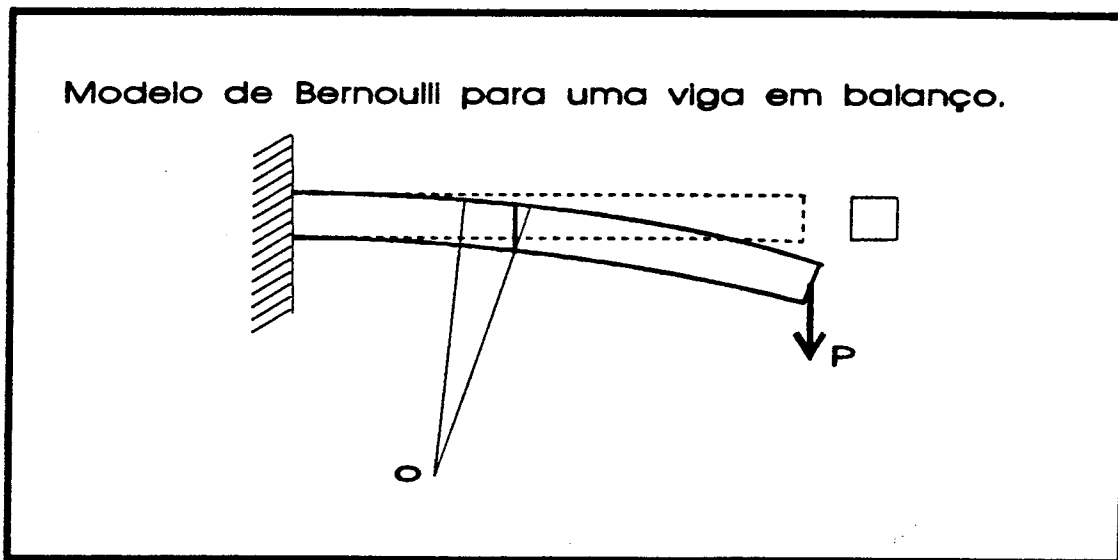


Fig. 1.3 - Hipótese de Bernoulli para barras fletidas

A hipótese correta (que pode ser comprovada experimentalmente), foi formulada pelo professor de engenharia francês, M. Navier (1785-1836). Esta hipótese define o campo de deslocamentos de uma barra fletida da forma ilustrada na Fig. 1.4.

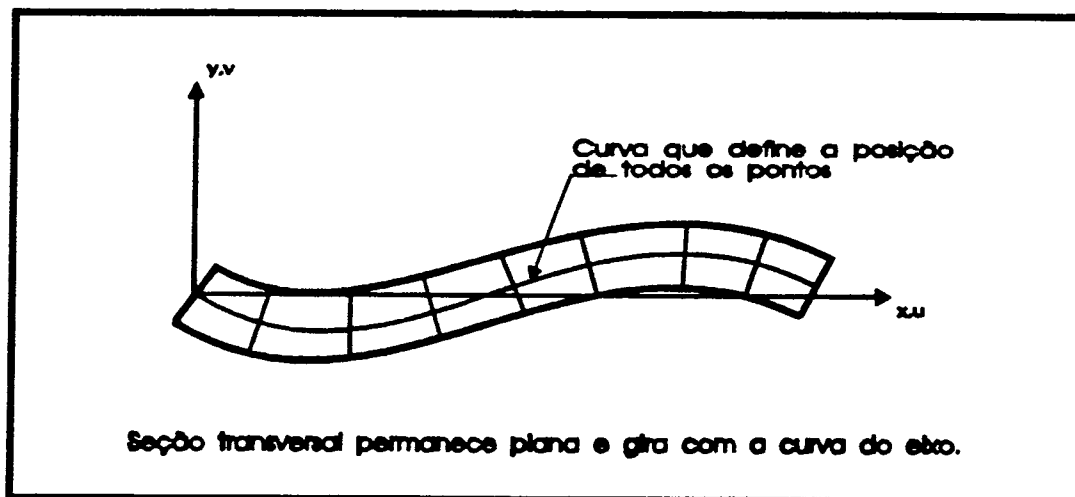


Fig. 1.4 - Deslocamentos de uma barra fletida

Com a hipótese de Bernoulli-Navier o campo de deslocamentos  $(u,v,w)$  de todos os pontos de uma barra fica definido pelo deslocamento da curva do centróide das seções. Com isto a equação diferencial que descreve o comportamento deste campo deixa de ser parcial e torna-se ordinária. A descrição dos deslocamentos de uma curva cúbica a partir da extremidade e a continuidade do campo de deslocamentos entre elementos (curvas) requerem, entretanto, a utilização de rotações como medidas de deslocamentos. Na mecânica de pequenos deslocamentos estas rotações são aproximadas por derivadas de deslocamentos e tratadas como vetores (comutativas). Toda estas simplificações permitem que estruturas da complexidade das ilustradas na Fig. 1.5 sejam corriqueiramente analisadas nos projetos de engenharia.

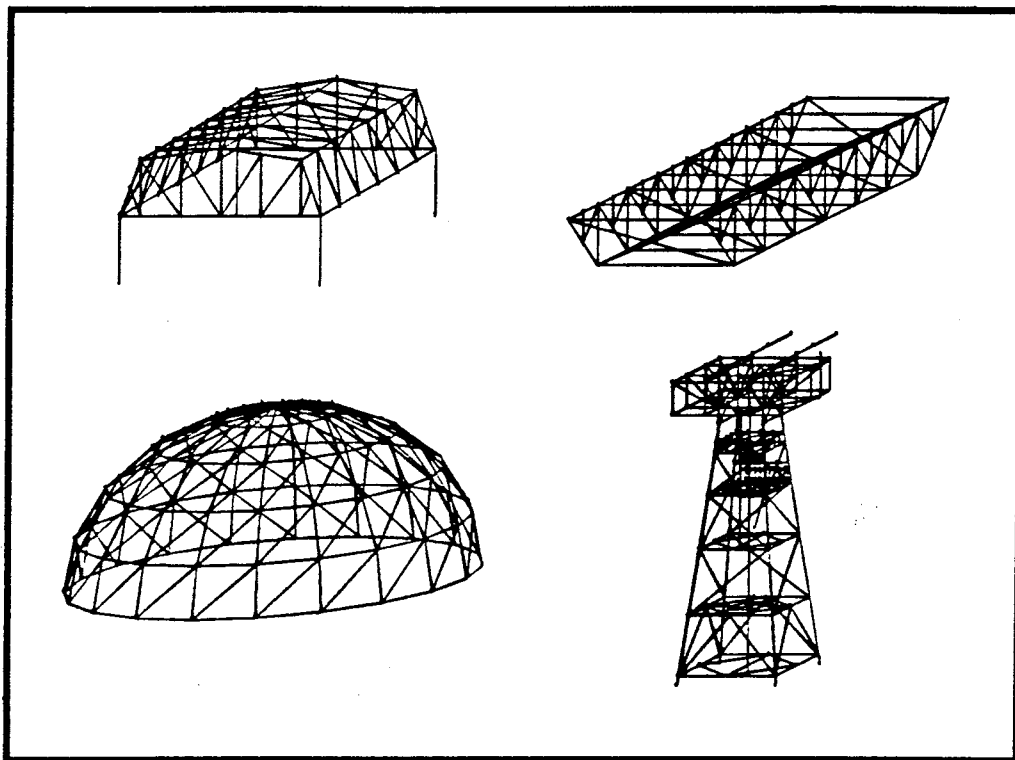


Fig. 1.5 - Exemplos de projetos baseados em modelos de barras

Uma outra simplificação de geometria importante é a que ocorre no estudo de placas e cascas. Placas e cascas são objetos com uma dimensão bem menor que as outras duas, como ilustra a Fig. 1.6.

A exemplo do que ocorre com os deslocamentos das barras que são descritos a partir da curva do centróide, os deslocamentos das placas e cascas são descritos a partir dos deslocamentos de sua superfície média. O alemão G. Kirchhoff foi quem primeiro estabeleceu, em 1850, a hipótese de que a normal da superfície média permanece reta e perpendicular à superfície após o deslocamento da placa, conforme ilustra a Fig.1.7. A equação parcial de placas e cascas é função das duas variáveis que descrevem a superfície média e sua discretização requer o uso de rotações para representar o campo de deslocamentos. As simplificações de geometria propostas nos modelos de placas e cascas permitem a análise de deslocamentos e tensões em pisos e em juntas tubulares de plataformas marítimas.



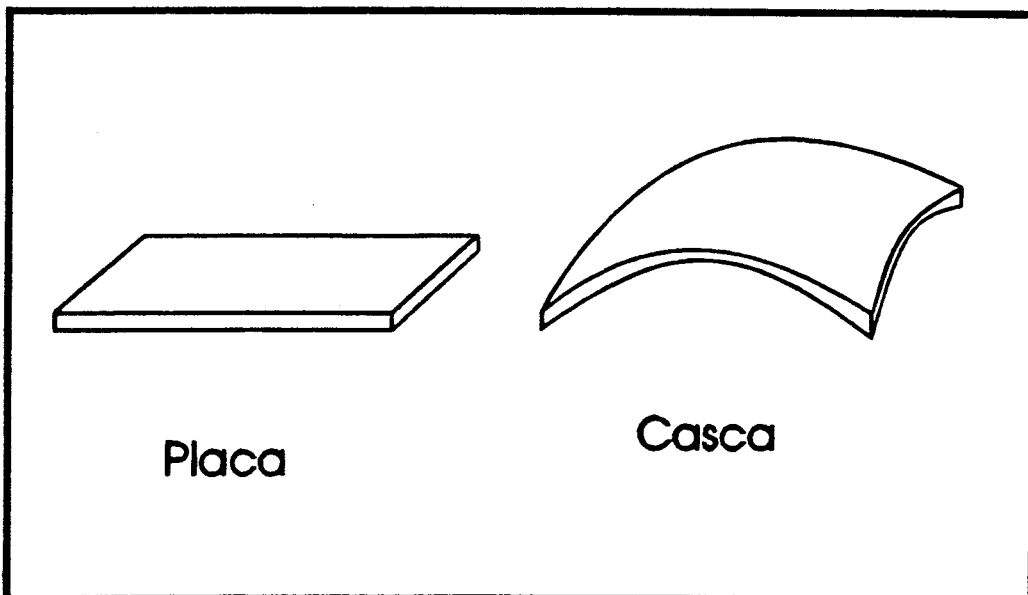


Fig. 1.6 - Geometria de placas e cascas

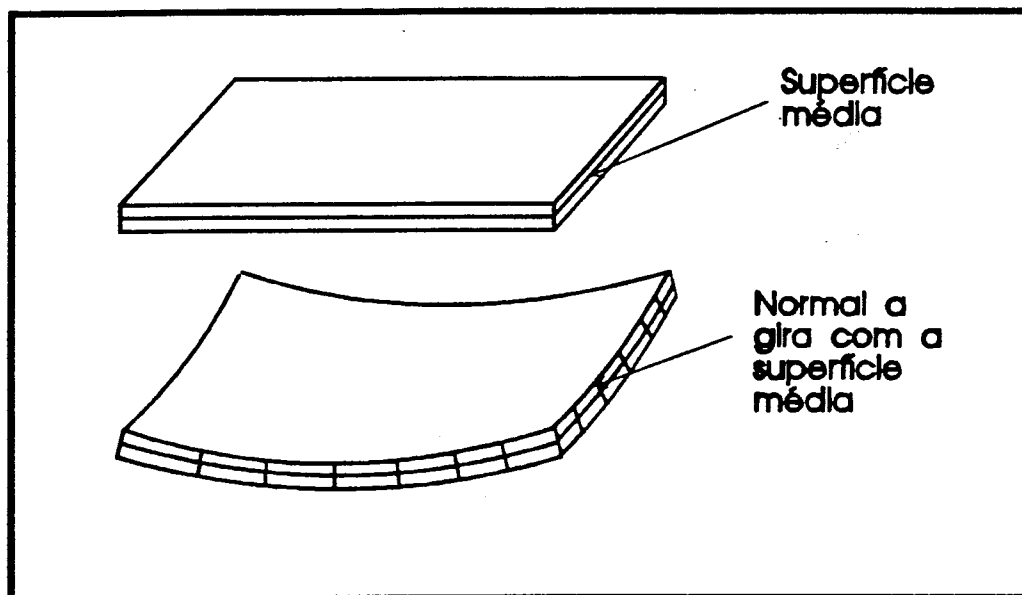


Fig. 1.7 - Hipótese de Kirchhoff para placas

Outros modelos de elementos finitos também apresentam domínios interessantes. São os casos, por exemplo, dos problemas com domínios: infinitos, com juntas (interfaces), com fronteira livre ou fratura. A Fig. 1.8 ilustra um modelo de escavação com domínio infinito. A fronteira externa do modelo é arbitrada em pontos onde o campo de deslocamentos podem ser supostos conhecidos.

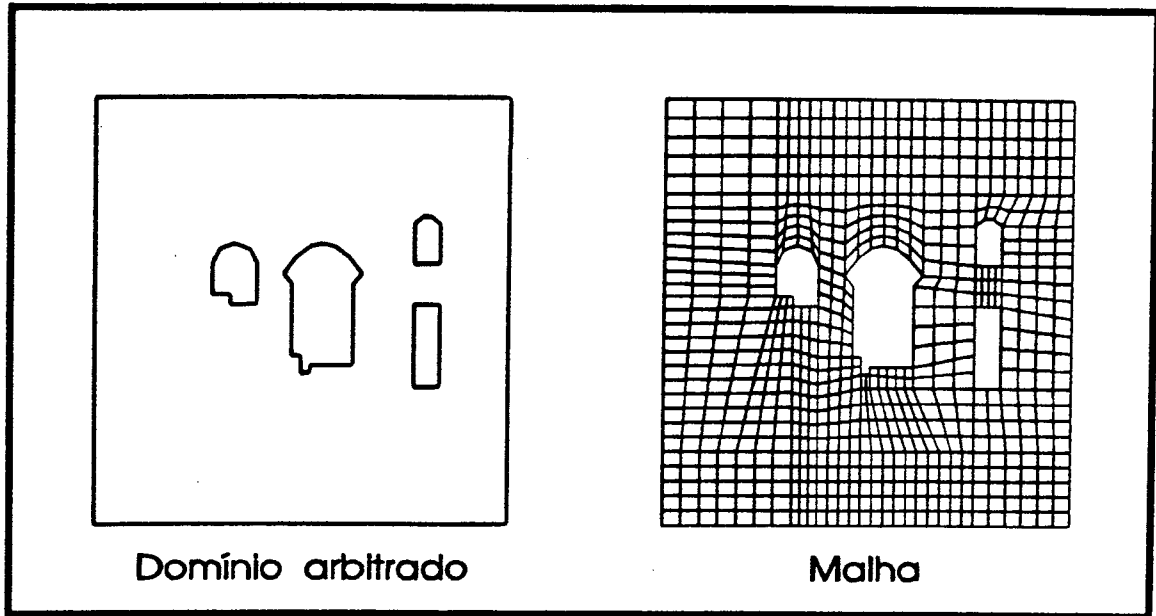


Fig 1.8 - Domínio infinito com fronteira arbitrada

Modelos com juntas procuram representar o comportamento mecânico das interfaces entre materiais presentes no modelo. Cada material é modelado por uma equação diferencial diferente e à interface é atribuído um comportamento que relaciona as grandezas de ambos os domínios. A Fig. 1.9 ilustra um problema de escavação com uma junta horizontal no meio do túnel.

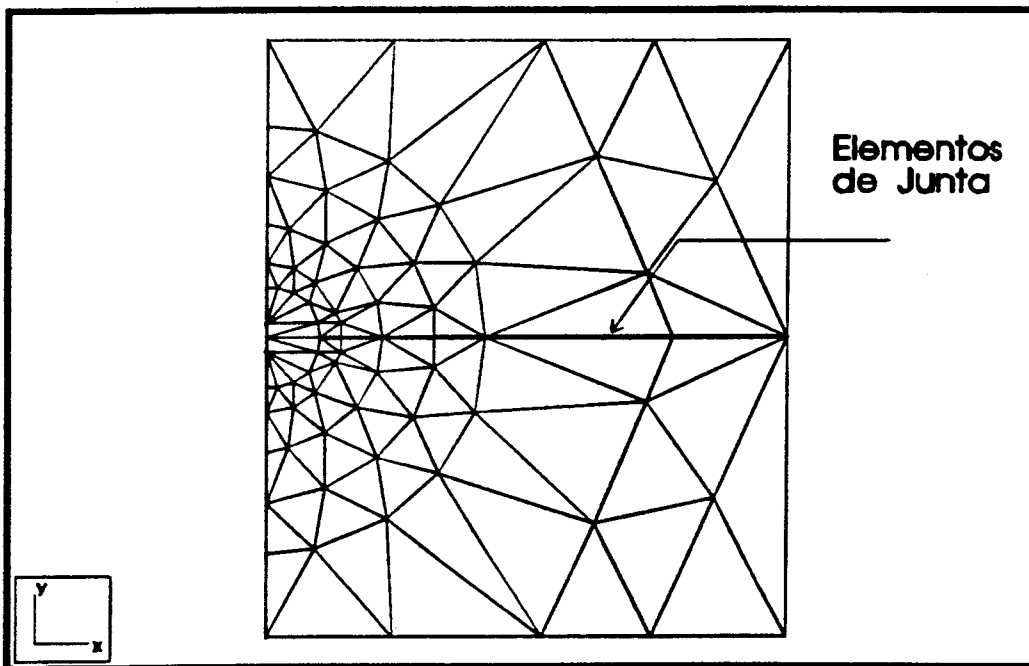


Fig. 1.9 - Modelo de escavação de túnel profundo com junta

Modelos com domínios com fronteira livre e modelos da mecânica da fratura, possuem a particularidade de redefinir o domínio da análise a medida que a análise progride. A Fig. 1.10 mostra a evolução do domínio em uma análise de mecânica da fratura.

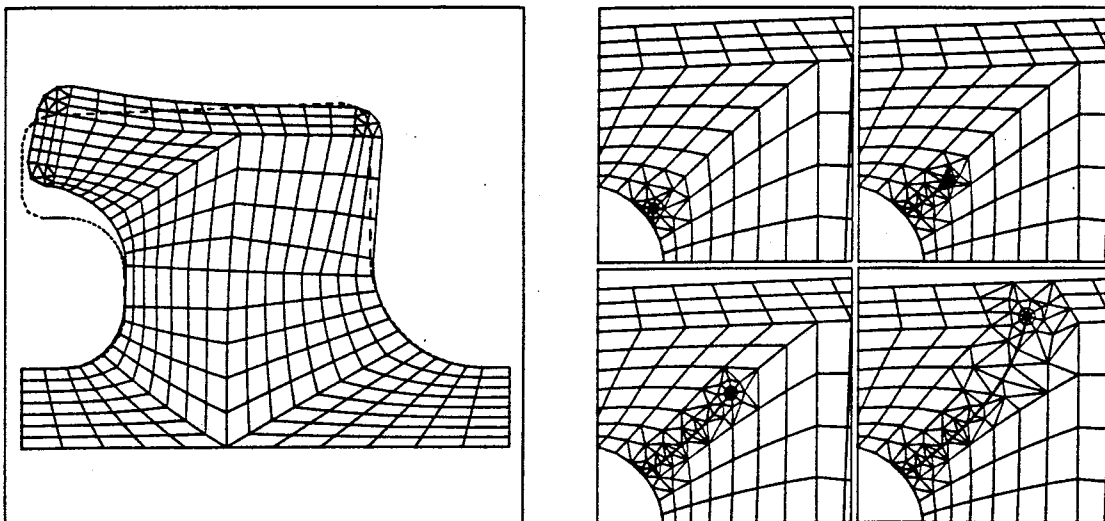


Fig. 1.10 - Domínios na análise de fratura [WAWR87]

## 1.2. DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO

De uma maneira geral pode-se dizer que a idéia central do método dos elementos finitos é subdividir os domínios da equação que descreve o fenômeno físico em pequenas regiões (elementos) onde o comportamento do campo possa ser aproximado por um polinômio de grau baixo. Este polinômio é escrito em função de valores do campo nos vértices (nós) destes elementos e estes valores (incógnitas do problema discreto) são determinados através da minimização de um funcional associado à equação diferencial. A Fig. 1.11 ilustra alguns tipos de elementos comumente encontrados na engenharia.

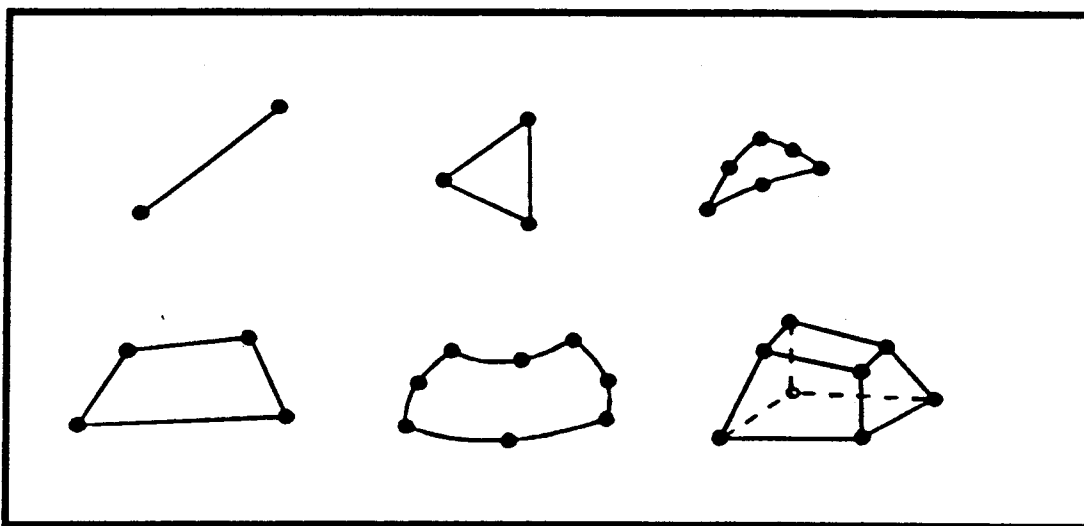


Fig. 1.11 - Elementos finitos

Ao longo das últimas três décadas, pesquisadores têm desenvolvido elementos finitos que produzem boas aproximações para as equações diferenciais encontradas nas simulações de engenharia. Atualmente, na análise estrutural, por exemplo, pode-se dizer que esta investigação já está concluída para os problemas lineares. A pesquisa para desenvolver elementos e formulações mecânicas que reproduzam o comportamento não linear de material e geometria, entretanto, continua.

As condições de convergência e a acurácia das soluções do método dos elementos finitos dependem não só da formulação dos elementos, mas também da malha gerada para analisar um determinado problema. Isto é, não basta se utilizar um programa bem desenvolvido com bons algoritmos numéricos e baseado em excelentes elementos. É preciso que a discretização feita para o domínio do problema em questão também seja adequada.

Programas de elementos finitos trabalham com a malha fornecida pelo usuário e não com o domínio das equações ou geometria dos objetos. A tarefa de subdividir o domínio em elementos, quase sempre não é nem mesmo verificada pelo programa. Esta responsabilidade recai toda sobre o usuário. Mais ainda, as condições de convergência de cada elemento finito raramente são especificadas pelo programa. Cabe ao usuário ter conhecimentos sobre os elementos fornecidos e suas formulações.

Explicitar as condições que garantam a convergência e acurácia de todas as soluções do método dos elementos finitos, está além do estado atual do conhecimento na área. Apesar disto, algumas considerações gerais podem ser enunciadas. Como o estudo de técnicas para geração da malhas é um dos objetivos deste texto, estas considerações são, na realidade, o objetivo central desta seção.

Existem basicamente dois tipos de condições: umas relativas à geometria dos elementos e outras relativas ao arranjo entre diversos elementos. Os elementos finitos são objetos de geometria quase sempre convexa e suas formulações tendem a privilegiar as formas mais regulares. Ou seja, elementos finitos triangulares são em geral melhores quanto mais se aproximam do triângulo equilátero. Quadrados são usualmente melhores que retângulos e estes melhores que paralelogramos, e assim por diante. A exigência de convexidade são oriundas da necessidade de inversão do Jacobiano da função que mapeia um domínio elementar do tipo  $[-1,1] \times [-1,1]$  no domínio do elemento, conforme ilustra a Fig. 1.12(a). Na realidade, esta exigência de inversibilidade do Jacobiano é uma condição mais restritiva que a convexidade, mas existem casos em que o Jacobiano é inversível e o domínio do elemento não convexo. A Fig. 1.12(b) ilustra este caso.

Quanto às relações entre elementos, pode-se dizer em geral, que dois elementos  $e_i$ ,  $e_j$  só podem se interceptar em uma face, uma aresta ou um vértice (nó), ou seja:

$$e_i \cap e_j = \begin{cases} \phi \\ \text{nó (vértice)} \\ \text{lado (aresta)} \\ \text{face} \end{cases} \quad (1.1)$$

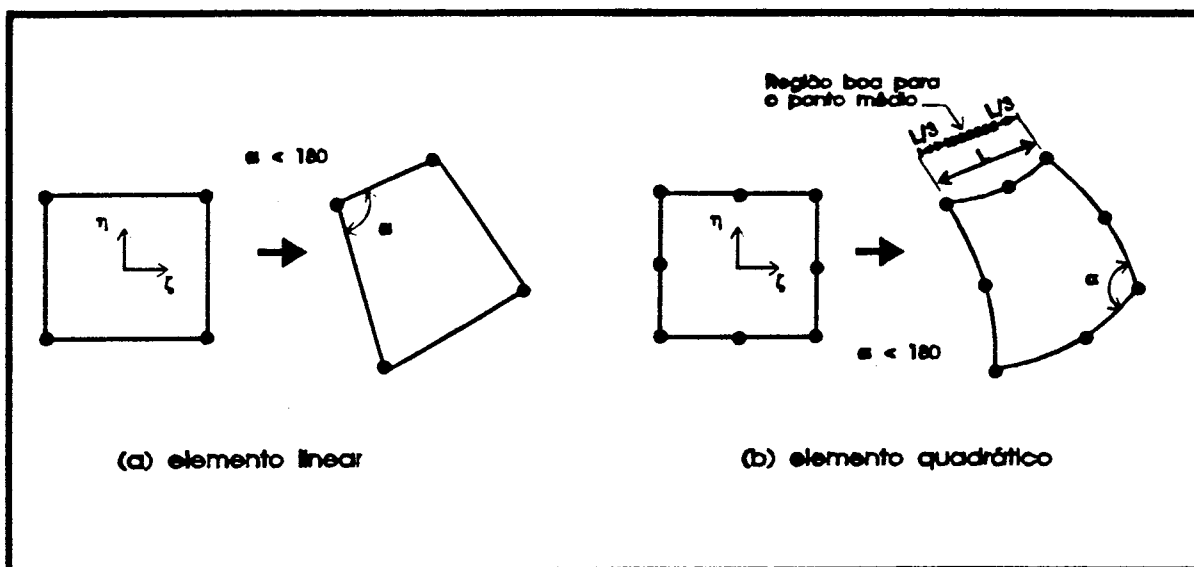


Fig. 1.12 - Regras para unicidade dos mapeamentos [ZIEN89]

A Fig. 1.13 mostra malhas que atendem a esta condição. Interseções que resultem em trechos de uma face ou aresta, como ilustra a Fig. 1.13 devem ser evitadas.

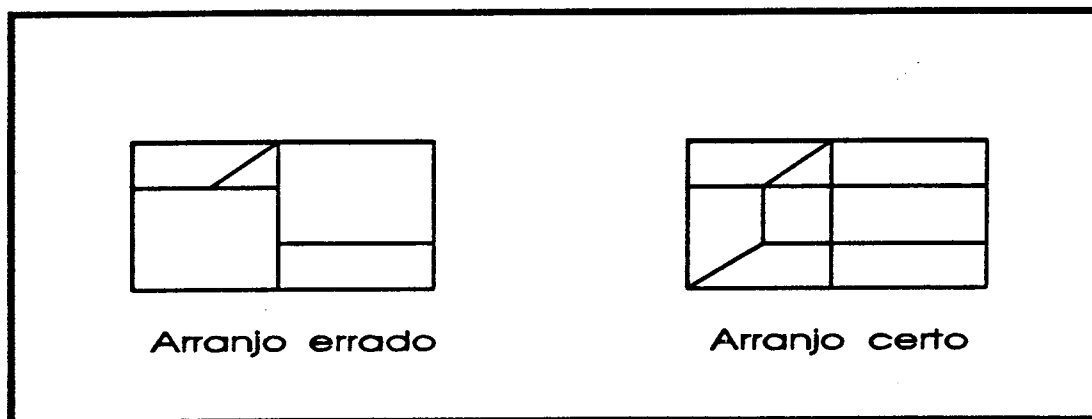


Fig. 1.13 - Condição básica para arranjos de elementos em malhas

Uma outra forma de enunciar esta propriedade seria a dizer que dois elementos de uma determinada dimensão só podem se interceptar em uma entidade de dimensão inferior. Quando o elemento for de dimensões diferentes (um cubo e um quadrado) a dimensão da interseção pode ser igual ao elemento de dimensão inferior.

As condições sobre a interseção de elementos de uma malha vão, entretanto, mais longe. No MEF a avaliação da integral sobre o domínio,  $\Omega$ , é feita pela soma das integrais sob os domínios internos de cada elemento,  $\Omega_e$ , sem considerações de suas fronteiras, ou seja:

$$\int_{\Omega} = \sum_{e=1}^{n. elementos} \int_{\Omega_e} \quad (1.2)$$

Por isto é preciso garantir que a integral nas fronteiras dos elementos é nula. Esta condição impõe duas outras. A primeira é de que as fronteiras comuns a dois elementos devem se infinitesimais no espaço do domínio  $\Omega$ . A segunda é de que os valores do campo incógnita e de suas derivadas que aparecem na integral devem ter valores limitados na fronteira. Se, por exemplo, a derivada de ordem máxima que aparece na integral apresentar um comportamento do tipo Delta de Dirac na fronteira, sua integral poderia ter valor finito violando a equação (1.2). Esta condição pode ser traduzida em termos de exigência de continuidade do campo nestas interfaces.

A ordem de continuidade na interface é função da ordem de derivada do campo que aparece na integral. Se a integral contém derivadas de ordem  $m$ , as funções precisam ser contínuas até a derivada  $m-1$  para que a derivada  $m$  seja limitada. Assim, por exemplo, elementos tipo placa com derivadas de segunda ordem nos seus funcionais requerem continuidade  $C^1$  para garantir convergência.

Uma maneira comumente utilizada para garantir continuidade ao longo de interfaces de dois elementos consiste em garantir que nela o campo incógnita seja função apenas dos valores dos nós comuns aos dois elementos. Isto implica que, por exemplo, o campo incógnita no lado dos elementos finitos triangulares mostrados na Fig. 1.14, seja função apenas dos valores  $v_2$  e  $v_3$ . Caso o campo no lado 23 fosse função dos valores  $v_1$  ou  $v_4$ , nada poderia garantir a continuidade deste campo uma vez que estes valores são independentes e podem variar livremente. Por isto, em formulações que não utilizam rotações a variação do campo incógnita nos lados de elementos triangulares de três nós é linear. Para se obter uma variação parabólica utiliza-se elementos triangulares com seis nós, um no meio de cada lado.

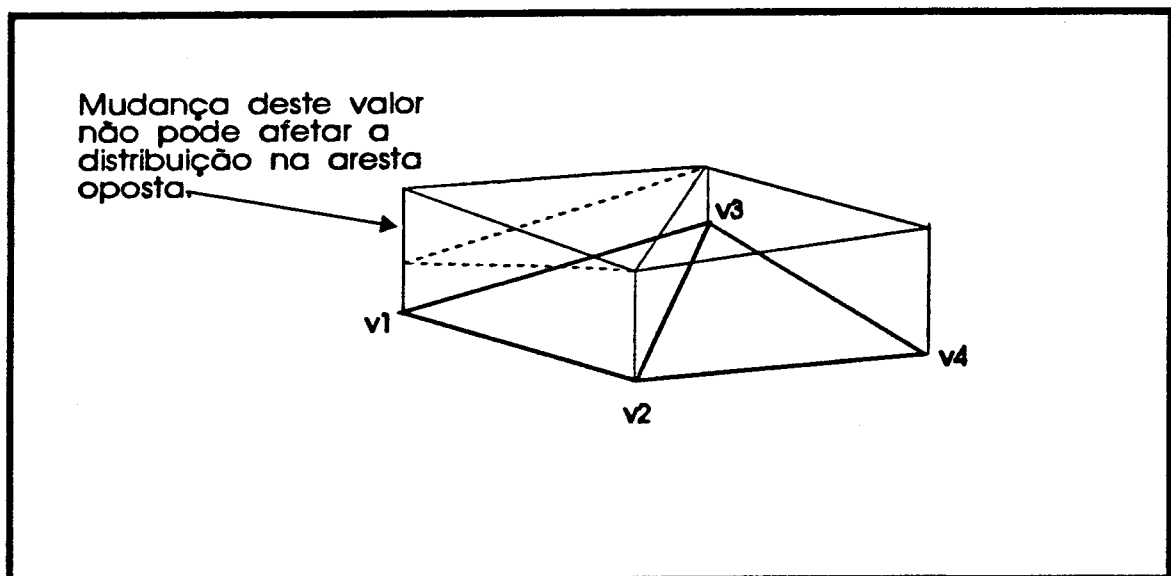


Fig. 1.14 - Dependência do campo incógnita nas interfaces

Algumas vezes analistas de elementos finitos utilizam malhas com inconsistências dos tipo de um elemento quadrilátero de oito nós colocado ao lado de outro de quatro, criando um lado comum com campo descontínuo como ilustra a Fig. 1.15. Neste caso espera-se que o programa de análise possa tratar estas inconsistências através de técnicas do tipo dos multiplicadores de Lagrange que procuram minimizar o erro cometido. Estas soluções são, entretanto, pouco elegantes e devem ser evitadas.

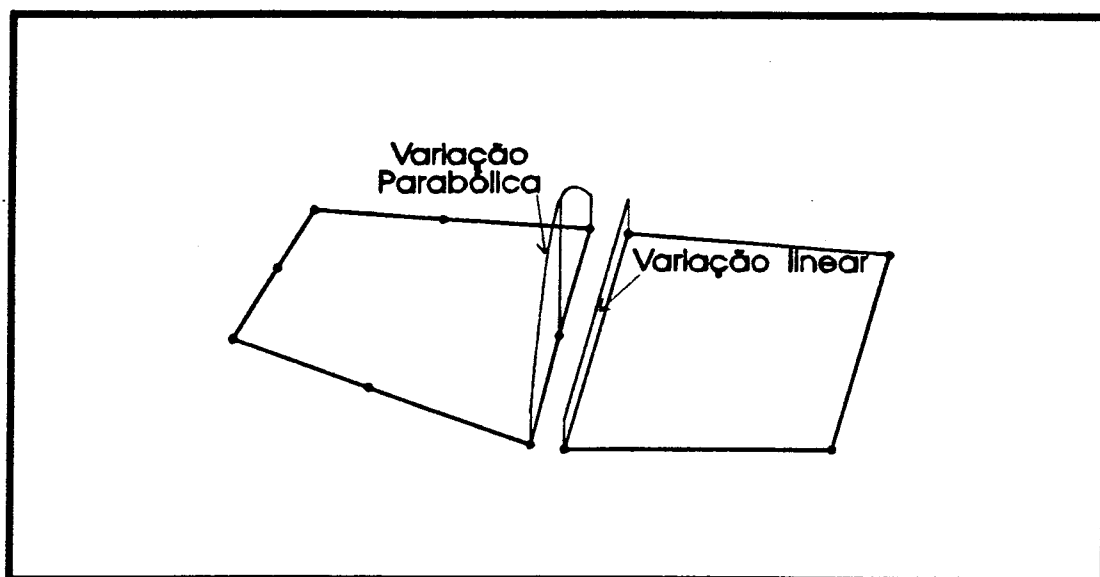


Fig. 1.15 - Incompatibilidades no campo de deslocamentos

### 1.3. O PROCESSO DE GERAÇÃO DE MALHAS

Quando, na década de 60, o método dos elementos finitos foi introduzido nos processos de projeto de engenharia, coube ao engenheiro analista a tarefa de descrever a malha diretamente para os programas então disponíveis. De uma maneira geral esta descrição é feita em quatro etapas. Na primeira etapa o analista fornece as coordenadas dos nós que são geralmente identificados pela ordem com que são fornecidos.

Na segunda etapa o analista fornece tabelas de material e outros atributos da malha. Na terceira etapa ele fornece uma descrição dos elementos através de sua incidência nodal (conectividade) e dos índices de material e outros atributos específicos do tipo de elemento. No último passo são fornecidas as excitações do modelo (cargas). Estas excitações são geralmente atribuídas diretamente a nós ou elementos. A geometria do domínio neste processo não é especificada diretamente e fica implícita na união dos elementos fornecidos.

Toda esta informação era passada para os programas de análise através de arquivos texto. Um dos primeiros sistemas de uso geral que surgiu na engenharia, o ICES (Integrated Civil Engineering System), foi desenvolvido no MIT (Massachusetts Institute of Technology) com preocupações de tornar estas etapas menos sujeitas a erros. A Fig. 1.16 mostra um trecho do arquivo texto que descreve a estrutura também mostrada na figura para um sub-sistema do ICES, o STRUDL.

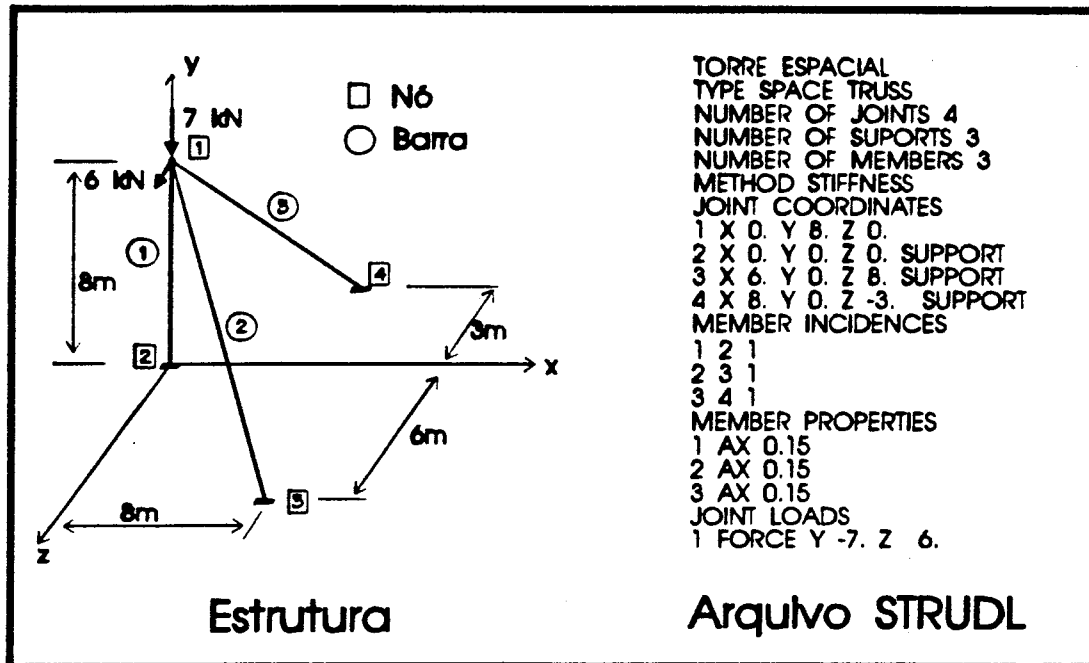


Fig. 1.16 - Estrutura e arquivo de dados para o ICES/STRUDL

A descrição do modelo para o sistema ICES/STRUDL, ilustrada nesta figura, é feita através de uma linguagem orientada pelo usuário. Este processo, apesar de ser obsoleto atualmente, era bastante adequado para a baixa interatividade dos computadores da época.

A preocupação com o desenvolvimento de novos elementos e de técnicas numéricas mais eficientes dominou a década subsequente. A descrição de um problema para os sistemas que surgiram neste período passaram a utilizar arquivos numéricos formatados onde o significado de cada número era função da ordem de sua linha no arquivo e de sua posição na linha. A Fig. 1.18 mostra trechos de um arquivo que descreve a estrutura da Fig. 1.17 para o programa SAP V (Structural Analysis Program). Este programa, que teve sua origem em Berkeley em 1965, teve seu fonte distribuído pelo mundo e influenciou de modo marcante o desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos.

	10	20	30	40	50	60
	1 2 3 4 5 6 7 8 9 0	1 2 3 4 5 6 7 8 9 0	1 2 3 4 5 6 7 8 9 0	1 2 3 4 5 6 7 8 9 0	1 2 3 4 5 6 7 8 9 0	1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6
TORRE ESPACIAL						
4	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1 0. 8. 0.
2	1	1	1	1	1	1 0. 0. 0.
3	1	1	1	1	1	1 8. 0. 6.
4	1	1	1	1	1	1 8. 0. -3.
1	3	1				
	1210000000.					
1	2	1	1			
2	3	1	1			
3	4	1	1			
1	1		0.	-10.	5.	

Fig. 1.17 - Entrada de dados do programa SAP



Erros nesta descrição detalhada eram comuns até que, no final da década de 70, a Computação Gráfica passou a ser utilizada neste processo. Através dela, o usuário pode ver uma imagem da malha que sintetiza não só a geometria do domínio, mas também o arranjo dos elementos.

Técnicas da computação gráfica interativa foram usadas na década de 80 para promover um ambiente onde a criação da malha fosse feito dentro de um processo de diálogo orientado por computador. Estes programas que criavam dados para a análise, passaram a se chamar pré-processadores.

Os primeiros pré-processadores que surgiram procuravam reproduzir o processo de criação do arquivo de texto. Eles basicamente permitiam que a cada comando do usuário, feito ainda no modo semelhante aos do ICES/STRUDL, o usuário pudesse visualizar a malha gerada. As primeiras versões do programa ANSYS e do MTABS exemplificam este enfoque. A ênfase nestes programas estava na geração automática de nós e elementos a partir de comandos do tipo "repita um dado elemento n vezes em incrementos de tanto" ou "interpole n nós entre o nó tal e o nó tal". Uma forma primária destes comandos já existia nos arquivos texto e eram causas freqüentes de erros. O *feedback* visual possibilitado pelo uso da Computação Gráfica minimizou estes erros.

Uma nova geração de pré-processadores surgiu com a utilização de técnicas de geração automática de malhas a partir da fronteira de seu domínio. A Fig. 1.18 exemplifica esta idéia.

Uma evolução natural desta idéia vem ocorrendo com a introdução de ferramentas de Modelagem Geométrica para não só criar a geometria inicial do objeto como também para auxiliar no processo de geração automática da malha.

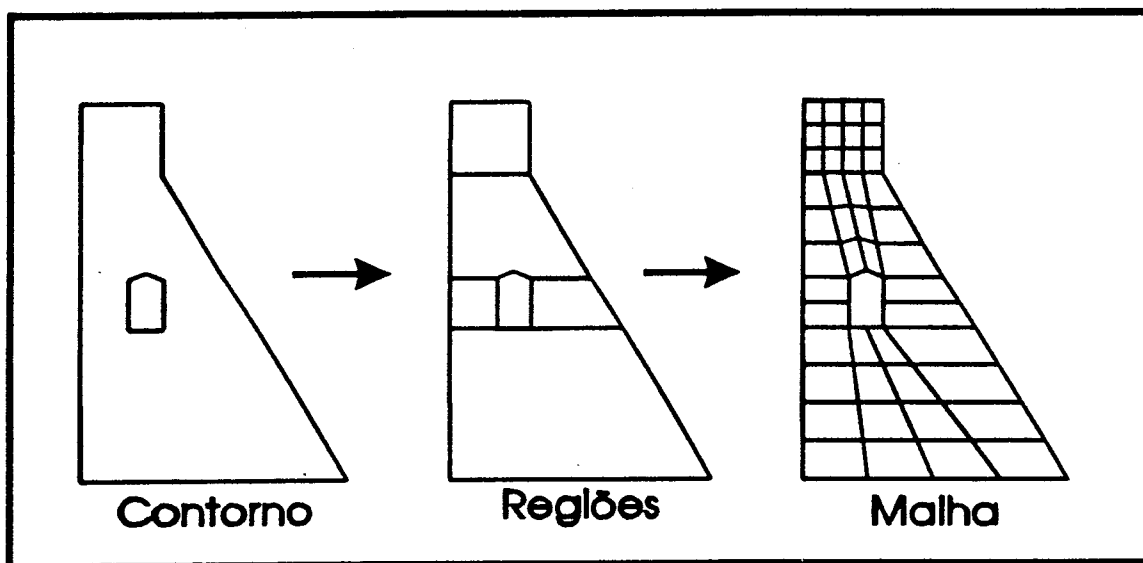


Fig. 1.18 - Geração de malha a partir da fronteira do domínio

## 1.4. CONVERGÊNCIA E ERRO DE DISCRETIZAÇÃO

Na modelagem por elementos finitos existem duas questões que devem ser abordadas: “Qual o grau de aproximação da solução encontrada?” e “Como a solução aproximada pode ser sistematicamente melhorada para chegar à solução exata?”.

A primeira pergunta é difícil de ser respondida pois ela pressupõe o conhecimento da solução exata. E o que é necessário para se responder a segunda pergunta é uma garantia de que o modelo vai convergir para a solução exata a medida que o tamanho  $h$  dos elementos vão diminuindo. Para tanto, argumenta-se [ZIEN89] que, se a aproximação para o campo incógnita for capaz de, no limite, reproduzir exatamente qualquer distribuição de deslocamentos dentro do meio contínuo e se a solução de cada aproximação for única, então o modelo vai convergir para a solução exata e única no limite  $h \rightarrow 0$ . Estes fatos são observados em modelos do MEF. Em alguns casos, a solução exata é encontrada mesmo com uma discretização finita (ou mesmo com um único elemento) se esta solução for formada pelas mesmas funções que são usadas na aproximação dentro de cada elemento. Assim, por exemplo, se a solução exata for da forma de um polinômio quadrático e a aproximação utilizada incluir todos os polinômios desta ordem, a aproximação resultará na solução correta.

A argumentação acima auxilia na determinação da ordem de convergência de um modelo de elementos finitos [ZIEN89]. Considere que a solução exata  $u$  pode ser expandida em uma série de Taylor na vizinhança de qualquer ponto (ou nó)  $i$  como um polinômio

$$u = u_i + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)(x - x_i) + \left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)(y - y_i) + \dots \quad (1.3)$$

Para isso não pode haver singularidade do campo na região da expansão. Se dentro de um elemento de tamanho característico  $h$  uma aproximação polinomial de grau  $p$  for empregada, então a solução aproximada ajusta localmente a expansão em Taylor da solução exata até este grau. Como  $x$  e  $y$  são da ordem de magnitude  $h$ , o erro em  $u$  vai ser da ordem  $O(h^{p+1})$  porque somente os termos de ordem  $p$  podem ser representados corretamente. Uma ordem de erro  $O(h^{p+1})$  corresponde a um grau de precisão  $n$ . O grau de precisão se refere ao grau do polinômio completo de mais alta ordem que pode ser representado exatamente.

Assim, por exemplo, se o polinômio utilizado na formulação do modelo de elementos finitos for linear ( $p = 1$ ), a (velocidade de) convergência esperada é  $O(h^2)$ , isto é, o erro em deslocamentos é reduzido para 1/4 se o tamanho característico dos elementos da malha for reduzido pela metade. Analogamente, as deformações (ou tensões), que são obtidas por derivadas de grau  $m$  do campo de deslocamentos, devem convergir com um erro de ordem  $O(h^{p+1-m})$ . Para o caso de elasticidade plana ( $m = 1$ ), no exemplo com aproximação linear a convergência para tensões é  $O(h)$ .

### Tipos de refinamento de malha

Existem duas maneiras clássicas de reduzir o erro de aproximação de um modelo de elementos finitos. Estes procedimentos (Fig. 1.19), denominados de refinamento do tipo “ $h$ ” e refinamento do tipo “ $p$ ”, são duas formas de aumentar o número de graus de liberdade de um modelo, de forma a reduzir o erro de discretização em uma análise subsequente.

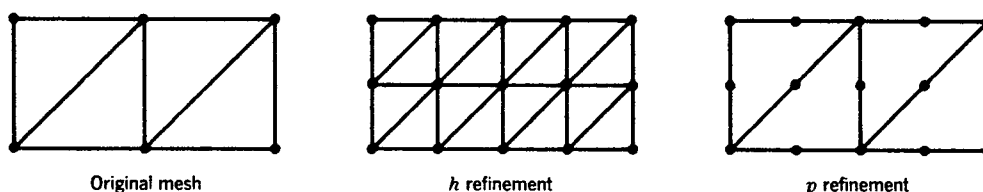


Fig. 1.19 – Refinamentos do tipo “ $h$ ” e “ $p$ ” [COOK89].

O refinamento do tipo “ $h$ ”, Fig. 1.19-a, se refere a uma diminuição do tamanho característico ( $h$ ) dos elementos, dividindo-se cada elemento em dois ou mais elementos, mas sem alterar o tipo de elemento usado. O refinamento do tipo “ $p$ ”, Fig. 1.19-b, se refere a um aumento do grau ( $p$ ) do polinômio completo de mais alto grau na formulação dos elementos, acrescentando-se nós aos elementos ou graus de liberdade (por ex., rotações) aos nós, ou ambos, mas sem alterar o número de elementos usados.

Uma terceira alternativa para refinar uma malha consiste na modificação da posição dos nós, movendo-os na direção das regiões onde haja gradientes acentuados na solução, mantendo-se o mesmo número de graus de liberdade do modelo e a ordem dos polinômios nos elementos. Este é o chamado refinamento do tipo “ $r$ ” [CASA88, CYRI89]. Este procedimento aumenta a densidade da malha nas regiões mais críticas e torna o modelo menos refinado em outras áreas.

Uma seqüência sucessiva de refinamentos da malha produz uma convergência para o resultado correto. Este processo é conhecido como convergência- $h$ , convergência- $p$  ou convergência- $r$ , dependendo do procedimento de refinamento adotado. O programa de análise por elementos finitos é chamado de ‘adaptativo’ se a adição de graus de liberdade, ou modificação da posição dos nós, e re-análise são executados com um mínimo de intervenção do analista. O programa é chamado de ‘auto-adaptativo’ se ele pode decidir automaticamente onde dentro da malha graus de liberdade adicionais são necessários, modificar esta malha, refazer a análise e continuar a executar este procedimento até que um critério de convergência pré-estipulado seja alcançado [COOK89].

As áreas de estivação de erros de discretização e análise auto-adaptativa são relativamente recentes na pesquisa sobre o MEF. Uma introdução a este assunto pode ser obtida no capítulo 14 da referência [ZIEN89]. A referência [SZAB91] aborda o assunto em maior profundidade.

## REFERÊNCIAS

- [CASA88] Las Casas, E.B., “R-h Mesh Improvement Algorithms for the Finite Element Method”, Tese de doutoramento, Dept. Civil Engineering, Purdue University, 1988.
- [COOK89] Cook, R.D., Malkus, D.S. and Plesha, M.E., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, Third Edition, John Wiley & Sons, 1989.
- [CLOU65] Clough, R.W., “The Finite Element Method in Structural Mechanics”, Chapter 7 of *Stress Analysis* (eds. O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister), Wiley, 1965.
- [CYRI89] Cyrino, J.C.R., “Convergência Acelerada pela Relocalização de Nós e Refinamento de Malhas de Elementos Finitos”, Tese de doutoramento, Programa de Eng. Civil, COOPE/UFRJ, 1989.
- [STRA73] Strang, G. and Fix, G., *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, 1973.
- [SZAB91] Szabó, B. and Babuska, I., *Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, 1991.
- [WAWR87] Wawrzynek, P. A. and Ingraffea, A. R., “Interactive Finite Element Analysis of Fracture Processes: An Integrated Approach”, *Theor. Appl. Fract. Mech.*, Vol. 8, pp. 137-150, 1987.
- [ZIEN89] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., *The Finite Element Method – Volume 1 Basic Formulation and Linear Problems*, Fourth Edition, McGraw-Hill, 1989.

# Introdução a Métodos Energéticos e Princípios Variacionais

## • Introdução

### — Quadros e treliças

matriz de rigidez dos elementos  $[k]$  pode ser determinada por equilíbrio diretamente

### — Elementos Finitos (E.F.) bi ou tridimensionais

$[K]$  não pode ser determinada por equilíbrio diretamente. Sai por princípios energéticos. Princípio dos Deslocamentos Virtuais (P.T.V.) ou métodos de energia

— P.D.V. nada mais é do que uma outra forma de estabelecer as condições de equilíbrio

### — Método de Rayleigh-Ritz

método energético onde a função de aproximação abrange todo o domínio. Graus de liberdade não tem necessariamente significado físico.

### — M.E.F.

função de aproximação é definida em pequenos pedaços. Graus de liberdade correspondem a valores das funções de aproximação nos nós

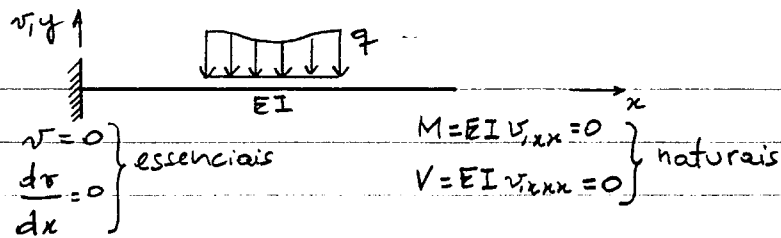
- Problema matemático a ser resolvido

- Equação diferencial governa o comportamento no domínio (ex. equações da elasticidade)

- Condições de contorno nas fronteiras

- cinemáticas (essenciais). Ex. deslocamentos prescritos

- estáticas (naturais). Ex. forças de superfície prescritas



- Formulações do problema

- Formulação forte ("strong form")

Formulação através das equações diferenciais diretamente. Condições de equilíbrio (e compatibilidade) tem que ser satisfeitas em todos os pontos.

- Formulação fraca ("weak form")

Formulação através de integrais que envolvem as equações diferenciais

• Princípio da Mínima Energia Potencial Total

- Sistema

estrutura e as forças que atuam

- Sistema conservativo

- Se o sistema for deslocado de qualquer configuração e retornado à posição original e o trabalho total realizado é nulo, independentemente da trajetória realizada.
- Se o sistema for deslocado de uma configuração para outra e o trabalho realizado pelas forças independe da trajetória.
- Energia de deformação e energia potencial dependem apenas da configuração atual e não de como o sistema chegou a ela (existe energia potencial)

- Configuração admissível

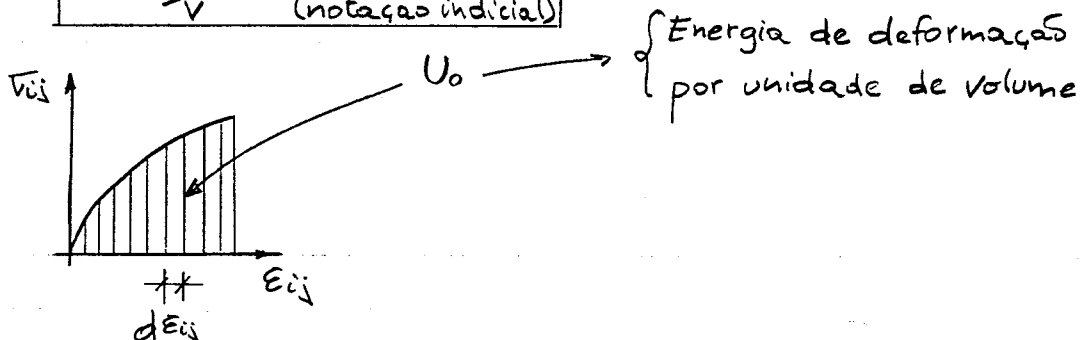
satisfaz compatibilidade de deslocamentos internamente e com os vínculos externos

- Energia de deformação interna

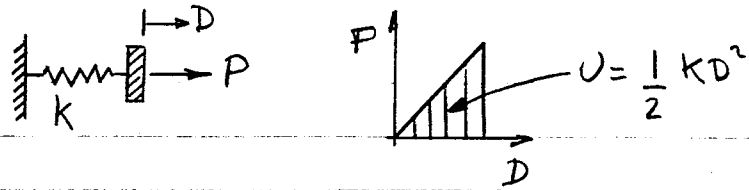
$$U = \int_V \left( \int_0^{E_{ij}} \tau_{ij} dE_{ij} \right) dV$$

(notação indicial)

$$U_0 = \int_0^{E_{ij}} \tau_{ij} dE_{ij}$$



— Sistema de 1 d.o.f. e U



— Meios contínuos e U

$$\underline{3D} \quad \{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad \{E\} = \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

$$\underline{2D} \quad \{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \{E\} = \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\{\epsilon\} = [E] \{E\} - [E] \{E_0\} + \{\epsilon_0\}$$

↑ Lei de Hook     
 ↑ deformações residuais     
 ↑ tensões residuais

$$dU_0 = \{\epsilon\}^T \{dE\}$$

$$dU_0 = \epsilon_x dE_x + \epsilon_y dE_y + \gamma_{xy} d\gamma_{xy}$$

↓  
Incremento de energia de deformação devido ao incremento de deformação



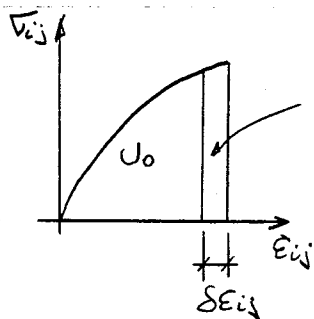
$$\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_x} = \tau_x \quad ; \quad \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_y} = \tau_y \quad ; \quad \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xy}} = \tau_{xy}$$

Integrando  $dU_0$  com respeito à deformação

$$\Rightarrow U_0 = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon_0\} + \{\varepsilon\}^T \{\tau_0\}$$

$$U = \int_V U_0 dV$$

— 1ª variação de  $U$  em relação a deslocamentos  $\delta u$



$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i})$$

$$\delta U = \int_V \tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV$$

1ª variação de  $U$ ,  $\delta U$ , corresponde ao trabalho virtual interno para uma estrutura submetida a um campo de deslocamentos virtuais  $\delta u$

— Trabalho virtual das forças externas

$$\delta W_E = \int_S \phi_i \delta u_i ds + \int_V F_i \delta u_i dV$$

(notação indicial)

$\phi_i \rightarrow$  forças de superfície  
 $F_i \rightarrow$  forças de volume

## - Potencial das forças externas

É definida uma função potencial das forças externas  $V_E$ , tal que a sua primeira variação  $\delta V_E$ , seja igual a  $-\delta W_E$  (igual a menos o trabalho virtual das forças externas)

$$\delta V_E = -\delta W_E$$

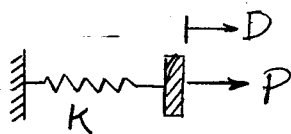
Assim,

$$V_E = -\int_S \phi_i u_i ds - \int_V F_i u_i dV + \text{const}$$

↑  
depende do referencial escolhido

Na expressão acima não aparece o termo  $\frac{1}{2}$ . Isto porque o potencial das forças externas representa um potencial adquirido pelo carregamento, com sua intensidade total, de deslocar dentro de todas as suas possibilidades, nada tendo a ver com as características elástica da estrutura. Estas estão representados em  $U$ .

## - Sistema de 1 d.o.f. e $V_E$



$$V_E = -PD + \text{const}$$

— Meios contínuos e  $V_E$

$$\underline{3D} \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} ; \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} ; \quad \{\phi\} = \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{Bmatrix}$$

deslocamentos                      forças de volume                      forças de superfície

$$\underline{2D} \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} ; \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} ; \quad \{\phi\} = \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix}$$

Forças e momentos concentrados:  $\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{Bmatrix}$

$$V_E = - \int_V \{u\}^T \{F\} dV - \int_S \{u\}^T \{\phi\} dS - \{D\}^T \{P\}$$

— Energia Potencial Total

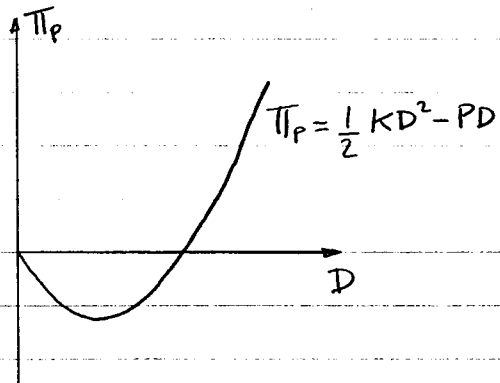
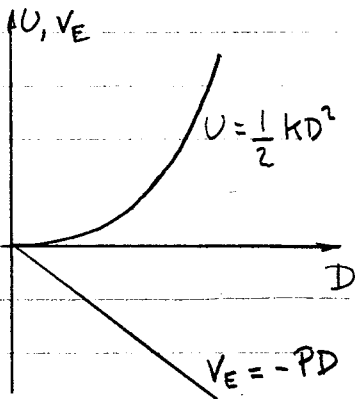
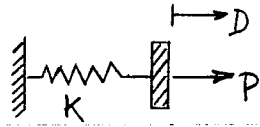
$$\Pi_P = U + V_E$$

$$\Pi_P = \int_V \left( \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \right) dV - \int_S \phi_i u_i dS - \int_V F_i u_i dV$$

Pode ser encarada como a energia a ser fornecida ao sistema para levá-lo de uma configuração qualquer de deslocamentos e forças aplicadas (diferente ou não da configuração de equilíbrio) para a configuração do sistema indeformado.

Se a configuração indeformada for o referencial de energia, então  $const = 0$ .

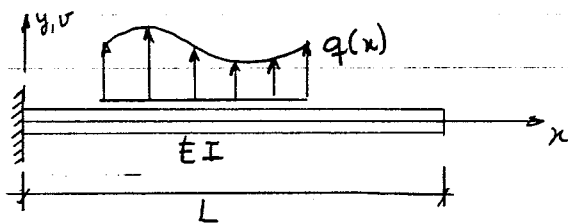
— Sistema de 1 d.o.f. e  $\Pi_P$



— Meios contínuos e  $\Pi_P$

$$\Pi_P = \int_V U_0 dV - \int_V \{u\}^T \{F\} dV - \int_S \{u\}^T \{\phi\} dS - \{D\}^T \{P\}$$

Ex.: Viga com carga transversal



$$dU_0 = \epsilon_x dE_x$$

(só considerando deformação por flexão)

$$dU_0 = E \epsilon_x d\epsilon_x$$

$$U_0 = \int_0^{\epsilon_x} dU_0 \quad \longrightarrow \quad U_0 = \frac{E}{2} \epsilon_x^2$$

onde,  $\epsilon_x = \epsilon_f = -y \frac{d^2 v}{dx^2}$

$$\Rightarrow U = \int_V U_0 = \int_0^L \int_A \frac{E}{2} \left( -y \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dA dx$$

$$U = \int_0^L \frac{E}{2} \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 \int_A (-y)^2 dA dx$$

$$U = \int_0^L \frac{EI}{2} v_{,xx}^2 dx$$

Energia de deformação interna

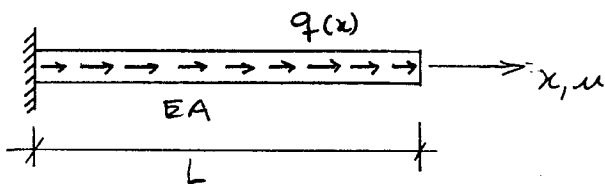
$$V_E = - \int_0^L q(x) v(x) dx$$

Potencial das forças externas

$$\Pi_P = \int_0^L \frac{EI}{2} v_{,xx}^2 dx - \int_0^L q(x) v(x) dx$$

Energia Potencial Total

Ex.: Barra com carga axial



$$dU_0 = \nabla_x d\epsilon_x = E \epsilon_x d\epsilon_x$$

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx}$$

$$U = \int_V U_0 = \int_0^L \int_A \frac{E}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dA dx$$

$$U = \int_0^L \frac{EA}{2} u_{,x}^2 dx$$

Energia de deformação interna

$$V_E = - \int_0^L q(x) u(x) dx$$

Potencial das forças externas

$$\Pi_P = \int_0^L \frac{EA}{2} u_{,x}^2 dx - \int_0^L q(x) u(x) dx$$

Energia Potencial Total

### — 1ª variação da energia potencial total

Se para um sistema (estrutura e forças) em equilíbrio for dado um campo de deslocamentos  $\delta u$ :

$$\delta \Pi_{P_{eq.}} = \delta U_{eq.} + \delta V_{E_{eq.}}$$

Observe que pela expressão do Princípio dos Deslocamentos Virtuais tem-se:

$$\delta U_{eq.} = \delta W_{E_{eq.}}$$

E como  $\delta W_E = -\delta V_E$ , tem-se:  $\delta \Pi_{P_{eq.}} = 0$ .

## - Princípio da Mínima Energia Potencial Total

$\delta \Pi_{peq} = 0$  mostra que pequenas variações de deslocamentos em torno da configuração de equilíbrio não alteram o valor de  $\Pi_{peq}$ .

Isto é, a energia potencial total é estacionária (passa por um mínimo ou máximo) quando a estrutura está na configuração de equilíbrio.

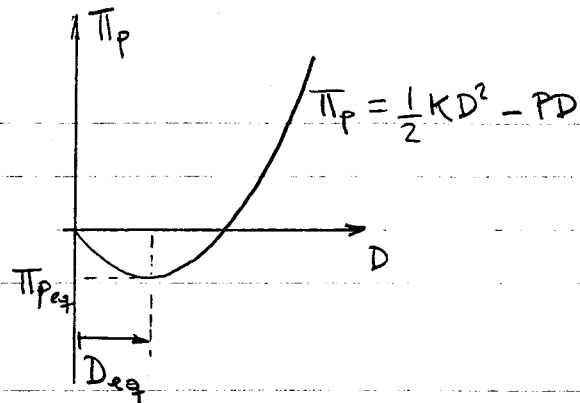
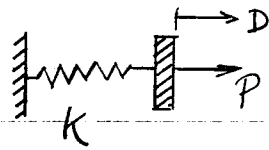
Ou por outra, a imposição de  $\delta \Pi_p = 0$  é uma condição de equilíbrio para a estrutura, do mesmo modo que é a aplicação do princípio dos deslocamentos virtuais.

"Dentre todas as configurações admissíveis de um sistema conservativo, aquelas que satisfazem as condições de equilíbrio fazem com que a energia potencial total seja estacionária com respeito a pequenas variações de deslocamentos. Se a condição de estacionariedade é de mínimo, então o equilíbrio é estável."

O princípio é válido mesmo no caso em que o material não tem um comportamento linear (o sistema tem que ser conservativo).

Os carregamentos são mantidos constantes durante a variação de deslocamento.

— Sistema de 1 d.o.f. e  $\delta \Pi_p = 0$



$$\Pi_p = \Pi_p(D)$$

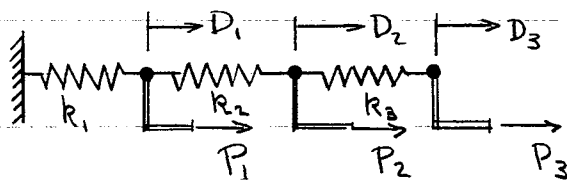
$$\delta \Pi_p = \frac{\partial \Pi_p}{\partial D} \delta D$$

$$\delta \Pi_p = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \Pi_p}{\partial D} = 0}$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial D} = kD - P = 0 \rightarrow \text{Equação de equilíbrio}$$

$$D_{eq} = P/k$$

— Sistema de vários d.o.f. e  $\delta \Pi_p = 0$



$$\{D\} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_m \end{Bmatrix}$$

$$\Pi_p = \Pi_p(D_1, D_2, \dots, D_m)$$

$$\delta \Pi_p = \frac{\partial \Pi_p}{\partial D_1} \delta D_1 + \frac{\partial \Pi_p}{\partial D_2} \delta D_2 + \dots + \frac{\partial \Pi_p}{\partial D_m} \delta D_m$$

$$\delta \Pi_p = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \Pi}{\partial D_i} = 0}$$

Equações de equilíbrio na direção do d.o.f.  $i$ .



Ex.: molas em série

$$\Pi_P = \frac{1}{2} k_1 D_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (D_2 - D_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 (D_3 - D_2)^2 - P_1 D_1 - P_2 D_2 - P_3 D_3$$

$$\frac{\partial \Pi_P}{\partial D_i} = 0 \Rightarrow \begin{cases} k_1 D_1 - k_2 (D_2 - D_1) - P_1 = 0 \\ k_2 (D_2 - D_1) - k_3 (D_3 - D_2) - P_2 = 0 \\ k_3 (D_3 - D_2) - P_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{[K] \{D\} = \{R\}}$$

sistema de equilíbrio do método da rigidez direta

Conclusões:

1. 1º Teorema de Castigliano

$$\frac{\partial^2 U}{\partial D_i \partial D_j} = K_{ij}$$

$$\frac{\partial U}{\partial D_j \partial D_i} = K_{ji}$$

2. Sistema conservativo  $\Rightarrow K_{ij} = K_{ji}$

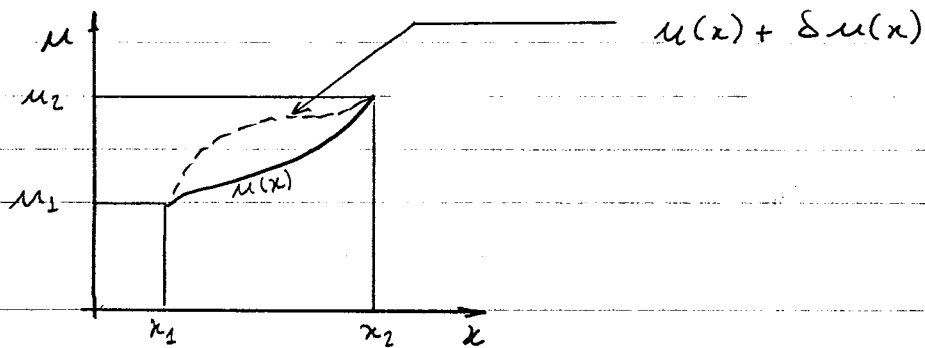
- Generalizações do Enfoque Integral (Energético)

- Caso unidimensional

Funcional  $\rightarrow \Pi = \int_{x_1}^{x_2} F(x, u, u_{,x}) dx$

$u = u(x) \rightarrow$  função que minimiza ou maximiza  $\Pi$

$\delta u(x) \rightarrow$  variações em  $u(x)$



$\delta \Pi = 0$   $\rightarrow$  condição de mínimo ou máximo de  $\Pi$

"variação" no sentido de cálculo variacional

"variação" em torno da solução que minimiza ou maximiza o funcional

$\delta^2 \Pi > 0 \rightarrow$  condição de mínimo

$\delta^2 \Pi < 0 \rightarrow$  condição de máximo

$\delta^2 \Pi = 0 \rightarrow$  deve-se pesquisar variações de maior ordem

— Revisão de cálculo variacional

$$u(x) = u(x) + \delta u(x) \quad \text{ou} \quad u(x) = u(x) + \alpha \eta(x)$$

$$\Rightarrow \Pi = \Pi(\alpha)$$

$$\boxed{\delta \Pi = 0} \quad \equiv \quad \boxed{\left. \frac{d\Pi}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0}$$

integração por partes

$$\left. \frac{d\Pi}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \equiv \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} \right] \eta(x) dx + \left[ \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$\delta \Pi = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} = 0}$$

→ Equação de Euler

Equação diferencial associada a um problema de minimização (ou maximização) de um funcional.

Condições de contorno: naturais

ou

essenciais

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\left. \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} \right|_{x=x_1} = 0}$$

ou

$$\boxed{\left. \delta u(x) \right|_{x=x_1} = 0}$$

$$\boxed{\left. \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} \right|_{x=x_2} = 0}$$

ou

$$\boxed{\left. \delta u(x) \right|_{x=x_2} = 0}$$

(quando  $u(x_1)$  ou  $u(x_2)$  são desconhecidos)

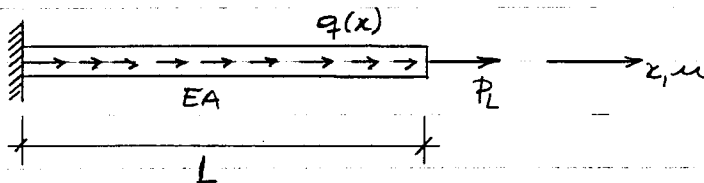
(quando  $u(x_1)$  ou  $u(x_2)$  são conhecidos)

Formulações do problema :

Formulação Forte ("strong form")  $\rightarrow$  Eq. de Euler +  
Cond. de contorno

Formulação Fraca ("weak form")  $\rightarrow$   $\delta \Pi = 0$

— Ex.: Barra com carga axial



$$\Pi = U + V_E = \int_0^L \left( \frac{EA}{2} u_{,x}^2 - q(x)u(x) \right) dx - P_L u_L$$

$$F = \frac{EA}{2} u_{,x}^2 - q(x)u(x)$$

$$\delta \Pi = \delta \int_0^L F(x, u, u_{,x}) dx - \delta u_L P_L$$

$$\delta \Pi = 0 \Rightarrow \text{Eq. de Euler: } \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -q(x) \quad ; \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} = \frac{d}{dx} (EA u_{,x}) = EA \frac{d^2 u}{dx^2}$$

$$\therefore \boxed{EA \frac{d^2 u}{dx^2} + q(x) = 0 \quad 0 < x < L}$$

equação diferencial que governa o comportamento axial de uma barra (eq. de equilíbrio em termos de  $u$ )

Condições de contorno :

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial u_{,x}} \delta u(x) \right]_{x=0}^{x=L} - \delta u(x=L) \cdot P_L = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_{,x}} = EA \frac{du}{dx}$$

$x=0$

$$EA \frac{du}{dx} \cdot \delta u(0) = 0$$

$$\boxed{u(0) = 0} \Rightarrow \delta u(0) = 0$$

$x=L$

$$\left( EA \frac{du}{dx} - P_L \right) \delta u(L) = 0$$

$u(L)$  é desconhecido

$$\Rightarrow \boxed{EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = P_L} \quad \begin{array}{l} \text{Esforço normal} \\ \text{em } x=L \end{array}$$

— Caso bidimensional

$$\Pi = \iint F(x, y, u, v, u_{,x}, u_{,y}, v_{,x}, v_{,y}, \dots, v_{,yy}) dx dy$$

Hipótese: derivada de maior ordem é do segundo grau

$$\begin{array}{l} \text{variáveis fundamentais: } u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{array}$$

$\delta \Pi = 0 \Rightarrow$  condição de máximo ou mínimo do funcional

"variação" (no sentido de cálculo variacional) em torno das soluções  $u$  e  $v$  que minimizam ou maximizam  $\Pi$

Equações de Euler :

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial u_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial u_{yy}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial v_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial v_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial v_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial v_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial v_{yy}} = 0$$

Existem tantas equações de Euler quantas são as variáveis fundamentais.

• Método de Rayleigh - Ritz

- Formulação integral :

Ao invés de atacar o problema pela formulação forte ("strong") — equações diferenciais mais condições de contorno — tenta-se minimizar um funcional.

- Método : (3D)

As funções de deslocamento  $u, v, w$  são aproximadas por

$$u = \sum_{i=1}^l a_i f_i \quad ; \quad v = \sum_{i=l+1}^m a_i f_i \quad ; \quad w = \sum_{i=m+1}^n a_i f_i$$

Funções de aproximação  $f_i = f_i(x, y, z)$

Funções conhecidas admissíveis (que satisfazem as condições de contorno essenciais e compatibilidade de deslocamentos).

Formam uma "base" (de um subespaço) de funções que servem para descrever os deslocamentos.

## Coordenadas generalizadas $a_i$

Uma vez conhecidas as amplitudes  $a_i$  o problema fica resolvido.

No método de Rayleigh-Ritz as amplitudes  $a_i$  não tem o menor sentido físico e são de número finito.

Mas quais são os valores de  $a_i$  que melhor aproximam  $u, v, w$ ?

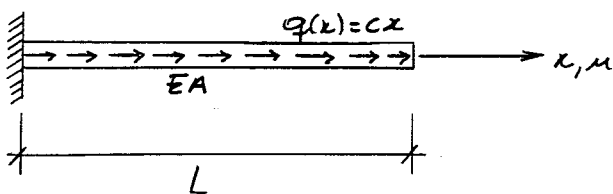
### - Formulação fraca (integral)

O problema é atacado na forma fraca ("weak") e escreve-se.  $\Pi_p = \Pi_p(a_i)$

$$\partial \Pi_p = 0 \implies \frac{\partial \Pi_p}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

← sistema de  $n \times n$  equações

### - Exemplo unidimensional



$f_i = f_i(x) \rightarrow$  funções polinomiais

$$\implies u = \sum_{i=1}^m a_i f_i = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_m x^m$$

$a_0 = 0$  pois  $u = a_0$  é inadmissível

$$\underline{n=1} \quad \rightarrow \quad u(x) = a_1 x$$

$$\Pi_p = \frac{EA L a_1^2}{2} - \frac{c L^3}{3} a_1$$

$$\frac{d\Pi_p}{da_1} = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{c L^2}{3EA} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{c L^2}{3EA} x \\ \overline{V}_x = E \frac{du}{dx} = \frac{c L^2}{3A} \end{cases}$$

$$\underline{n=2} \quad \rightarrow \quad u(x) = a_1 x + a_2 x^2$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial a_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \Pi_p}{\partial a_2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$EAL \begin{bmatrix} 1 & L \\ L & 4L^2/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{cL^2}{12} \begin{Bmatrix} 4 \\ 3L \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{cL}{12EA} \begin{Bmatrix} 7L \\ -3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = \frac{cL}{12EA} (7Lx - 3x^2) \\ \overline{V}_x = \frac{cL}{12A} (7L - 6x) \end{cases}$$

$$\underline{n=3} \quad \rightarrow \quad u(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

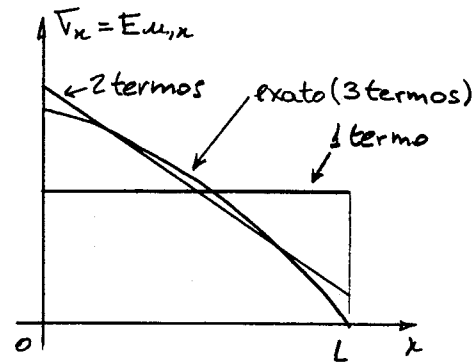
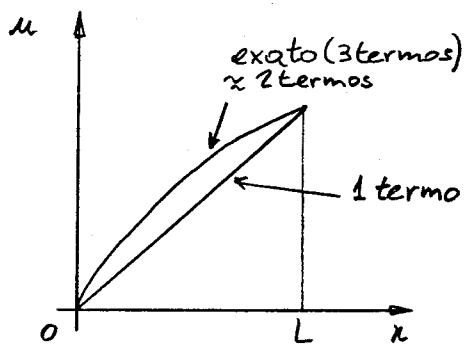
$$\delta \Pi_p = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{cL^2}{2EA} \quad ; \quad a_2 = 0 \quad ; \quad a_3 = -\frac{c}{6AE}$$

$$e \quad \boxed{u(x) = \frac{c}{6EA} (3L^2 x - x^3)} \quad \text{solução exata: satisfaz} \quad \begin{cases} u(0) = 0 \\ \overline{V}_x(L) = E \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = c \end{cases}$$

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} + cx = 0$$

$$\underline{n=4, 5, \dots, \infty} \Rightarrow a_2 = a_4 = a_5 = \dots = 0$$





### Comentários

- As funções de aproximação têm que ser admissíveis (satisfazer condições de contorno essenciais e compatibilidade) e fáceis de usar (polinômios e senos e cossenos).
- As seguintes perguntas têm que ser respondidas:  
Quais os termos e quantos termos considerar?  
Qual o grau de aproximação adequado?
- Condição de convergência:  
A base das funções de aproximação tem que ser completa.  
Uma base é completa quando:
  - Os deslocamentos e suas derivadas que aparecem em  $\Pi_p$  podem ser aproximados quando um suficiente número de termos é utilizado.  
Ex.: polinômios com todos os termos; série de Fourier
  - Elementos da base de ordem mais baixa e que são admissíveis devem estar contidos.  
Ex.: Convergência não seria alcançada no exemplo anterior se o termo  $a_1 x$  não tivesse sido considerado.

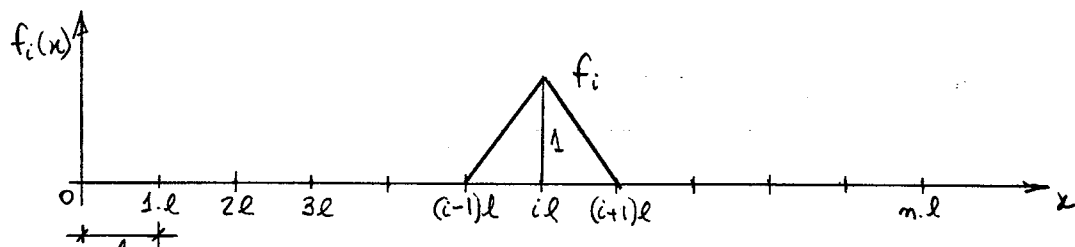
- A solução aproximada pelo método de Rayleigh-Ritz ou é exata ou é mais rígida do que a exata. Os deslocamentos no geral são menores. A solução aproximada corresponde a restrições impostas à resposta exata. O modelo estrutural é mais rígido do que a estrutura real. Isto não quer dizer que todos os graus de liberdade são subestimados. (Isto é certamente verdadeiro se só existir um d.o.f.)
- Quando forças são prescritas, a energia de deformação interna  $U$  é subestimada pelo método de Rayleigh-Ritz. Isto porque  $U = W$ , sendo  $W$  o trabalho das forças externas, e  $W$  é subestimado pois os deslocamentos são menores.  
Quando deslocamentos são prescritos,  $U$  é superestimado (é necessário mais força para deformar).  
Quando os dois são prescritos,  $U$  pode ser sub ou superestimado.
- Derivadas das funções fundamentais (deformação ou tensão, por exemplo) têm um grau menor de precisão. Tensão é em geral subestimada, mas não em todos os pontos.
- Se a base de funções de aproximação contém a solução exata do problema, então a solução exata é encontrada. Neste caso, o equilíbrio verdadeiro da estrutura foi encontrado, e o valor de  $T_{ip}$  corresponde ao mínimo absoluto. Uma solução aproximada do método de Rayleigh-Ritz fornece sempre um valor para  $T_{ip}$  que é maior do que o valor correto. Desta forma um valor de  $T_{ip}$  encontrado é sempre um limite superior para a verdadeira energia potencial total.

• Formulação em Elementos Finitos do Método de Rayleigh-Ritz

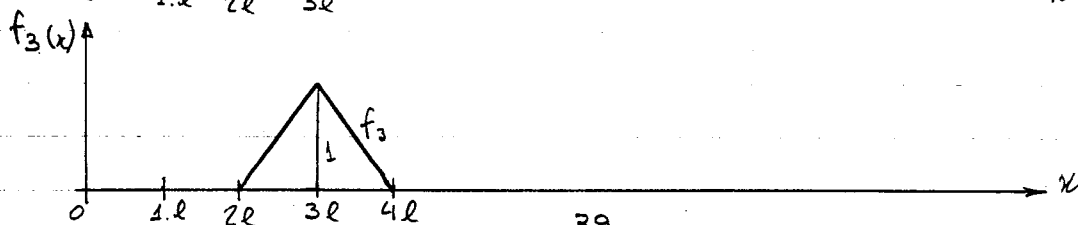
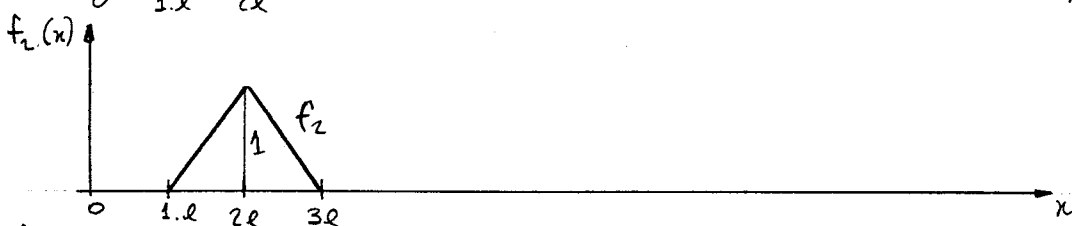
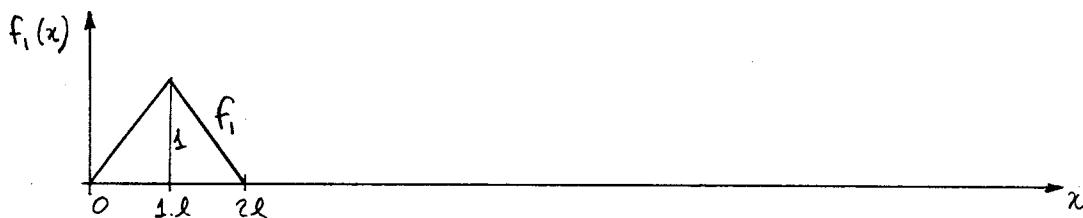
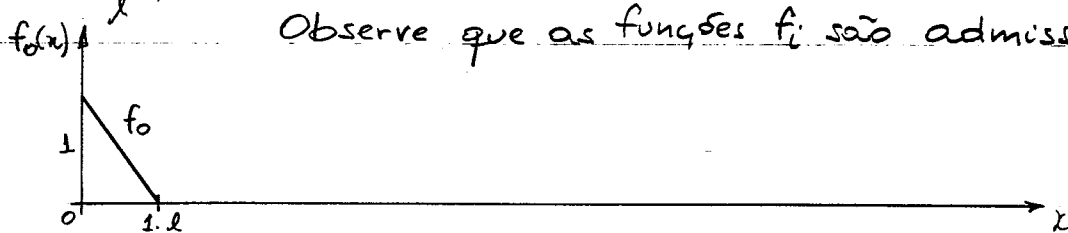
O método dos elementos finitos pode ser definido como o método de Rayleigh-Ritz no qual a base de funções de aproximação é formada por funções de interpolação definidas em pequenos intervalos e que interpolam valores nodais.

Em outras palavras, as funções de aproximação não cobrem todo o domínio (cobrem apenas uma pequena região) e as coordenadas generalizadas confundem-se com os valores nodais.

— Caso unidimensional e funções de interpolação lineares



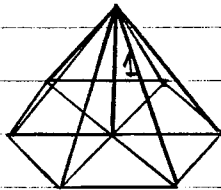
Observe que as funções  $f_i$  são admissíveis



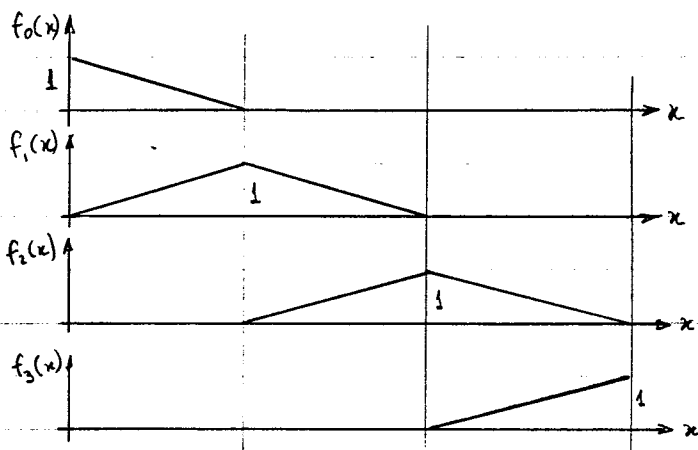
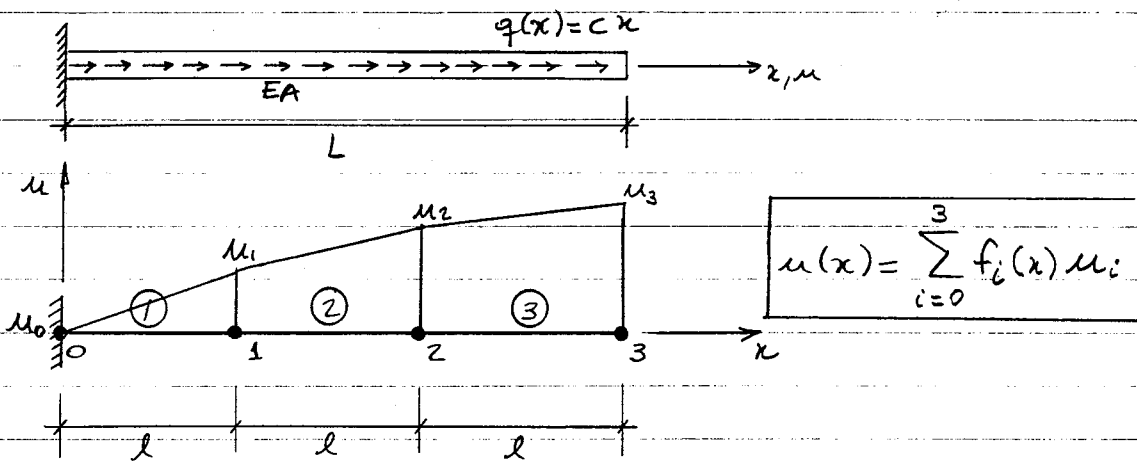
As funções  $f_i$  são "quase" ortogonais:

$$\int_0^L f_i f_j dx = \begin{cases} \neq 0 & \begin{array}{l} j=i-1 \\ j=i \\ j=i+1 \end{array} \\ 0 & j = \text{restante} \end{cases}$$

— Caso bidimensional



— Exemplo unidimensional



No exemplo, qualquer campo de deslocamentos formado por uma interpolação linear de valores nodais pode ser escrito em função da base escolhida:  $u(x) = \sum_{i=0}^3 f_i(x) u_i$ .

### Energia Potencial Total

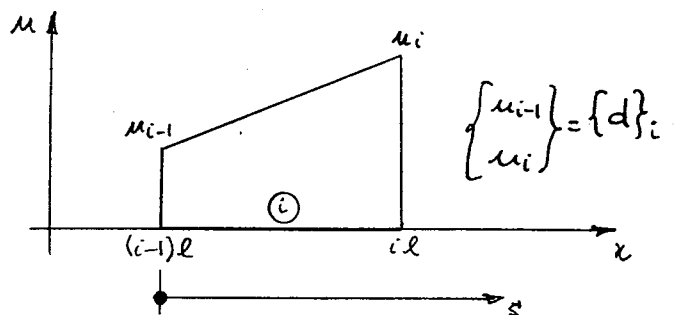
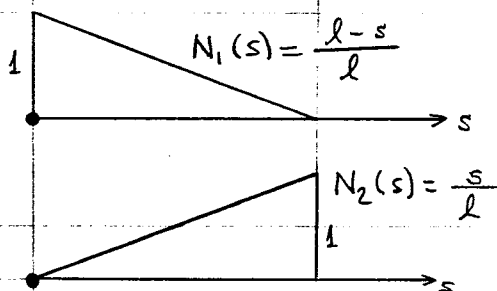
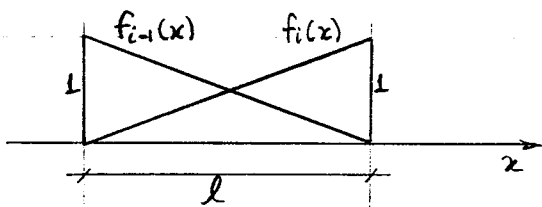
$$\Pi_p = \int_0^L \frac{EA}{2} u_{,x}^2 dx - \int_0^L u q(x) dx$$

Observe que o cálculo de  $\Pi_p$  pode ser escrito como:

$$\Pi_p = \sum_{i=1}^3 \Pi_{p_i}, \text{ onde}$$

$$\Pi_{p_i} = \int_{(i-1)l}^{il} \frac{EA}{2} (u_{i-1} f'_{i-1} + u_i f'_i)^2 dx - \int_{(i-1)l}^{il} (u_{i-1} f_{i-1} + u_i f_i) q(x) dx$$

No elemento  $\textcircled{i}$ :



$$u(s) = u_{i-1} N_1(s) + u_i N_2(s)$$

$$u(s) = [N] \{d\}_i$$

$$[N] = [N_1 \quad N_2]$$

(matriz das funções de forma)

Mudança de variável:  $x \rightarrow s$   
 $s = x - (i-1)l$ ;  $ds = dx$

$$\Pi_{P_i} = \int_0^l \frac{EA}{2} (u_{i-1} N_1'(s) + u_i N_2'(s))^2 ds - \int_0^l (u_{i-1} N_1(s) + u_i N_2(s)) q(s) ds$$

onde,

$$u_{i-1} N_1'(s) + u_i N_2'(s) = u'(s) = \epsilon_s = \epsilon_x$$

$$\epsilon_x = \frac{d}{ds} [N] \{d\}_i = [B] \{d\}_i$$

$[B] = [N_1' \quad N_2'] \rightarrow$  matriz de deformação  $\leftrightarrow$  deslocamento nodal

$$U_i = \int_0^l \frac{EA}{2} (u_{i-1} N_1'(s) + u_i N_2'(s))^2 ds = \int_0^l \frac{EA}{2} (u_{i-1}^2 N_1'^2 + 2u_{i-1}u_i N_1'N_2' + u_i^2 N_2'^2) ds$$

$$U_i = \frac{1}{2} \{u_{i-1} \quad u_i\} \int_0^l EA \begin{bmatrix} N_1'^2 & N_1'N_2' \\ N_2'N_1' & N_2'^2 \end{bmatrix} ds \begin{Bmatrix} u_{i-1} \\ u_i \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \{d\}_i^T [K]_i \{d\}_i$$

onde,  $[K]_i = \int_0^l [B]^T EA [B] ds \rightarrow$  matriz de rigidez do elemento

$$\left. \begin{array}{l} N_1'(s) = -\frac{1}{l} \\ N_2'(s) = \frac{1}{l} \end{array} \right\} \Rightarrow [K]_i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}$$

$$V_{Ei} = - \int_0^l (u_{i-1} N_1 + u_i N_2) q(s) ds = - \{u_{i-1} \quad u_i\} \int_0^l \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} q(s) ds$$

$$V_{Ei} = - \{d\}_i^T \{r_E\}_i ; \quad \begin{Bmatrix} r_{E1} \\ r_{E2} \end{Bmatrix}_i = \int_0^l \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} q(s) ds$$

onde,

$\{r_E\}_i \rightarrow$  forças equivalentes nodais

São chamadas de consistentes porque são calculadas baseadas nas mesmas funções de forma que são utilizadas no cálculo da matriz de rigidez do elemento. Trabalho produzido por  $\{r_E\}$  para deslocamentos  $\{d\}$  é igual ao trabalho produzido por  $q(x)$  para um campo de deslocamentos associado com as funções de forma do elemento.

Finalmente,

$$\Pi_{Pi} = U_i + V_{Ei} ; \quad \boxed{\Pi_{Pi} = \frac{1}{2} \{d\}_i^T [K]_i \{d\}_i - \{d\}_i^T \{r_E\}_i}$$

No exemplo estudado,  $q(x) = cx \Rightarrow$

$$\{r_E\}_1 = \frac{cl^2}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} ; \quad \{r_E\}_2 = \frac{cl^2}{6} \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \end{Bmatrix} ; \quad \{r_E\}_3 = \frac{cl^2}{6} \begin{Bmatrix} 7 \\ 8 \end{Bmatrix}$$

Equações globais

$$\Pi_P = \sum_{i=1}^3 \Pi_{Pi}$$

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \{D\}^T \left( \begin{bmatrix} EA/l & -EA/l & 0 & 0 \\ -EA/l & EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EA/l & -EA/l & 0 \\ 0 & -EA/l & EA/l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EA/l & -EA/l \\ 0 & 0 & -EA/l & EA/l \end{bmatrix} \right) \{D\}$$

$$- \{D\}^T \left( \frac{cl^2}{6} \left( \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 8 \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

ou,

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \{D\}^T [K] \{D\} - \{D\}^T \{R\}$$

$$\Delta \Pi_p = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Pi_p}{\partial \{D\}} = \{0\} \quad \text{ou} \quad [K] \{D\} = \{R\}$$

onde,  $[K] \rightarrow$  matriz de rigidez global

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{cl^2}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 6 \\ 12 \\ 8 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Resta introduzir as condições de contorno, o que é feito da mesma forma do que é feito no método da rigidez direta.



De uma forma geral,

$$\Pi_p = \sum_{i=1}^{nelem} \Pi_{p_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nelem} \{d\}_i^T [K]_i \{d\}_i - \sum_{i=1}^{nelem} \{d\}_i^T \{r\}_i - \{D\}^T \{P\}$$

É importante observar que o somatório na expressão acima pressupõe que as funções de forma utilizadas são tais que forcem uma compatibilidade de deslocamento entre os diversos elementos.

E finalmente,

$$\delta \Pi_p = 0 \Rightarrow [K] \{D\} = \{R\}$$

Onde,  $[K] = \sum_{i=1}^{nelem} [K]_i$

$$\{R\} = \sum_{i=1}^{nelem} \{r\}_i + \{P\}$$

O somatório  $\sum_{i=1}^{nelem}$  assume uma extensão das entidades locais para o tamanho das entidades da estrutura global.

## — Comentários Gerais

A matriz de rigidez do elemento finito poderia ter sido obtida considerando-se o equilíbrio do elemento isoladamente. O princípio dos deslocamentos virtuais pode ser aplicado para encontrar as forças que aparecem nas coordenadas generalizadas do elemento quando este está submetido a configurações cinemáticas conhecidas (deslocamento de um grau de liberdade com valor unitário e os demais nulos). Até mesmo o princípio da mínima energia potencial total poderia ser aplicado, a nível de um elemento, para determinar a sua matriz de rigidez. A montagem da matriz de rigidez global seguiria, então, o procedimento do método da rigidez direta.

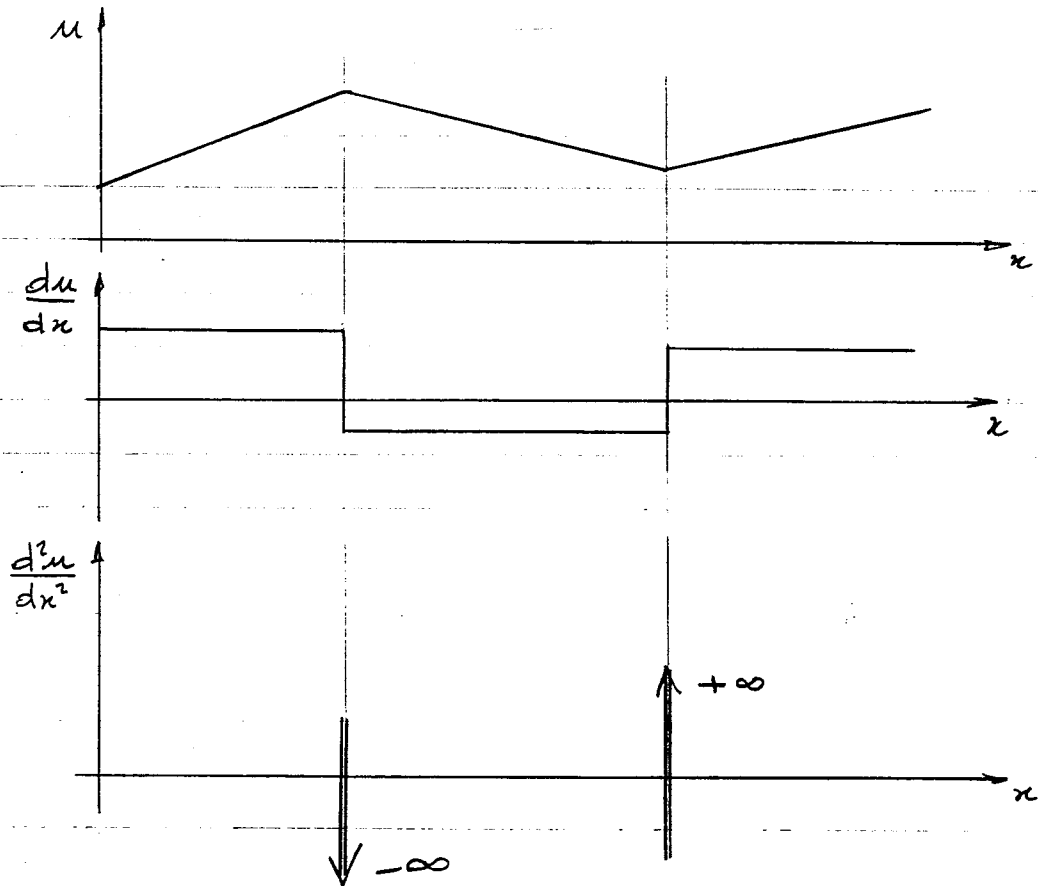
A idéia de somar contribuições de elementos discretos arbitrários para as correspondentes forças nodais globais (método da rigidez direta) tem um apelo intuitivo muito grande, especialmente para engenheiros estruturais. Esta maneira de interpretar o método dos elementos finitos não é, no entanto, rigorosa do ponto de vista matemático. Em outras palavras, é preciso que as expressões

$$\Pi_p = \sum_{i=1}^{nelem} \Pi_{pi} \quad e \quad \int_V (\quad) dV = \sum_{i=1}^{nelem} \int_{V_{elem}} (\quad) dV_{elem}$$

sejam válidas. E quando é que isto é válido? No exemplo unidimensional, o funcional  $\Pi_p$  envolve derivada a primeira da função de deslocamentos, que são deformações. Isto quer dizer que, embora as deformações possam ser descontínuas de um elemento para outro, a integral das deformações (ao quadrado) dentro de cada elemento e na fronteira dos elementos deve resultar em um valor finito.

Dito de outra maneira, para que se possa garantir a convergência da solução, é necessário que a o funcional  $\Pi_p$  não tenha contribuições da integração através das fronteiras dos elementos.

Ainda no caso unidimensional com efeito axial, a aproximação da função de deslocamentos no encontro de dois elementos (funções de forma lineares) pode ser mostrada abaixo.



Vê-se, portanto, que a integral do funcional com integrando que envolve termos somente em  $u$  e  $\frac{du}{dx}$  não recebe contribuições de integração através das  $\frac{du}{dx}$  fronteiras dos elementos. Se o funcional contivesse termos em  $\frac{d^2u}{dx^2}$ , a expressão

$\Pi_p = \sum_{i=1}^{n_{elem}} \Pi_{p_i}$  não seria válida, pois a integral através da fronteira dos elementos também contribuiria para o funcional  $\Pi_p$ . Neste caso, não somente a aproximação para os deslocamentos devem ser contínuas, mas também a aproximação para sua primeira derivada deve ser contínua.

Este é justamente o caso de vigas com cargas transversais. O funcional da energia potencial total contém termos em  $\frac{d^2u}{dx^2}$ . Portanto, as rotações tem que ser compatíveis nos encontros dos elementos. Desta forma existe apenas uma discontinuidade na aproximação de  $\frac{d^2u}{dx^2}$ , mas não existe um "pico" infinito.

É por isso que em um modelo de viga com carga transversal existem dois graus de liberdade por nó: o deslocamento transversal e a rotação.

Sempre que as condições de compatibilidade de deslocamentos for satisfeita na fronteira dos elementos a formulação do método dos elementos finitos é válida. Na verdade esta é uma imposição do método de Rayleigh - Ritz que exige funções de aproximação admissíveis, isto é, que satisfazem as condições de compatibilidade em todos os pontos do domínio. Isto é uma condição para a convergência do método.

Entretanto, existem casos em que, mesmo nos satisfazendo as condições de compatibilidade nas fronteiras dos elementos, as integrais do funcional através destas fronteiras em nada contribuem. Neste caso, a aproximação do método dos elementos finitos é válida pois não há perda de energia quando se calcula a energia potencial total através da soma das energias vindas de cada elemento individualmente.

## Interpolação no Método dos Elementos Finitos

Ingredientes necessários para uma formulação geral pelo método dos elementos finitos de um fenômeno físico:

- Funcional que descreve o problema físico.
- Matriz das funções de forma  $[N]$  que descreve a interpolação dentro de cada elemento.

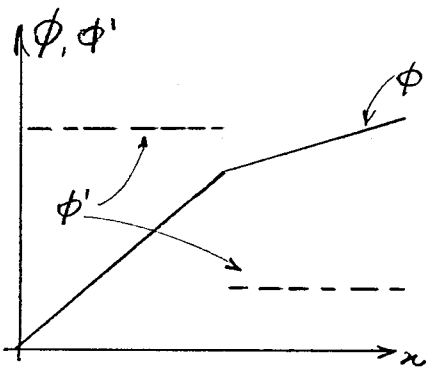
Funções de forma normalmente utilizadas são polinômios:

Linear, quadráticas ou cúbicas  
simples  $\longrightarrow$  complicadas

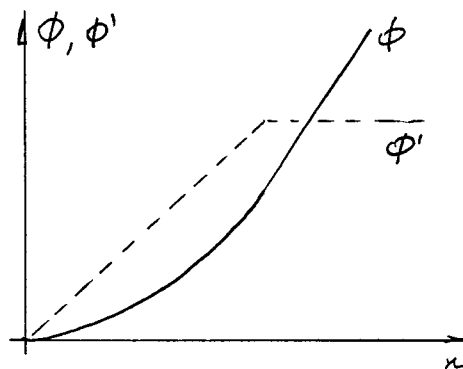
Deve-se usar vários elementos simples ou poucos complicados?  
Resp.: Experiência.

### • Grau de continuidade

$C^m \longrightarrow$  derivadas do campo até o grau  $m$  são contínuas



Continuidade  $C^0$



Continuidade  $C^1$

• Funções de Forma para continuidade  $C^0$

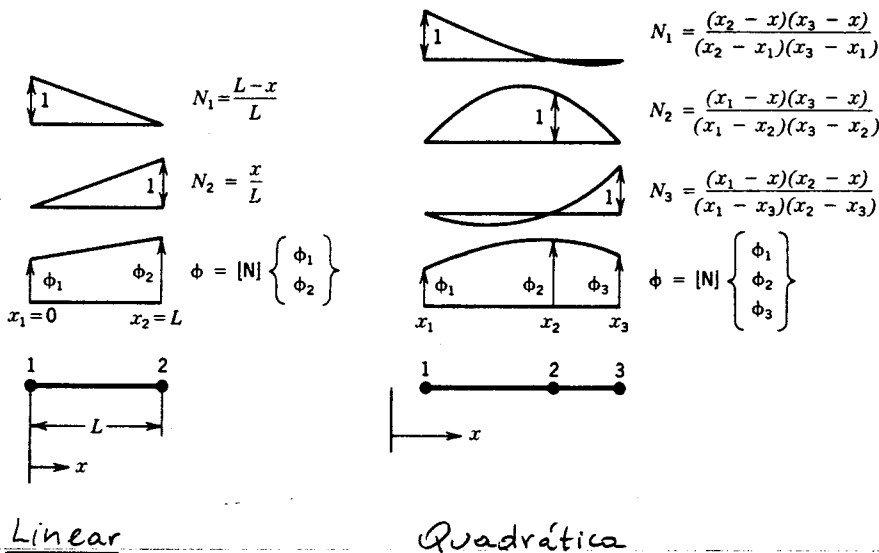
$C^0$  → continuidade no campo da variável fundamental (deslocamento por exemplo) entre os diversos elementos, mas suas derivadas não são contínuas entre os elementos.

$$\phi = [N] \{ \phi_e \}$$

↑  
valores nodais de um elemento

$$\text{ou } \phi = \sum_{i=1}^m N_i \phi_i$$

- Uma dimensão



$$[N] = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix}$$

$$[N] = \begin{bmatrix} \frac{(x_2-x)(x_3-x)}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)} & \frac{(x_1-x)(x_3-x)}{(x_1-x_2)(x_3-x_2)} & \frac{(x_1-x)(x_2-x)}{(x_1-x_3)(x_2-x_3)} \end{bmatrix}$$

Observações

1. Todas as funções de forma  $N_i$ , e a própria função  $\phi(x)$ , são polinômios do mesmo grau.
2. Para qualquer função de forma  $N_i$ ,  $N_i = 1$  quando  $x = x_i$  e  $N_i = 0$  quando  $x = x_j$  onde  $j \neq i$ .
3.  $\sum_{i=1}^m N_i = 1$  e  $\sum_{i=1}^m N_i' = 0$  para qualquer  $x$ .

## Generalização: fórmula de interpolação de Lagrange

$\phi = \phi(x) \rightarrow$  polinômio de grau  $n-1$   $\Rightarrow$

$\phi(x)$  fica definido por  $n$  valores  $\phi_i$  nas abscissas  $x_i$ , respectivamente.

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n N_i \phi_i = N_1 \phi_1 + N_2 \phi_2 + \dots + N_n \phi_n$$

onde,

$$N_1 = \frac{(x_2 - x)(x_3 - x)(x_4 - x) \cdots (x_n - x)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \cdots (x_n - x_1)}$$

$$N_2 = \frac{(x_1 - x)(x_3 - x)(x_4 - x) \cdots (x_n - x)}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \cdots (x_n - x_2)}$$

⋮

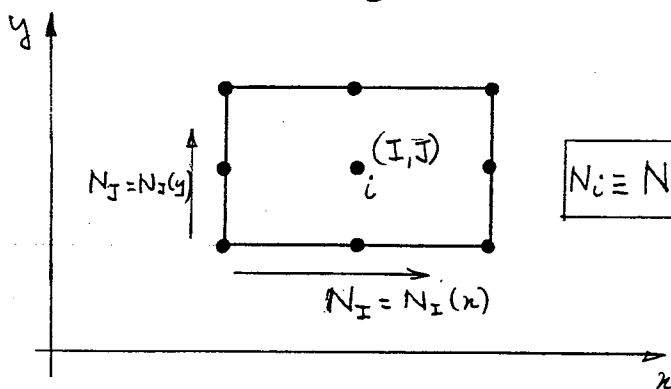
$$N_n = \frac{(x_1 - x)(x_2 - x)(x_3 - x) \cdots (x_{n-1} - x)}{(x_1 - x_n)(x_2 - x_n)(x_3 - x_n) \cdots (x_{n-1} - x_n)}$$

$$N_i = \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}$$

## — Duas dimensões

$\phi = \phi(x, y)$  onde  $\phi = \begin{cases} u \rightarrow \text{deslocamento na} \\ \text{direção } x \\ v \rightarrow \text{deslocamento na} \\ \text{direção } y \end{cases}$

### Interpolação Lagrangeana



$$N_i \equiv N_{I,J}(x, y) = N_I(x) N_J(y)$$

$$u = \sum_{i=1}^n u_i N_i$$

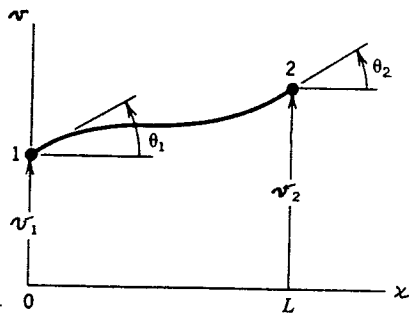
$$v = \sum_{i=1}^n v_i N_i$$

• Funções de forma para continuidade  $C^1$

$C^1 \rightarrow$  continuidade entre os diversos elementos da função fundamental (deslocamento) e de sua primeira derivada.

$\Rightarrow$  Funções de forma para deslocamentos e rotações nodais.

- Uma dimensão



$$v(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$v = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

$$v(x) = [X] \{a\}$$

$x=0$

$$d_1 = v(0) \quad ; \quad d_2 = v'(0) = \theta_1$$

$x=L$

$$d_3 = v(L) \quad ; \quad d_4 = v'(L) = \theta_2$$

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

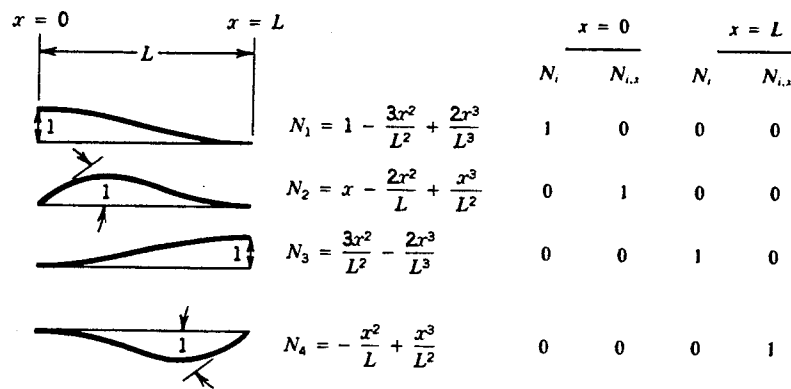
$$\{d\} = [C] \{a\}$$



$$\{a\} = [C]^{-1} \{d\}$$

$$\Rightarrow v(x) = [X] [C]^{-1} \{d\} \quad \text{ou} \quad v(x) = [N] \{d\} \quad [N] = [X] [C]^{-1}$$





### - Duas dimensões

É bem mais complexo. Será visto quando elementos finitos de placa forem abordados.

- Generalização da determinação de  $[K]$  e  $\{r_E\}$ : (2D)

Energia potencial total  $\Pi_P = U + V_E$

$$\Pi_P = \int_V \left( \frac{1}{2} \{E\}^T [E] \{E\} - \{E\}^T [E] \{E_0\} + \{E\}^T \{V_0\} \right) dV$$

$$- \int_V \{u\}^T \{F\} dV - \int_S \{u\}^T \{\phi\} dS - \{D\}^T \{P\}$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} \quad \{E\} = \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad [E] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix}$$

$\{E_0\} \rightarrow$  deformações iniciais

$\{V_0\} \rightarrow$  tensões residuais

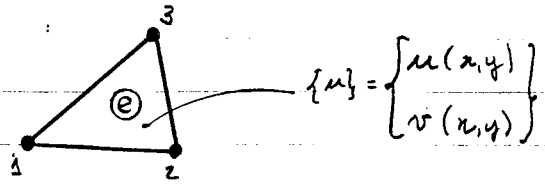
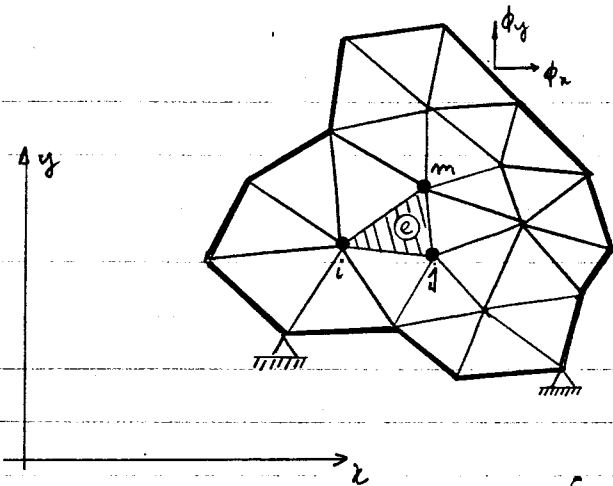
$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \rightarrow$  forças de volume

$\{\phi\} \rightarrow$  forças de superfície

$\{D\} \rightarrow$  deslocamentos nodais

$\{P\} \rightarrow$  forças externas nodais

## Metodologia do método dos elementos finitos



Para cada elemento:

$$\{u\} = [N] \{d\}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\{\epsilon\} = [D] \{u\}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix}$$

$$\{\epsilon\} = [B] \{d\}$$

$$[B] = [D][N] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} \end{bmatrix}$$

$$\Pi_P = \sum_{i=1}^{melem} \Pi_{P_i} - \{D\}^T \{P\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Pi_P = \sum_{i=1}^{melem} & \left( \int_{Ve} \frac{1}{2} \{d\}_i^T [B]_i^T [E] [B]_i \{d\}_i dVe - \int_{Ve} \{d\}_i^T [B]_i^T [E] \{\epsilon_0\}_i dVe + \int_{Ve} \{d\}_i^T [B]_i^T \{v_0\}_i dVe \right. \\ & \left. - \int_{Ve} \{d\}_i^T [N]_i^T \{F\}_i dVe - \int_{Se} \{d\}_i^T [N]_i^T \{\phi\}_i dSe \right) - \{D\}^T \{P\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_P = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_{elem}} \{d\}_i^T \left( \int_{V_e} [B]_i^T [E]_i [B]_i dV_e \{d\}_i \right. \\ & + \sum_{i=1}^{n_{elem}} \{d\}_i^T \left( - \int_{V_e} [B]_i^T [E]_i \{E_0\}_i dV_e + \int_{V_e} [B]_i^T \{V_0\}_i dV_e \right. \\ & \left. \left. - \int_{V_e} [N]_i^T \{F\}_i dV_e - \int_{S_e} [N]_i^T \{\phi\}_i dS_e \right) - \{D\}^T \{P\} \right) \end{aligned}$$

$$\Pi_P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_{elem}} \{d\}_i^T [K]_i \{d\}_i - \sum_{i=1}^{n_{elem}} \{d\}_i^T \{r_E\}_i - \{D\}^T \{P\}$$

$$[K] = \int_{V_e} [B]^T [E] [B] dV_e$$

$$\{r_E\} = \int_{V_e} [B]^T [E] \{E_0\} dV_e - \int_{V_e} [B]^T \{V_0\} dV_e + \int_{V_e} [N]^T \{F\} dV_e + \int_{S_e} [N]^T \{\phi\} dS_e$$

$$\{d\}_i = [A]_i \{D\}$$

$[A]_i$  → matriz de incidência cinemática do elemento  $i$

$$\Pi_P = \frac{1}{2} \{D\}^T [K] \{D\} - \{D\}^T \{R\}$$

$$[K] = \sum_{i=1}^{n_{elem}} [A]_i^T [K]_i [A]_i$$

e

$$\{R\} = \{P\} + \sum_{i=1}^{n_{elem}} [A]_i^T \{r_E\}_i$$

$$\delta \Pi_p = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial D_j} = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{[K] \{D\} = \{R\}}$$

Uma vez introduzidas as condições de contorno e resolvido o sistema de equações, resta calcular as deformações e tensões em cada elemento.

$$\{d\}_i = [A]_i \{D\} \quad \{e\} = [B]_i \{d\}_i$$

$$\{\sigma\} = [E] \{e\} - [E] \{e_0\} + \{\sigma_0\}$$

#### • Comentário

O problema do método dos elementos finitos se resume na discretização do domínio em vários elementos e na determinação das funções de interpolação (ou de forma) em cada elemento de forma que garanta a convergência da solução obtida.

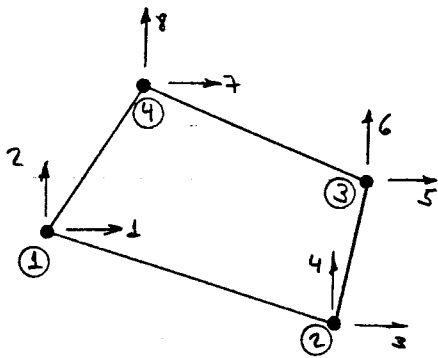
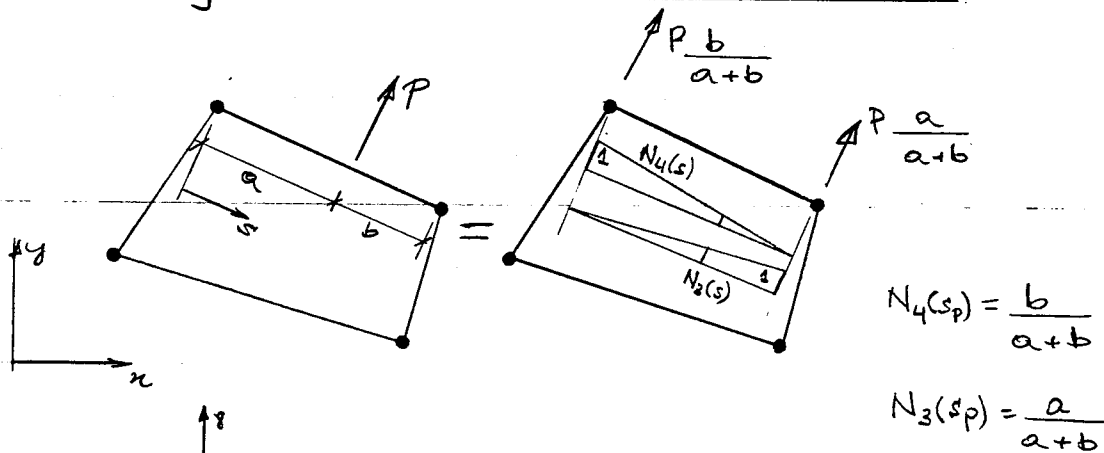
Resumo da determinação de forças equivalentes nodais para cargas de superfície

$$\{r_E\} = \int_{S_e} [N]^T \{ \phi \} dS_e$$

Forças equivalentes nodais são chamadas consistentes porque elas são calculadas utilizando as mesmas funções de forma usadas para calcular a matriz de rigidez do elemento.

Forças equivalentes nodais são estaticamente equivalentes ao carregamento original distribuído. Elas produzem o mesmo trabalho quando é dado um campo de deslocamento compatível com as funções de forma.

- carga concentrada - elemento linear C<sup>0</sup>



$$N_1(s_p) = 0$$

$$N_2(s_p) = 0$$

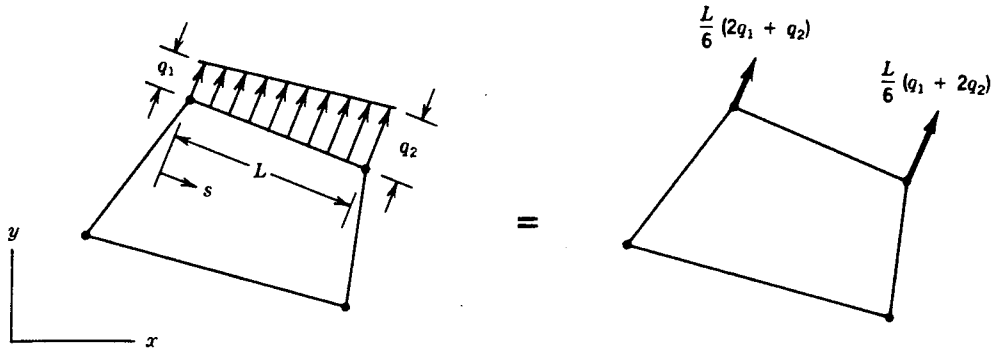
$$r_{E5} = P_x N_3(s_p) = P_x \frac{a}{a+b}$$

$$r_{E6} = P_y N_3(s_p) = P_y \frac{a}{a+b}$$

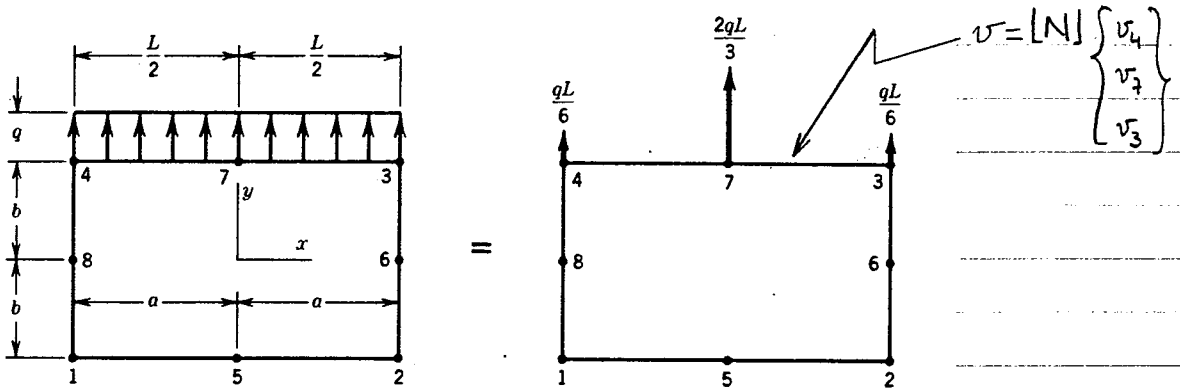
$$r_{E7} = P_x N_4(s_p) = P_x \frac{b}{a+b}$$

$$r_{E8} = P_y N_4(s_p) = P_y \frac{b}{a+b}$$

- carga distribuida - elemento linear  $C^0$

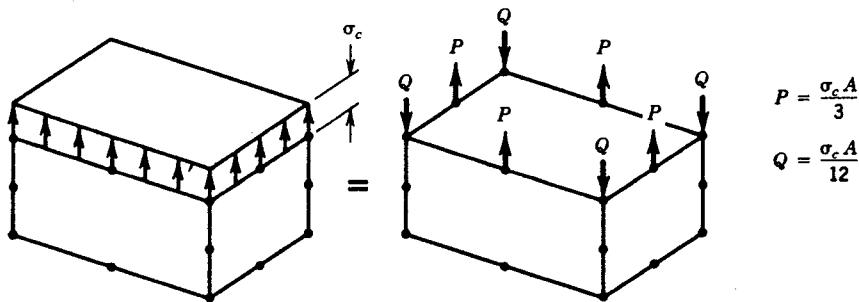


- carga distribuida - elemento cuadrático  $C^0$



$$[N] = \begin{bmatrix} \frac{2x^2}{L^2} - \frac{x}{L} & 1 - \frac{4x^2}{L^2} & \frac{2x^2}{L^2} + \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad \{r_E\} = \int_{-L/2}^{L/2} [N]^T q dx = \begin{Bmatrix} qL/6 \\ 2qL/3 \\ qL/6 \end{Bmatrix}$$

- carga distribuida - elemento sólido cuadrático  $C^0$



***Crêterios que Governam a Sele o de Modelos de Elementos Finitos***

Na modelagem por elementos finitos existem duas questões que devem ser abordadas: “Qual o grau de aproxima o da soluço encontrada?” e “Como a soluço aproximada pode ser sistematicamente melhorada para chegar   soluço exata?”.

A primeira pergunta   difícil de ser respondida pois ela pressupõe o conhecimento da soluço exata. E o que   necessário para se responder a segunda pergunta   uma garantia de que o modelo vai convergir para a soluço exata a medida que o tamanho dos elementos vão diminuindo e, por conseguinte, o número de equa es vai aumentando. Isto  ,   preciso determinar que, com o aumento do número de elementos, as fun es de campo a serem determinadas podem ser aproximadas quão precisamente quanto desejado.

Existem basicamente dois grupos de condi es que um modelo de elementos finitos deve satisfazer para que haja convergência do método: *condi es de continuidade e de completitude*. Há casos em que se deseja ter uma aproxima o assintótica para a soluço exata. Portanto, *condi es para aproxima o assintótica* estão reunidas em um terceiro grupo.

**1. Crêterios de continuidade (ou compatibilidade)**

A formula o variacional (ou a formula o ‘fraca’ – integrada por partes) fornece alguns subsídios para examinar os requerimentos de continuidade de um modelo de elementos finitos. A forma geral do princípio variacional  :

$$\pi_p = \int_V A(u) dV + \int_S B(u) dS$$

$$\delta\pi_p = 0$$

Onde o  $\pi_p$    um funcional (energia potencial total) e A e B são fun es de outras fun es e geralmente envolvem derivadas da fun o de campo fundamental u. Seja a maior order de derivada em A ou B igual a m.

Em geral,   requerido que na soma das contribui es de cada elemento para a energia potencial total não haja perdas, isto  ,

$$\pi_p = \sum_{e=1}^{nelem} \pi_p^e$$

Isto pressupõe que

$$\int_V \sum_e A^e dV = \sum_e \int_{V_e} A^e dV_e$$

isto  , não existe contribui es para a energia potencial total vindas de integra o através das interfaces dos elementos.

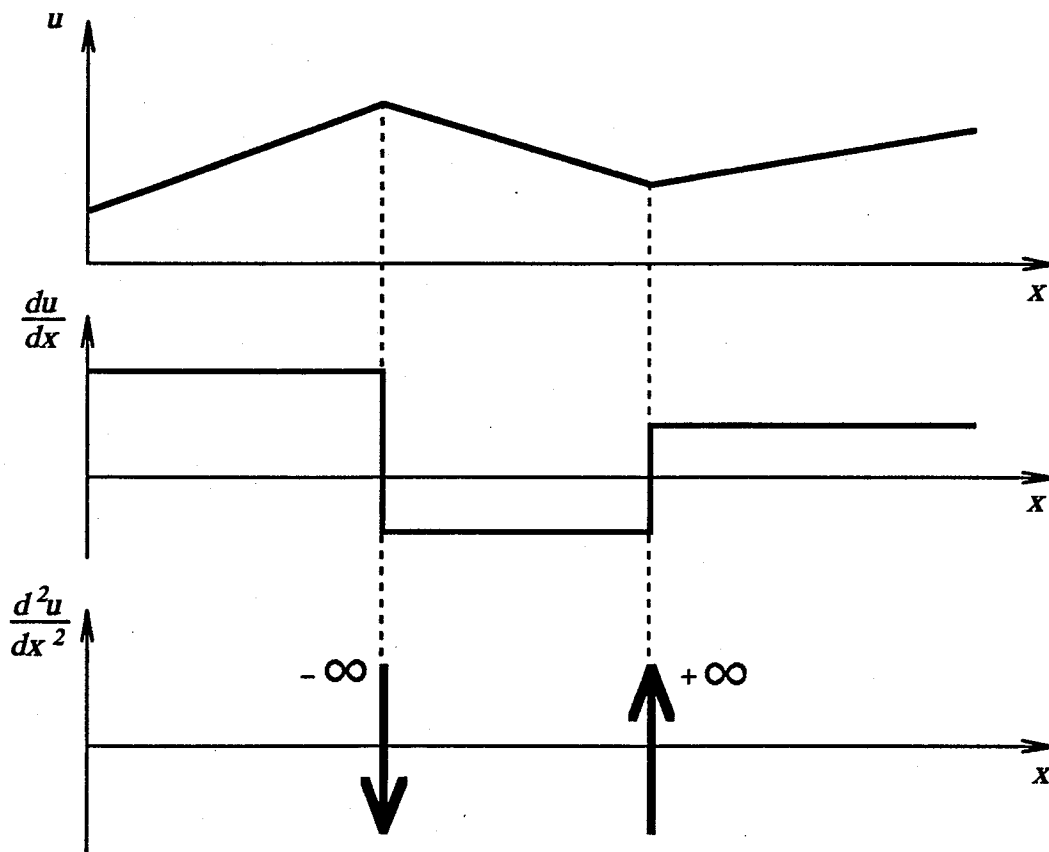
Isto impõe alguns critérios de admissibilidade para a continuidade de uma representação de  $u$  por elementos finitos.

Considere o caso em que  $m = 1$ , isto é, a derivada de mais alto grau em  $A$  (ou  $B$ ) é 1. Então, para integrar

$$\int_V A \, dV$$

não-trivialmente, as derivadas de primeira ordem devem ser não nulas dentro do elemento. Além disso, para integrar nas fronteiras dos elementos, as derivadas contidas em  $A$  devem ser integráveis de forma a obter uma avaliação única para a integral.

Neste caso,  $u$  deve ser pelo menos de primeira ordem (linear), como mostrado na figura abaixo. Se  $u$  fosse de ordem menor que primeira, isto é, constante, a primeira derivada ( $m = 1$ ) não seria integrável através das interfaces entre elementos (função Delta de Dirac).



Seguindo esta linha de raciocínio, pode-se especificar as condições de continuidade:

1a. Continuidade interna:

O modelo de elementos finitos  $u$  deve ser diferenciável até a ordem mais alta  $m$  que aparece no funcional variacional (para que haja uma integração não-trivial).

1b. Continuidade entre elementos:

O modelo de elementos finitos  $u$  deve ser contínuo entre os elementos até uma ordem a menos que a mais alta ordem  $m$  que aparece no funcional variacional, isto é, ele deve ser de continuidade de  $C^{m-1}$ .



<u>Ordem da Eq. Diferencial</u>	<u>Mais alta ordem no funcional (<math>m</math>)</u>	<u>Exemplos</u>	<u>Continuidade entre elementos</u>
2ª	1	Treliça, Chapa, Temperatura	C <sup>0</sup>
4ª	2	Quadro, Placa, Casca	C <sup>1</sup>

Estas são condições de continuidade suficientes para a convergência do modelo de elementos finitos. Na verdade, a satisfação destas condições de continuidade vão assegurar uma aproximação assintótica da formulação variacional. Isto é, satisfazendo estas condições, a solução aproximada do método dos elementos finitos (assim como do método de Rayleigh-Ritz) fornece sempre um limite superior para a energia potencial total. Além disso, há uma tendência da solução fornecer um limite superior para a rigidez do sistema e um limite inferior para a flexibilidade. Isto porque a solução aproximada da formulação em deslocamentos corresponde a restrições impostas à resposta exata.

Incompatibilidade de deslocamentos entre elementos adjacentes pode causar picos infinitos de deformação nas interfaces dos elementos, fato este que é ignorado na formulação apresentada porque a energia total só leva em consideração a contribuições vindas do interior dos elementos. Entretanto, para haver convergência do método no sentido mais geral, a compatibilidade de deslocamento entre elementos só precisa ser satisfeita *no limite quando estes elementos aproximam um tamanho infinitesimal*. Isto é, se a medida que o tamanho dos elementos diminui e, no limite, a compatibilidade entre elementos é restabelecida, então a formulação já obtida ainda vai tender à resposta exata. Isto é sempre alcançado se não há contribuição para a energia potencial total da integração através das fronteiras dos elementos.

Neste contexto, as deformações são generalizadas, isto é, no caso de continuidade C<sup>0</sup> a deformação tem a interpretação da teoria da elasticidade para meios contínuos e no caso de continuidade C<sup>1</sup> as deformações também incluem curvaturas de barras, placas e chapas.

## 2. Condições de completitude

As aproximações discutidas neste contexto são para uma forma integral (energia potencial total). Neste caso, é necessário que cada termo dentro da integral seja, no limite, capaz de ser aproximado tão perto quanto possível. Se a maior ordem de derivada que aparece na integral é igual a  $m$ , então é óbvio que a função de interpolação local deve ser pelo menos de grau  $m$  para que, no limite, um valor constante em um ponto infinitesimal seja obtido. Na verdade, este é o primeiro requerimento de continuidade (1a) para uma integração não-trivial. Este requisito é também equivalente a uma condição de deformações constantes mostrada a seguir.

Completitude também demanda que todos os termos de ordem mais baixa estejam contidos no polinômio de aproximação. Isto está ligado à requisição que movimentos de corpo rígido (sem deformações) sejam possíveis dentro da formulação aproximada do método, como também é mostrado a seguir.

Estes dois critérios são automaticamente satisfeitos se os polinômios usados nas funções de aproximação dos elementos forem *completos* até o grau  $m$ . Portanto, assim são especificadas as condições de completitude:

### 2a. Modos de corpo rígido:

As funções de aproximação para os deslocamentos dentro de um elemento devem ser tais que não permitam que ocorra deformação do elemento quando os deslocamentos nodais estão associados a um deslocamento de corpo rígido.

Dito de outra forma, se todos os nós de um elemento forem submetidos aos mesmos valores da variável fundamental (deslocamento), então os gradientes (derivadas ou deformações) da variável fundamental devem ser nulas.

Um deslocamento de corpo rígido é o estado de deformação mais elementar que um elemento pode sofrer. Basicamente, esta condição impõe a existência de combinações de valores das coordenadas generalizadas que permitam todos os pontos do elemento sofrerem o mesmo deslocamento.

2b. Estados de deformação (generalizada) constante:

As funções de aproximação para deslocamentos têm que ter uma forma tal que se os deslocamentos nodais são compatíveis com um estado de deformação (generalizada) constante então este estado de deformação vai realmente ser obtido pela formulação. O modelo de aproximação em elementos finitos deve ser capaz de representar valores constantes para as derivadas da variável fundamental até a ordem  $m$ .

Esta condição impõe a existência de combinações de valores das coordenadas generalizadas que permitam todos os pontos do elemento sofrerem a mesma deformação. Deve existir uma dessas combinações para cada estado de deformação generalizada possível.

2c. Completude para melhor velocidade de convergência:

O modelo de elementos finitos deve ser completo em todos os estados de comportamento de ordem menor que a maior ordem representada. A omissão de termos intermediários vai interferir na velocidade de convergência, diminuindo a vantagem de modelos com polinômio de altos graus. A velocidade de convergência depende do polinômio *completo de mais alta ordem* dentro do modelo.

2d. Completude para isotropia geométrica:

O modelo de elementos finitos deve ser invariante com respeito da orientação dos elementos dentro do espaço (sistema global de coordenadas). Os termos do triângulo de Pascal do polinômio de aproximação devem estar balanceados.

<u>Triângulo de Pascal</u>						<u>Grau do polinômio, <math>p</math></u>	<u>Número de termos, <math>n</math></u>
			1			0 (constante)	1
		x		y		1 (linear)	3
	x <sup>2</sup>		xy		y <sup>2</sup>	2 (quadrático)	6
x <sup>3</sup>		x <sup>2</sup> y		xy <sup>2</sup>		3 (cúbico)	10
x <sup>4</sup>	x <sup>3</sup> y		x <sup>2</sup> y <sup>2</sup>		xy <sup>3</sup>	4 (quártico)	15
					y <sup>4</sup>		

A necessidade dos dois primeiros requisitos pode ser entendida fisicamente se for imaginado uma subdivisão do corpo em elementos cada vez mais menores. A medida que estes elementos aproximam um tamanho infinitesimal, os deslocamentos e deformações em cada elemento tendem para valores constantes.

Quanto ao terceiro requisito, se a ordem do maior polinômio completo usado na aproximação por elementos finitos é  $p \geq m$ , a *ordem de convergência* pode ser obtida ao ser observar quão próximo este polinômio pode aproximar uma expansão local em séries de Taylor da função fundamental  $u$ . A ordem do erro de aproximação vai ser  $O(h^{p+1})$ , onde  $h$  é tamanho do elemento, porque somente os termos de ordem  $p$  podem ser representados corretamente.

A imposição da condição de isotropia geométrica pode ser entendida intuitivamente. O modelo deve ser independente da orientação do sistema de coordenadas local do elemento. A inclusão de qualquer termo do polinômio de interpolação de um lado do eixo de simetria do triângulo de Pascal deve vir acompanhada da inclusão do termo correspondente do outro lado.

### 3. Condições para aproximação assintótica

São três as condições necessárias para uma convergência assintótica de um modelo de elementos finitos. A primeira condição corresponde às condições de continuidade estabelecidas anteriormente e as outras correspondem às duas primeiras condições de completitude:

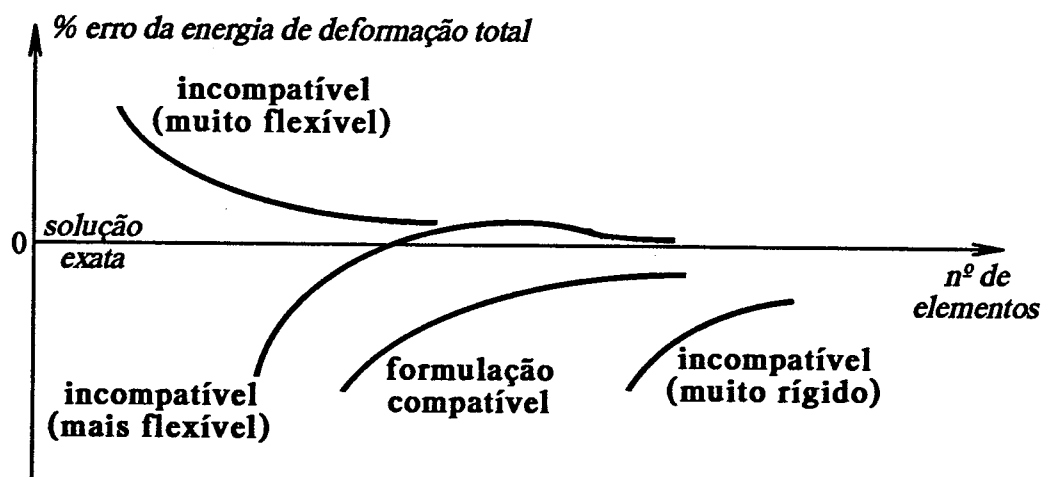
- 3a. Os modelos para deslocamentos devem ser contínuos dentro dos elementos, e os deslocamentos devem ser compatíveis entre elementos adjacentes. Em outras palavras, a compatibilidade de deslocamentos deve ser satisfeita em todos os pontos do domínio, exigindo a utilização de elementos *compatíveis* ou *conformes*.
- 3b. Os modelos para deslocamentos devem incluir os deslocamentos de corpo rígido do elemento.
- 3c. Os modelos para deslocamentos devem incluir todos os estados de deformação constante do elemento.

Sempre que as condições acima forem satisfeitas a formulação do método dos elementos finitos é válida. Na verdade, a primeira condição é uma imposição do método de Rayleigh-Ritz que exige funções de aproximação admissíveis (que satisfaçam compatibilidade) para que haja convergência (assintótica) do método.

Entretanto, existem casos em que, mesmo não satisfazendo as condições de compatibilidade entre elementos adjacentes, o método dos elementos finitos converge para a solução exata. Conforme dito anteriormente, a convergência pode ser alcançada quando não há contribuição para a energia potencial total da integração através das fronteiras dos elementos. O item 5. que se segue descreve um teste de convergência de modelos de elementos finitos.

Elementos finitos não-conformes podem fornecer bons resultados. No entanto, a desvantagem principal de elementos não compatíveis é que não se tem mais garantias quanto a uma convergência assintótica. Isto é, não se pode saber a priori que o modelo fornece um limite superior para a rigidez real do sistema. Por outro lado, formulações não-conformes são em geral menos rígidas que as formulações compatíveis, podendo uma formulação não-conforme em certos casos convergir mais rapidamente que uma conforme.

A figura abaixo considera o erro na avaliação da energia de deformação total de uma estrutura em função do número de elementos finitos utilizados para representá-la. Considera-se um sistema onde os deslocamentos prescritos são nulos e existem forças prescritas no contorno, de tal forma que a energia de deformação fica subestimada por uma formulação compatível. Pode-se notar que formulações incompatíveis não necessariamente aproximam assintoticamente a solução exata.



#### 4. Seleção do grau do polinômio baseado no número de graus de liberdade

Além de satisfazer as condições de continuidade e completitude, a consideração final na seleção de polinômios para deslocamentos é que *o número total de coordenadas generalizadas de um elemento deve ser igual ou maior que o número de graus de liberdade do elemento*.

O procedimento usual utiliza o mesmo número de coordenadas generalizadas e graus de liberdade. É possível utilizar coordenadas generalizadas em excesso para melhorar a matriz de rigidez do elemento, isto é, para fazê-lo menos rígido (ou mais flexível). Estas coordenadas generalizadas a mais estão em geral associadas com nós internos ao elemento e melhoram a aproximação do equilíbrio dentro do elemento. Entretanto, elas não melhoram o equilíbrio entre elementos.

Desta forma, nós externos estão associados a graus de liberdade nodais e nós internos estão associados a graus de liberdade internos. Esta distinção não é feita na formulação individual dos elementos. Somente no processo de montagem do modelo global que a diferença torna-se importante. Por exemplo, logo antes da montagem, os termos de rigidez associados a graus de liberdade internos podem ser escritos em função dos graus de liberdade nodais (externos), usando um processo de condensação estática.

O número mínimo de graus de liberdade (ou coordenadas generalizadas) necessário para um dado elemento é determinado pelos requisitos de completitude para convergência, pelos requisitos de isotropia geométrica e a necessidade de uma representação adequada dos termos no funcional da energia potencial total.

Graus de liberdade adicionais, além do mínimo, podem ser incluídos adicionando-se nós externos ou internos, ou especificando-se também como graus de liberdade derivadas de maior ordem dos deslocamentos para os nós já contidos na formulação.

#### 5. Teste de convergência de modelos de elementos finitos

O objetivo de um teste de convergência para modelos de elementos finitos é demonstrar que todos os termos contidos nas funções de aproximação até a ordem  $m$  (onde  $m$  é a derivada de mais alto grau que aparece no funcional) fornecem uma solução conforme (compatível), pelo menos a medida que a malha é refinada.

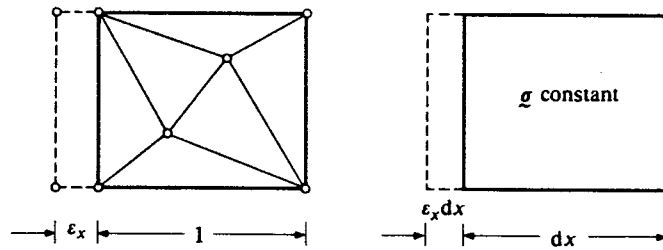
- A convergência de um modelo de elemento finitos pode, então, ser verificada da seguinte forma:
- Quando um estado de deformação constante implica automaticamente em continuidade de deslocamentos.
  - Quando os critérios 2a e 2b de completitude são satisfeitos, pelo menos no limite quando a malha é refinada infinitamente.

Para testar a convergência de um modelo de elementos finitos para qualquer configuração de malha é necessário que se imponha, em um arranjo arbitrário de elementos (compatíveis ou não), deslocamentos nodais correspondentes a um estado de deformação (generalizada) constante. Se isto resulta em equilíbrio para todos os nós da malha, sem que se aplique nenhum carregamento externo, então claramente nenhuma energia foi perdida através das interfaces entre elementos, mesmo quando a compatibilidade não é satisfeita ali. Este teste é chamado de "*Patch Test*" e fornece uma condição suficiente para convergência.

Este teste teria que ser satisfeito somente quando o tamanho dos elementos na configuração arbitrária se tornassem infinitamente pequenos. Neste caso, o modelo de elementos finitos pode representar o comportamento real do material e, no limite quando o tamanho dos elementos tende a zero, reproduziria exatamente o comportamento real da estrutura. O teste quando aplicado no limite é chamado de 'fraco' ("*Weak Patch Test*").

A maioria dos elementos finitos usuais, baseados em polinômios, satisfazem este teste para malhas com refinamento finito, com exceção de alguns elementos de placa ou casca que somente satisfazem o teste na sua forma fraca. Por este motivo, o teste tornou-se padrão para elementos de qualquer tamanho.

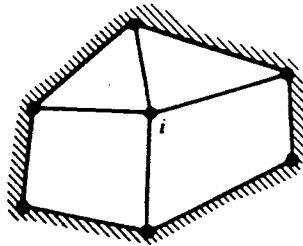
A figura abaixo mostra a interpretação física do “Patch Test” para um estado de deformação constante associado a um campo de deslocamentos lineares na direção  $x$ .



Este teste pode ser apresentado em três formas (Zienkiewicz, 89):

**Teste A:**

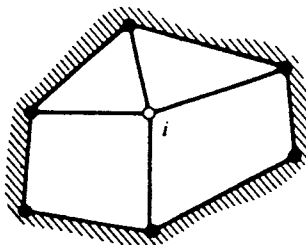
Impõe-se deslocamentos consistentes com um estado de deformação constante para todos os nós da malha e verifica-se o equilíbrio de nós internos, como mostrado abaixo:



Verifica-se  $[K_{ij}]\{D_j\} = \{R_i\}$  para o nó  $i$

**Teste B:**

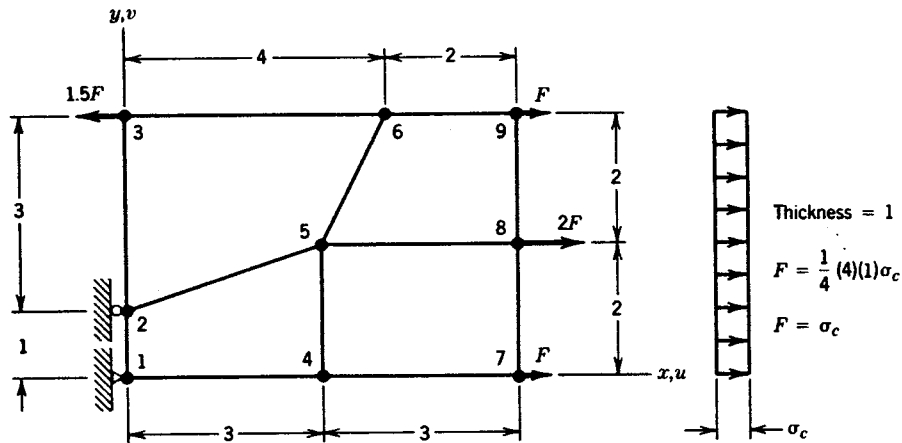
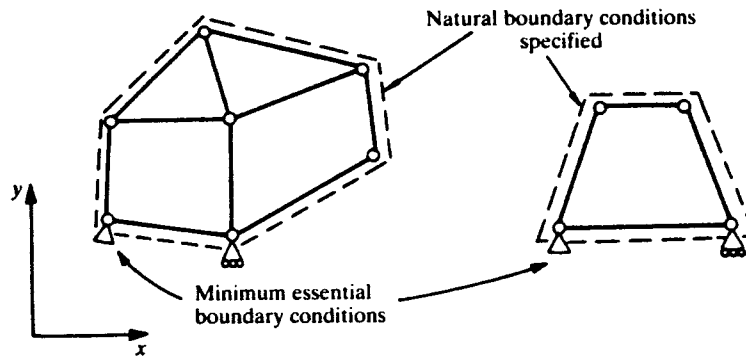
Impõe-se deslocamentos consistentes com um estado de deformação constante para os nós do contorno da malha e verifica-se os deslocamentos dos nós internos, como mostrado abaixo:



Verifica-se os deslocamentos  $\{D_j\}$  do nó  $i$

**Teste C:**

As condições de suporte do modelo são as mínimas essenciais para impedir movimentos de corpo rígido. Impõe-se cargas equivalentes nodais que são consistentes com forças de superfície que provocariam um estado de tensão constante, como mostrado a seguir. Verifica-se se as tensões calculadas nos elementos correspondem ao estado de tensão imposto.



O teste C é necessário e suficiente para garantir a convergência pois testa a aproximação quando condições de contorno naturais (forças de superfície) são especificadas e testa a estabilidade numérica do modelo de elementos finitos. Qualquer singularidade da matriz de rigidez global vai ser observada, visto que as condições de contorno são as mínimas essenciais.

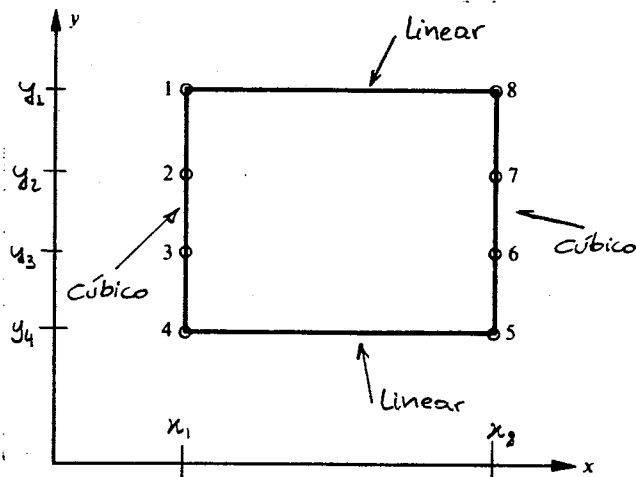
## Referências

- Cook, R.D., Malkus, D.S., e Plesha, M.E., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, Terceira Edição, John Wiley & Sons, 1989.
- Zienkiewicz, O.C. e Taylor, R.L., *The Finite Element Method - Volume 1 Basic Formulation and Linear Problems*, Quarta Edição, McGraw-Hill, 1989.
- Desai, C.S., e Abel, J.F., *Introduction to the Finite Element Method*, Van Nostrand-Reinhold, 1972.
- Notas de aula do Prof. J. F. Abel do curso *Finite Element Method*, School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University, Ithaca, NY, 1985.

## Elementos Finitos Planos de Continuidade $C^0$

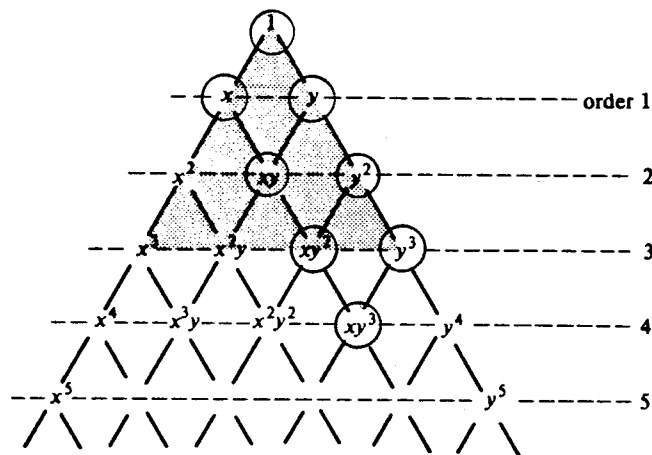
### • Elementos retangulares

#### - Motivação



8 nós  $\Rightarrow$  8 termos no polinômio (no mínimo)

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 y^2 + a_6 xy^2 + a_7 y^3 + a_8 ky^3$$



Triângulo de Pascal mostrando os termos de um polinômio completo do 3º grau e os termos considerados na interpolação do elemento acima. Vê-se que o único polinômio completo é o linear  $u = a_1 + a_2 x + a_3 y$ .

Se for adotado:  $N_{I1}(x) = \frac{(x_2 - x)}{(x_2 - x_1)}$      $N_{I8}(x) = \frac{(x_1 - x)}{(x_1 - x_2)}$

$$N_{J1}(y) = \frac{(y_2 - y)(y_3 - y)(y_4 - y)}{(y_2 - y_1)(y_3 - y_1)(y_4 - y_1)}$$

$$N_{J2}(y) = \frac{(y_1 - y)(y_3 - y)(y_4 - y)}{(y_1 - y_2)(y_3 - y_2)(y_4 - y_2)}$$

$$N_{J3}(y) = \frac{(y_1 - y)(y_2 - y)(y_4 - y)}{(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)(y_4 - y_3)}$$

$$N_{J4}(y) = \frac{(y_1 - y)(y_2 - y)(y_3 - y)}{(y_1 - y_4)(y_2 - y_4)(y_3 - y_4)}$$

$$N_1(x, y) = N_{I1}(x) \cdot N_{J1}(y)$$

$$N_2(x, y) = N_{I1}(x) \cdot N_{J2}(y)$$

$$N_3(x, y) = N_{I1}(x) \cdot N_{J3}(y)$$

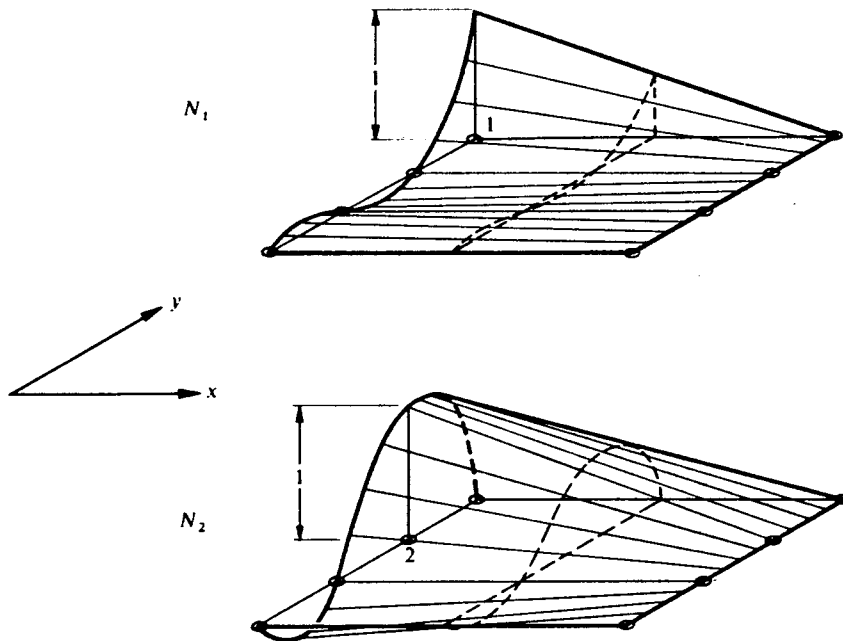
$$N_4(x, y) = N_{I1}(x) \cdot N_{J4}(y)$$

$$N_8(x, y) = N_{I8}(x) \cdot N_{J1}(y)$$

$$N_7(x, y) = N_{I8}(x) \cdot N_{J2}(y)$$

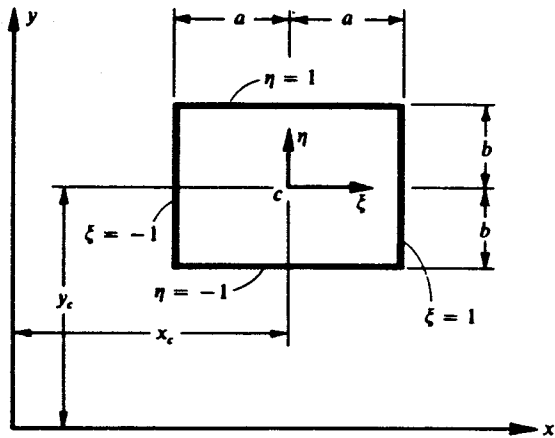
$$N_6(x, y) = N_{I8}(x) \cdot N_{J3}(y)$$

$$N_5(x, y) = N_{I8}(x) \cdot N_{J4}(y)$$





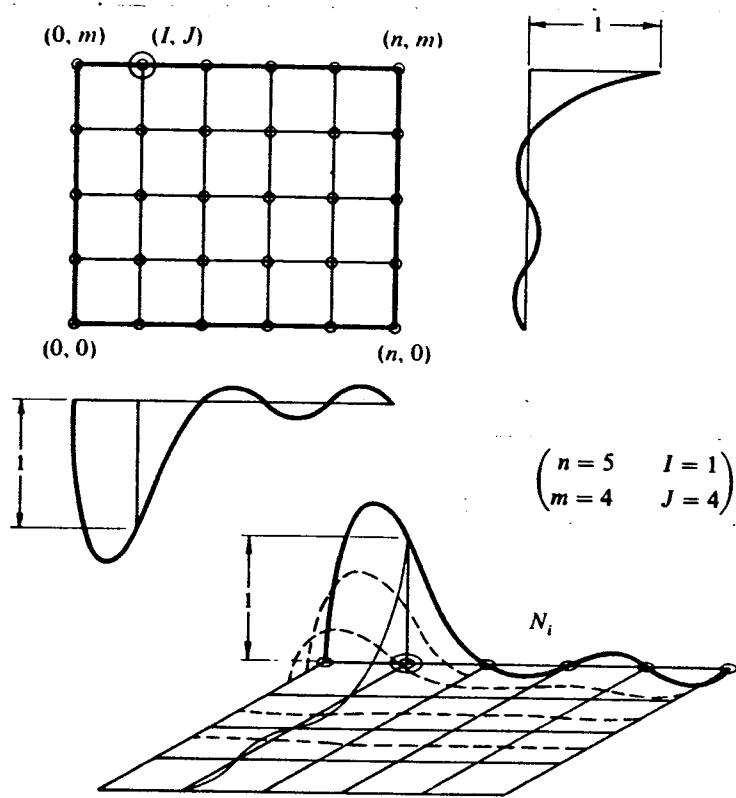
— Normalizações de coordenadas



$$\xi = \frac{x - x_c}{a} \quad d\xi = \frac{dx}{a}$$

$$\eta = \frac{y - y_c}{b} \quad d\eta = \frac{dy}{b}$$

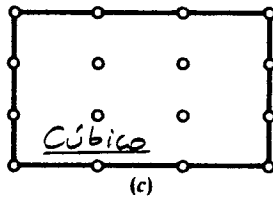
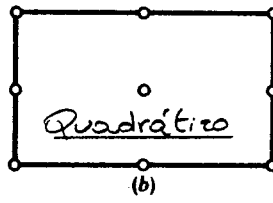
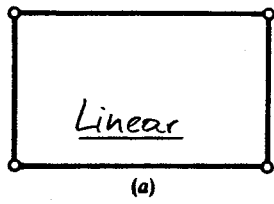
— Família Lagrangeana



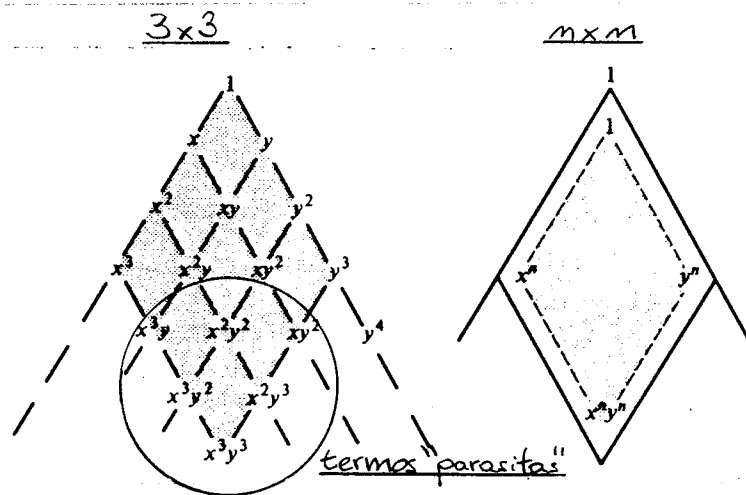
$$\begin{pmatrix} n = 5 & I = 1 \\ m = 4 & J = 4 \end{pmatrix}$$

$$l_k^m(\xi) = \frac{(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1) \cdots (\xi - \xi_{k-1})(\xi - \xi_{k+1}) \cdots (\xi - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_0)(\xi_k - \xi_1) \cdots (\xi_k - \xi_{k-1})(\xi_k - \xi_{k+1}) \cdots (\xi_k - \xi_n)}$$

$$N_i \equiv N_{IJ} = l_i^m(\xi) l_j^n(\eta)$$



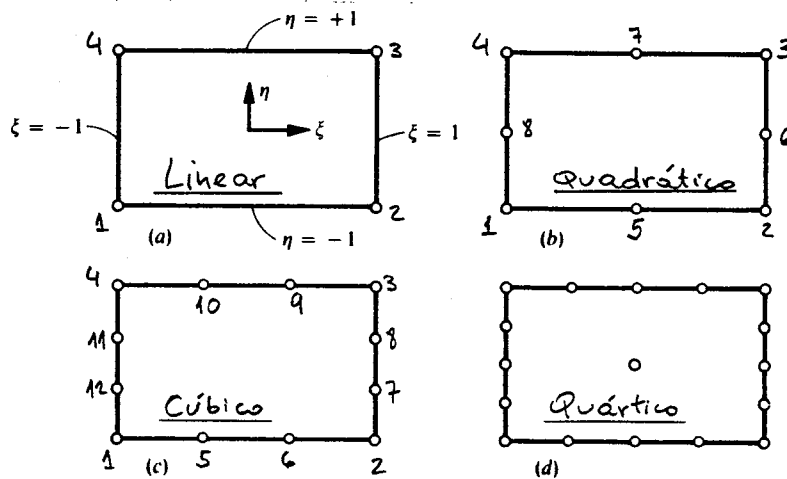
Termos do triângulo de Pascal resultantes de uma expansão Lagrangeana.



Vê-se que há um excessivo número de termos além do polinômio completo de mais alto grau pertencente à formulação.

Lembre-se que a velocidade de convergência depende do polinômio completo de mais alto grau.

## - Família "Serendipity"



### Idéia:

Para evitar os termos "parasitas" do triângulo de Pascal, ainda garantindo continuidade com polinômios de qualquer grau no contorno do elemento, procura-se posicionar os nós o máximo possível somente no contorno do elemento.

### Elemento Linear

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \right\}$$

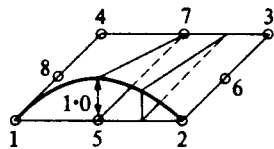
$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i)$$

$N_i$	$\xi_i$	$\eta_i$
1	-1	-1
2	1	-1
3	1	1
4	-1	1

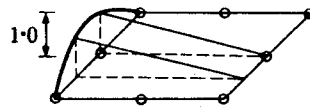
Este elemento também pertence à família Lagrangeana.

As funções de forma dos outros elementos da família Serendipity são construídas de uma maneira sistemática, que foi descoberta por acaso (daí a denominação Serendipity).

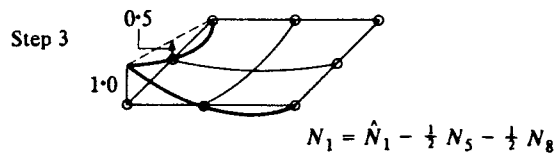
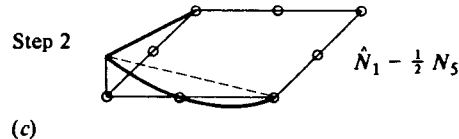
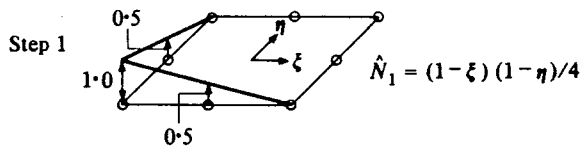
### Quadrático



$$(a) N_5 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta)$$



$$(b) N_8 = \frac{1}{2} (1 - \xi) (1 - \eta^2)$$



Nós dos cantos:  
( $i = 1, 2, 3, 4$ )

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (\xi \xi_i + \eta \eta_i - 1)$$

Nós dos meios dos lados:  
( $i = 5, 6, 7, 8$ )

$$\xi_i = 0$$

$$N_i = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta \eta_i)$$

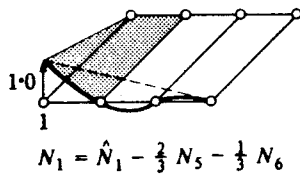
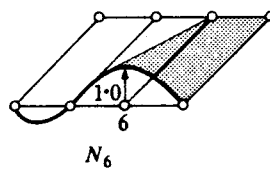
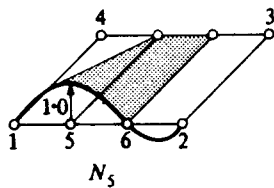
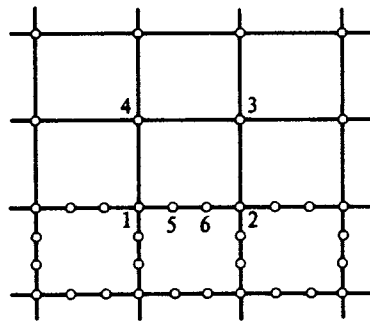
$$\eta_i = 0$$

$$N_i = \frac{1}{2} (1 + \xi \xi_i) (1 - \eta^2)$$

SHAPE FUNCTIONS FOR THE PLANE QUADRATIC ISOPARAMETRIC ELEMENT, WRITTEN IN A FORM THAT PERMITS A VARIABLE NUMBER OF NODES

$N_i$	4 Linear Edges	3, 2, 1, or 0 Linear Edges, Others Quadratic			
	Include Nodes 1 to 4	Add Node 5	Add Node 6	Add Node 7	Add Node 8
$N_1$	$(1 - \xi)(1 - \eta)/4$	$-N_5/2$			$-N_8/2$
$N_2$	$(1 + \xi)(1 - \eta)/4$	$-N_5/2$	$-N_6/2$		
$N_3$	$(1 + \xi)(1 + \eta)/4$		$-N_6/2$	$-N_7/2$	
$N_4$	$(1 - \xi)(1 + \eta)/4$			$-N_7/2$	$-N_8/2$
$N_5$		$(1 - \xi^2)(1 - \eta)/2$			
$N_6$			$(1 + \xi)(1 - \eta^2)/2$		
$N_7$				$(1 - \xi^2)(1 + \eta)/2$	
$N_8$					$(1 - \xi)(1 - \eta^2)/2$

Cúbico



Nós dos cantos:  
( $i=1, 2, 3, 4$ )

$$N_i = \frac{1}{32} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (-10 + 9\xi^2 + 9\eta^2)$$

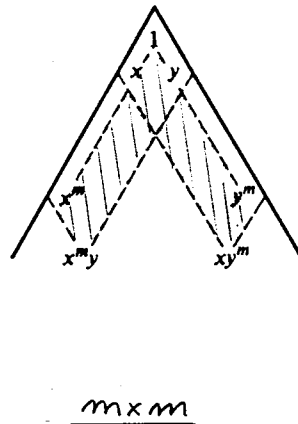
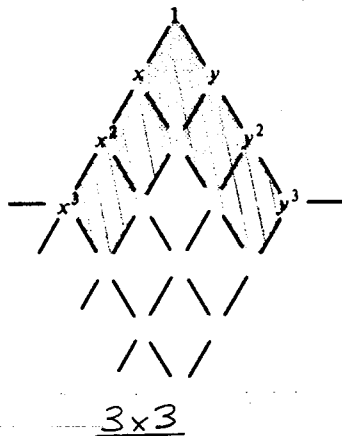
Nós do meio dos lados  $\xi = \pm 1$  ( $\eta_i = \pm \frac{1}{3}$ )  
( $i=7, 8, 11, 12$ )

$$N_i = \frac{9}{32} (1 + \xi \xi_i) (1 + 9\eta \eta_i) (1 - \eta^2)$$

Nós do meio dos lados  $\eta = \pm 1$  ( $\xi_i = \pm \frac{1}{3}$ )  
( $i=5, 6, 9, 10$ )

$$N_i = \frac{9}{32} (1 + 9\xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 - \xi^2)$$

Termos do triângulo de Pascal decorrentes das funções de forma de bordo dos elementos do tipo "serendipity".



$n = n^\circ$  de termos gerados

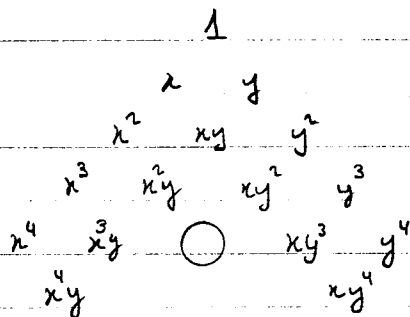
$$n = (m+1) \times 4 - 4$$

$$m=1 \Rightarrow n=4$$

$$m=2 \Rightarrow n=8$$

$$m=3 \Rightarrow n=12$$

Quártico ( $m=4$ )

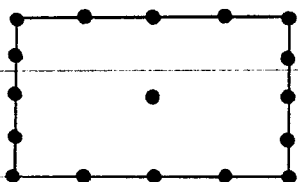


$$m=4 \Rightarrow n=16$$



são necessários 16 nós  
no contorno do elemento.

Com mais um nó interior, tem-se  
um total de 17 nós.

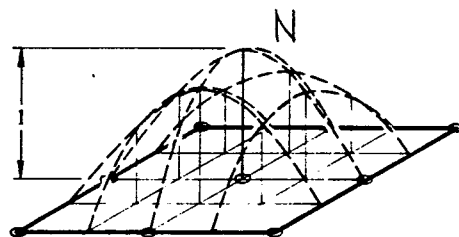


Para que se tenha um polinômio completo do quarto grau, é necessário que o termo  $x^2y^2$  seja também considerado.

Isto é conseguido adicionando-se um nó interior cuja função de forma é:

$$N = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$$

que é nula em todos os bordos do elemento.



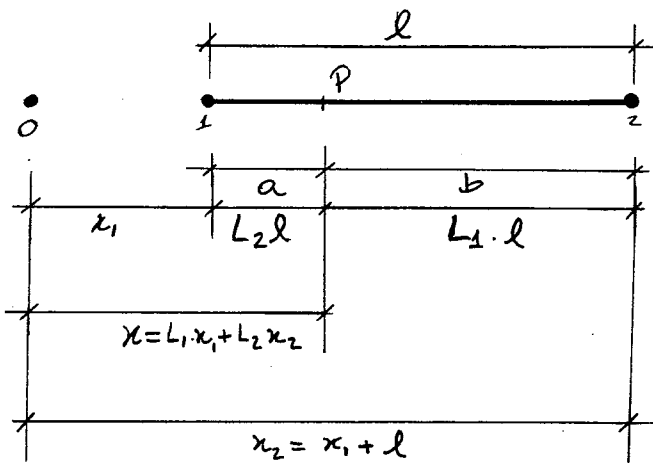
• Elementos triangulares

- Coordenadas naturais para triângulos

Vantagem:

- independem do sistema de coordenadas
- tratamento natural para triângulos e tetraedros (simetria triangular)

- Cas unidimensional ( $L_1, L_2$ )



$$a + b = l$$

$$L_1 = \frac{b}{l}$$

$$L_2 = \frac{a}{l}$$

$$L_1 + L_2 = 1$$

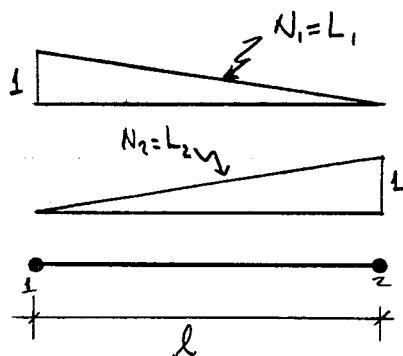
$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{bmatrix} x_2 & -1 \\ -x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix}$$

Interpolação linear:

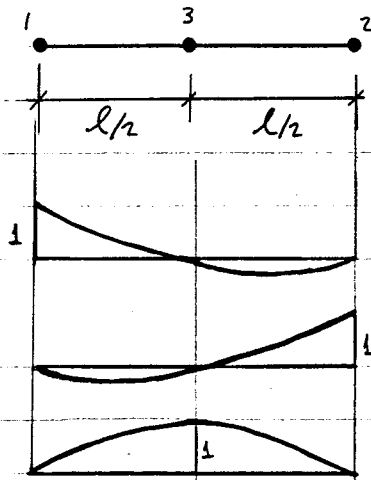
$$N_1 = L_1$$

$$N_2 = L_2$$

$$\phi = [N_1 \ N_2] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}$$



## Interpolação quadrática:



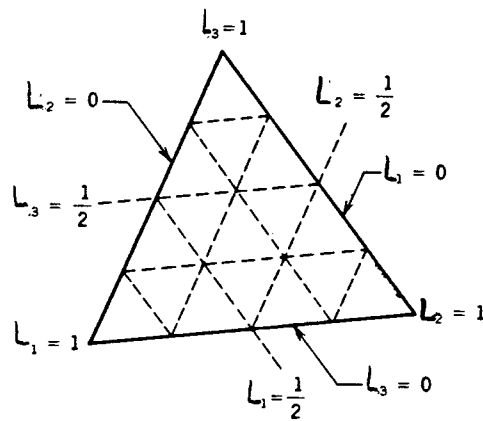
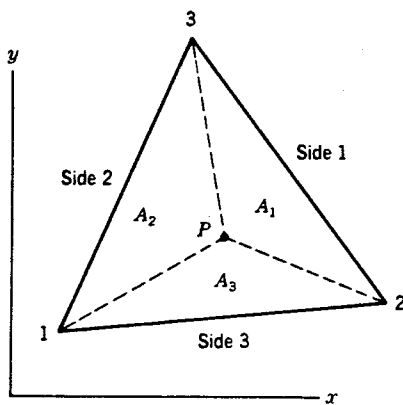
$$N_1 = L_1(2L_1 - 1) \quad \text{ou} \quad N_1 = L_1 - N_3/2$$

$$N_2 = L_2(2L_2 - 1) \quad \text{ou} \quad N_2 = L_2 - N_3/2$$

$$N_3 = 4L_1L_2$$

$$\phi = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}$$

- Caso bidimensional: Coordenadas de área ( $L_1, L_2, L_3$ )  
(coordenadas baricêntricas)



$$L_1 = \frac{A_1}{A}$$

$$L_2 = \frac{A_2}{A}$$

$$L_3 = \frac{A_3}{A}$$

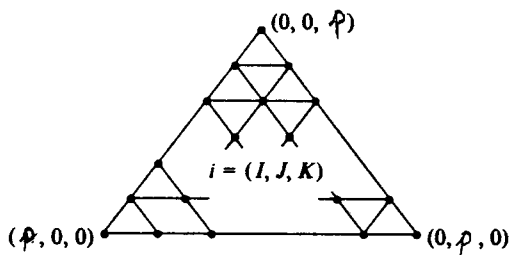
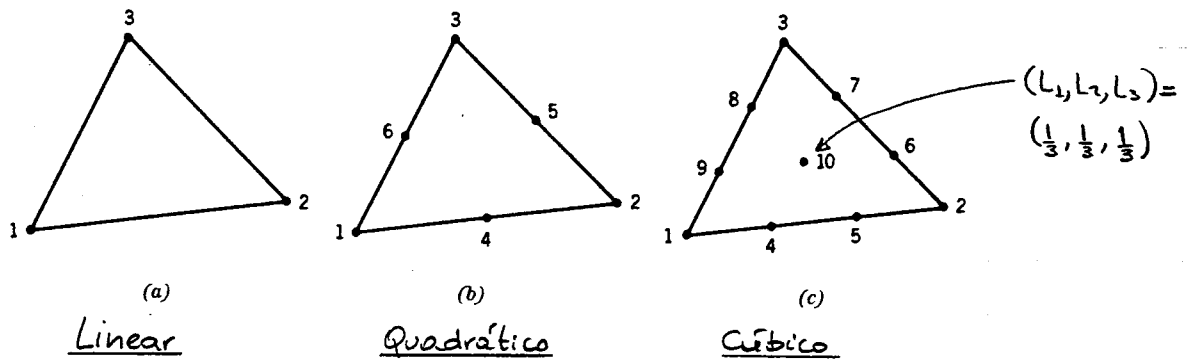
$$A_1 + A_2 + A_3 = A$$

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1$$



$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (x_2 y_3 - x_3 y_2) & (y_2 - y_3) & (x_3 - x_2) \\ (x_3 y_1 - x_1 y_3) & (y_3 - y_1) & (x_1 - x_3) \\ (x_1 y_2 - x_2 y_1) & (y_1 - y_2) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix}$$

Os elementos triangulares pertencem à família Lagrangeana:



$$N_i = I_i(L_1) J_i(L_2) K_i(L_3)$$

interpolação lagrangeana em  $L_1, L_2, L_3$

$$I + J + K = p$$

$p \rightarrow$  grau do polinômio de interpolação

Interpolação linear ( $p=1$ ):

$$N_1 = L_1$$

$$N_2 = L_2$$

$$N_3 = L_3$$

$$\Phi = [N_1 \ N_2 \ N_3] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}$$

### Interpolação quadrática:

$$N_1 = L_1(2L_1 - 1)$$

$$N_4 = 4L_1L_2$$

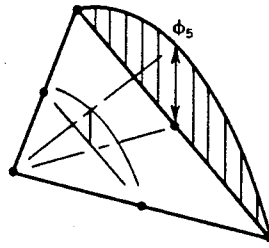
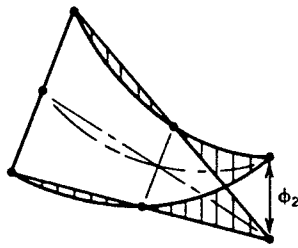
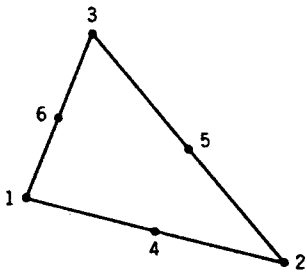
$$N_2 = L_2(2L_2 - 1)$$

$$N_5 = 4L_2L_3$$

$$N_3 = L_3(2L_3 - 1)$$

$$N_6 = 4L_3L_1$$

$$\phi = \sum_{i=1}^6 N_i \phi_i$$



### Interpolação cúbica:

$$N_1 = \frac{1}{2} L_1(3L_1 - 1)(3L_1 - 2)$$

$$N_2 = \frac{1}{2} L_2(3L_2 - 1)(3L_2 - 2)$$

$$N_3 = \frac{1}{2} L_3(3L_3 - 1)(3L_3 - 2)$$

$$N_4 = \frac{9}{2} L_2 L_1(3L_1 - 1)$$

$$N_5 = \frac{9}{2} L_1 L_2(3L_2 - 1)$$

$$N_6 = \frac{9}{2} L_3 L_2(3L_2 - 1)$$

$$N_7 = \frac{9}{2} L_2 L_3(3L_3 - 1)$$

$$N_8 = \frac{9}{2} L_1 L_3(3L_3 - 1)$$

$$N_9 = \frac{9}{2} L_3 L_1(3L_1 - 1)$$

$$N_{10} = 27 L_1 L_2 L_3$$

## Formulação Isoparamétrica

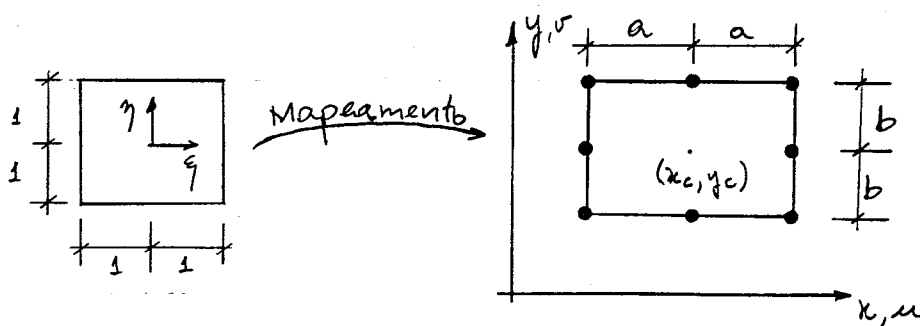
- Objetivo principal

Criar elementos quadriláteros não retangulares e elementos com arestas curvas.

- Motivação

Até agora a geometria (coordenadas dos pontos) de um elemento quadrilátero era definida diretamente em relação aos eixos cartesianos. Desta forma, somente elementos retangulares, paralelos os eixos, foram considerados. No caso de um elemento triangular, a formulação permitia uma orientação qualquer do elemento, mas sempre mantendo os lados retos.

Também foi considerada uma mudança de coordenadas para interpolar deslocamentos no interior do elemento em função de deslocamentos nodais.



As funções de forma, escritas em termos de coordenadas normalizadas ou paramétricas  $(\xi, \eta)$ , interpolam os deslocamentos:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N(\xi, \eta)] \{d\}$$

Dentro da formulação do método dos elementos finitos, a expressão para a matriz de rigidez do elemento

$$[R] = \int_V [B]^T [E] [B] dV$$

envolve derivadas das funções de interpolação em relação às coordenadas cartesianas  $(x, y)$  (isto aparece em  $[B]$ ).

Para efetuar esta integração é necessário considerar a mudança de coordenadas de  $(x, y)$  para  $(\xi, \eta)$  ou vice-versa, dependendo dos limites de integração utilizados (se em coordenadas cartesianas ou em paramétricas).

Implicito dentro destas considerações está o mapeamento retangular (não distorcido) entre a geometria do elemento no espaço paramétrico  $(\xi, \eta)$  e no espaço cartesiano  $(x, y)$ :

$$\xi = \frac{x - x_c}{a} \qquad \eta = \frac{y - y_c}{b}$$

Em outras palavras, enquanto os deslocamentos do modelo podem ter uma variação geral (com um polinômio de qualquer ordem), a geometria do elemento quadrilátero (isto é, as coordenadas de seus pontos interiores) tem um mapeamento linear e retangular (mostrado acima) em relação às coordenadas dos seus cantos  $(x_c \pm a, y_c \pm b)$ .

De maneira análoga, a geometria de um elemento triangular fica completamente definida em função dos nós dos cantos, não dependendo das coordenadas dos outros nós (pontos de interpolação para deslocamentos) que este elemento possa ter:

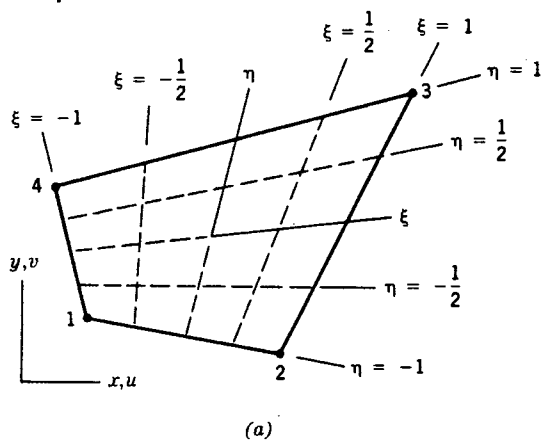
$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix}$$

Neste caso, para a obtenção da matriz  $[k]$ , deve-se considerar a mudança de coordenadas entre  $(L_1, L_2, L_3)$  e  $(x, y)$ , pois a matriz  $[B]$  envolve derivadas em relação a  $(x, y)$  mas é descrita em função de  $[L_1, L_2, L_3]$ .

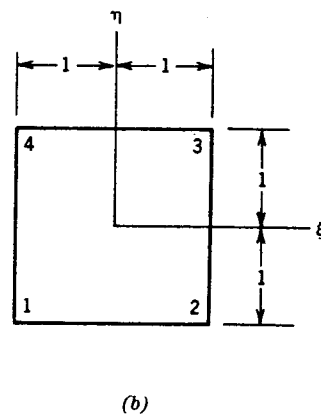
A ideia principal da formulação isoparamétrica está em interpolar a geometria do elemento (coordenadas de seus pontos) em função de coordenadas nodais, da mesma forma (daí o prefixo "iso") que os deslocamentos são interpolados.

### • Exemplos de interpolação isoparamétrica

#### Mapeamento bi-linear

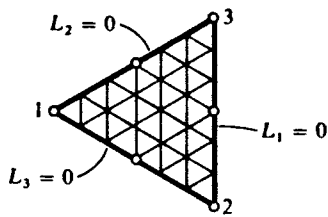
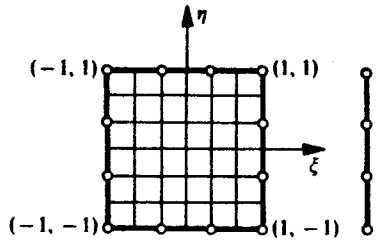


Espaço cartesiano



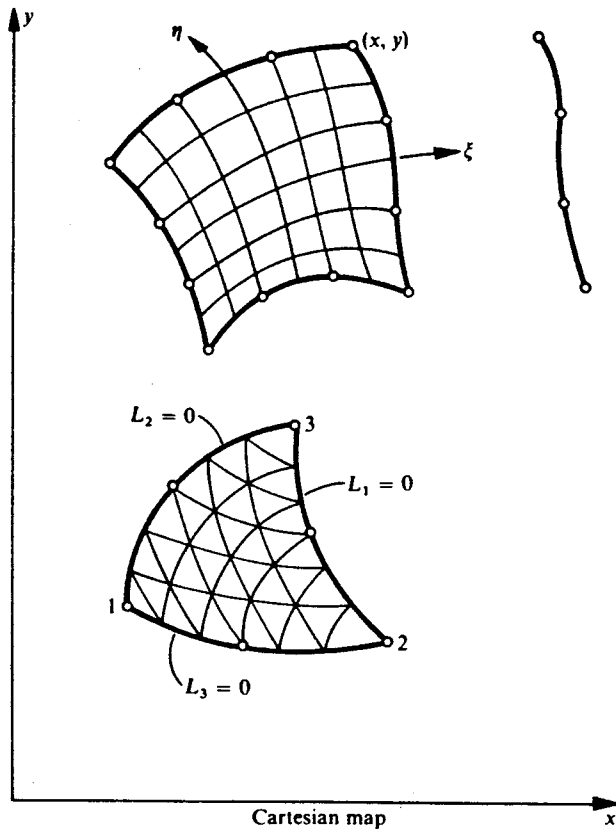
Espaço paramétrico

Mapeamento quadrilátero Serendipity cúbico



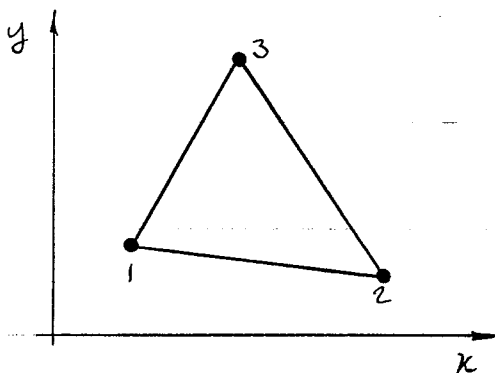
Local coordinates

Mapeamento triangular quadrático



- Formulações Subparamétrica, Isoparamétrica e Superparamétrica

Seja  $\{c\}$  o vetor das coordenadas nodais de um elemento. Exemplo:



$$\{c\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \end{Bmatrix}$$

Defina a interpolação das coordenadas dos pontos do elemento por:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = [M] \{c\}$$

onde  $[M]$  é uma matriz de mapeamento análoga à matriz das funções de forma  $[N]$ , só que ao invés de interpolar deslocamentos, como em

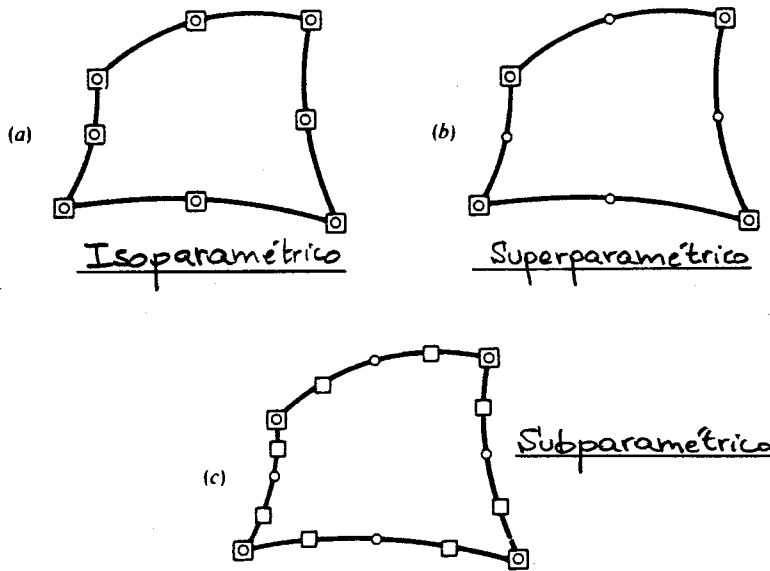
$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \{d\},$$

$[M]$  interpola coordenadas.

A interpolação é dita subparamétrica quando o grau das funções de  $[N]$  é maior do que em  $[M]$ . Neste caso o número de nós do elemento que são utilizados para interpolar as coordenadas cartesianas é menor do que o número de nós utilizados para interpolar deslocamentos.

A interpolação é dita isoparamétrica quando as matrizes  $[M]$  e  $[N]$  são iguais. Neste caso os mesmos pontos nodais são utilizados para interpolar tanto posição quanto deslocamentos.

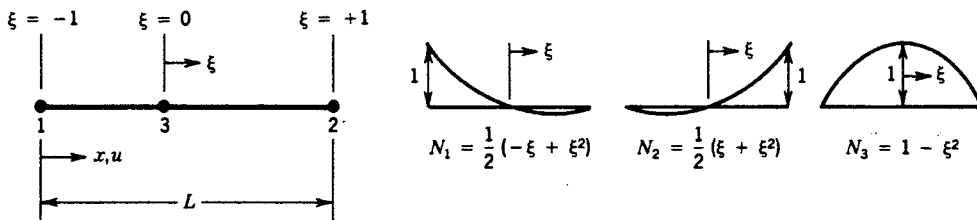
A interpolação é dita superparamétrica quando o grau de  $[N]$  é menor do grau de  $[M]$ . Neste caso um menor número de nós é utilizado para interpolar deslocamentos do que é para interpolar coordenadas.



○ - pontos onde coordenadas são especificadas

□ - pontos onde deslocamentos são especificados

• Elemento unidimensional, isoparamétrico, quadrático e  $C^0$



$$x = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad u = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Deformação:    $\epsilon_x = \frac{du}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} & \frac{dN_3}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$

ou    $\epsilon_x = [B] \{d\}$



Neste caso, como  $[N]$  depende de  $\xi$ , a regra da cadeia tem que ser utilizada para fazer a diferenciação:

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi}.$$

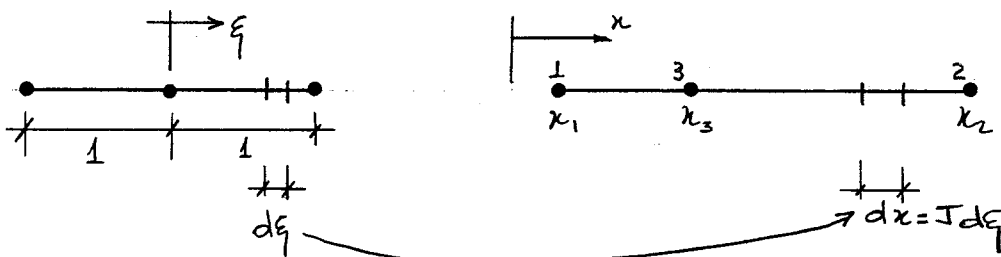
A derivada  $d\xi/dx$  é calculada a partir da sua inversa. Utilizando a interpolação isoparamétrica para a coordenada cartesiana  $x$  ao longo do elemento tem-se:

$$\frac{dx}{d\xi} = \left[ \frac{dN_1}{d\xi} \quad \frac{dN_2}{d\xi} \quad \frac{dN_3}{d\xi} \right] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

Esta derivada da coordenada de posição em função da coordenada paramétrica é chamada de Jacobiano

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} [N] \{c\}.$$

$J$  é um fator de escala do mapeamento que leva do espaço paramétrico para o espaço cartesiano.



$$J = \frac{d}{d\xi} [N] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-1+2\xi) & \frac{1}{2}(1+2\xi) & (-2\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

No caso da deformação  $\epsilon_x$ , tem-se:

$$\epsilon_x = [B] \{d\}, \text{ onde } [B] = \frac{d}{dx} [N] = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} [N] = \frac{1}{J} \frac{d}{d\xi} [N]$$

$$[B] = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-1+2\xi) & \frac{1}{2}(1+2\xi) & (-2\xi) \end{bmatrix}$$

Integração: matriz de rigidez do elemento

A matriz de rigidez do elemento é dada por:

$$[K] = \int_{x_1}^{x_2} [B]^T EA [B] dx$$

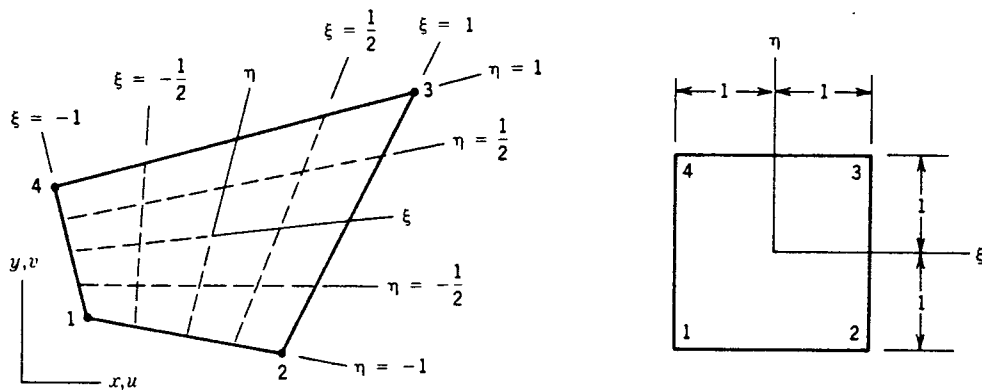
De uma forma geral, a integração com a mudança de variável pode ser feita como mostrado abaixo:

$$\int_{x_1}^{x_2} \phi(x) dx = \int_{\xi(x_1)}^{\xi(x_2)} \phi(x(\xi)) \frac{dx}{d\xi} d\xi = \int_{-1}^{+1} \phi(x(\xi)) J d\xi$$

Assim,

$$[K] = \int_{-1}^{+1} \frac{EA}{J} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-1+2\xi) \\ \frac{1}{2}(1+2\xi) \\ (-2\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-1+2\xi) & \frac{1}{2}(1+2\xi) & (-2\xi) \end{bmatrix} d\xi$$

• Mapeamento isoparamétrico bi-linear



Neste caso,

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i$$

$$N_1 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta)$$

Diferenciação e Jacobiano

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

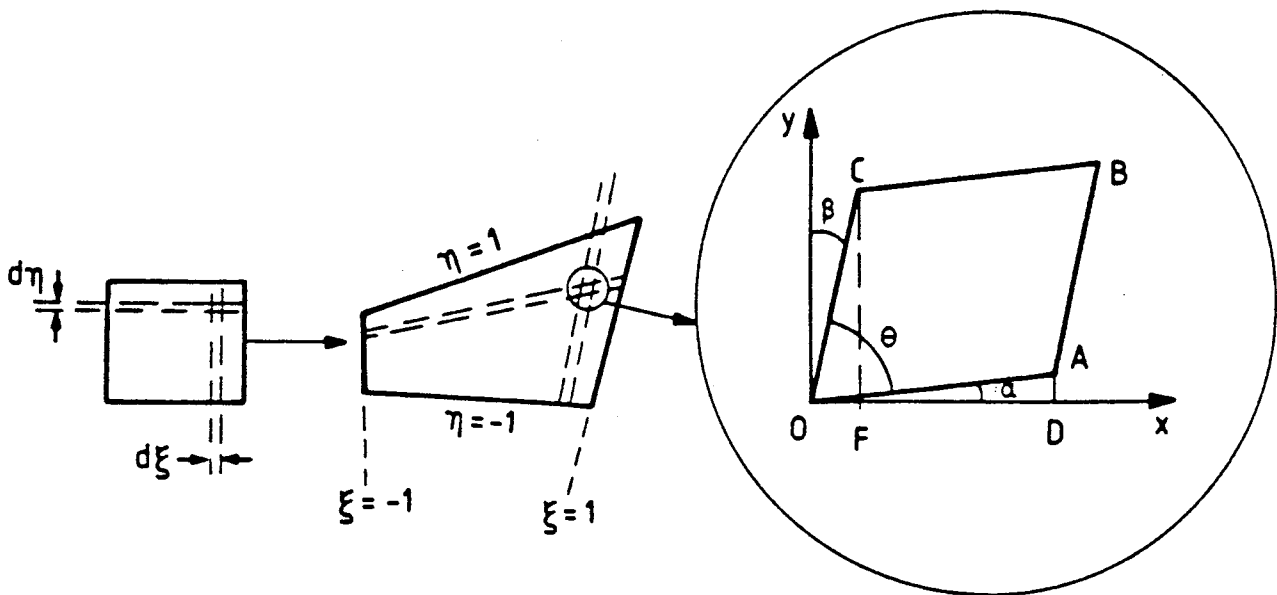
Onde  $[J]$  é matriz do Jacobiano. Invertendo-se tem-se

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

Onde  $|J|$  é o determinante do Jacobiano:

$$|J| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$|J|$  é um fator de escala de área para o mapeamento que leva do espaço paramétrico para o espaço cartesiano.



Neste caso o retângulo infinitesimal " $d\xi d\eta$ " é mapeado para o paralelogramo infinitesimal " $OABC$ ".

Tem-se que:  $OD = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi$ ,  $CF = \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta$ ,

$AD = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi$  e  $OF = \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta$

A área do paralelogramo " $OABC$ " é a área " $d\xi d\eta$ " multiplicada por  $|J|$ :

$$\begin{aligned} OABC &= 2(OAC) \\ &= OA(OC \sin \theta) \\ &= OA \cdot OC \cdot \cos(90^\circ - \theta) \\ &= OA \cdot OC \cos(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OABC &= OA \cdot OC (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \\ &= OA \cos \alpha \cdot OC \cos \beta - OA \sin \alpha \cdot OC \sin \beta \\ &= OD \cdot CF - AD \cdot OF \end{aligned}$$

$$\therefore OABC = |J| d\xi d\eta$$

Em um elemento isoparamétrico bi-linear o Jacobiano pode ser obtido como mostrado abaixo.

Usando as relações  $x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i$  e  $y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i$ , tem-se:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i$$

Ou ainda,

$$[J] = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & N_{3,\xi} & N_{4,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & N_{3,\eta} & N_{4,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix}$$

E o determinante do Jacobiano é:

$$|J| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad \text{Isto resulta em}$$

$$|J| = \frac{1}{8} \left\{ [(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)] + \right. \\ \left. [(x_3 - x_4)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y_3 - y_4)] \cdot \xi + \right. \\ \left. [(x_2 - x_3)(y_1 - y_4) - (x_1 - x_4)(y_2 - y_3)] \cdot \eta \right\}.$$

Observe que um paralelogramo tem  $|J| = \text{const.}$  em todas as pontas.

## Deformações de um ponto no elemento

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i$$

$$v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad \boxed{\{u\} = [N] \{d\}}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad \boxed{\{E\} = [D] \{u\}}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\{E\} = [B] \{d\}}$$

onde,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix}}$$

## Integração: matriz de rigidez do elemento

$$[k] = \iint [B]^T [E] [B] t dx dy$$

$$[B] = [B(x, y)]$$

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [E] [B] t |J| d\xi d\eta$$

$$[B] = [B(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))]$$

### • Integração numérica: Quadratura de Gauss

A integração analítica para a obtenção da matriz de rigidez do elemento é impraticável no caso geral. Em elementos finitos em geral utiliza-se a integração numérica de Gauss.

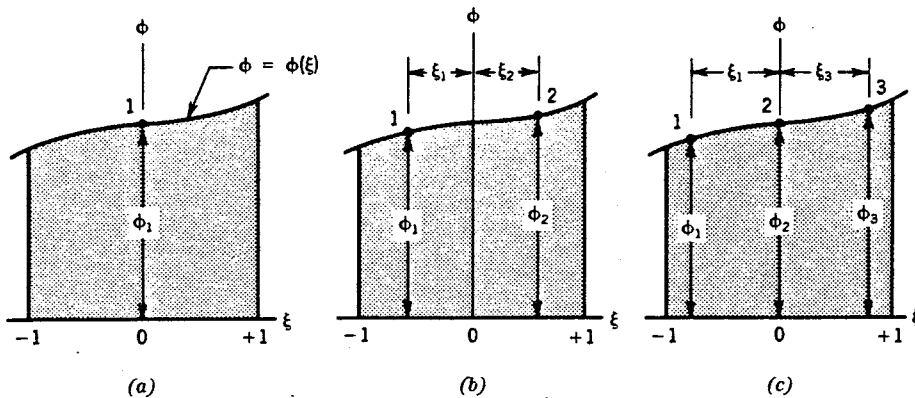
#### Uma dimensão

"Um polinômio de grau  $2n-1$  é integrado exatamente por uma quadratura de Gauss com  $n$  pontos"

$$I = \int_{-1}^1 \phi(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n W_i \phi_i = W_1 \phi_1 + W_2 \phi_2 + \dots + W_n \phi_n$$

No caso mais geral a integração tem um caráter aproximado:

$$I = \int_{-1}^1 \phi(\xi) d\xi \cong \sum_{i=1}^n W_i \phi_i$$



$n=1$   
1 ponto de amostragem

$n=2$   
2 pontos

$n=3$   
3 pontos

SAMPLING POINTS AND WEIGHTS FOR GAUSS QUADRATURE OVER THE INTERVAL  $\xi = -1$  TO  $\xi = +1$ .

Order $n$	Location $\xi_i$ of Sampling Point	Weight Factor $W_i$
1	0.	2.
2	$\pm 0.57735\ 02691\ 89626 = \pm 1/\sqrt{3}$	1.
3	$\pm 0.77459\ 66692\ 41483 = \pm \sqrt{0.6}$	$0.55555\ 55555\ 55555 = \frac{5}{9}$
	0.	$0.88888\ 88888\ 88888 = \frac{8}{9}$
4	$\pm 0.86113\ 63115\ 94053 = \pm \left[ \frac{3 + 2r}{7} \right]^{1/2}$	$0.34785\ 48451\ 37454 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6r}$
	$\pm 0.33998\ 10435\ 84856 = \pm \left[ \frac{3 - 2r}{7} \right]^{1/2}$	$0.65214\ 51548\ 62546 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6r}$
	where $r = \sqrt{1.2}$	

A integração de Gauss é aproximada quando  $\phi(\xi)$  não é um polinômio. Porém, quantos mais pontos de amostragem forem utilizados, mais precisa vai ser a integração numérica.

Os pontos de amostragem são também chamados de pontos de Gauss.

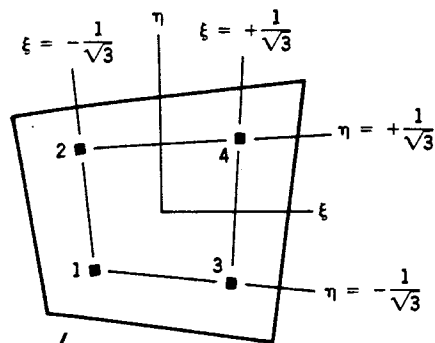


Duas dimensões

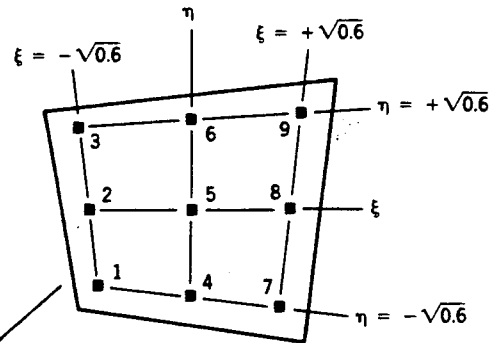
$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(\xi, \eta) d\xi d\eta \cong \int_{-1}^1 \left[ \sum_{i=1}^m w_i \phi(\xi_i, \eta) \right] d\eta$$

$$\cong \sum_{j=1}^m w_j \left[ \sum_{i=1}^m w_i \phi(\xi_i, \eta_j) \right]$$

$$\therefore I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(\xi, \eta) d\xi d\eta \cong \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m w_i w_j \phi(\xi_i, \eta_j)$$



$$I \approx \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4$$



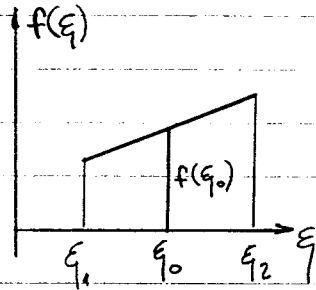
$$I \approx \frac{25}{81} (\phi_1 + \phi_3 + \phi_7 + \phi_9) + \frac{40}{81} (\phi_2 + \phi_4 + \phi_6 + \phi_8) + \frac{64}{81} \phi_5$$

Mais tarde será visto qual a ordem de quadratura ( $m \times n$ ) que é adequada para diversos elementos.

Também será visto que alguns elementos fornecem melhores resultados com uma ordem reduzida, isto é, utilizando-se menos pontos de Gauss do que seria adequado.

• Um pouco mais sobre integração de Gauss

função linear  $\rightarrow 2m-1=1 \Rightarrow m=1$



$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(\xi) d\xi = \underbrace{(\xi_2 - \xi_1)}_{\text{altura}} \underbrace{f(\xi_0)}_{\text{base média}} = W_1 f(\xi_0)$$

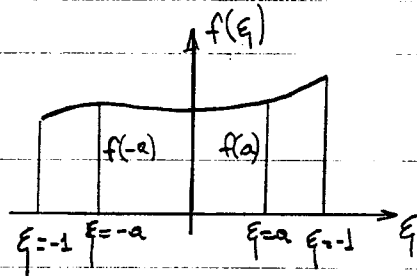
área do trapézio

$$\left. \begin{matrix} \xi_1 = -1 \\ \xi_2 = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \boxed{W_1 = 2}, \quad \boxed{\xi_0 = 0}$$

função cúbica  $\rightarrow 2m-1=3 \Rightarrow m=2$

$$f(\xi) = C_0 + C_1 \xi + C_2 \xi^2 + C_3 \xi^3$$

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi$$



$$I_{\text{exata}} = 2C_0 + \frac{2C_2}{3} \quad (\text{independe de } C_1 \text{ e } C_3)$$

Note que não há diferença entre quadrático e cúbico. Isto porque  $\xi^3$  é uma função ímpar e  $\int_{-1}^1 \xi^3 d\xi = 0$ .

Escolha dois pontos de amostra simétricos com mesmo peso:

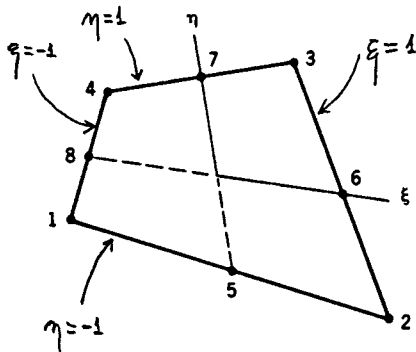
$$I = W f(-a) + W f(a) = 2W (C_0 + C_2 a^2)$$

Em que condições  $I = I_{\text{exata}}$  ?

$$e = I - I_{\text{exata}} \quad e_{\text{min}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial e}{\partial C_0} = 0 \Rightarrow 2 - 2W = 0 \Rightarrow \boxed{W = 1} \\ \frac{\partial e}{\partial C_2} = 0 \Rightarrow \frac{2}{3} - 2W a^2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}} \end{cases}$$

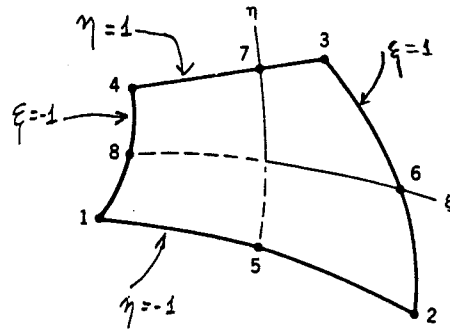
↑  
erro

• Elementos isoparamétricos quadráticos com quatro lados



(a)

Lados retos e nós nos meios dos lados

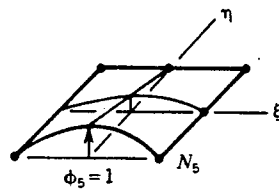


(b)

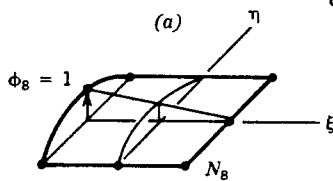
Lados curvos e nós fora dos meios dos lados

Elemento "Serendipity" - Q8

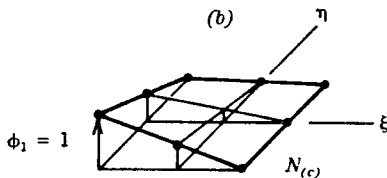
Funções de forma no espaço paramétrico ( $\xi, \eta$ )



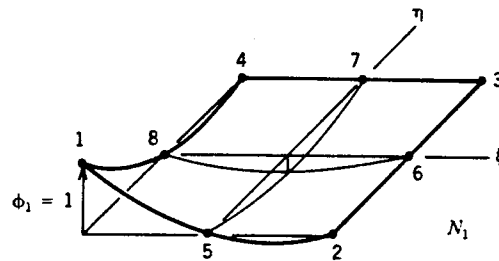
(a)



(b)



(c)



(d)

(a)  $N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta)$

(b)  $N_8 = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2)$

(c)  $N_{(c)} = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$

(d)  $N_1 = N_{(c)} - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_8$

$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) - \frac{1}{2}(N_8 + N_5)$        $N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta)$

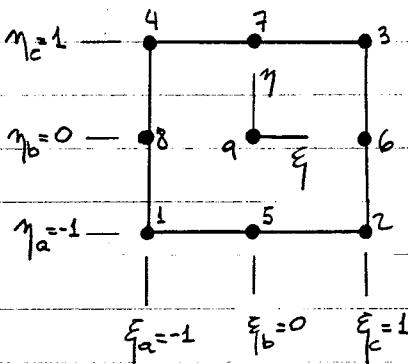
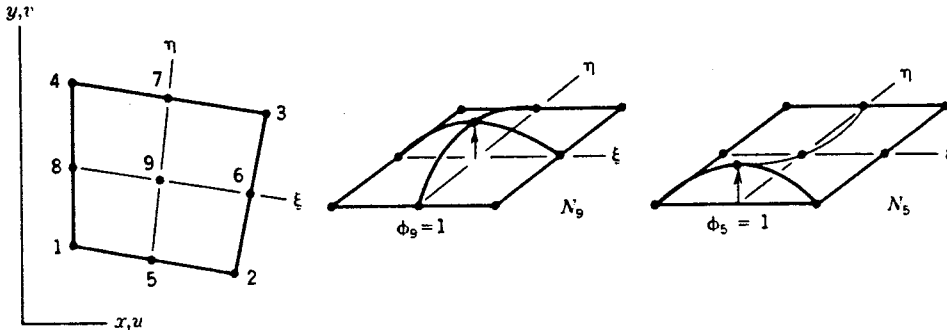
$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) - \frac{1}{2}(N_5 + N_6)$        $N_6 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2)$

$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) - \frac{1}{2}(N_6 + N_7)$        $N_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta)$

$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) - \frac{1}{2}(N_7 + N_8)$        $N_8 = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2)$

# Elemento Lagrangeano - Q9

## Funções de forma no espaço paramétrico $(\xi, \eta)$



$$N_{a\xi} = \frac{(\xi - \xi_b)(\xi - \xi_c)}{(\xi_a - \xi_b)(\xi_a - \xi_c)}$$

$$N_{a\eta} = \frac{(\eta - \eta_b)(\eta - \eta_c)}{(\eta_a - \eta_b)(\eta_a - \eta_c)}$$

$$N_{b\xi} = \frac{(\xi - \xi_a)(\xi - \xi_c)}{(\xi_b - \xi_a)(\xi_b - \xi_c)}$$

$$N_{b\eta} = \frac{(\eta - \eta_a)(\eta - \eta_c)}{(\eta_b - \eta_a)(\eta_b - \eta_c)}$$

$$N_{c\xi} = \frac{(\xi - \xi_a)(\xi - \xi_b)}{(\xi_c - \xi_a)(\xi_c - \xi_b)}$$

$$N_{c\eta} = \frac{(\eta - \eta_a)(\eta - \eta_b)}{(\eta_c - \eta_a)(\eta_c - \eta_b)}$$

$$N_{a\xi} = \frac{(\xi)(\xi - 1)}{(-1)(-2)} = \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)$$

$$N_{a\eta} = \frac{1}{2}(\eta^2 - \eta)$$

$$N_{b\xi} = \frac{(\xi + 1)(\xi - 1)}{(+1)(-1)} = (1 - \xi^2)$$

$$N_{b\eta} = (1 - \eta^2)$$

$$N_{c\xi} = \frac{(\xi + 1)(\xi)}{(2)(1)} = \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)$$

$$N_{c\eta} = \frac{1}{2}(\eta^2 + \eta)$$

$$N_1 = N_{a\xi} N_{a\eta}$$

$$N_2 = N_{c\xi} N_{a\eta}$$

$$N_3 = N_{c\xi} N_{c\eta}$$

$$N_4 = N_{a\xi} N_{c\eta}$$

$$N_5 = N_{b\xi} N_{a\eta}$$

$$N_6 = N_{c\xi} N_{b\eta}$$

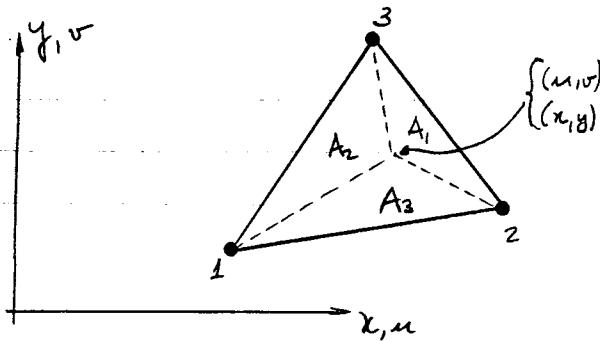
$$N_7 = N_{b\xi} N_{c\eta}$$

$$N_8 = N_{a\xi} N_{b\eta}$$

$$N_9 = N_{b\xi} N_{b\eta}$$

• Elementos isoparamétricos triangulares

Elemento Linear (triângulo de deformação constante - CST)-T3



Coordenadas naturais (coordenadas de área):

$$L_1 = \frac{A_1}{A}$$

$$L_2 = \frac{A_2}{A}$$

$$L_3 = \frac{A_3}{A}$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1$$

$$x = L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3$$

$$y = L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3$$

Neste caso tem-se que:

$$N_1 = L_1$$

$$N_2 = L_2$$

$$N_3 = L_3$$

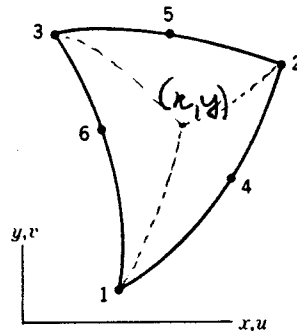
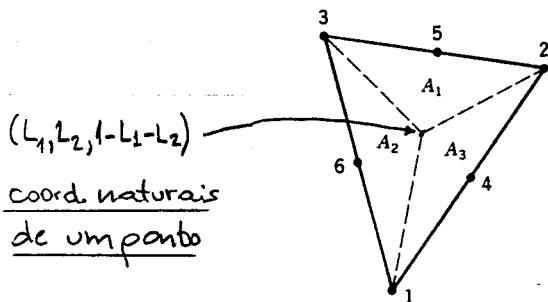
e,

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\{u\} = [N] \{d\}}$$

Vê-se que a formulação anterior do elemento T3 já era uma formulação isoparamétrica pois deslocamentos e coordenadas são interpolados da mesma forma.

## Elemento quadrático



Espaço paramétrico  
(lados retos)

Espaço cartesiano  
(real, lados curvos)

$$N_1 = (2L_1 - 1)L_1$$

$$N_2 = (2L_2 - 1)L_2$$

$$N_3 = (2L_3 - 1)L_3$$

$$N_4 = 4L_1L_2$$

$$N_5 = 4L_2L_3$$

$$N_6 = 4L_3L_1$$

Observe que  $N_i = N_i(L_1, L_2)$  pois  $L_3 = 1 - L_1 - L_2$ .

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \\ x_5 \\ y_5 \\ x_6 \\ y_6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = [N] \{c\}$$

e

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \{d\}$$

## • Diferenciação e Jacobiano para elemento triangulares

Observe que, apesar de existirem três coordenadas de área, existem apenas duas coordenadas naturais  $(\xi, \eta)$ , onde:

$$\begin{aligned}L_1 &= \xi \\L_2 &= \eta \\L_3 &= 1 - \xi - \eta.\end{aligned}$$

Desta forma, a diferenciação de uma função de forma  $N_i$  em relação às coordenadas naturais pode ser expressa por:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} - \frac{\partial N_i}{\partial L_3}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial L_2} - \frac{\partial N_i}{\partial L_3}$$

A matriz do Jacobiano, para o elemento quadrático, pode então ser obtida:

$$x = \sum_{i=1}^6 N_i x_i \quad y = \sum_{i=1}^6 N_i y_i$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & \dots & N_{6,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & \dots & N_{6,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \end{bmatrix}$$

E a diferenciação em relação às coordenadas cartesianas é:

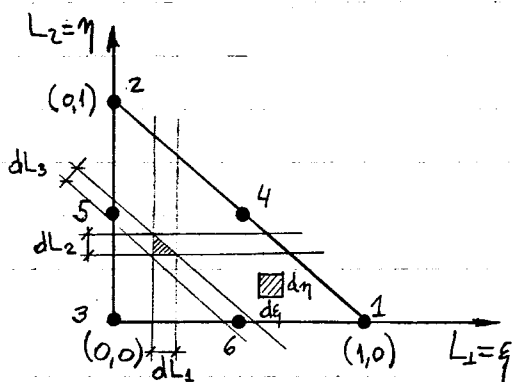
$$\begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix}$$

## Deformações de um ponto

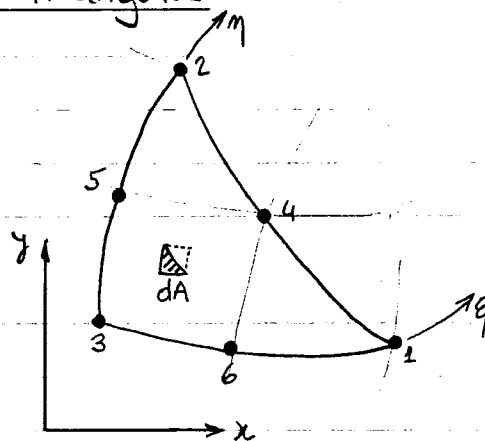
$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & \dots & N_{6,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & \dots & 0 & N_{6,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & \dots & N_{6,y} & N_{6,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_6 \\ v_6 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\{E\} = [B]\{d\}}$$

## Integração Numérica para Triângulos



Espaço paramétrico



Espaço cartesiano

$$I = \int_A \phi(L_1, L_2, 1-L_1-L_2) dA \quad \text{onde} \quad \boxed{dA = \frac{1}{2} |J| d\xi d\eta}$$

$$|J| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

O fator  $\frac{1}{2}$  aparece em  $dA$  porque o determinante do Jacobiano representa um fator de escala entre a área do quadrilátero infinitesimal  $d\xi d\eta$  e a área da sua imagem no espaço cartesiano (que também é um quadrilátero). Como  $dA$  é um triângulo infinitesimal, o fator  $\frac{1}{2}$  é necessário.

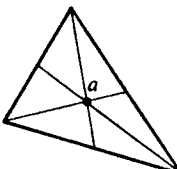
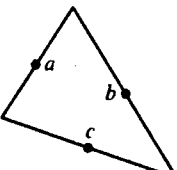
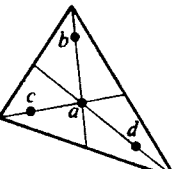
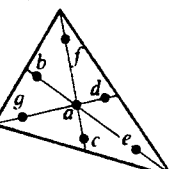


Para a integração numérica a integral  $I$  é aproximada por:

$$I \cong \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{mpts} W_i |J_i| \phi_i$$

, onde as coordenadas e os pesos dos pontos de Gauss estão mostrados abaixo.

#### NUMERICAL INTEGRATION FORMULAE FOR TRIANGLES

Order ( $m$ )	Fig.	Error $O(h^{m+1})$	Points	Triangular Co-ordinates	Weights	Nº Points (mpts)
Linear ( $m=1$ )		$R = O(h^2)$	$a$	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	1	1
Quadratic ( $m=2$ )		$R = O(h^3)$	$a$ $b$ $c$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$ $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$	3
Cubic ( $m=3$ )		$R = O(h^4)$	$a$ $b$ $c$ $d$	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $0.6, 0.2, 0.2$ $0.2, 0.6, 0.2$ $0.2, 0.2, 0.6$	$-\frac{27}{48}$ $\frac{25}{48}$	4
Quintic ( $m=5$ )		$R = O(h^6)$	$a$ $b$ $c$ $d$ $e$ $f$ $g$	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $\alpha_1, \beta_1, \beta_1$ $\beta_1, \alpha_1, \beta_1$ $\beta_1, \beta_1, \alpha_1$ $\alpha_2, \beta_2, \beta_2$ $\beta_2, \alpha_2, \beta_2$ $\beta_2, \beta_2, \alpha_2$	0.22500,00000 0.13239,41527 0.12593,91805	7

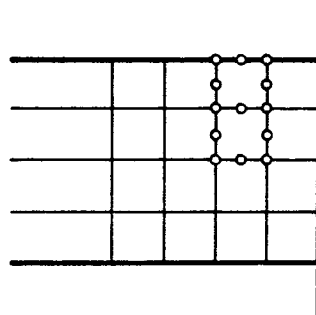
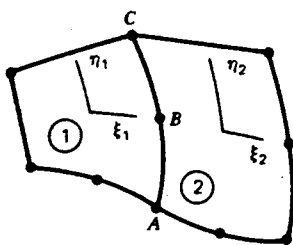
with  
 $\alpha_1 = 0.0597158717$   
 $\beta_1 = 0.4701420641$   
 $\alpha_2 = 0.7974269853$   
 $\beta_2 = 0.1012865073$

Na expressão acima os pesos  $W_i$  são obtidos diretamente utilizando coordenadas de área triangulares (não são obtidos a partir de produto de pesos unidimensionais). Por isso só aparece um somatório na expressão. Observe que a soma dos pesos em cada ordem é sempre 1, o que indica que os pesos estão normalizados em relação a uma unidade de área do triângulo.

Uma ordem de erro  $O(h^{n+1})$  corresponde a um grau de precisão  $n$ . O grau de precisão se refere ao grau do polinômio completo (no espaço cartesiano) de mais alta ordem que é integrado exatamente pela integração numérica.

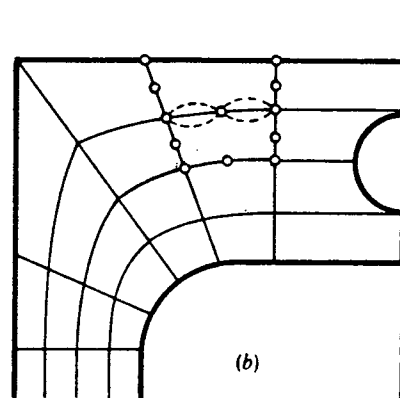
• Validade dos elementos isoparamétricos

Continuidade (geométrica e de deslocamentos) entre elementos



(a)

Espaço Paramétrico



(b)

Espaço cartesiano

- Teorema 1:

"Se dois elementos adjacentes têm funções de forma que satisfazem as condições de continuidade no espaço paramétrico, então os elementos distorcidos no espaço cartesiano satisfazem condições de continuidade geométrica e condições de continuidade em deslocamentos".

Exercício proposto: Demonstre o teorema.

## Completitude (condição necessária para convergência)

- Teorema 2:

"A condição de deformação constante é satisfeita para todos os elementos isoparamétricos".

Demonstração:

Considere, sem perda de generalidade, um campo de deslocamentos lineares (deformação constante)  $u$ :

$$u = a_0 + a_1 x + a_2 y \quad (1)$$

Os mesmos deslocamentos expressões em termos de deslocamento nodais são:

$$u = \sum_i N_i u_i \quad (2)$$

Se a expressão (1) for avaliada em cada nó resulta em:

$$u_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2) tem-se:

$$u = a_0 \sum_i N_i + a_1 \sum_i N_i x_i + a_2 \sum_i N_i y_i \quad (4)$$

Utilizando a interpolação isoparamétrica de coordenadas,  $x = \sum_i N_i x_i$  e  $y = \sum_i N_i y_i$ , tem-se:

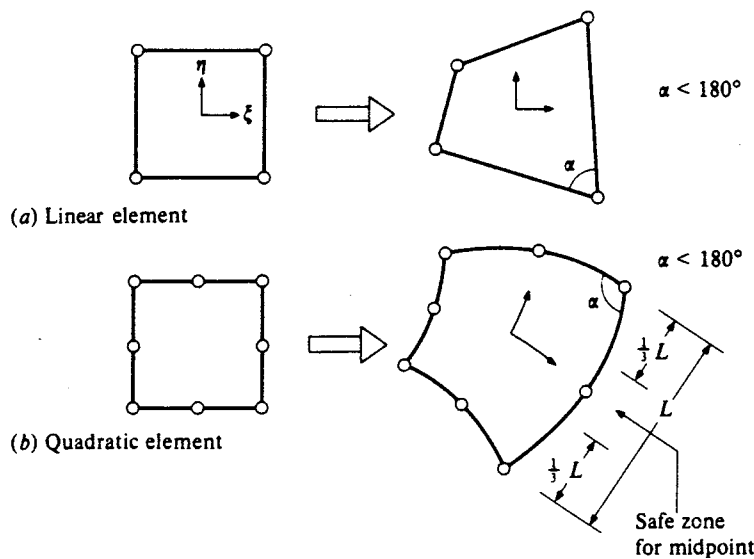
$$u = a_0 \sum_i N_i + a_1 x + a_2 y \quad (5)$$

Comparando (1) com (5) vê-se que o campo de deslocamentos lineares fica perfeitamente reproduzido na formulação isoparamétrica se  $\sum_i N_i = 1$ . Como isto é sempre verdade, fica demonstrado o teorema.

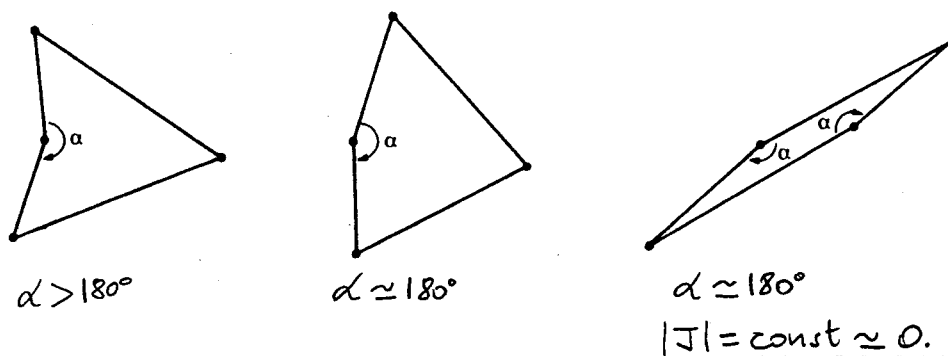
• Limitação na distorção de elementos isoparamétricos

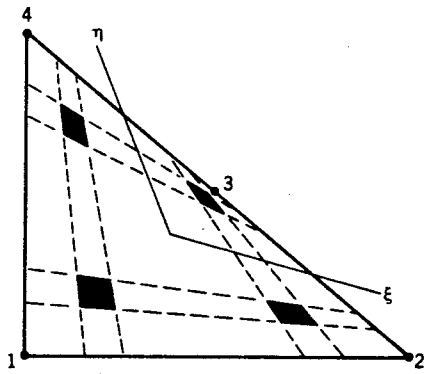
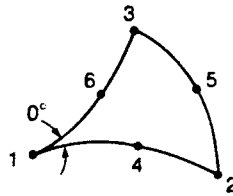
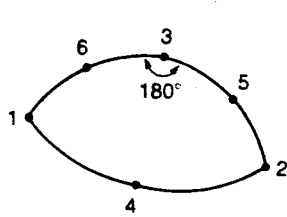
Para que se tenha unicidade do mapeamento do espaço paramétrico para o espaço cartesiano (mapeamento unívoco - "um-para-um") é necessário que o sinal do determinante do Jacobiano não se modifique ao longo de todo o domínio mapeado.

A figura abaixo mostra algumas regras para manter a unicidade do mapeamento.

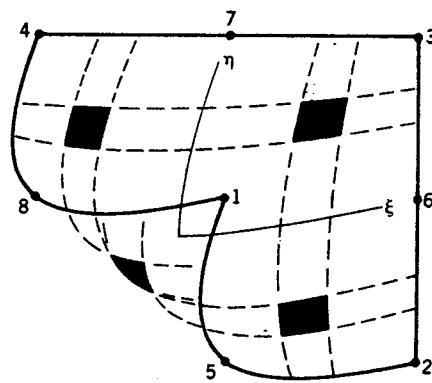


Em seguida são mostrados alguns exemplos de mapeamentos não válidos ou que resultam em elementos mal-condicionados.

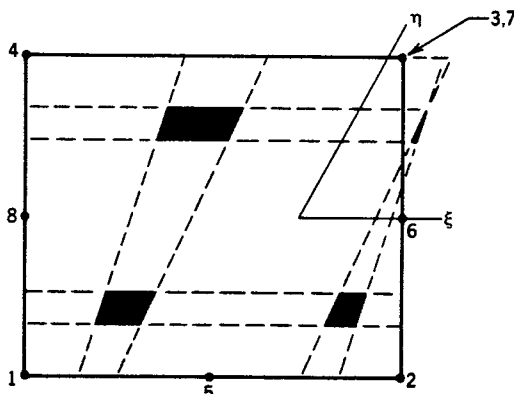




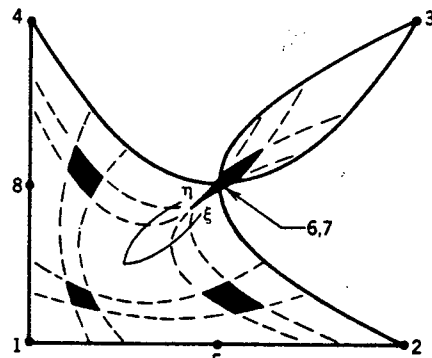
(a)



(b)



(c)



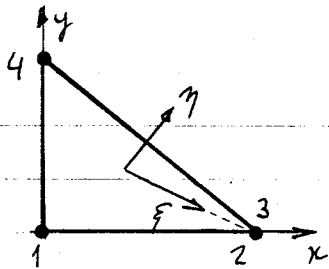
(d)

A título de exercício vai-se mostrar para um elemento bi-linear mal-conformado aonde o determinante do Jacobiano é nulo ou troca de sinal.

Neste caso,

$$|J| = \frac{1}{8} \left\{ \begin{aligned} &[(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)] + \\ &[(x_3 - x_4)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y_3 - y_4)] \cdot \xi + \\ &[(x_2 - x_3)(y_1 - y_4) - (x_1 - x_4)(y_2 - y_3)] \cdot \eta \end{aligned} \right\}$$

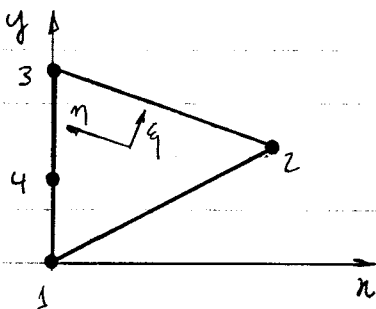
(a) Elemento com lado colapsado



lado  $\xi = 1$

$$|J| = 0 \quad \forall \eta$$

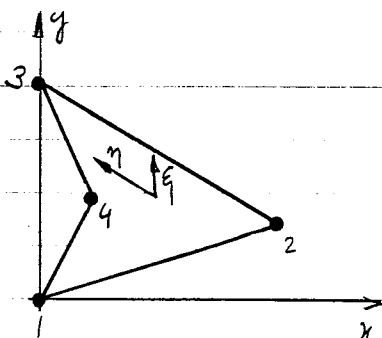
(b) Ângulo igual a  $180^\circ$



ponto  $\xi = -1, \eta = 1$

$$|J| = 0$$

(c)



pontos  $\left\{ \begin{array}{l} \xi = -1, \eta = -1 \\ \xi = 1, \eta = -1 \\ \xi = 1, \eta = 1 \end{array} \right\} \quad |J| > 0$

ponto  $\xi = -1, \eta = 1$   $|J| < 0$

Como o determinante do Jacobiano é negativo em 4 e positivo em 1, 2 e 3, então  $|J| = 0$  em um arco em torno do nó 4.

## ***Integração Numérica Reduzida Adequada***

### **Introdução**

Uma integração numérica de ordem menor do que a necessária para integrar exatamente a matriz de rigidez de um elemento é denominada de “integração reduzida” e pode ser desejável por dois motivos:

- Um menor número pontos de Gauss acarreta em uma economia computacional.
- Integração reduzida tende a tornar o elemento mais flexível, portanto (espera-se) compensando o comportamento rígido associado a uma configuração de deslocamentos pré-estabelecida.

O elemento torna-se mais flexível com integração reduzida quando alguns termos de ordem mais alta que de outra forma iriam contribuir para a energia de deformação não o fazem porque suas contribuições se anulam nos pontos de Gauss da integração reduzida. Em outras palavras, com um menor número de pontos de amostragem, alguns dos modos de deformação mais complicados oferecem menos resistência do que o fariam com uma integração completa.

Espera-se com a integração reduzida que modos de deformação indesejados sejam ‘filtrados’ e retirados da formulação. Desta forma um elemento mais flexível e mais eficiente pode ser obtido. É, portanto, necessário determinar:

- (a) a mínima ordem de quadratura necessária para permitir a convergência de um modelo;
- (b) a ordem de quadratura necessária para manter a velocidade de convergência que seria obtida por uma integração completa; e
- (c) as condições para que o erro na integração numérica compense apropriadamente a super-estimação da rigidez de uma estrutura modelada por elementos finitos em deslocamentos.

O comportamento de um elemento com integração numérica reduzida não pode afetar as condições de convergências. Portanto, a resposta de um elemento, mesmo com integração reduzida, tem que sempre representar todos os termos de deformação constante.

Deve ser observado, também, que uma integração reduzida é, em essência, sempre utilizada implicitamente quando a distorção de um elemento finito é tal que a ordem da quadratura escolhida não vai integrar exatamente a matriz de rigidez.

### **Mínima ordem de quadratura para convergência**

A regra de quadratura utilizada pelo modelo de elementos finitos deve ser no mínimo suficiente para integrar o volume do elemento exatamente. Isto vem do fato que com o refinamento da malha o tamanho dos elementos diminui e o comportamento dos elementos se aproxima cada vez mais de um estado de deformação constante.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [E] \{\epsilon\} t |J| d\xi d\eta = \text{const.} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 t |J| d\xi d\eta$$

O integrando da parte esquerda da equação acima tende a uma constante a medida que o tamanho do elemento diminui e a integral da direita corresponde ao volume do elemento.

Portanto, para um elemento de geometria arbitrária, a integração mínima requerida é uma quadratura que integra exatamente  $t |J|$  no caso plano. Para um elemento bi-linear com espessura constante,  $t |J|$  é linear em cada direção paramétrica, então somente um ponto de Gauss é necessário. Para um elemento quadrático no caso mais geral,  $t |J|$  contém potências cúbicas das coordenadas paramétricas, então uma integração de Gauss  $2 \times 2$  é necessária.

Entretanto, a condição de convergência é requerida somente no limite a medida que a malha é refinada. Neste caso, a subdivisão indefinida acarreta em elementos de lados retos e paralelos (determinante do Jacobiano constante). Portanto, no limite, um único ponto de Gauss seria necessário.

Deve-se observar que, como será visto mais adiante, a utilização de uma integração tão reduzida como a mínima para convergência pode provocar o aparecimento de modos espúrios de deformação, e a ordem de quadratura recomendada será maior do que a mínima.

### Ordem de integração para não afetar a velocidade de convergência

A regra de integração mínima é geralmente inaceitável por dois motivos. Em primeiro porque ela pode provocar instabilidade do modelo (modos espúrios de deformação). Em segundo, mesmo que esta integração preserve a convergência, ela vai resultar em uma perda na velocidade de convergência

No outro extremo de precisão pode-se requerer uma regra de quadratura que integre exatamente a matriz de rigidez do elemento. Isto só é possível quando o integrando é um polinômio, o que significa que o Jacobiano deve ser constante, isto é, um elemento não distorcido. Isto vai exigir uma ordem de quadratura muito alta, muitas vezes desnecessária pois a integração exata resulta em uma aproximação para o campo de deslocamentos que é muito rígida.

A partir destas considerações deseja-se uma quadratura que se situe entre estes dois extremos. Por exemplo, pode-se requerer que o erro provocado pela ordem de quadratura seja comparável ao erro de discretização. Está é a lógica por trás do seguinte argumento: a ordem de quadratura deve ter precisão suficiente para preservar a velocidade de convergência devida ao erro de discretização.

A quantidade mais natural para se medir a velocidade de convergência é o erro na avaliação da energia potencial total. Termos de deformação na expressão da energia potencial total são considerados completos até o grau  $(p-m)$  (para um elemento não distorcido pois a convergência é considerada no limite quando o tamanho do elemento tende a zero), onde

$p =$  grau do polinômio completo de mais alto grau presente nas funções de interpolação do elemento;  
 $m =$  ordem de diferenciação presente na expressão da energia potencial total. É a ordem de diferenciação que aparece na matrix [B] que obtém deformações em um ponto no elemento em função de deslocamentos nodais.

Conclui-se que para não reduzir a velocidade de convergência é necessário integrar exatamente um polinômio de grau  $2(p-m)$ , que é o grau do polinômio completo contido em  $[B]^T[E][B]$ . Neste caso, a ordem do erro de aproximação vai ser  $O(h^{2(p-m)+1})$ , onde  $h$  é um tamanho característico do elemento, porque somente os termos de grau  $2(p-m)$  podem ser representados corretamente.

Considerando-se uma quadratura com  $n$  pontos de amostra e sabendo-se que estes  $n$  pontos integram exatamente um polinômio de grau  $2n-1$ , tem-se:

$$2n-1 = 2(p-m) \Rightarrow n = (p-m) + 1/2$$

ou,

$$n = (p-m) + 1$$

Exemplos:

elementos lineares	$(p = 1)$	$\Rightarrow$	$n = 1$ ponto de Gauss em cada direção
elementos quadráticos	$(p = 2)$	$\Rightarrow$	$n = 2$ pontos de Gauss em cada direção
elementos cúbicos	$(p = 3)$	$\Rightarrow$	$n = 3$ pontos de Gauss em cada direção



## Análise de autovalor de um elemento

A análise de autovalor é utilizada para testar a qualidade de elementos, incluindo detecção de movimentos associados a uma energia de deformação nula, invariância quanto à orientação, etc. Um problema de autovalor deve ser resolvido para fazer este teste. Para um elemento finito genérico, o problema de autovalor é expresso por

$$[\mathbf{k}]\{\mathbf{d}\} = \lambda\{\mathbf{d}\} \quad \text{ou} \quad ([\mathbf{k}] - \lambda[\mathbf{I}])\{\mathbf{d}\} = 0 \quad (1)$$

onde  $[\mathbf{k}]$  é a matriz de rigidez do elemento e  $\{\mathbf{d}\}$  é o vetor de deslocamentos nodais do elemento.

Para um autovalor específico  $\lambda_i$  e o seu autovetor associado  $\{\mathbf{d}_i\}$ , a energia de deformação é

$$U_i = 1/2 \{\mathbf{d}_i\}^T [\mathbf{k}] \{\mathbf{d}_i\} \quad \text{ou} \quad 2U_i = \{\mathbf{d}_i\}^T [\mathbf{k}] \{\mathbf{d}_i\} \quad (2)$$

Pode-se escrever a equação (1) como

$$([\mathbf{k}] - \lambda_i[\mathbf{I}])\{\mathbf{d}_i\} = 0 \quad (3)$$

A equação acima pode ser pré-multiplicada por  $\{\mathbf{d}_i\}^T$  e então expandida como

$$\{\mathbf{d}_i\}^T [\mathbf{k}] \{\mathbf{d}_i\} = \lambda_i \{\mathbf{d}_i\}^T [\mathbf{I}] \{\mathbf{d}_i\} \quad (4)$$

na qual, a partir da equação (2), o expressão do lado esquerdo é igual a  $2U_i$ . Se o autovetor  $\{\mathbf{d}_i\}$  for normalizado de forma que

$$\{\mathbf{d}_i\}^T \{\mathbf{d}_i\} = 1 \quad (5)$$

a equação (4) resulta em

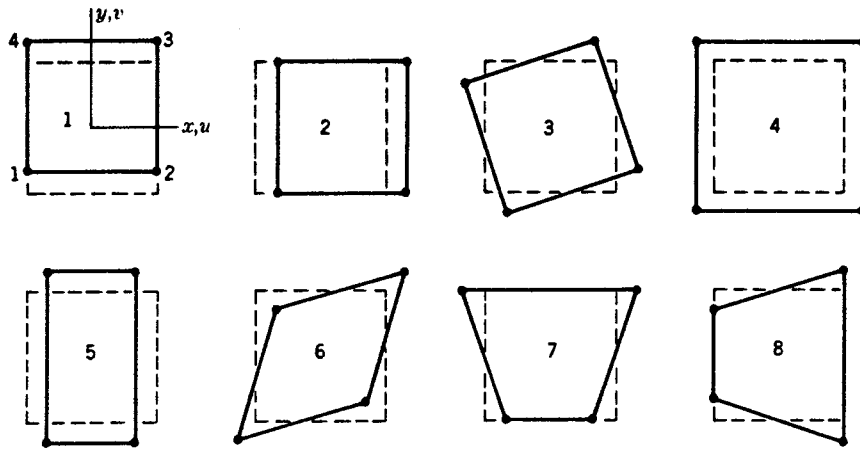
$$\lambda_i = \{\mathbf{d}_i\}^T [\mathbf{k}] \{\mathbf{d}_i\} = 2U_i \quad (6)$$

Portanto cada autovalor da matriz de rigidez é igual ao dobro da energia de deformação induzida por um conjunto de deslocamentos nodais normalizados.

Desta forma, os autovalores da matriz de rigidez de um elemento e os seus autovetores associados podem representar o comportamento de um elemento. Com isso, a qualidade de um elemento pode ser também aferida com base em uma análise de autovalor.

Os autovetores que correspondem a autovalores nulos representam movimentos de corpo rígido ou modos de deformação com energia nula. No caso dos modos de corpo rígido, os deslocamentos estão associados a forças nodais nulas. Existem três modos de corpo rígido linearmente independentes para um elemento de estado plano. A matriz de rigidez de um elemento deve ter o número apropriado de autovalores nulos de forma que o elemento possa representar todos os possíveis movimentos de corpo rígido. Também existem modos de energia nula associados a uma integração numérica reduzida (vide seção a seguir). Estes são chamados de modos de deformação "espúrios".

A figura a seguir mostra os oito modos de deformação de um elemento plano bi-linear. O três primeiros podem ser identificados como modos de corpo rígido. Os modos 4, 5 e 6 são modos de deformação constantes. E os modos 7 e 8 estão associados a uma 'flexão' do elemento.



### Ordem de integração para evitar singularidade na matrix de rigidez global e modos de deformação espúrios

Com a utilização de integração numérica para a obtenção da matrix de rigidez de um elemento, a integração analítica é substituída por uma soma ponderada de relações independentes entre os parâmetros nodais. Estas relações fornecem o único tipo de informação que é utilizada para a construção da matrix de rigidez do elemento.

A seleção da ordem de integração afeta os resultados de uma análise de autovalor de um elemento porque um modo de energia nula aparece quando um conjunto de deslocamentos nodais produz um campo de deformações que é nulo em todos os pontos de Gauss. Nestes modos de energia nula estão incluídos os movimentos de corpo rígido que obviamente produzem deformações nulas em qualquer ponto do elemento, em particular nos pontos de Gauss. Se um elemento com movimentos de corpo rígido impedidos apresenta um ou mais modos de energia nula, então sua matrix de rigidez é singular.

Modos espúrios de energia nula aparecem quando alguns termos de ordem mais alta que de outra forma iriam contribuir para a energia de deformação não o fazem porque suas contribuições se anulam nos pontos de Gauss da integração reduzida. O número de modos espúrios de energia nula  $Z$  para um elemento pode ser previsto pela seguinte fórmula:

$$Z = C - E \quad \begin{cases} \leq 0 & \Rightarrow \text{estável} \\ > 0 & \Rightarrow \text{modos de deformação espúrios} \end{cases} \quad (7)$$

onde  $C$  é o número de condições independentes necessárias para um elemento estaticamente determinado não ser singular:

$$C = (\text{n}^\circ \text{ de graus de liberdade}) - (\text{n}^\circ \text{ de modos de corpo rígido})$$

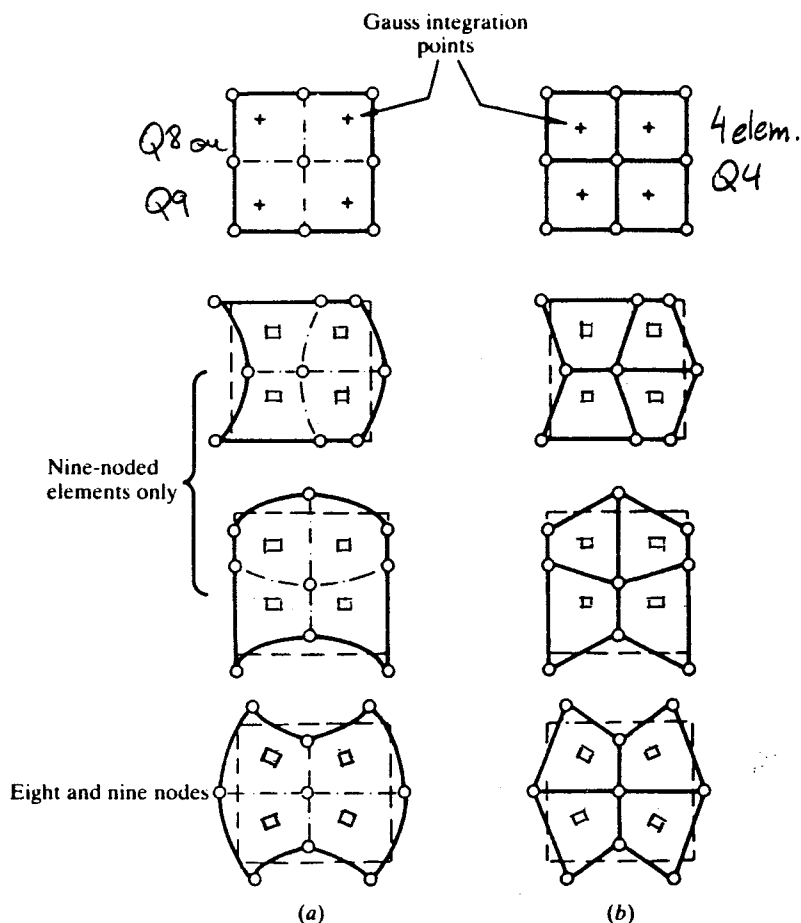
e  $E$  é o número de equações independentes usadas para construir  $[k]$  via integração numérica:

$$E = (\text{n}^\circ \text{ de pontos de Gauss}) \times (\text{n}^\circ \text{ de componentes de deformação})$$

Para elasticidade bidimensional, cada ponto de Gauss introduz três relações de deformação independentes (três componentes de deformação).

A partir da expressão (7) pode-se selecionar uma ordem de quadratura que resulte em um elemento estável, isto é, sem modos espúrios. Entretanto, não é somente o número de pontos de Gauss que é importante. O teste mais seguro é uma análise de autovalor do elemento para se conhecer todos os possíveis modos de energia nula.

A figura a seguir mostra exemplos de alguns modos espúrios. A coluna da esquerda da figura mostra modos de energia nula para um elemento quadrático (Q8 ou Q9) com uma regra de quadratura 2x2, e a coluna da direita mostra um conjunto de quatro elementos bi-lineares (Q4) com integração de um ponto de Gauss cada um. Observe que os quadrados infinitesimais situados nos pontos de Gauss permanecem indeformados para todos os modos espúrios mostrados.



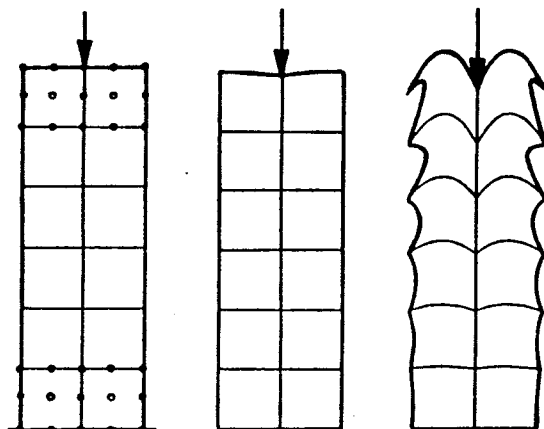
(a) Zero energy (singular) modes for eight- and nine-noded quadratic elements and (b) for a patch of bilinear elements with single integration points

Observe também que os modos espúrios são apresentados em cada linha da figura de forma semelhante para os elementos quadrático e linear. Na primeira coluna da figura, a segunda e a terceira linha mostram modos de energia nula para o elemento com 9 nós somente (estes modos não se apresentam para o elemento com 8 nós), e a quarta linha mostra um modo espúrio que aparece tanto no elemento com 9 quanto no elemento com 8 nós.

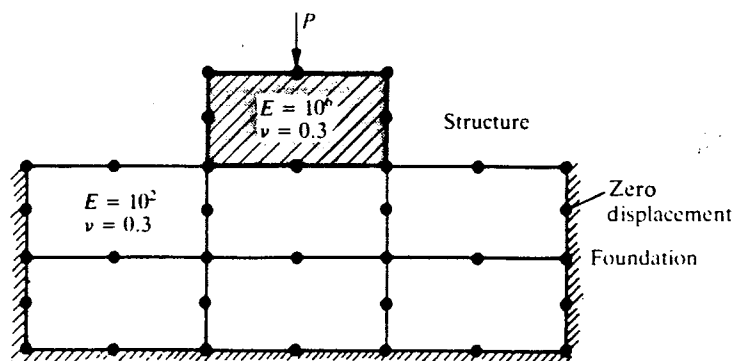
Os modos espúrios podem ser divididos em dois grupos:

- (a) Modos compartilhados por elementos adjacentes. Exemplos são os modos da segunda e terceira linha da figura.
- (b) Modos não compartilhados por elementos adjacentes. Exemplos são os modos da quarta linha da figura.

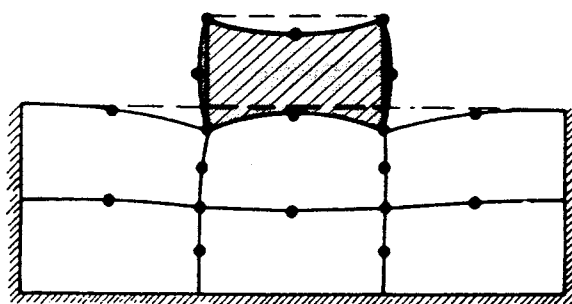
A figura a seguir mostra um exemplo de como uma integração reduzida pode excitar um modo espúrio compartilhado por vários elementos. A figura mostra um pilar modelado por elementos quadriláteros Lagrangeanos com 9 nós submetido a uma carga pontual. Dois tipos de integração numérica são utilizados: integração completa 3x3 (figura do meio) e integração reduzida 2x2 (figura da direita). Observe que, como os deslocamentos são restringidos na base, o efeito do modo espúrio vai decaindo do topo para a base do pilar. No entanto, é evidente que a resposta da estrutura é bastante influenciada pela presença do modo espúrio compartilhado.



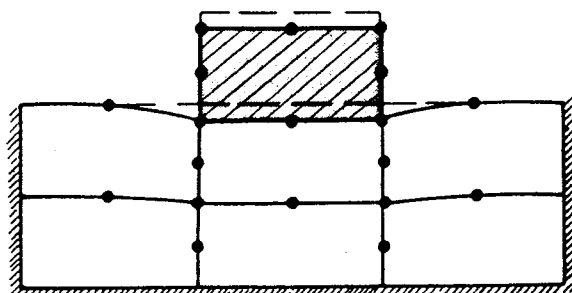
O efeito de um modo espúrio não compartilhado pode ser ilustrado a partir da figura a seguir. Neste exemplo a 'estrutura' é modelada por um único elemento quadrático de 8 nós, bem mais rígido do que a 'fundação' sobre a qual está centrada. O uso de uma integração reduzida 2x2 leva a uma resposta que claramente é afetada pelo modo espúrio não compartilhado deste elemento, enquanto que o resultado com uma integração completa 3x3 não apresenta esta influência.



(a) Problem and mesh



(b) 2 x 2 integration



(c) 3 x 3 integration

Deve ser observado que o modelo global não apresenta nenhum modo de energia nula pois mais de um elemento foi utilizado e existem condições de suporte suficientes no modelo. No entanto, a grande diferença entre a rigidez da estrutura e da fundação provocou o aumento da influência do modo espúrio quando se utilizou a integração 2x2.

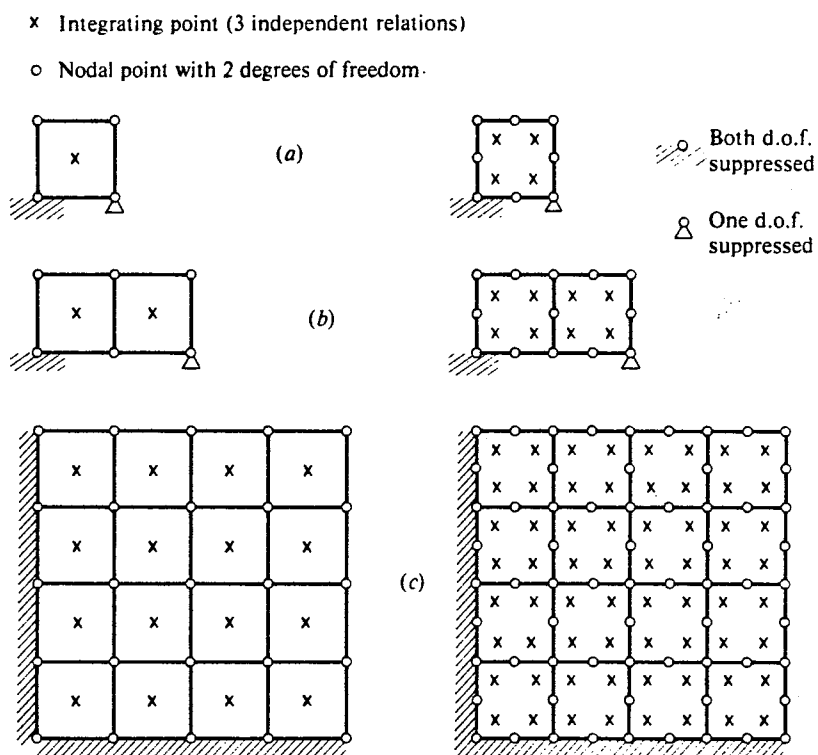
O exemplo anterior sugere que modos de energia nula de um elemento isolado, compartilhados ou não, podem ser eliminados quando o elemento é agrupado com outros elementos em uma malha e se um suficiente número de condições de suporte é considerado no modelo global. Neste caso, a expressão (7) anterior também pode ser utilizada para fornecer um indicativo sobre a estabilidade do modelo global. A única diferença estaria em interpretar  $C$  como:

$$C = (\text{n}^\circ \text{ de graus de liberdade total}) - (\text{n}^\circ \text{ de graus de liberdade restringidos})$$

A condição de estabilidade fica estabelecida da seguinte forma:

“Se o número total de incógnitas  $C$  excede o número total de relações independentes  $E$  introduzidas por todos os pontos de Gauss do modelo, então a matriz de rigidez global do modelo é singular”.

Isto é ilustrado na figura abaixo para modelos com elementos lineares e quadráticos.



	LINEAR		QUADRATIC	
	Degrees of Freedom	Independent Relation	Degrees of Freedom	Independent Relation
(a)	$4 \times 2 - 3 = 5$	$1 \times 3 = 3$ singular	$2 \times 8 - 3 = 13$	$4 \times 3 = 12$ singular
(b)	$6 \times 2 - 3 = 9$	$2 \times 3 = 6$ singular	$13 \times 2 - 3 = 23$	$8 \times 3 = 24$
(c)	$25 \times 2 - 18 = 32$	$16 \times 3 = 48$	$48 \times 2 = 96$	$64 \times 3 = 192$

## Ordem de integração para aproximação ótima de tensões e deformações

Dois fatos devem ser considerados a fim de se poder achar uma ordem de quadratura ótima para representação de tensões (ou deformações):

- (a) A formulação em deslocamentos do método dos elementos finitos pode ser interpretada como um procedimento para determinar uma solução aproximada pelo método dos erros mínimos quadráticos onde a medida de erro é uma função ponderada dos erros em tensão (ou deformação). Em outras palavras, a minimização da energia potencial total é equivalente a determinar uma aproximação mínima quadrática para as deformações exatas.

Pode-se demonstrar o seguinte teorema (veja Zienkiewicz ou Hinton e Campbell): a minimização do funcional da energia potencial total definido como

$$\pi_p = \int_V \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [E] \{\epsilon\} dV + \int_V \{u\}^T \{f\} dV$$

que fornece, com a discretização por elementos finitos, uma solução aproximada  $\{u\}$  para a solução exata  $\{\bar{u}\}$  é equivalente à minimização de um outro funcional definido como

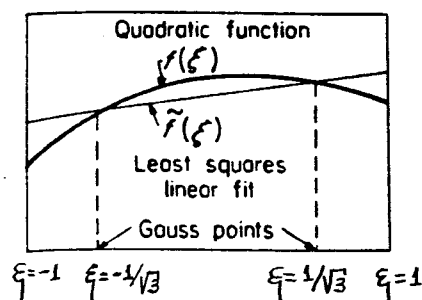
$$\pi_p^* = \int_V \frac{1}{2} (\{\epsilon\} - \{\bar{\epsilon}\})^T [E] (\{\epsilon\} - \{\bar{\epsilon}\}) dV$$

onde  $\{\epsilon\}$  e  $\{\bar{\epsilon}\}$  são as soluções para deformações aproximadas e exatas respectivamente. Observa-se que a minimização do último funcional tem um caráter de aproximação mínima quadrática.

- (b) Se um polinômio de  $n$ -ésimo grau  $f(\xi)$  (onde  $-1 \leq \xi \leq 1$ ) é amostrado em  $n$  pontos de uma quadratura de Gauss de  $n$ -ésima ordem, então os  $n$  valores de  $f(\xi)$  avaliados nestes pontos definem univocamente (interpolam) um novo polinômio  $\tilde{f}(\xi)$  de grau  $n-1$  que é uma aproximação mínima quadrática para  $f(\xi)$ .

Dito de outra forma, quando um polinômio de grau  $n-1$  é usado para aproximar no sentido de erros mínimos quadráticos um polinômio de grau  $n$ , é evidente que em alguns pontos a solução aproximada ( $n-1$ ) deve ser igual à solução exata ( $n$ ). Pode-se mostrar (veja Hinton e Campbell) que estes pontos correspondem aos pontos da quadratura de Gauss de  $n$ -ésima ordem (que integram exatamente um polinômio de grau  $2n-1$ ).

Isto é mostrado na figura abaixo para uma função quadrática. Esta proposição é exata para integração de Gauss em uma dimensão e aproximadamente satisfeita para integração em duas e três dimensões de elementos de forma distorcida.



Aliado ao primeiro fato, deve-se considerar que dentro da formulação em deslocamentos do método dos elementos finitos o campo de deformações exatas pode ser no melhor caso aproximado por polinômios locais  $\{\epsilon\} = [B]\{u\}$  de grau completo  $(p-m)$ , onde  $p$  é o grau das funções de forma

do elemento e  $m$  é a ordem de diferenciação em  $[B]$ . Portanto, a melhor aproximação disponível vai ser uma aproximação mínima quadrática por polinômios locais de grau  $(p-m)$ .

Considerando também o segundo fato, para se poder extrair o máximo da melhor aproximação disponível  $\hat{f} = [B]\{u\}$  com grau  $(n-1) = (p-m)$ , deve-se utilizar uma quadratura com

$$n = (p-m) + 1$$

pontos de Gauss em cada direção. Neste caso, como uma quadratura de Gauss com  $(p-m) + 1$  pontos integram exatamente um polinômio de grau  $2(p-m) + 1$ , a ordem do erro de aproximação vai ser  $O(h^{2(p-m)+2})$ , onde  $h$  é o tamanho do elemento.

Estas considerações foram feitas para elementos sem distorções de forma. No entanto, o caráter de aproximação no sentido de erros mínimos quadráticos sempre está presente na formulação em deslocamentos do método dos elementos finitos. Isto justifica a utilização da mesma ordem de quadratura para amostragem ótima de tensões para elementos sem e com distorções de forma.

Esta regra de quadratura tem se mostrado a mais apropriada (fornecendo resultados bastante precisos) para elementos sem grandes distorções. Burnett sugere que para elementos com 'consideráveis' distorções, a precisão pode ser melhorada se uma quadratura com erro da ordem  $O(h^{2(p-m)+3})$  for utilizada, isto é, com  $n = (p-m) + 3/2$ , ou seja,  $n = (p-m) + 2$  pontos de Gauss.

### Resumo das quadraturas reduzidas apropriadas

Em seguida estão resumidas as regras para integração reduzida na computação da matriz de rigidez de um elemento.

#### Regra I

A regra de integração deve ser no mínimo suficiente para integrar o volume do elemento exatamente.

#### Regra II

Para preservar a velocidade de convergência da energia potencial total devido ao erro de discretização, deve-se usar uma regra de integração com uma precisão de  $O(h^{2(p-m)+1})$ , o que resulta em  $n = (p-m) + 1/2$ , ou seja,  $n = (p-m) + 1$  pontos de Gauss em cada direção (integração não-triangular).

#### Regra III

A regra de integração deve ser escolhida de forma que o número total de incógnitas não exceda o número total de relações independentes introduzidas por todos os pontos de Gauss do modelo (no caso de elasticidade plana, 3 relações por cada ponto de Gauss), o que resultaria em uma matriz de rigidez global singular.

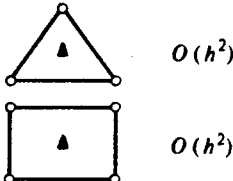
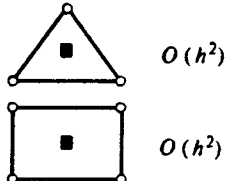
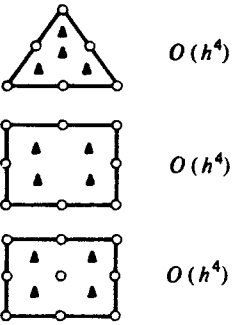
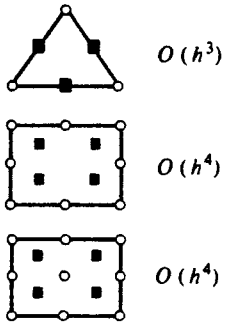
#### Regra IV

Para uma amostragem ótima de deformações (e tensões), deve-se usar uma regra de integração com uma precisão de  $O(h^{2(p-m)+2})$ , o que resulta em  $n = (p-m) + 1$  pontos de Gauss em cada direção (integração não-triangular).


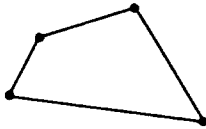
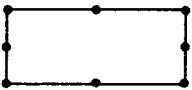

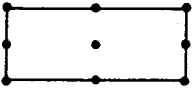
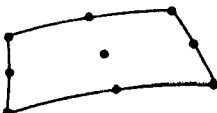
#### Regra V

Para elementos com 'consideráveis' distorções, a precisão pode ser melhorada se uma quadratura com erro da ordem  $O(h^{2(p-m)+3})$  for utilizada, isto é, com  $n = (p-m) + 3/2$ , resultando em  $n = (p-m) + 2$  pontos de Gauss em cada direção (integração não-triangular).

A figura a seguir mostra as quadraturas de Gauss para alguns elementos planos de continuidade  $C^0$  segundo as regras IV e II.

$p$	Regra IV $O(h^{2(p-m)+2})$	Regra II $O(h^{2(p-m)+1})$
1	$O(h^2)$	$\geq O(h)$
		
2	$O(h^4)$	$\geq O(h^3)$
		

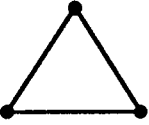

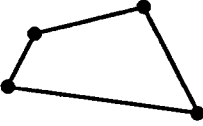
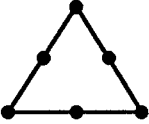
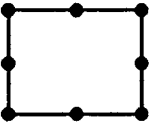
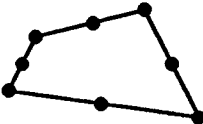

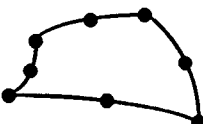
A figura a seguir (veja Bathe) resume resultados de análise de convergência e estabilidade para alguns elementos quadriláteros planos. A quadratura 'confiável' ("reliable") corresponde à avaliação exata da matriz de rigidez do elemento retangular (não distorcido). No caso de elementos distorcidos a ordem de integração mostrada deve ser suficiente.

Element	Reliable integration order	Reduced integration used in practice (with spurious zero energy mode(s))
4-node 	$2 \times 2$	—
4-node distorted 	$2 \times 2$	—
8-node 	$3 \times 3$	$2 \times 2$
8-node distorted 	$3 \times 3$	$2 \times 2$
9-node 	$3 \times 3$	$2 \times 2$
9-node distorted 	$3 \times 3$	$2 \times 2$



## Quadraturas de Gauss para Elementos $C^0$ Bidimensionais

(O número de pontos de Gauss para cada quadratura é indicado)

Elemento	Modelo Desloc.	Modelo Geom.	Regra <sup>1</sup> I	Regra II	Regra <sup>2</sup> III	Regra IV	Regra <sup>3</sup> V
	Linear	Triangular	1	1	1	1	1
	Linear	Retangular	1x1	1x1	2x2	1x1	1x1
	Linear	Linear	1x1	1x1	2x2	1x1	2x2
	Quadrático	Triangular	1	3	3	4	4
	Quadrático	Retangular	1x1	2x2	3x3	2x2	2x2
	Quadrático	Linear	1x1	2x2	3x3	2x2	3x3
	Quadrático	Quadrático	4	3	3	4	4 ou 7
	Quadrático	Quadrático	2x2	2x2	3x3	2x2	3x3

<sup>1</sup> Modos espúrios de deformação associados a uma energia de deformação nula podem aparecer.

<sup>2</sup> Baseado na análise de um único elemento isolado com condições de suporte mínimas essenciais para impedir movimentos de corpo rígido.

<sup>3</sup> Os números de pontos de Gauss indicados correspondem a quadraturas normalmente utilizadas para elementos distorcidos ou não.

## Referências

- Cook, R.D., Malkus, D.S., e Plesha, M.E., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, Terceira Edição, John Wiley & Sons, 1989. Seções 6.11 e 6.12.
- Zienkiewicz, O.C. e Taylor, R.L., *The Finite Element Method - Volume 1 Basic Formulation and Linear Problems*, Quarta Edição, McGraw-Hill, 1989. Seções 8.11, 11.4, 11.6 e 12.6.2.
- Bathe, K.-J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, 1982. Seção 5.8.1.
- Burnett, D.S., *Finite Element Analysis - From Concepts to Applications*, Addison-Wesley, 1987. Seção 8.3.1.
- Hinton, E. e Campbell, J.S., "Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions using a Least Square Method", *Int.J.Num.Meth.Engng.*, Vol. 8, pp.461-480, 1974.
- Shen, T.-H.G., "An Educational Computer Graphics Program for Examining the Behavior of Single Two-Dimensional Finite Elements", MSc Thesis, *Cornell University, School of Civil and Environmental Engineering*, 1988. Seção 4.4.

## Obtenção de Tensões

Uma vez determinado os deslocamentos nodais de um modelo de elementos finitos, as deformações e as tensões de um ponto qualquer de um elemento podem ser obtidas por

$$\{\epsilon\} = [B]\{d\} \quad e \quad \{\sigma\} = [E][B]\{d\}$$

A pergunta que se faz é: aonde dentro do elemento deve-se calcular as tensões?

A discussão anterior sobre integração reduzida para a computação da matriz de rigidez do elemento indica que existe um determinado número de pontos de amostragem onde as deformações (e tensões) têm um grau de precisão melhor do que em qualquer outro ponto.

Estes pontos correspondem a  $n = (p-m) + 1$  pontos de Gauss em cada direção, onde  $p$  é o grau do polinômio completo de mais alto grau das funções de interpolação do elemento e  $m$  é a ordem de diferenciação presente em  $[B]$  (elemento não distorcido).

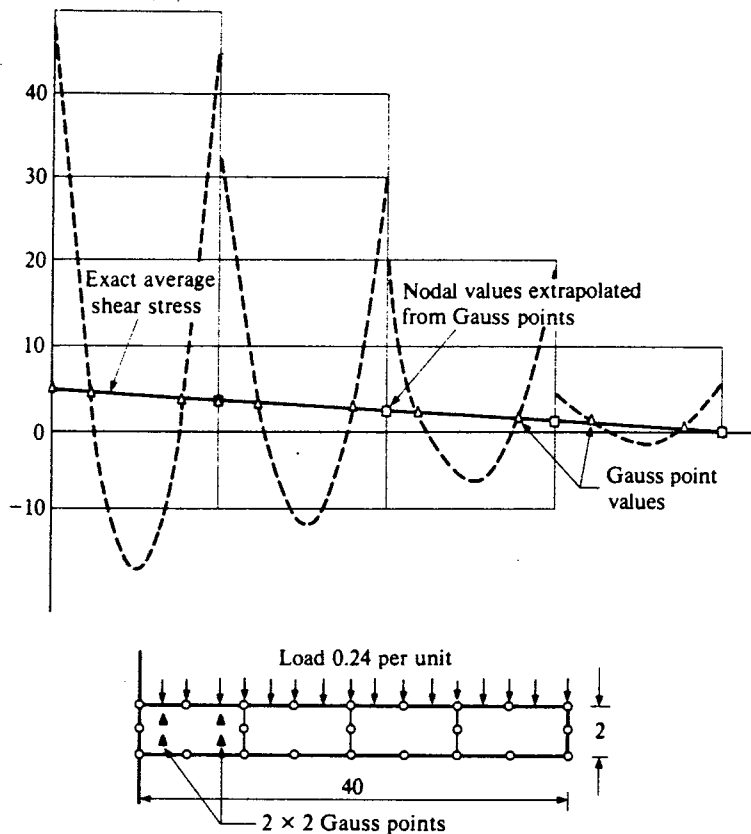
O erro na aproximação das deformações  $\{\epsilon\} = [B]\{d\}$ , que é um polinômio com grau  $(p-m)$ , é da ordem  $\mathcal{O}(h^{(p-m)+1})$ , onde  $h$  é um tamanho característico do elemento. Avaliando  $\{\epsilon\}$  em  $(p-m) + 1$  pontos de Gauss em cada direção (que integram exatamente um polinômio de grau  $2(p-m) + 1$ ), o erro na aproximação vai ser da ordem  $\mathcal{O}(h^{(p-m)+2})$ , portanto uma ordem melhor.

As deformações (ou tensões) avaliadas nestes pontos quando interpoladas resultam, no caso unidimensional, em um polinômio de grau  $(p-m)$  que é uma aproximação mínima quadrática para um polinômio de grau  $(p-m)+1$ . Este caráter de aproximação mínima quadrática é consistente com a formulação em deslocamentos do método dos elementos finitos, onde as soluções em deslocamentos são obtidas (pode-se mostrar) de forma a minimizar o quadrado do erro na aproximação de deformações (ou tensões).

No caso bidimensional (ou tridimensional) a interpolação de  $n \times n$  pontos de Gauss, onde  $n = (p-m)+1$ , não vai corresponder exatamente a uma aproximação mínima quadrática para as tensões (ou deformações), embora muitas vezes isto seja considerado.

Existem exemplos clássicos onde a obtenção de componentes de tensão (em especial tensões de cisalhamento) em pontos de Gauss de uma quadratura de ordem  $(p-m)+1$  pode fornecer resultados substancialmente melhores do que em outros pontos.

Seja por exemplo a análise de uma viga em balanço usando quatro elementos "serendipity" quadráticos com oito nós mostrados na figura a seguir. Enquanto os resultados para deslocamentos e tensão axial são excelentes, a tensão de cisalhamento apresenta uma distribuição parabólica em cada elemento que é uma aproximação muito ruim para as tensões corretas. Entretanto, os valores amostrados em pontos de Gauss de uma quadratura  $2 \times 2$  ( $n = p-m+1$ ) são uma excelente representação da tensão de cisalhamento média correta.



A cantilever beam with four quadratic (Q8) elements. Stress sampling at cubic order (2 x 2) Gauss points with extrapolation to nodes

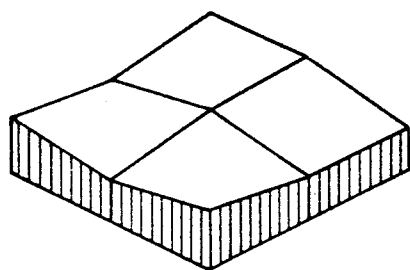
• Extrapolação e suavização de tensões

Uma vez obtidos os resultados de tensões em pontos de Gauss de uma quadratura de ordem  $\mathcal{O}(h^{2(p-m)+2})$ , o que para o caso unidimensional corresponde a  $m=(p-m)+1$ , deseja-se obter uma representação global das tensões, de preferência na forma de valores médios nodais.

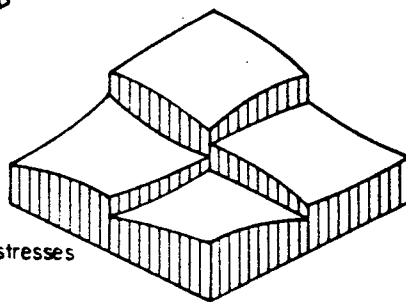
Portanto, os valores de tensões obtidos nos pontos de Gauss devem ser extrapolados para os nós e suavizados.

Este procedimento pode ser feito de uma forma global ou local. Na suavização global de tensões, os valores nodais de tensões são obtidos de forma a minimizar o erro global (de todo um modelo) na avaliação das tensões nos pontos de Gauss (veja Hinton e Campbell, "Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Squares Method", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 8, pp. 461-480, 1974).

O procedimento usual, no entanto, é uma suavização local de tensões. Neste caso os valores das tensões nos pontos de Gauss são extrapolados para os nós dentro de cada elemento. Após este passo, os valores de tensões para um determinado nó são diferentes em cada um dos elementos que contêm este nó. O passo seguinte, portanto, é a suavização dos valores nodais, o que normalmente é feito através de uma média dos valores vindos de cada elemento adjacente ao nó.



smoothed stresses



Unsmoothed stresses

A extrapolação dos valores nos pontos de Gauss para os nós pode ser feita de duas formas: Ou os valores são interpolados ou faz-se um ajuste no sentido dos erros mínimos quadráticos. (Estes procedimentos normalmente se confundem para o caso unidimensional).

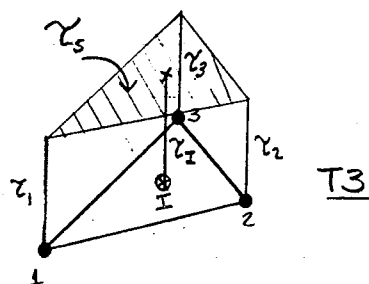
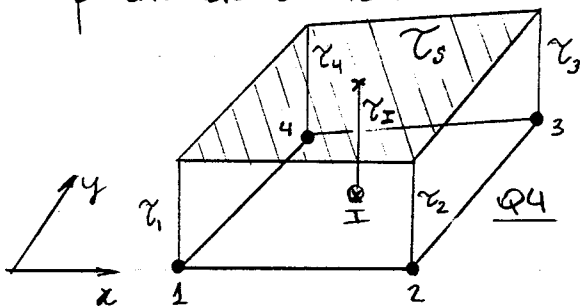
Qualquer que seja o procedimento, a curva (ou superfície) que extrapola dos pontos de Gauss para os nós é chamada de curva (ou superfície) de suavização  $\zeta_s$

A escolha entre interpolação dos valores de tensão nos pontos de Gauss e ajuste de erros mínimos quadráticos é por mera conveniência já que não existe evidência numérica mostrando a superioridade de um ou de outro procedimento.

De qualquer forma, o objetivo é obter uma matriz de transformação que relaciona as tensões nos pontos de Gauss ótimos para amostragem com as tensões nodais:

$$\{\zeta\}_{\text{nódes}} = [TR] \{\zeta\}_{\text{opt}}$$

No caso de elementos lineares ( $p=1$ ), o número de pontos de amostragem ótimos é  $n=(p-m)+1=1$ . Neste caso a superfície de suavização é um plano paralelo ao plano do elemento:



Para os elementos lineares, as tensões nodais extrapoladas têm o mesmo valor da tensão no ponto de Gauss. Assim,

$$\underline{Q4} \quad \begin{Bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \end{Bmatrix}_{\text{nodes}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \{\chi_I\}_{\text{opt}}$$

$$\underline{T3} \quad \begin{Bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{Bmatrix}_{\text{nodes}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \{\chi_I\}_{\text{opt}}$$

No caso de elementos quadráticos a superfície de suavização pode ser descrita em função de coordenadas cartesianas ou paramétricas do elemento. Existe uma vantagem computacional em se definir a superfície de suavização no espaço paramétrico pois existe uma única matriz  $[TR]$  aplicável para todos os elementos de um mesmo tipo, distorcidos ou não. Como também não existe evidência numérica de que um método é melhor do que outro, normalmente a superfície é descrita em coordenadas paramétricas. Portanto,

$$\chi_s = \chi_s(\xi, \eta).$$

Então, para se obter a matriz de extrapolação  $[TR]$ , deve-se inicialmente obter  $\chi_s$ .

Vai-se exemplificar primeiro a extrapolação nodal baseada na interpolação de valores nos pontos de Gauss para o elemento quadrático com oito nós (Q8).



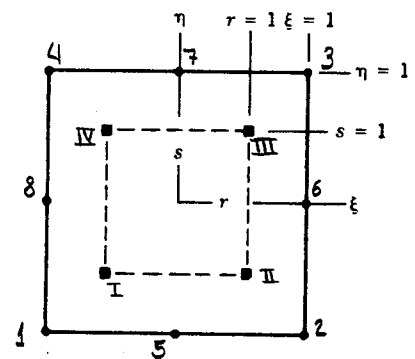
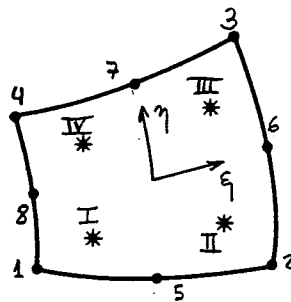
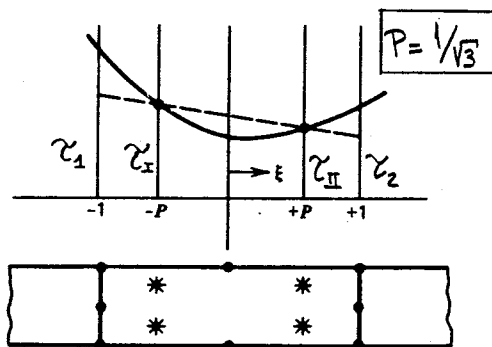
Como a amostragem ótima de tensões para este elemento é de  $2 \times 2$  pontos de Gauss, pode-se usar as funções de interpolação bilineares:

$$N_{\text{I}} = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)$$

$$N_{\text{II}} = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$$

$$N_{\text{III}} = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)$$

$$N_{\text{IV}} = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$$



Usando estas funções de interpolação os valores nodais podem ser calculados como mostrado abaixo. Por exemplo no ponto 1,  $r = s = -1/P$ . Assim,

$$\tau_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} a^2 & ab & b^2 & ab \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{\text{I}} \\ \tau_{\text{II}} \\ \tau_{\text{III}} \\ \tau_{\text{IV}} \end{Bmatrix}$$

onde,

$$a = 1 + \sqrt{3} \quad , \quad b = 1 - \sqrt{3}$$

No ponto 5,  $r = 0$  e  $s = -1/P$ . Portanto,

$$\tau_5 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} a & a & b & b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{\text{I}} \\ \tau_{\text{II}} \\ \tau_{\text{III}} \\ \tau_{\text{IV}} \end{Bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \\ \chi_5 \\ \chi_6 \\ \chi_7 \\ \chi_8 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} a^2 & ab & b^2 & ab \\ ab & a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & ab & a^2 & ab \\ ab & b^2 & ab & a^2 \\ a & a & b & b \\ b & a & a & b \\ b & b & a & a \\ a & b & b & a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \chi_I \\ \chi_{II} \\ \chi_{III} \\ \chi_{IV} \end{pmatrix}_{opt}$$

A interpolação bilinear foi feita porque existem exatamente quatro pontos de Gauss para a amostragem ótima de tensões do elemento quadrático com oito nós. Neste caso o número de coeficientes que define a superfície de suavização é quatro:

$$\chi_s(\xi, \eta) = c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi\eta.$$

No caso de uma superfície definida por uma aproximação mínima quadrática, o número de coeficientes no polinômio que define a superfície é menor do que o número de pontos de Gauss.

Pode-se justificar a escolha da extrapolação por aproximação mínima quadrática por três motivos:

- É procedimento mais geral que a interpolação, independentemente do número de pontos de Gauss.
- É consistente com a interpretação da formulação em deslocamentos do método dos elementos finitos como um procedimento onde a solução é obtida via uma aproximação mínima quadrática para as tensões.

(c) Elementos de ordem mais alta provavelmente comportam-se melhor com uma extrapolação por ajuste mínimo quadrático pois eles têm um grande número de valores ótimos para tensões e, neste caso, a superfície de suavização é menos oscilatória do que a obtida por interpolação.

Em seguida descreve-se a obtenção da matriz de extrapolação via aproximação mínima quadrática para os elementos quadráticos com seis e oito nós. A referência é:

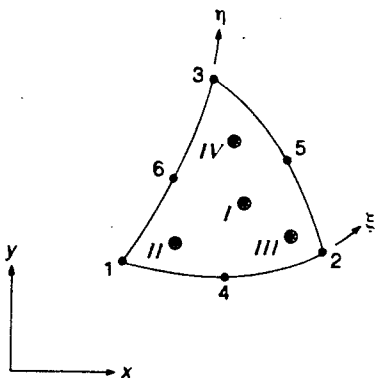
Burnett, D.S., "Finite Element Analysis - From Concepts to Applications", Addison-Wesley, 1987.

No caso de elementos quadráticos a superfície de suavização é definida como um plano (polinômio bidimensional completo do primeiro grau) no espaço paramétrico do elemento:

$$\chi_s(\xi, \eta) = c_1 + c_2\xi + c_3\eta$$

que tem três coeficientes a serem determinados pelo procedimento de aproximação mínima quadrática.

Para o elemento com seis nós, as coordenadas paramétricas e os pontos de amostragem ótima de tensões estão mostrados abaixo:



$$\{\tau\}_{\text{nodes}} = [TR]\{\tau\}_{\text{opt}}$$

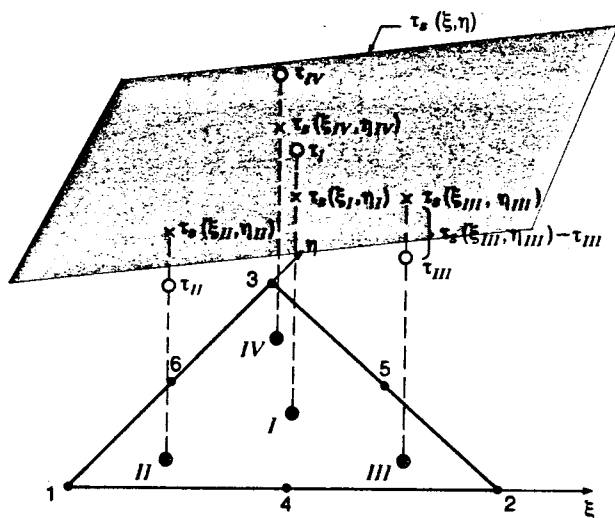
$$\{\tau\}_{\text{nodes}} = \begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} \quad \{\tau\}_{\text{opt}} = \begin{Bmatrix} \tau_I \\ \tau_{II} \\ \tau_{III} \\ \tau_{IV} \end{Bmatrix}$$

A equação de  $\tau_s(\xi, \eta)$  define um plano que não pode em geral coincidir com os valores de tensão nos quatro pontos de Gauss. Seja  $e(c_1, c_2, c_3)$  o erro mínimo quadrático:

$$e(c_1, c_2, c_3) = \sum_{i=1}^{IV} [\tau_s(\xi_i, \eta_i) - \tau_i]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{IV} [c_1 + c_2 \xi_i + c_3 \eta_i - \tau_i]^2$$

onde cada termo está ilustrado na figura abaixo:



O erro é minimizado impondo-se as seguintes condições:

$$\frac{\partial e}{\partial c_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial e}{\partial c_1} = 0 : \sum_{i=1}^{IV} [c_1 + c_2 \xi_i + c_3 \eta_i - \tau_i] = 0$$

$$\frac{\partial e}{\partial c_2} = 0 : \sum_{i=1}^{IV} [c_1 + c_2 \xi_i + c_3 \eta_i - \tau_i] \xi_i = 0$$

$$\frac{\partial e}{\partial c_3} = 0 : \sum_{i=1}^{IV} [c_1 + c_2 \xi_i + c_3 \eta_i - \tau_i] \eta_i = 0$$

Estas relações escritas em uma forma matricial ficam:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{IV} 1 & \sum_{i=1}^{IV} \xi_i & \sum_{i=1}^{IV} \eta_i \\ \sum_{i=1}^{IV} \xi_i & \sum_{i=1}^{IV} \xi_i \xi_i & \sum_{i=1}^{IV} \xi_i \eta_i \\ \sum_{i=1}^{IV} \eta_i & \sum_{i=1}^{IV} \xi_i \eta_i & \sum_{i=1}^{IV} \eta_i \eta_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \xi_I & \xi_{II} & \xi_{III} & \xi_{IV} \\ \eta_I & \eta_{II} & \eta_{III} & \eta_{IV} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_I \\ \tau_{II} \\ \tau_{III} \\ \tau_{IV} \end{Bmatrix}$$

$\uparrow$   $[P]$   $\uparrow$   $[Q]$

ou,

$$[P]\{c\} = [Q]\{\tau\}_{opt}$$

Então

$$\{c\} = [S]\{\tau\}_{opt}$$

onde

$$[S] = [P]^{-1}[Q]$$

As coordenadas paramétricas dos pontos de Gauss são:

$$\begin{array}{cccc}
 \xi_I = \frac{1}{3} & \xi_{II} = \frac{1}{5} & \xi_{III} = \frac{3}{5} & \xi_{IV} = \frac{1}{5} \\
 \eta_I = \frac{1}{3} & \eta_{II} = \frac{1}{5} & \eta_{III} = \frac{1}{5} & \eta_{IV} = \frac{3}{5}
 \end{array}$$

Então,

$$[P] = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{31}{75} & \frac{22}{75} \\ 1 & \frac{22}{75} & \frac{31}{75} \end{bmatrix}$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$e \quad [S] = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & 23 & -7 & -7 \\ 0 & -30 & 30 & 0 \\ 0 & -30 & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

A matriz  $[S]$  define os coeficientes da superfície de sua-  
vização  $\chi_s = c_1 + c_2\xi + c_3\eta$  diretamente a partir dos valores  
de tensão nos pontos de Gauss.

Para se avaliar os valores de tensão nos nós deve-se substituir  
na equação de  $\chi_s$  as coordenadas paramétrica de cada nó:

$$\begin{array}{cccccc} \xi_1 = 0 & \xi_2 = 1 & \xi_3 = 0 & \xi_4 = 1/2 & \xi_5 = 1/2 & \xi_6 = 0 \\ \eta_1 = 0 & \eta_2 = 0 & \eta_3 = 1 & \eta_4 = 0 & \eta_5 = 1/2 & \eta_6 = 1/2 \end{array}$$

Com isto pode-se construir uma matriz de avaliação  $[E]$  relacionan-  
do os valores nodais de tensão com os coeficientes de  $\chi_s$ :

$$\begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$$

↑  
[E]

$$\{\tau\}_{\text{nodes}} = [E]\{c\}$$

E finalmente, tem-se a partir de  $\{c\} = [S]\{\tau\}_{\text{opt}}$ ,

$$\{\tau\}_{\text{nodes}} = [E][S]\{\tau\}_{\text{opt}}$$

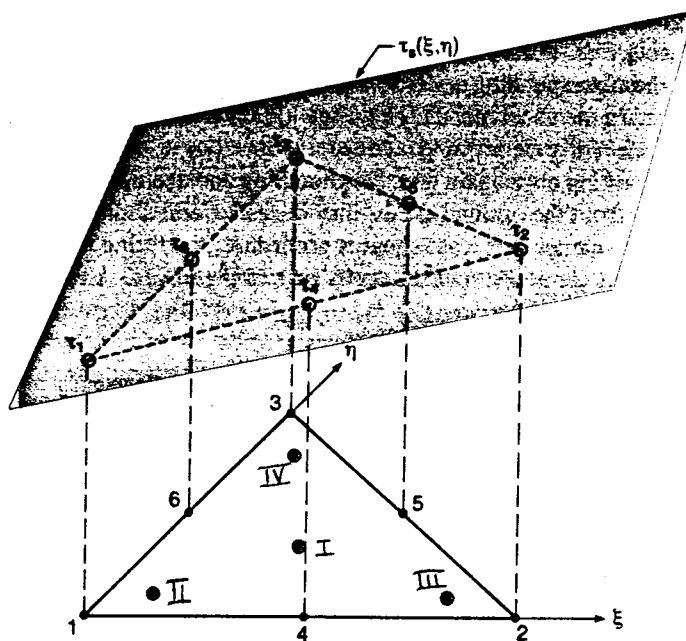
↑  
[TR]

A matriz de extrapolação que obtém os valores nodais em função de valores nos pontos de Gauss é:

$$[TR] = [E][S]$$

$$[TR] = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & 23 & -7 & -7 \\ 3 & -7 & 23 & -7 \\ 3 & -7 & -7 & 23 \\ 3 & 8 & 8 & -7 \\ 3 & -7 & 8 & 8 \\ 3 & 8 & -7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\{\chi\}_{nodes} = [TR] \{\chi\}_{opt}$$







A partir das coordenadas paramétricas do nós, constroem-se a matriz de avaliação  $[E]$  que relaciona valores nodais com os coeficientes de  $\tau_s(\xi, \eta)$ :

$$\begin{matrix} \left. \begin{matrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \\ \tau_7 \\ \tau_8 \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix} \\ \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ \{\tau\}_{\text{nodes}} \qquad \qquad [E] \end{matrix}$$

$$\{\tau\}_{\text{nodes}} = [E]\{c\}$$

Finalmente,

$$\{\tau\}_{\text{nodes}} = [E][S]\{\tau\}_{\text{opt}}$$

e,

$$[TR] = [E][S] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1+2\sqrt{3} & 1 & 1 & 1-2\sqrt{3} \\ 1 & 1-2\sqrt{3} & 1+2\sqrt{3} & 1 \\ 1-2\sqrt{3} & 1 & 1 & 1+2\sqrt{3} \\ 1 & 1+2\sqrt{3} & 1-2\sqrt{3} & 1 \\ 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

## • Suavização global por média de valores nodais

A suavização local de tensões é feita na base de cada elemento em separado. Isto resulta em valores nodais que não são únicos, ou seja, vai haver um valor nodal para cada elemento que contem um determinado nó.

Um procedimento usual é tirar uma média dos valores de tensão de cada nó vindos de cada elemento que o contem. No entanto, há casos em que deve existir uma discontinuidade na tensão, como por exemplo na interface entre dois materiais distintos. Neste caso deve existir um valor médio de tensão em um nó de interface para cada grupo de elementos que são do mesmo material.

Em seguida é descrito um algoritmo para obtenção de valores médios nodais no caso de um único material:

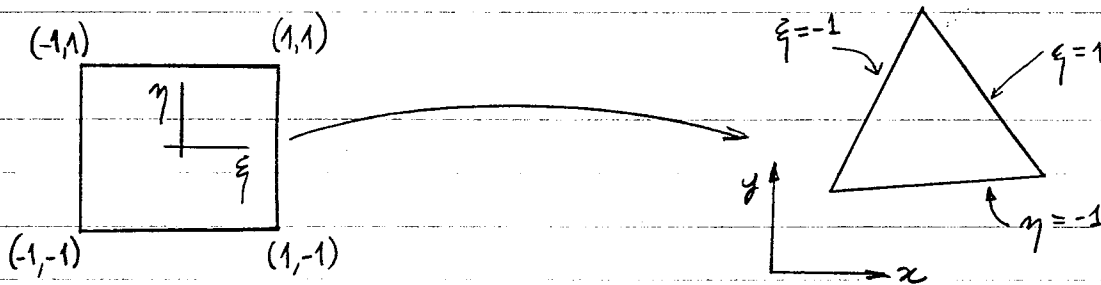
Zera $\zeta_i$	(inicializa vetor de tensões nodais)
Zera $m_{ei}$	(inicializa vetor de nº de elem. adjacentes aos nós)
do {	(faça para cada elemento do modelo)
do {	(faça para cada nó do elemento)
$i = \text{elem-node}(j)$	(pegue o nó do elemento)
$\zeta_i = \zeta_i + \zeta_{ej}$	(some a tensão deste par elemento-nó)
$m_{ei} = m_{ei} + 1$	(incremente o nº de elementos adjacentes)
}od	
}od	
$\zeta_i = \zeta_i / m_{ei}$	(tire a média de cada valor nodal)



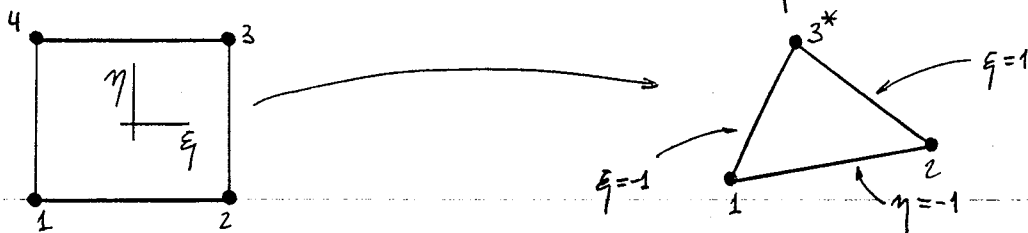
De forma diferente, Newton [NEWT73] usa as funções de forma convencionais (família "Serendipity") na sua formulação, mas os resultados são consistentes com os do enfoque anterior.

• Caso bidimensional

Basicamente, a degeneração de elementos isoparamétricos quadriláteros para triângulos consiste no mapeamento de um espaço quadrado de coordenadas naturais para um espaço real triangular. Na figura abaixo, o lado  $\eta=1$  é colapsado para um vértice. Obviamente, o determinante do Jacobiano desta transformação é nulo para  $\eta=1$ , mas, com a integração numérica, nunca se calcula a inversa do Jacobiano neste ponto.

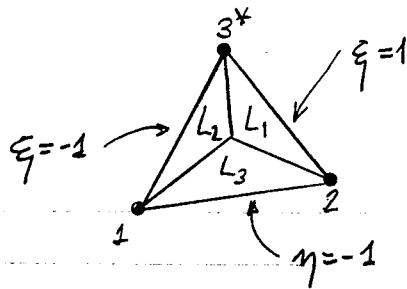


Para elementos lineares, para se obter as funções de forma do elemento triangular a partir das funções de forma do elemento quadrangular, a única modificação a ser feita é somar as duas funções de forma dos nós colapsados:



$$N_{3^*}(\xi, \eta) = N_3(\xi, \eta) + N_4(\xi, \eta)$$

Pode-se mostrar que no triângulo colapsado mostrado abaixo



$$L_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4};$$

$$L_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4};$$

$$L_3 = \frac{1+\eta}{2}$$

Nota-se que:

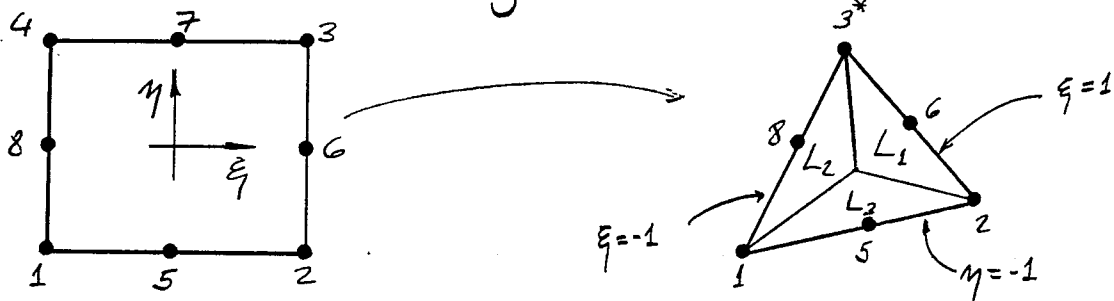
$$N_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} = L_1$$

$$N_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} = L_2$$

$$N_3^* = N_3 + N_4 = \frac{1+\eta}{2} = L_3$$

Portanto, no caso linear as funções de forma do elemento quadrilátero (Q4) degenerado em um triângulo correspondem exatamente ao elemento CST (T3).

Infelizmente, este não é caso para os elementos quadráticos. Isto é mostrado como se segue.



$$N_3^* = N_3(\xi, \eta) + N_7(\xi, \eta) + N_4(\xi, \eta)$$

Pode ser mostrado que, sem nenhuma modificação, algumas funções de forma do elemento degenerado não correspondem às

funções de forma do elemento LST (TG):

$$\begin{aligned}
 N_3^* &= (2L_3 - 1)L_3 && \equiv N_3 \text{ do LST} \\
 N_6 &= 4L_2L_3 && \equiv N_6 \text{ do LST} \\
 N_8 &= 4L_1L_3 && \equiv N_8 \text{ do LST} \\
 N_1 &= (2L_1 - 1)L_1 && \equiv N_1 \text{ do LST} \\
 N_2 &= (2L_2 - 1)L_2 && \equiv N_2 \text{ do LST} \\
 N_5 &= 4L_1L_2 && \equiv N_5 \text{ do LST}
 \end{aligned}$$

As modificações propostas por Newton [NEWT73] são:

$$\begin{aligned}
 N_1^* &= N_1 + \Delta N \\
 N_2^* &= N_2 + \Delta N \\
 N_5^* &= N_5 - 2\Delta N
 \end{aligned}$$

$$\text{onde } \Delta N = \frac{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}{8} = \frac{2L_1L_2L_3}{L_1+L_2}$$

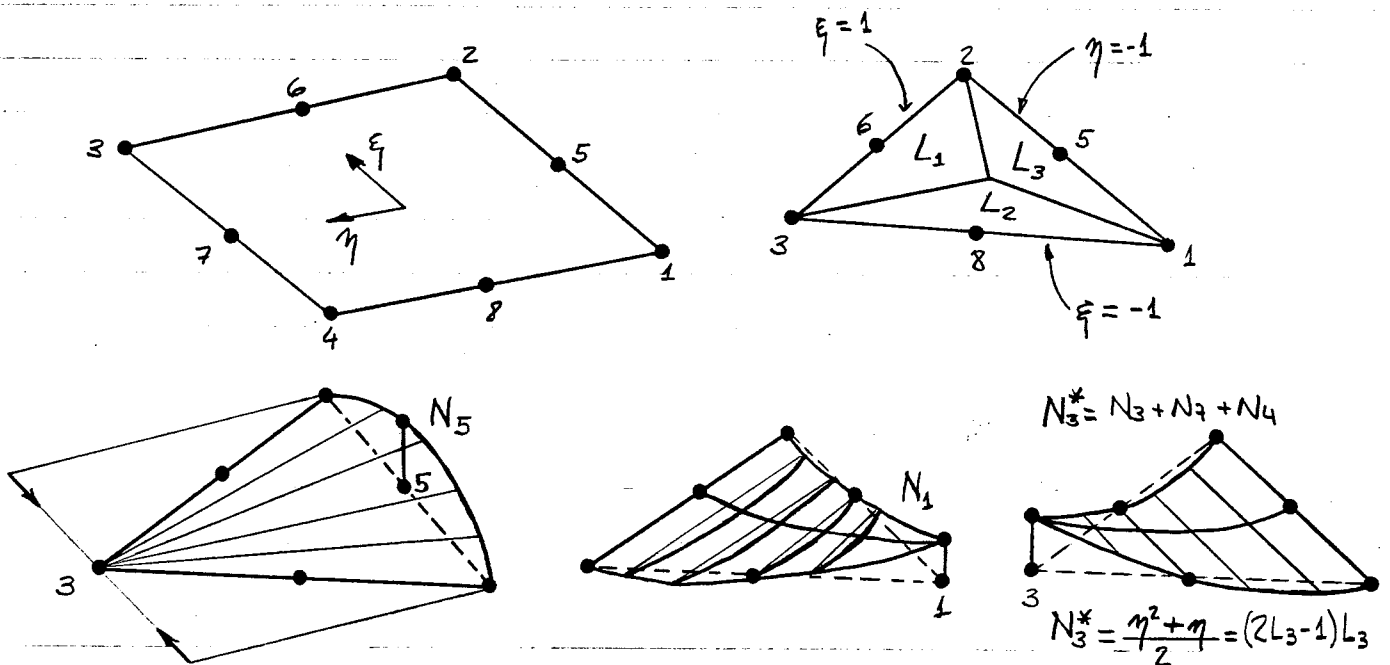
de tal forma que,  $\sum N_i = 1$ , e

$$\begin{aligned}
 N_1^* &= (2L_1 - 1)L_1 \\
 N_2^* &= (2L_2 - 1)L_2 \\
 N_5^* &= 4L_1L_2
 \end{aligned}$$

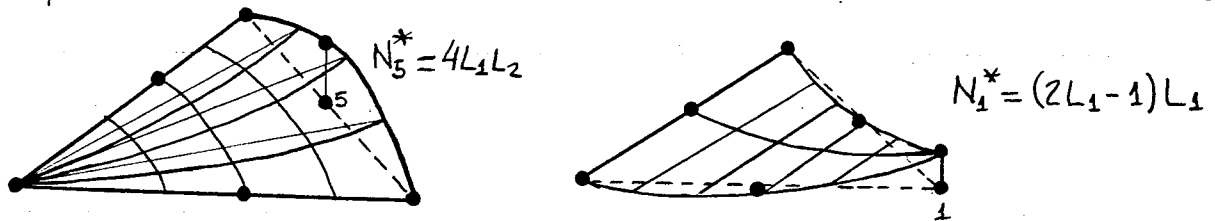
Exercício: Considerando que  $\begin{cases} L_1 = (1-\xi)(1-\eta)/4 \\ L_2 = (1+\xi)(1-\eta)/4 \\ L_3 = (1+\eta)/2 \end{cases}$

verifique se as funções de forma do elemento quadrilátero com oito nós degenerado ( $N_1^* = N_1 + \Delta N$ ,  $N_2^* = N_2 + \Delta N$ ,  $N_3^* = N_3 + N_4 + N_7$ ,  $N_5^* = N_5 - 2\Delta N$ ,  $N_6^* = N_6$ ,  $N_8^* = N_8$ ) correspondem às funções de forma do elemento LST.

A necessidade das modificações das funções de forma do quadrilátero quadrático degenerado pode também ser vista a partir de um enfoque físico. De acordo com Irons [IRON74] a função de forma do nó de meio de lado oposto ao lado colapsado é singular no vértice colapsado. Isto pode ser visto na figura abaixo para  $N_5$ :



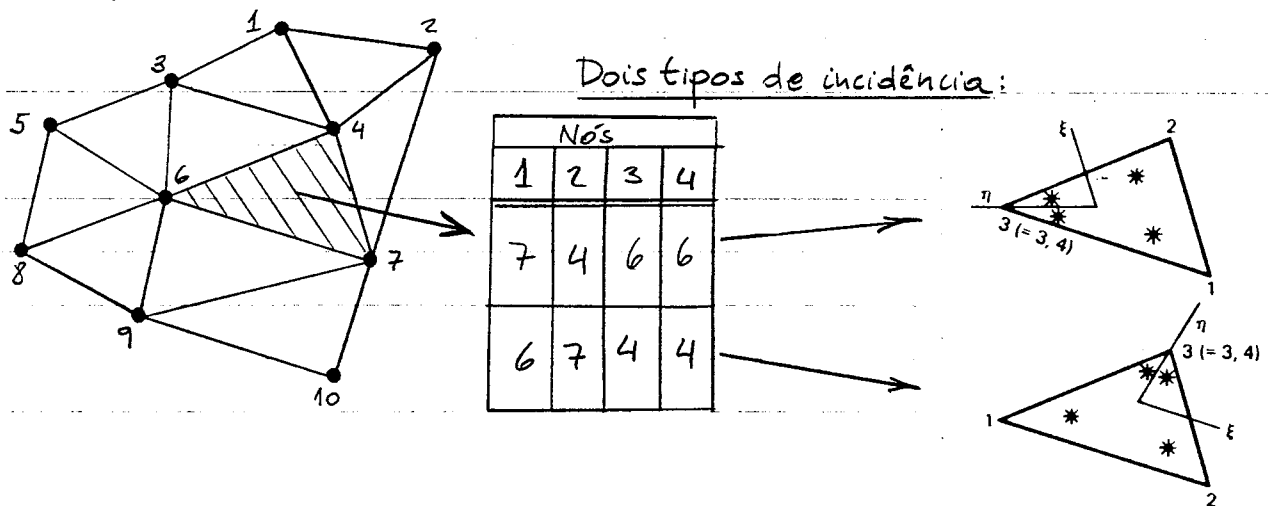
A superfície é reta ao longo de linhas radiais emanando do nó 3, o que acarreta em uma singularidade naquela posição. Também pode ser visto a partir da forma das superfícies  $N_1$  e  $N_3^*$  que  $N_5$  não corresponde ao elemento LST (T6). A superfície correta da função de forma de um nó de canto do LST é uma porção de um cilindro parabólico com geratrizes paralelas ao lado do triângulo oposto ao nó, tal como a superfície de  $N_3^*$ . A correção em  $N_5$  eliminam a singularidade no nó 3. As correções em  $N_5$ ,  $N_1$  (e  $N_2$ ) tornam as funções consistentes com o elemento LST. Isto é mostrado abaixo:



## • Integração numérica

A integração numérica de elementos quadriláteros degenerados é processada como para qualquer elemento quadrilátero. Os valores da coordenadas paramétricas variam também entre  $-1$  e  $1$ . Como nunca existe um ponto de Gauss sobre o nó colapsado, onde a matriz do Jacobiano é singular (determinante nulo), a integração numérica pode ser feita normalmente. Cook [COOK81] sugere que a performance do elemento decai perto do nó colapsado, mas em geral não se observa nenhum problema com estes elementos degenerados.

É interessante observar que as posições dos pontos de Gauss no espaço real cartesiano dependem da numeração da incidência do elemento, tal como mostrado abaixo:



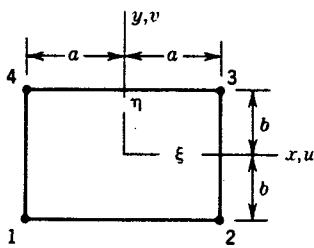
Sob este aspecto o elemento triangular resultante perde a invariância quanto à orientação geométrica quando comparado com a formulação baseada em coordenadas naturais triangulares.



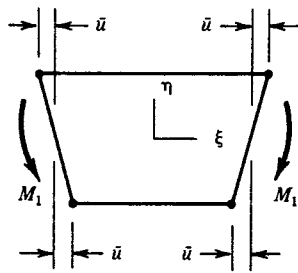
## Elementos Finitos Sub-paramétricos e Incompatíveis (continuidade $C^0$ )

- Motivação: Por que o elemento Q4 é rígido demais no comportamento de flexão?

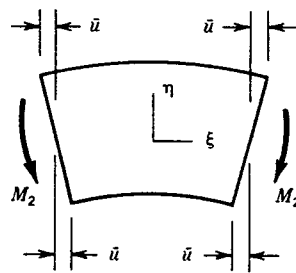
Considere o comportamento à flexão pura:



(a)  
Elemento Bilinear Q4



(b)  
Deformação do Q4 por flexão



(c)  
Deformação correta por flexão

Comportamento correto de flexão:

$$u = \xi \eta \bar{u}$$

$$v = (1 - \xi^2) \frac{a \bar{u}}{2b} + (1 - \eta^2) \frac{\sqrt{3} b \bar{u}}{2a}$$

$$\left. \begin{array}{l} \xi = \frac{x}{a} \\ \eta = \frac{y}{b} \end{array} \right\} \Rightarrow \epsilon_x = \eta \frac{\bar{u}}{a} \quad \epsilon_y = -\sqrt{3} \eta \frac{\bar{u}}{a} \quad \gamma_{xy} = 0$$

Comportamento do elemento Q4:

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i \quad v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i$$

$$u = N_1 \bar{u} - N_2 \bar{u} + N_3 \bar{u} - N_4 \bar{u} = \xi \eta \bar{u}$$

$$v = N_1 \cdot 0 + N_2 \cdot 0 + N_3 \cdot 0 + N_4 \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \epsilon_x = \eta \frac{\bar{u}}{a} \quad \checkmark$$

$$\epsilon_y = 0 \quad \times$$

$$\gamma_{xy} = \xi \frac{\bar{u}}{b} = \frac{\bar{u}}{ab} \kappa \longrightarrow \text{cisalhamento espúrio chamado de "parasita"}$$

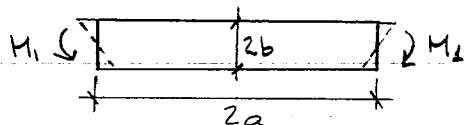
Pode-se mostrar que

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{1}{1+\eta} \left[ \frac{1}{1-\eta} + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{b} \right)^2 \right]$$

$$M_1 \rightarrow Q4$$

$$M_2 \rightarrow \text{correto}$$

Para razões  $a/b$  grandes  $M_1 \gg M_2$  e o elemento "bloqueia" devido ao grande cisalhamento que aparece.



O elemento Q4 trabalhando à flexão pura armazena energia de deformação causada por deformação normal pura e por deformação por distorção (cisalhamento) espúria.

• Ideia do elemento incompatível:

"Adicionar modos mais altos de deformação sem adicionar nós no elemento".

No caso do elemento bilinear a ideia seria adicionar modos de deformação que expandam o campo de deslocamentos  $u$  e  $v$  dos termos  $(1-\xi^2)$  e  $(1-\eta^2)$ .

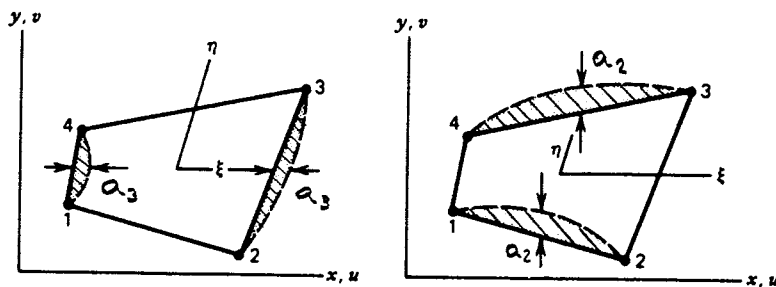
$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i + (1-\xi^2) a_1 + (1-\eta^2) a_3$$

$$v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i + (1-\xi^2) a_2 + (1-\eta^2) a_4$$

Os coeficientes  $a_1, a_2, a_3$  e  $a_4$  são chamados de graus-de-liberdade sem nó, ou não associados a nó ("nodeless d.o.f.").

O elemento assim obtido é chamado de  $Q_6$  por ter seis nós, sendo quatro nós externos e dois nós internos associadas às funções de forma  $(1-\xi^2)$  e  $(1-\eta^2)$ , respectivamente.

O elemento  $Q_6$  é incompatível ou não-conforme porque, por exemplo na figura abaixo, o modo  $u = (1-\eta^2) a_3$  pode ser ativado em um elemento e não ativado em um elemento adjacente.



### • Elementos finitos sub-paramétricos

Os elementos com graus-de-liberdade sem nó, como o elemento incompatível  $Q_6$ , pertencem à classe dos elementos sub-paramétricos pois os graus-de-liberdade adicionais são usados somente para interpolar os deslocamentos e não são usados para o mapeamento da geometria do elemento.

Um outro exemplo é o elemento  $Q_5$ , cujo nó interno adicional está adicionado à função de forma

$$N_5 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2).$$

O elemento resultante é compatível pois esta função de forma (na forma de uma "bolha") é nula ao longo do contorno do elemento.

Neste caso, o mapeamento da geometria do elemento é feito da mesma maneira que o elemento  $Q_4$ , isto é, as funções de mapeamento dos elementos  $Q_5$  e  $Q_6$  para a geometria são:

$$M_1 = N_1$$

$$M_2 = N_2$$

$$M_3 = N_3$$

$$M_4 = N_4$$

De forma semelhante, o elemento quadrático com nove nós  $Q_9$  pode ter uma formulação sub-paramétrica se for considerado a partir do elemento com oito nós  $Q_8$  adicionado de um grau-de-liberdade interno (para interpolar deslocamentos somente) cuja função de forma é a função "bolha":

$$N_9 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$$

A interpolação de deslocamentos do elemento resultante é:

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i u_i + N_9 a_1$$

$$v = \sum_{i=1}^8 N_i v_i + N_9 a_2$$

Fisicamente,  $a_1$  e  $a_2$  representam as componentes de deslocamento em  $\xi = \eta = 0$  relativas às componentes de deslocamento  $\sum N_i u_i$  e  $\sum N_i v_i$  em  $\xi = \eta = 0$  provenientes dos graus de liberdade dos oito nós do contorno.

• Condensação: eliminação dos graus de liberdade internos

Condensação é o processo de redução do número de graus de liberdade por substituição. Condensação é uma mera manipulação de coeficientes e não introduz nenhuma aproximação.

A formulação da matriz de rigidez de um elemento sub-paramétrico com graus-de-liberdade internos sem nó é feita com auxílio de condensação como mostrado a seguir, exemplificado pelo elemento Q6.

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i + N_5 a_1 + N_6 a_3$$

$$v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i + N_5 a_2 + N_6 a_4$$

onde  $N_1, N_2, N_3$  e  $N_4$  são as funções de forma do elemento bilinear Q4, e  $N_5 = (1 - \xi^2)$  e  $N_6 = (1 - \eta^2)$ .

Pode-se escrever

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N_r] & [N_c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{a\} \end{Bmatrix}$$

↑  
funções de  
forma dos g.d.l.  
reais  $\{d\}$

↑  
funções de  
forma dos g.d.l.  
condensados  $\{a\}$

A matriz de rigidez do elemento considerando todos os g.d.l., condensados ou não, fica particionada como mostrada abaixo:

$$[k]_{(12 \times 12)} = \begin{bmatrix} [k_{rr}]_{(8 \times 8)} & [k_{rc}]_{(8 \times 4)} \\ [k_{cr}]_{(4 \times 8)} & [k_{cc}]_{(4 \times 4)} \end{bmatrix}$$

onde,

$$[k_{rr}]_{(8 \times 8)} = \int_V [B_r]^T [E] [B_r] dV$$

$$[k_{cc}]_{(4 \times 4)} = \int_V [B_c]^T [E] [B_c] dV$$

$$[k_{cr}]_{(4 \times 8)} = [k_{rc}]_{(8 \times 4)}^T = \int_V [B_c]^T [E] [B_r] dV$$

sendo,

$$[B_r] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} \end{bmatrix}$$

e

$$[B_c] = \begin{bmatrix} N_{5,x} & 0 & N_{6,x} & 0 \\ 0 & N_{5,y} & 0 & N_{6,y} \\ N_{5,y} & N_{5,x} & N_{6,y} & N_{6,x} \end{bmatrix}$$

Considere que o sistema de equações  $[k] \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{a\} \end{Bmatrix} = \{r\}$  represente o equilíbrio do elemento isolado, onde  $\{r\}$  é o vetor de forças nodais que equilibram o elemento.

O que se deseja é obter uma matriz  $[\hat{k}]_{(8 \times 8)}$ , tal que,

$$[\hat{k}]\{d\} = \{\hat{r}\}$$

que é obtida a partir da condensação de  $[K]_{(12 \times 12)}$ :

$$\begin{bmatrix} [K_{rr}] & [K_{rc}] \\ [K_{cr}] & [K_{cc}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{a\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{r_r\} \\ \{r_c\} \end{Bmatrix}$$

Para satisfazer o equilíbrio do elemento isolado, o vetor de forças deve corresponder às forças equivalentes nodais provenientes do carregamento atuando no interior do elemento e no seu contorno.

Se as funções de forma dos graus de liberdade internos forem consideradas para o cálculo das forças equivalentes nodais, então  $\{r_c\}$  pode ser diferente de zero. Isto só pode ocorrer se as forças de volume forem não nulas.

Pode-se também, na computação das forças equivalentes nodais, utilizar somente as funções de forma dos nós do contorno. Neste caso sempre se terá  $\{r_c\} = \{0\}$ .

Do segundo grupo de linhas do sistema de equações acima tem-se:

$$[K_{cr}]\{d\} + [K_{cc}]\{a\} = \{r_c\}$$

$$\Rightarrow \{a\} = -[K_{cc}]^{-1}[K_{cr}]\{d\} + [K_{cc}]^{-1}\{r_c\}$$

Substituindo no primeiro grupo de linhas do sistema

$$[k_{rr}]\{d\} + [k_{rc}]\{a\} = \{r_r\}$$

tem-se,

$$\underbrace{[k_{rr}] - [k_{rc}][k_{cc}]^{-1}[k_{cr}]}_{\substack{[\hat{k}] \\ ([K] \text{ condensada})}} \{d\} = \underbrace{\{r_r\} - [k_{rc}][k_{cc}]^{-1}\{r_c\}}_{\substack{\{\hat{r}\} \\ (\{r\} \text{ condensado})}}$$

A matriz  $[\hat{k}]$  é a que é utilizada para montar a matriz de rigidez global. As forças equivalentes nodais  $\{\hat{r}\}$  são somadas ao vetor das forças externas globais.

Uma vez resolvido o sistema de equações global tem-se que  $\{d\}$  é conhecido. Pode-se obter  $\{a\}$  por:

$$\{a\} = -[k_{cc}]^{-1}[k_{cr}]\{d\} + [k_{cc}]^{-1}\{r_c\}.$$

As deformações de um ponto qualquer no interior do elemento são obtidas por:

$$\{E\} = [B_r]\{d\} + [B_c]\{a\}.$$

E finalmente chega-se às tensões

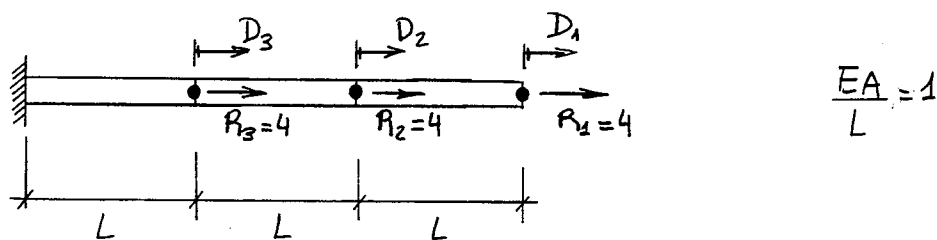
$$\{V\} = [E]\{E\}.$$



## • Implementação da condensação

O solução de um sistema de equações por eliminação de Gauss é um processo de redução por substituição como é a condensação. Se o processo de eliminação de Gauss for interrompido antes da redução completa da matriz do sistema de equações, a matriz resultante é a matriz condensada da matriz original, onde as incógnitas eliminadas são as incógnitas condensadas.

Isto é exemplificado para a estrutura abaixo, onde se deseja eliminar a incógnita  $D_3$ , condensando-a em relação à  $D_1$  e  $D_2$ .

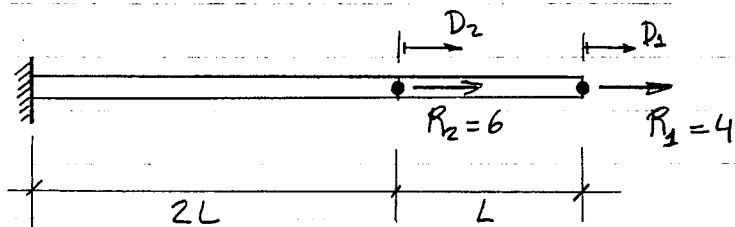


$$[K] \{D\} = \{R\} \longrightarrow \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

A eliminação por Gauss da incógnita  $D_3$  é feita reduzindo-se a terceira coluna da primeira linha até antes da diagonal:

$$(2) \longrightarrow (2) + \frac{1}{2}(3) \implies \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3/2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

O sistema de equações mostrado em pontilhado não envolve a incógnita  $D_3$ , isto é,  $D_3$  foi eliminado. A matriz resultante é a matriz de rigidez do sistema abaixo:

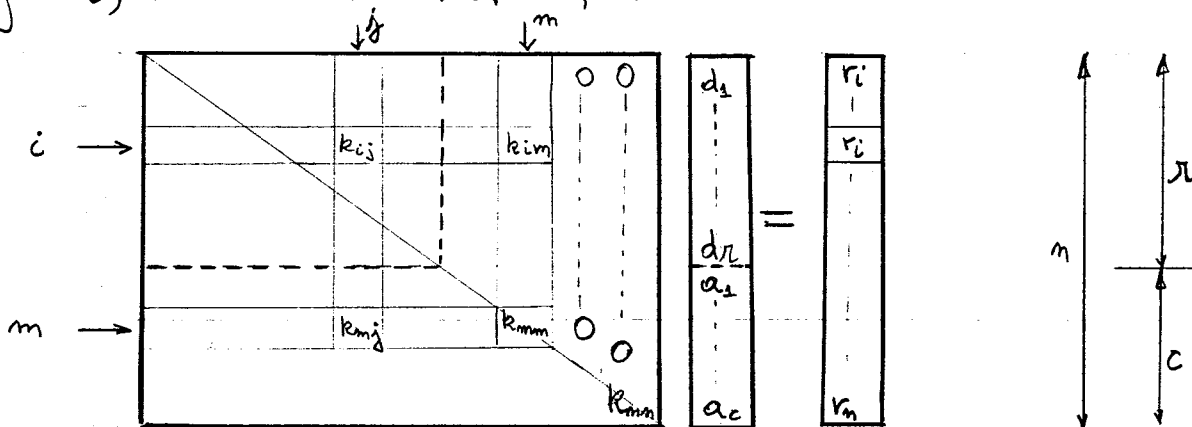


$$K_{22} = \frac{EA}{2L} + \frac{EA}{L} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

A força  $R_2 = 6$  resulta da força original de 4 mais a metade da força original  $R_3 = 4$  ( $R_3$  se divide igualmente entre o engaste e a força em 2).

Isto é, a eliminação de Gauss nada mais é do que a redução (ou condensação) do sistema para um sistema com um número menor de graus de liberdade, colocando as incógnitas eliminadas em função das mantidas.

A partir do exemplo acima pode-se formular um algoritmo genérico para a condensação de uma matriz  $\tilde{k}_{(m \times m)}$  e o correspondente vetor  $\tilde{r}_{(m \times 1)}$ , eliminando os  $c$  últimos graus de liberdade. Para a expressão genérica, considere que as colunas de  $(m+1)$  até  $n$  já foram eliminadas acima da diagonal, sendo  $m = (m-c)+1, \dots, m$ :



---

A operação para eliminação da  $m$ -ésima coluna acima da diagonal se dá como se segue:

1) Redução do termo genérico  $k_{ij}$  da matriz:

$$k_{ij} = k_{ij} - \frac{k_{im}}{k_{mm}} \times k_{mj} \quad \left. \begin{array}{l} i = 1, \dots, m-1 \\ j = 1, \dots, m \end{array} \right\}$$

Observe que isto resulta em  $k_{im} = 0$  ( $j = m$ ), ou seja,  $k_{im}$  é eliminado.

2) Redução do termo genérico  $r_i$  do vetor  $\underline{r}$ :

$$r_i = r_i - \frac{k_{im}}{k_{mm}} \times r_m$$

O algoritmo pode ser traduzido facilmente para instruções em pseudo-código como é mostrado abaixo:

```
n = n - 1
do (for m = n to m = 2, decreasing m) {
  do (for i = 1 to i = m - 1) {
    do (for j = 1 to j = m) {
       $k_{ij} = k_{ij} - \frac{k_{im}}{k_{mm}} \times k_{mj}$ 
    }
     $r_i = r_i - \frac{k_{im}}{k_{mm}} \times r_m$ 
  }
}
```

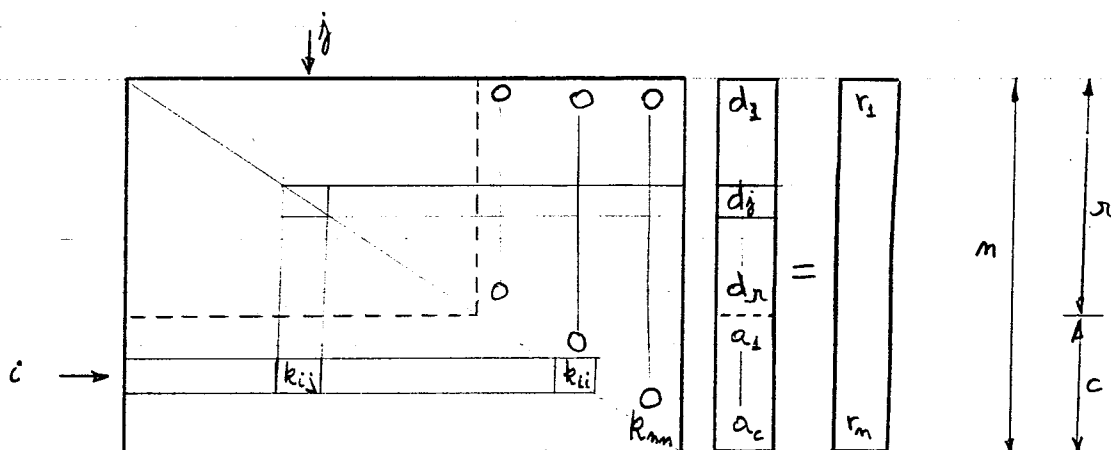
Este código ainda é ineficiente pois não considerou o seguinte:

- 1) A simetria da matriz  $k$
- 2) A divisão  $k_{im}/k_{mm}$  pode ser feita fora do "do" interno e armazeda em uma variável local de forma a reduzir todas as colunas  $j=1, \dots, m$  e o termo  $r_i$  sem precisar efetuar a divisão diversas vezes.

Cook (Cook, R.D. et alii; "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley, 3ª edição) na seção 8.2 mostra o algoritmo com estas modificações em linguagem FORTRAN.

Resta a determinação dos graus de liberdade condensados  $\{a\}$ , uma vez resolvido o sistema de equações global e determinados os graus de liberdade reais  $\{d\}$ .

Isto é implementado pela etapa de retro-substituição do processo de eliminação de Gauss. Abaixo está mostrada a matriz de rigidez do elemento exatamente como fica após a condensação dos  $c$  últimos graus de liberdade:



Considerando que os graus de liberdade condensados  $\{a\}$  ocupam as posições de  $r+1$  até  $n$  do vetor  $\underline{d}$  e que as posições de  $1$  até  $r = n - c$  do vetor  $\underline{d}$  já são conhecidas, a expressão genérica para a retro-substituição é:

$$d_i = \frac{1}{k_{ii}} \left( -r_i - \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij} d_j \right) \quad \left. \vphantom{d_i} \right\} i = r+1, \dots, n$$

Isto pode ser traduzido em instruções em pseudo-código:

```

r = n - c
do (for i = r+1 to i = n) {
  sum = 0.
  do (for j = 1 to j = i-1) {
    sum += kij dj
  } od
  di = (ri - sum) / kii
} od

```

A partir do conhecimento de todos os graus de liberdade, não-condensados e condensados, determina-se deformações e tensões como foi mostrado anteriormente.

O processo de obtenção dos graus de liberdade mostrado acima pressupõe que a matriz  $\underline{k}$  e o vetor  $\underline{r}$  de um elemento finito são conhecidos na fase de retro-substituição. Como esta fase é distinta da fase de obtenção da matriz  $\underline{k}$  condensada para ser montada na matriz de rigidez global, tem-se duas opções: ou se armazena  $\underline{k}$  e  $\underline{r}$  na fase de condensação, ou os recomputa na fase de retro-substituição.

• Modificação do elemento incompatível Q6

O elemento Q6 (obtido a partir do elemento Q4 com a introdução de quatro graus de liberdade sem nó) passa no teste de "Patch" somente se ele é um retângulo ou um paralelogramo.

Taylor e Wilson (Taylor et. alii, "A Non-Conforming Element for Stress Analysis", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 10, pp. 1211-1219, 1976) propuseram uma modificação no elemento Q6, criando o elemento QM6, que faz com que ele passe no teste mesmo para malhas de formas irregulares.

Para o elemento passar no teste de "Patch" é requerido que os graus de liberdade sem nó  $\{\bar{d}\}$  se anulem para condições de deformação constante ou movimentos de corpo rígido. Nestas condições pode-se escrever as relações de equilíbrio do elemento como:

$$\begin{bmatrix} [k_{rr}] & [k_{rc}] \\ [k_{cr}] & [k_{cc}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{d}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{r_r\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow [k_{cr}] \{\bar{d}\} = \{0\}$ , onde  $\{\bar{d}\}$  é um modo de deformação constante.

Usando  $[k_{cr}] = \int_v [B_c]^T [E] [B_r] dV$ , tem-se:

$$t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underbrace{[B_c]^T [E] [B_r]}_{\{\bar{\sigma}\}} \{\bar{d}\} |J| d\xi d\eta = 0$$

$\{\bar{\sigma}\} \longrightarrow$  tensões constantes devido a  $\{\bar{d}\}$

A pergunta que se faz é: Em que condições

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_c]^T |J| d\xi d\eta = 0 \quad ?$$

Observa-se que se  $|J| = \text{const.}$  (elemento retangular ou paralelogramo) então  $[B_c]$  é linear em  $\xi$  e  $\eta$ , e como o integrando é uma função ímpar a integral se anula.

Considerando que  $N_5 = (1-\xi^2)$  e  $N_6 = (1-\eta^2)$  tem-se:

$$[B_c] = \begin{bmatrix} N_{5,x} & 0 & N_{6,x} & 0 \\ 0 & N_{5,y} & 0 & N_{6,y} \\ N_{5,y} & N_{5,x} & N_{6,y} & N_{6,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\xi \cdot \xi_{,x} & 0 & -2\eta \cdot \eta_{,x} & 0 \\ 0 & -2\xi \cdot \xi_{,y} & 0 & -2\eta \cdot \eta_{,y} \\ -2\xi \cdot \xi_{,y} & -2\xi \cdot \xi_{,x} & -2\eta \cdot \eta_{,y} & -2\eta \cdot \eta_{,x} \end{bmatrix}$$

Sabe-se também que  $\begin{Bmatrix} \phi_{,x} \\ \phi_{,y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \phi_{,\xi} \\ \phi_{,\eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -y_{,\xi} \\ -x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{,\xi} \\ \phi_{,\eta} \end{Bmatrix},$

então  $\begin{Bmatrix} \xi_{,x} \\ \xi_{,y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{Bmatrix} y_{,\eta} \\ -x_{,\eta} \end{Bmatrix}$  e  $\begin{Bmatrix} \eta_{,x} \\ \eta_{,y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{Bmatrix} -y_{,\xi} \\ x_{,\xi} \end{Bmatrix}.$

Portanto,

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_c]^T |J| d\xi d\eta = 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -\xi \cdot y_{,\eta} & 0 & \eta \cdot y_{,\xi} & 0 \\ 0 & \xi \cdot x_{,\eta} & 0 & -\eta \cdot x_{,\xi} \\ \xi \cdot x_{,\eta} & -\xi \cdot y_{,\eta} & -\eta \cdot x_{,\xi} & \eta \cdot y_{,\xi} \end{bmatrix}^T d\xi d\eta$$

O remédio proposto é considerar  $[J] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \text{constante}$ , pois isto resultará em uma integral nula.

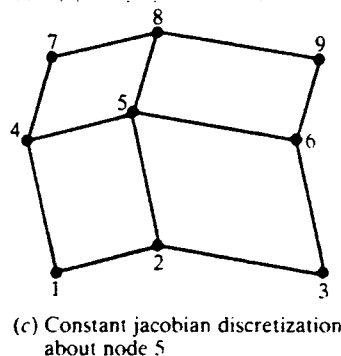
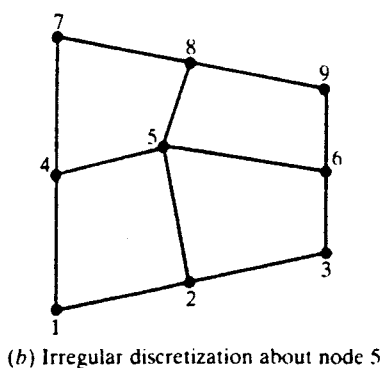
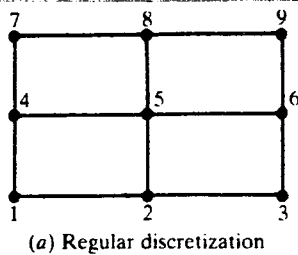
Assim na formação de  $[B_c]$  e na integração dos termos que envol-

vem  $[B_c]$  adota-se  $[J] = [J_0]$  e  $|J| = |J_0|$  sendo  $[J_0]$  e  $|J_0|$  valores constantes que correspondem ao Jacobiano e seu determinante calculados no ponto  $\xi = \eta = 0$ .

Estas modificações só irão alterar a matriz do elemento quando este for irregular (não um paralelogramo). A matriz resultante é diferente, mas o elemento passa no teste de "Patch" para malha irregulares também.

O elemento resultante é consideravelmente mais preciso do que o elemento bilinear  $Q_4$  (veja Cook et. alii, "Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 3ª edição, seção 8.3).

Cook também observa que o elemento é mais preciso se para o cálculo das forças equivalentes nodais somente as funções de forma compatíveis (dos nós do contorno) forem utilizadas.





## • Modificação do elemento sub-paramétrico Q9

O elemento Lagrangeano com nove nós pode apresentar modos espúrios de deformação quando sub-integrado por uma quadratura de Gauss  $2 \times 2$ . Estes modos podem ser controlados usando uma quadratura  $3 \times 3$ , mas a um custo computacional alto e gerando um elemento que tem um comportamento muito rígido.

Cook (Cook, R.D e Zhao-Hua, F., "Control of Spurious Modes in the Nine-node Quadrilateral Element", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 18, pp. 1576-1580, 1982) propõe dois métodos para controlar modos espúrios do elemento Q9 com formulações sub-paramétrica (mapeamento da geometria considerado como o elemento Q8) que podem ser usados com uma integração  $2 \times 2$ .

### - Método de controle "e"

O método consiste em enrijecer os modos de deformação associados à função de forma de "bolha"  $N_9 = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$ . Isto é feito multiplicando-se os termos da diagonal da matriz de rigidez correspondentes aos graus de liberdade  $a_1$  e  $a_2$  (que ocupam a 17ª e 18ª posições da diagonal de  $[k]$ ) por um fator  $(1+e)$ , onde  $e$  é um número real positivo pequeno, antes da condensação de  $[k]$ .

Fisicamente, esta modificação consiste em adicionar molas de rigidez  $e$  que resistem aos movimentos relativos  $a_1$  e  $a_2$ . Esta modificação não inibe a resposta do elemento para deformações que o elemento Q8 também pode apresentar. Por exemplo, movimentos de corpo rígido conti-

nuam sendo modelados corretamente, e o elemento continua passando no teste de "Patch", mesmo para malhas irregulares.

Cook utilizou  $\epsilon = 0.001$ .

### — Método de controle " $\beta$ "

A matriz de rigidez do elemento Q8,  $[k_8]$ , e a matriz de rigidez do elemento Q9 condensada,  $[k_9]$  são ambas de dimensão  $(16 \times 16)$ . Entretanto, o elemento Q9 com integração reduzida  $2 \times 2$  apresenta modos de deformação espúrios indesejados (compartilhados por elementos adjacentes) que não aparecem para o elemento Q8.

O método consiste em formular uma nova matriz de rigidez  $[k]$  combinando-se  $[k_8]$  e  $[k_9]$ :

$$[k] = \beta [k_8] + (1 - \beta) [k_9],$$

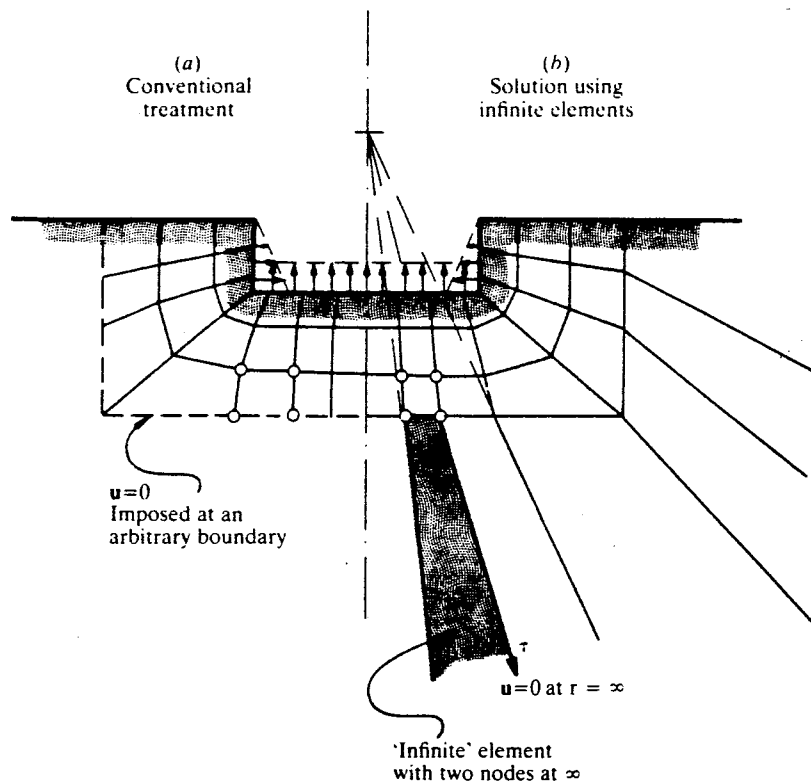
onde  $\beta$  é um número real pequeno entre 0 e 1. Cook utilizou  $\beta = 0.001$ . Com isto, a pequena contribuição do elemento Q8 é bastante para inibir os modos espúrios compartilhados do Q9. O elemento resultante é chamado de Q9C. A formulação pode explorar o fato de que a primeira partição  $(16 \times 16)$  da matriz  $[k_9]$  antes de condensada é exatamente igual à matriz  $[k_8]$  (vide Cook).

Os dois métodos podem ser usados separadamente ou combinados, e sempre o elemento resultante passa no teste de "Patch" para elementos irregulares.

# Modelagem de meios infinitos por elementos finitos

## • Introdução

Em muitos problemas em engenharia existem domínios infinitos ou semi-infinitos. Um exemplo típico da mecânica estrutural é o da representação do comportamento do solo tal como mostrado abaixo.



O tratamento convencional consiste em modelar o meio infinito por um domínio finito cuja fronteira é rígida e posicionada a uma distância tal que a região de interesse "sinta" o comportamento infinito do meio.

Existem três problemas com este tratamento:

1) Nem sempre é claro onde a fronteira rígida deve ser posi-

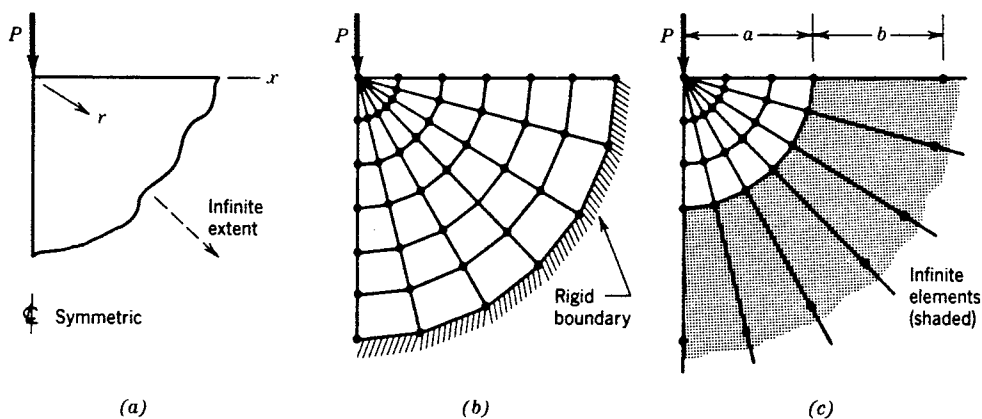
cionada.

- 2) A análise pode ser muito cara devido ao grande número de nós utilizados.
- 3) Em problemas de dinâmica estrutural do solo, a fronteira rígida reflete as ondas de propagação de deformações elásticas.

Para superar estes problemas é necessário modelar o meio semi-infinito exatamente. As soluções mais utilizadas são:

- 1) Representar o comportamento do meio semi-infinito utilizando elementos de contorno acoplados ao modelo de elementos finitos.
- 2) Utilizar elementos "semi-infinitos".

A primeira solução foge do domínio de um curso de elementos finitos. A segunda solução constitui uma forma eficiente de tratar o problema (vide figura abaixo) e será descrita a seguir.



(a) Load  $P$  on plane or axially symmetric body of infinite extent below the  $x$  axis. (b) Large mesh of conventional elements. (c) Smaller mesh, bounded by infinite elements.

## • Elementos semi-infinitos mapeados

A idéia de elementos semi-infinitos é, sucintamente, estender o exterior de um modelo de elementos finitos de forma que ele fique sem fronteiras em alguns trechos. Isto requer funções de forma apropriadas e artificiais, que definem a geometria do elemento até o infinito, associadas a um aumento das variáveis (deslocamentos) até zero no infinito.

Estes elementos são formalmente chamados de semi-infinitos, mas frequentemente referidos como infinitos. Uma descrição do histórico do desenvolvimento de elementos infinitos pode ser encontrado em:

Bettess, P. e Bettess, J.A., "Infinite Elements for Static Problems", Engineering Computations, Vol.1, No.1, pp. 4-16, 1984.

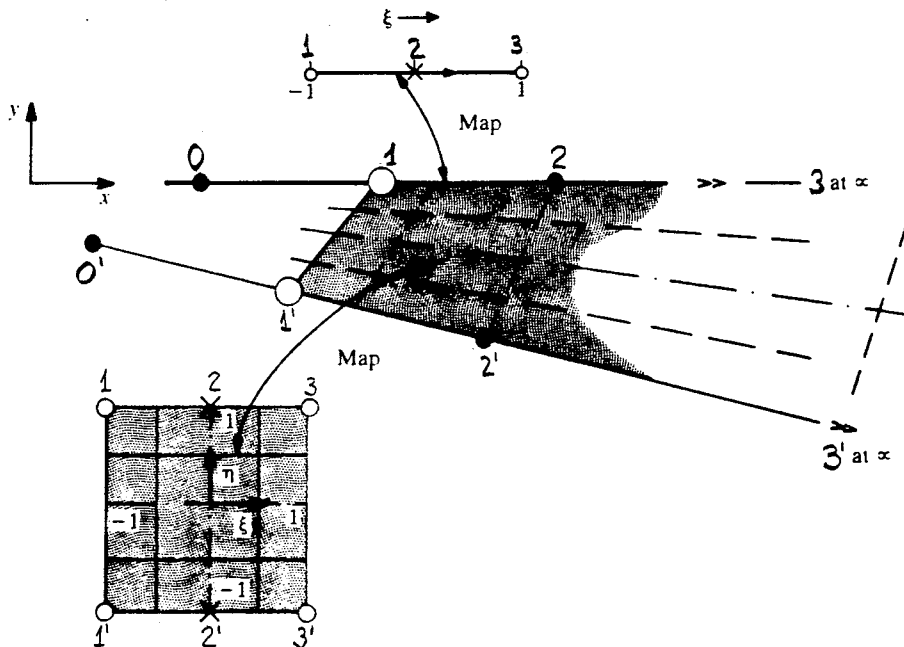
De acordo com os métodos empregados, os elementos infinitos podem ser divididos em dois grupos:

- 1) Elementos infinitos com funções de cimento. Referências:  
Bettess, P., "Infinite Elements", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 11, No. 1, pp. 53-64, 1977.  
Bettess, P. "More on Infinite Elements", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 15, No. 11, pp. 1613-1626, 1980.  
Beer, G. e Meek, J.L., "'Infinite Domain' Elements", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 17, No. 1, pp. 43-52, 1981.
- 2) Elementos infinitos mapeados. Referências:  
Zienkiewicz, O.C., Emson, C. e Bettess, P., "A Novel Boundary Infinite Element", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 19, No. 3, pp. 393-404, 1983.  
Marques, J.M.M.C. e Owen, D.R.J., "Infinite Elements

in "Quasi-Static Materially Nonlinear Problems", Computers & Structures, Vol. 18, No. 4 pp. 739-751, 1984.

No primeiro grupo o tamanho real do elemento é finito e o "caimento" das variáveis (deslocamentos) é introduzido através das funções de forma (interpolação) destas variáveis.

No segundo grupo são utilizadas as funções de forma convencionais para as variáveis, mas o "caimento" é introduzido através de um mapeamento de geometria, de forma que o elemento "cresce" para um tamanho infinito (vide figura abaixo). Este grupo é mais simples de ser implementado e é mais utilizado. Ele é descrito a seguir.



Infinite line and element map. Linear  $\eta$  interpolation

• Caso unidimensional

Considere o comportamento unidimensional ao longo da linha 012 da figura anterior, coincidindo com o eixo  $x$ . E considere também a seguinte função para o mapeamento do espaço paramétrico, definido por  $\xi$ , para o espaço cartesiano, definido por  $x$ :

$$x = \left( -\frac{\xi}{1-\xi} \right) x_0 + \left( 1 + \frac{\xi}{1-\xi} \right) x_2 = \bar{M}_0 x_0 + \bar{M}_2 x_2 \quad (1)$$

Imediatamente pode-se observar que:

$$\xi = 0 \text{ corresponde a } x = x_2$$

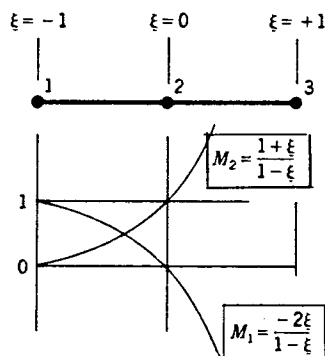
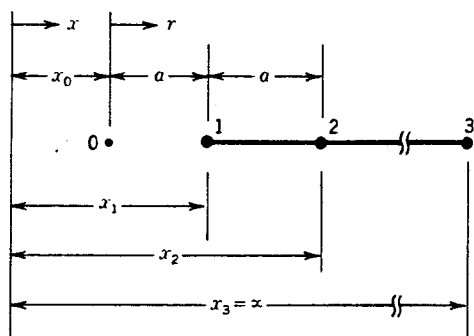
$$\xi = 1 \text{ corresponde a } x = x_3 = \infty$$

$$\xi = -1 \text{ corresponde a } x = \frac{x_0 + x_2}{2} = x_1$$

onde  $x_1$  é o ponto médio entre  $x_0$  e  $x_2$

Alternativamente, o mapeamento poderia ter sido escrito direto em termos de  $x_1$  e  $x_2$  (por simples eliminação de  $x_0$ ):

$$x = \left( -\frac{2\xi}{1-\xi} \right) x_1 + \left( 1 + \frac{2\xi}{1-\xi} \right) x_2 = M_1 x_1 + M_2 x_2 \quad (2)$$



Ambas as formas são independentes do sistema de coordenadas pois  $\overline{M}_0 + \overline{M}_2 = M_1 + M_2 = 1$ .

A primeira forma de mapeamento mostra a importância do ponto  $O$ , que pode ser interpretado como a origem do caimento dos deslocamentos. Primeiro, define-se a distância radial como

$$r = x - x_0. \quad (3)$$

Depois, define-se uma função de interpolação para deslocamentos no espaço paramétrico como

$$u = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + \dots \quad (4)$$

E, a partir da expressão (1) obtém-se  $\xi$  em função de  $x$  como

$$\xi = 1 - \frac{x_2 - x_0}{x - x_0} = 1 - \frac{x_2 - x_0}{r} = 1 - \frac{2a}{r} \quad (5)$$

Substituindo  $\xi$  de (5) em (4), chega-se a uma variação para os deslocamentos  $u$  no espaço cartesiano da forma

$$u = C_0 + \frac{C_1}{r} + \frac{C_2}{r^2} + \frac{C_3}{r^3} + \dots \quad (6)$$

Isto mostra que o ponto  $O$  é realmente a origem do caimento para o deslocamento  $u$ .

A formulação isoparamétrica para o elemento unidimensional corresponde a uma aproximação quadrática do deslocamento  $u$  no



espaço paramétrico (pois o deslocamento é interpolado por três pontos):

$$u = \left( \frac{\xi^2 - \xi}{2} \right) u_1 + (1 - \xi^2) u_2 + \left( \frac{\xi^2 + \xi}{2} \right) u_3 \quad (7a)$$

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \quad (7b)$$

Substituindo  $\xi = 1 - \frac{2a}{r}$  em (7) resulta em:

$$u = u_3 + (-u_1 + 4u_2 - 3u_3) \frac{a}{r} + (2u_1 - 4u_2 + 3u_3) \frac{a^2}{r^2} \quad (8)$$

O deslocamento do ponto 3 corresponde ao valor do campo de deslocamentos no infinito, que é normalmente nulo. Assim, esta condição pode ser automaticamente satisfeita usando para a interpolação de deslocamentos (7) somente os nós "finitos" 1 e 2:

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 = [N] \{d\} \quad (9)$$

Isto quer dizer que o nó no infinito, 3, nunca será representado.

As deformações no caso unidimensional são:

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} = [N_{1,x} \quad N_{2,x}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (10a)$$

ou

$$\epsilon_x = \frac{1}{J} [N_{1,\xi} \quad N_{2,\xi}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [B] \{d\} \quad (10b)$$

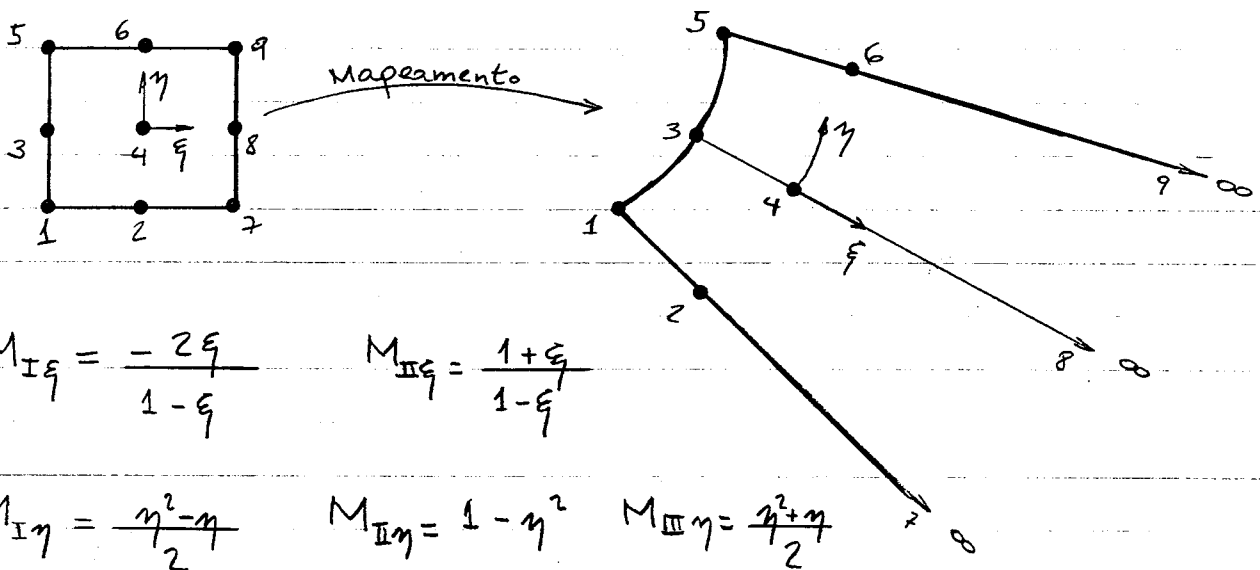
onde

$$J = M_{1,\xi} x_1 + M_{2,\xi} x_2$$

• Elementos bidimensionais Lagrangeanos

A formulação para duas dimensões pode ser obtida como uma extensão do caso unidimensional. Isto é feito utilizando a formulação Lagrangeana. Primeiro vai se considerar o meio infinito em uma só direção e depois os elementos que se estendem até o infinito em duas direções.

— Elemento Lagrangeano com 6 nós



$$M_{I\xi} = \frac{-2\xi}{1-\xi}$$

$$M_{II\xi} = \frac{1+\xi}{1-\xi}$$

$$M_{I\eta} = \frac{\eta^2 - \eta}{2}$$

$$M_{II\eta} = 1 - \eta^2$$

$$M_{III\eta} = \frac{\eta^2 + \eta}{2}$$

$$M_1(\xi, \eta) = M_{I\xi} M_{I\eta}$$

$$M_2(\xi, \eta) = M_{II\xi} M_{I\eta}$$

$$M_3(\xi, \eta) = M_{I\xi} M_{II\eta}$$

$$M_4(\xi, \eta) = M_{II\xi} M_{II\eta}$$

$$M_5(\xi, \eta) = M_{I\xi} M_{III\eta}$$

$$M_6(\xi, \eta) = M_{II\xi} M_{III\eta}$$

$$x = \sum_{i=1}^6 M_i x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^6 M_i y_i$$

A interpolação de deslocamentos é feita no espaço paramétrico exatamente como no elemento quadrático Lagrangeano com nove nós, exceto que somente as funções de forma dos seis nós que são representados são utilizadas:

$$N_{I\xi} = \frac{\xi^2 - \xi}{2}$$

$$N_{II\xi} = 1 - \xi^2$$

$$N_{I\eta} = M_{I\eta} = \frac{\eta^2 - \eta}{2}$$

$$N_{II\eta} = M_{II\eta} = 1 - \eta^2$$

$$N_{III\eta} = M_{III\eta} = \frac{\eta^2 + \eta}{2}$$

$$N_1 = N_{I\xi} N_{I\eta}$$

$$N_2 = N_{II\xi} N_{I\eta}$$

$$N_3 = N_{I\xi} N_{II\eta}$$

$$N_4 = N_{II\xi} N_{II\eta}$$

$$N_5 = N_{I\xi} N_{III\eta}$$

$$N_6 = N_{II\xi} N_{III\eta}$$

$$u = \sum_{i=1}^6 N_i u_i$$

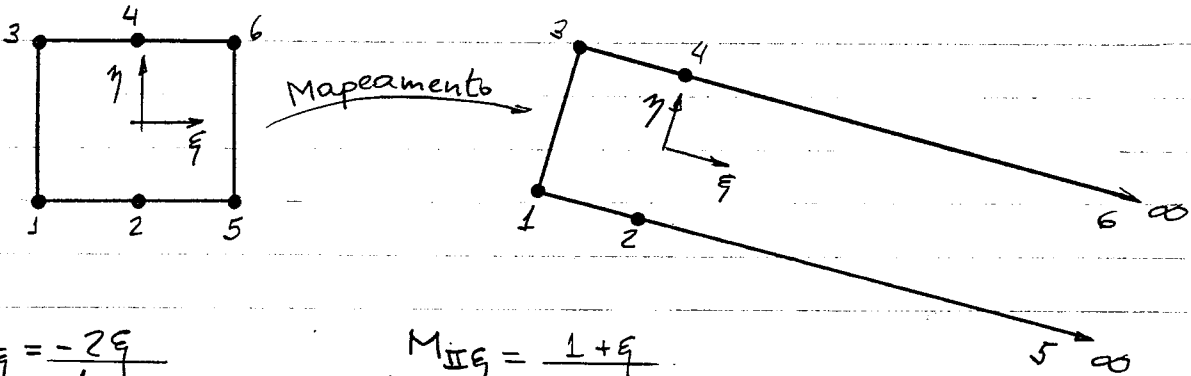
$$v = \sum_{i=1}^6 N_i v_i$$

Resumo:

6-Node	$N_1 = \xi\eta(-1+\xi)(-1+\eta)/4$	$M_1 = -\xi\eta(\eta-1)/(1-\xi)$
Lagrangian	$N_2 = \eta(1-\xi^2)(-1+\eta)/2$	$M_2 = \eta(1+\xi)(\eta-1)/[2(1-\xi)]$
Infinite	$N_3 = \xi(-1+\xi)(1-\eta^2)/2$	$M_3 = -2\xi(1-\eta^2)/(1-\xi)$
	$N_4 = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$	$M_4 = (1+\xi)(1-\eta^2)/(1-\xi)$
	$N_5 = \xi\eta(-1+\xi)(1+\eta)/4$	$M_5 = -\xi\eta(\eta+1)/(1-\xi)$
	$N_6 = \eta(1-\xi^2)(1+\eta)/2$	$M_6 = \eta(1+\xi)(\eta+1)/[2(1-\xi)]$

## - Elemento Lagrangeano com 4 nós

Este elemento deve ser utilizado acoplado a elementos finitos convencionais lineares. A diferença deste para o elemento Lagrangeano com 6 nós é que, agora, a interpolação de deslocamentos na direção  $\eta$  é linear. Este elemento se origina do elemento Lagrangeano com interpolação quadrática na direção  $\xi$  e linear na direção  $\eta$ .



$$M_{I\xi} = \frac{-2\xi}{1-\xi}$$

$$M_{II\xi} = \frac{1+\xi}{1-\xi}$$

$$M_{I\eta} = \frac{1-\eta}{2}$$

$$M_{II\eta} = \frac{1+\eta}{2}$$

$$M_1 = M_{I\xi} M_{I\eta}$$

$$M_2 = M_{II\xi} M_{I\eta}$$

$$M_3 = M_{I\xi} M_{II\eta}$$

$$M_4 = M_{II\xi} M_{II\eta}$$

$$x = \sum_{i=1}^4 M_i x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^4 M_i y_i$$

Interpolação em deslocamentos:

$$N_1 = \frac{1}{4} (\xi^2 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2)(1 - \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (\xi^2 - \xi)(1 + \eta)$$

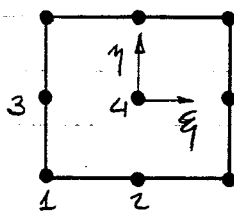
$$N_4 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2)(1 + \eta)$$

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i$$

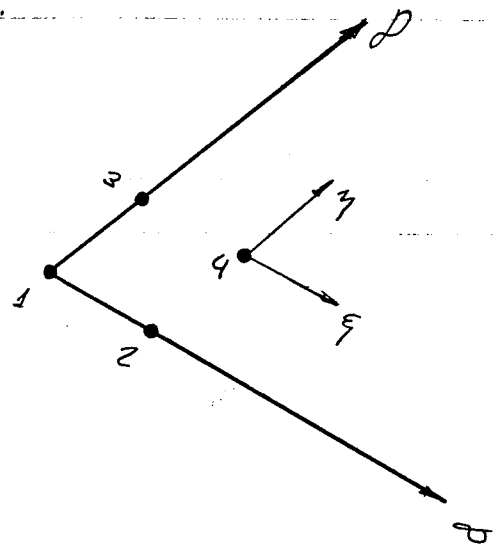
$$v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i$$

— Elemento Lagrangeano duplamente infinito com 4 nós

Este elemento tem duas direções que se estendem para o infinito (adotadas as direções  $+\xi$  e  $+\eta$ ). Este tipo de elemento pode ser usado como elemento de "canto" em uma malha que representa um meio que estende para o infinito em diferentes direções. Este elemento se origina do elemento quadrático Lagrangeano com nove nós.



Mapeamento



$$M_{I\xi} = \frac{-2\xi}{1-\xi}$$

$$M_{II\eta} = \frac{1+\eta}{1-\eta}$$

$$M_{I\eta} = \frac{-2\eta}{1-\eta}$$

$$M_{II\xi} = \frac{1+\xi}{1-\xi}$$

$$M_1 = M_{I\xi} M_{I\eta}$$

$$M_2 = M_{II\xi} M_{I\eta}$$

$$M_3 = M_{I\xi} M_{II\eta}$$

$$M_4 = M_{II\xi} M_{II\eta}$$

$$x = \sum_{i=1}^4 M_i x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^4 M_i y_i$$

Interpolação de deslocamentos:

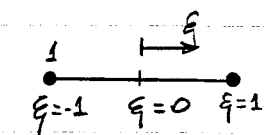
$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} (\xi^2 - \xi) (\eta^2 - \eta) & N_2 &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (\eta^2 - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{2} (\xi^2 - \xi) (1 - \eta^2) & N_4 &= (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^4 N_i u_i \\ v &= \sum_{i=1}^4 N_i v_i \end{aligned}$$

• Elementos bidimensionais "Serendipity"

Estes elementos são originários do elemento quadrático, "Serendipity" com oito nós, conforme apresentado por Marques e Owen. A formulação também é feita "ao acaso", e por isso são classificados como "Serendipity".

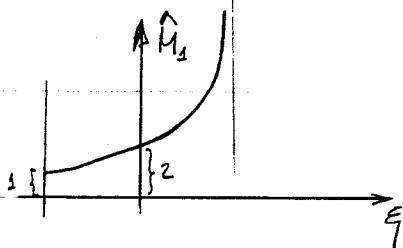
A interpolação de deslocamentos é tirada diretamente do elemento original Q8. As funções que mapeiam a geometria são construídas utilizando-se funções mais simples que são mostradas a seguir. Na construção das funções de mapeamento é importante manter  $\sum M_i = 1$  para garantir a independência do sistema de coordenadas.

- Funções de construção

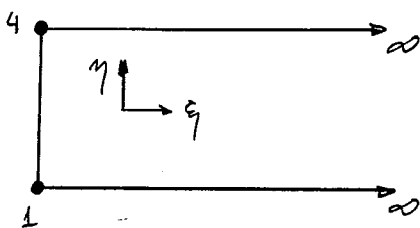


$$\hat{M}_1 = \frac{2}{1-\xi}$$

Caso unidimensional



$$\xi = 0 \Rightarrow \hat{M}_1 = 2$$

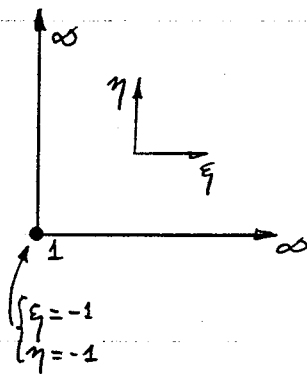


$$\hat{M}_4 = \left(\frac{2}{1-\xi}\right)\left(\frac{1+\eta}{2}\right)$$

Caso bidimensional

Linear em eta

$$\hat{M}_1 = \left(\frac{2}{1-\xi}\right)\left(\frac{1-\eta}{2}\right)$$



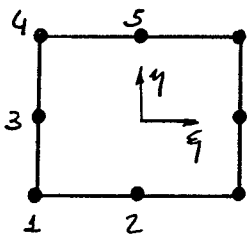
$$\hat{M}_1 = \frac{3 + \xi\eta}{(1-\xi)(1-\eta)}$$

Caso bidimensional  
infinito em duas dimensões

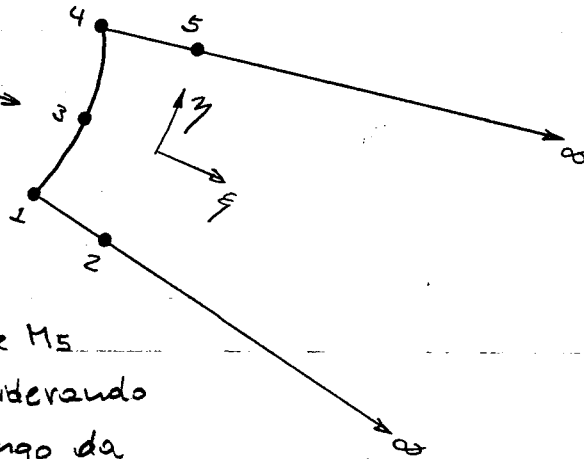
$$\left. \begin{array}{l} \xi = 0 \\ \eta = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = \frac{3}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \xi = -1 \\ \eta = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = \frac{3}{2}$$

— Elemento "Serendipity" com 5 nós



Mapeamento



As funções de mapeamento  $M_2$  e  $M_5$  são construídas diretamente considerando um comportamento linear ao longo da direção  $\eta$ :

$$M_2 = \left( \frac{1+\xi}{1-\xi} \right) \left( \frac{1-\eta}{2} \right)$$

$$M_5 = \left( \frac{1+\xi}{1-\xi} \right) \left( \frac{1+\eta}{2} \right)$$

A função de mapeamento  $M_3$  é construída diretamente considerando um comportamento quadrático para  $\eta$  ao longo do bordo  $\xi = -1$ :

$$M_3 = \left( \frac{2}{1-\xi} \right) (1-\eta^2)$$

A construção de  $M_2$  e  $M_4$  começa por observar que:

$$\left. \begin{array}{l} \xi = 0 \\ \eta = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \xi = -1 \\ \eta = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \xi = 0 \\ \eta = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M}_4 = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \xi = -1 \\ \eta = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M}_4 = \frac{1}{2}$$

Portanto, utilizando a formulação "serendipity", tem-se:

$$M_1 = \hat{M}_1 - 2M_2 - \frac{1}{2} M_3$$

$$M_4 = \hat{M}_4 - 2M_5 - \frac{1}{2} M_3$$

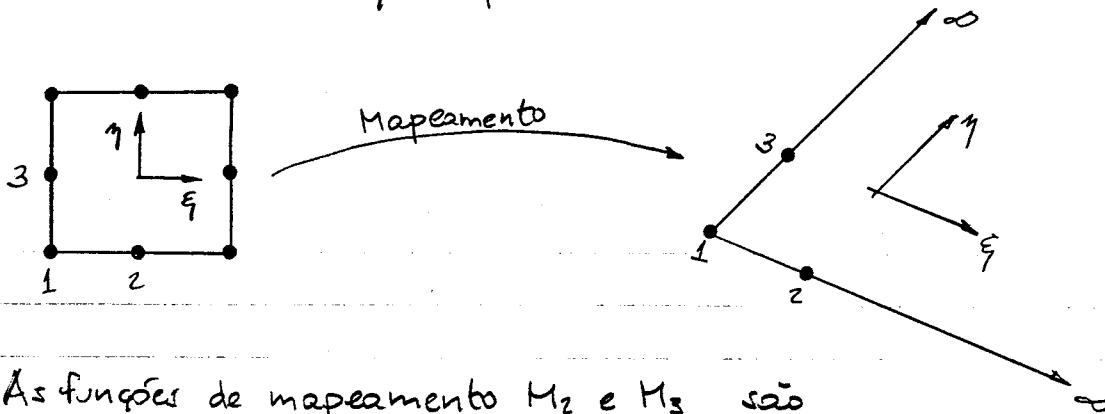
Abaixo estão resumidas as funções de forma (obtidas diretamente do elemento original  $\Phi 8$ ) e as funções de mapeamento. Observe que

$$\sum_{i=1}^5 M_i = 1 \quad \forall (\xi, \eta)$$

5-Node	$N_1 = (1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta)/4$	$M_1 = (1-\eta)(-1-\xi-\eta)/(1-\xi)$
Serendipity	$N_2 = (1-\xi^2)(1-\eta)/2$	$M_2 = (1+\xi)(1-\eta)/[2(1-\xi)]$
Infinite	$N_3 = (1-\xi)(1-\eta^2)/2$	$M_3 = 2(1-\eta^2)/(1-\xi)$
	$N_4 = (1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta)/4$	$M_4 = (1+\eta)(-1-\xi+\eta)/(1-\xi)$
	$N_5 = (1-\xi^2)(1+\eta)/2$	$M_5 = (1+\xi)(1+\eta)/[2(1-\xi)]$



— Elemento "Serendipity" duplamente infinito com 3 nós



As funções de mapeamento  $M_2$  e  $M_3$  são construídas diretamente considerando o comportamento infinito nas duas direções:

$$M_2 = \left( \frac{1+\xi}{1-\xi} \right) \left( \frac{2}{1-\eta} \right)$$

$$M_3 = \left( \frac{2}{1-\xi} \right) \left( \frac{1+\eta}{1-\eta} \right)$$

E a construção "Serendipity" para  $M_1$  é:

$$M_1 = \hat{M}_1 - \frac{3}{2} M_2 - \frac{3}{2} M_3$$

Isto resulta em  $\sum_{i=1}^3 M_i = 1 \quad \forall (\xi, \eta)$ .

As funções de forma e de mapeamento estão resumidas abaixo:

3-Node	$N_1 = (1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta)/4$	$M_1 = [\xi\eta + 3(-1-\xi-\eta)]/$
Serendipity		$[(1-\xi)(1-\eta)]$
Infinite	$N_2 = (1-\xi^2)(1-\eta)/2$	$M_2 = 2(1+\xi)/[(1-\xi)(1-\eta)]$
	$N_3 = (1-\xi)(1-\eta^2)/2$	$M_3 = 2(1+\eta)/[(1-\xi)(1-\eta)]$

- Deformações em elementos com mapeamento de geometria distinto das funções de forma

Considera-se o caso geral onde existem m funções de forma  $N_i$  que são utilizadas para interpolar as variáveis de campo (deslocamentos). Estas funções de forma podem estar associadas a nós reais e a graus de liberdade não nodais. A geometria fica definida por m funções de mapeamento  $M_i$  que estão associadas somente a nós reais.

As deformações de um ponto qualquer no interior do elemento ficam definidas como mostrado a seguir:

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^m N_i u_i \\ v = \sum_{i=1}^m N_i v_i \end{cases} \quad \begin{cases} x = \sum_{i=1}^m M_i x_i \\ y = \sum_{i=1}^m M_i y_i \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & \dots & N_{i,x} & 0 & \dots & N_{m,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & \dots & 0 & N_{i,y} & \dots & 0 & N_{m,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & \dots & N_{i,y} & N_{i,x} & \dots & N_{m,y} & N_{m,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_i \\ v_i \\ \vdots \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

$$\{ \epsilon \} = [B] \{ d \}$$

$(3 \times 1) \quad (3 \times 2m) \quad (2m \times 1)$

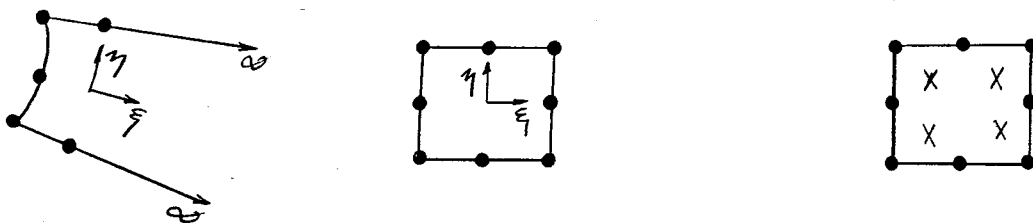
$$[J] = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{1,\xi} & M_{2,\xi} & \dots & M_{i,\xi} & \dots & M_{m,\xi} \\ M_{1,\eta} & M_{2,\eta} & \dots & M_{i,\eta} & \dots & M_{m,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_i & y_i \\ \vdots & \vdots \\ x_m & y_m \end{bmatrix} \quad (2 \times m) \quad (m \times 2)$$

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \partial y / \partial \eta & -\partial y / \partial \xi \\ -\partial x / \partial \eta & \partial x / \partial \xi \end{bmatrix} \quad |J| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix}$$

• Matriz de rigidez e integração numérica

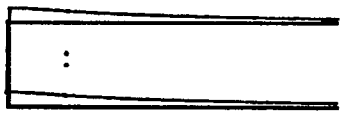



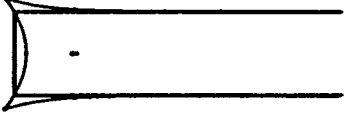
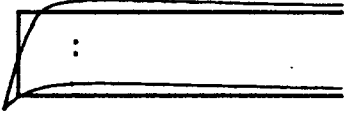

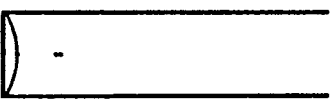

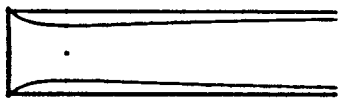

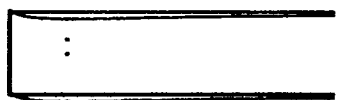
A integração numérica para a computação da matriz de rigidez de elementos infinitos é feita exatamente como para elementos com tamanho finito. Desta forma:



$$[K] = \int_{vol} [B]^T [E] [B] dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [E] [B] t |J| d\xi d\eta \cong \sum_{i=1}^{mp} [B_i]^T [E] [B_i] t |J_i| w_i$$

• Considerações finais

Elementos infinitos mapeados são relativamente novos em aplicações de elementos finitos. A validade de suas formulações deve ser verificada, o que pode ser feito com auxílio de análises de autovalor dos elementos. Shen (Shen, T.-H.G., "An Educational Computer Graphics Program for Examining the Behavior of Single Two-Dimensional Finite Elements", M.Sc. Thesis, School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University, 1988) analisou diversos destes elementos e os autovalores do elemento infinito Lagrangeano com seis nós, com uma integração numérica 2x2, estão mostrados abaixo:

0.00%	0.03%	0.23%
		
0.35%	1.02%	1.16%
		
2.47%	3.02%	5.73%
		
13.52%	19.50%	52.94%
		
ELEMENT TYPE , 6-NODE LAGRAN. ANALYSIS TYPE , PLANE STRESS (2x2) TOTAL NODES , 12		Young's modulus , 2.900E+07 Poisson's ratio , 3.000E-01 Thickness , 1.000E+00

---

Os resultados destas análises de autovetor mostram que as deformações em todos os autovetores aproximam-se de zero no infinito.

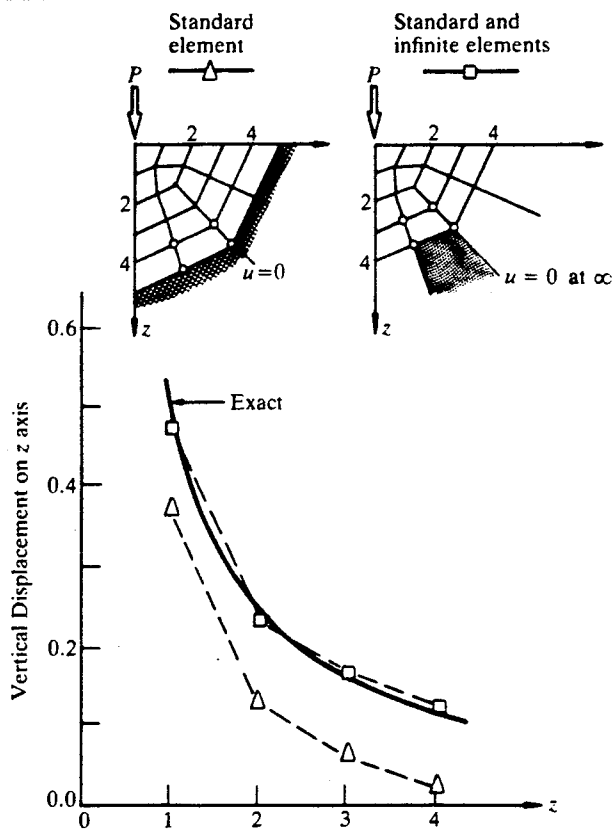
Estas observações confirmam que estes elementos podem representar satisfatoriamente o campo de deslocamentos de um domínio infinito, pois este campo dentro de um elemento é uma combinação linear de todos os autovalores deste elemento e os deslocamentos de um elemento semi-infinito devem cair para zero no infinito.

Além disso, observa-se que estes autovetores incluem modos de flexão, cisalhamento, etc., o que significa que estes elementos são apropriados para simular estruturas submetidas a diversos tipos de carregamento.

O que também se observa é a não existência de modos de deformação associados a movimentos de corpo rígido. Isto porque na formulação de elementos semi-infinitos os deslocamentos são restritos no infinito. Desta forma, estes elementos fornecem as necessárias condições de estabilidade de um modelo de elementos finitos sem que se precise incluir outras condições de suporte.

Shen também executou testes de invariância quanto à orientação geométrica para estes elementos, o que foi verificado.

A figura abaixo (Zienkiewicz, O.C. e Taylor, R.L., "The Finite Element Method", Vol. 1, 4ª edição, 1989, seção 8.13) mostra resultados da análise de uma carga pontual em um meio elástico semi-infinito.

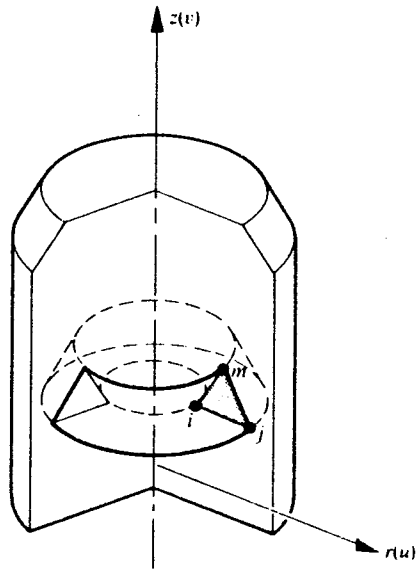


A point load on an elastic half-space (Boussinesq problem). Standard linear elements and infinite line elements ( $E = 1$ ,  $\nu = 0.1$ ,  $p = 1$ )

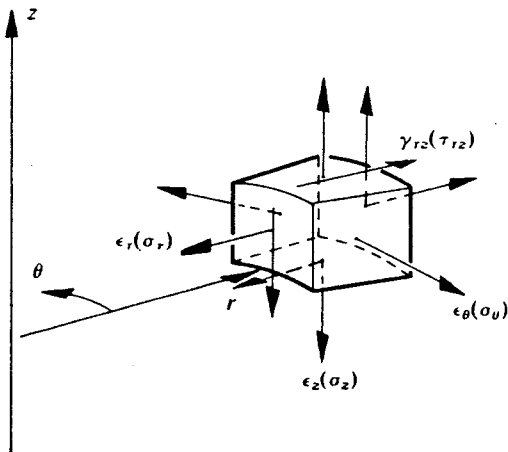
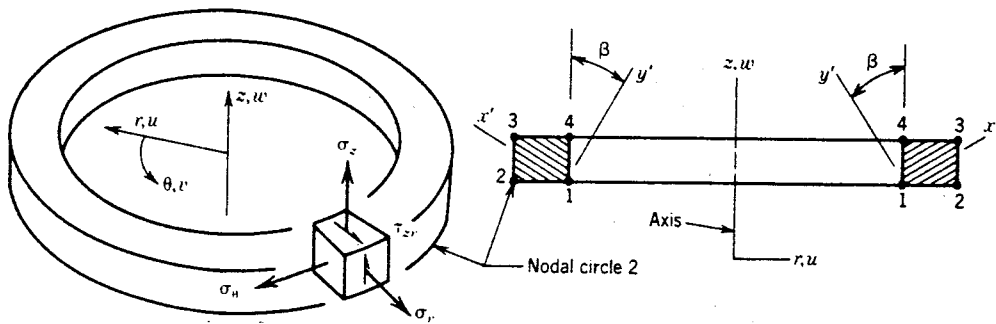
A geometria dos elementos infinitos é definida de tal forma que o ponto  $O$  (origem do calceamento dos deslocamentos) fique situado no ponto de aplicação da carga.

Os resultados são comparados com uma análise usando condições de suporte fixo a uma distância finita, e a superioridade da análise utilizando elementos infinitos é evidente.

# Formulação Axi-simétrica



Element of an axisymmetric solid



$$\begin{aligned} \gamma_{z\theta} &= 0 \\ \gamma_{r\theta} &= 0 \end{aligned}$$

Strains and stresses involved in the analysis of axisymmetric solids

Quatro componentes independentes de tensão e deformação e a lei constitutiva do material elástico-linear:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \quad \boxed{\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\}}$$

Relações deformações-deslocamentos:

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}$$

(nunca avalia nada em  $r=0$ )

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial r & 0 \\ 1/r & 0 \\ 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial z & \partial/\partial r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\{\epsilon\} = [D] \{u\}}$$



Interpolação de deslocamentos para um elemento genérico:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_i & 0 & \dots & N_m & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_i & \dots & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \vdots \\ u_i \\ w_i \\ \vdots \\ u_m \\ w_m \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\{u\} = [N] \{d\}}$$

Matriz deformação - deslocamentos nodais:

$$\{e\} = [D][N]\{d\} \quad \boxed{\{e\} = [B]\{d\}}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} [B_1] & [B_2] & \dots & [B_i] & \dots & [B_m] \end{bmatrix}$$

(4 x 2m)

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} N_i & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix}$$

(4 x 2)

$$r = \sum_{i=1}^m M_i r_i$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \eta} & -\frac{\partial z}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial r}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

$$|J| = \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{1,\xi} & M_{2,\xi} & \dots & M_{i,\xi} & \dots & M_{m,\xi} \\ M_{1,\eta} & M_{2,\eta} & \dots & M_{i,\eta} & \dots & M_{m,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & z_1 \\ r_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots \\ r_i & z_i \\ \vdots & \vdots \\ r_m & z_m \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez do elemento:

$$[K]_{(2m \times 2m)} = \int_{Vol} [B]^T [E] [B] dV = \int_A \int_{-\pi}^{\pi} [B]^T [E] [B] r d\theta dA$$

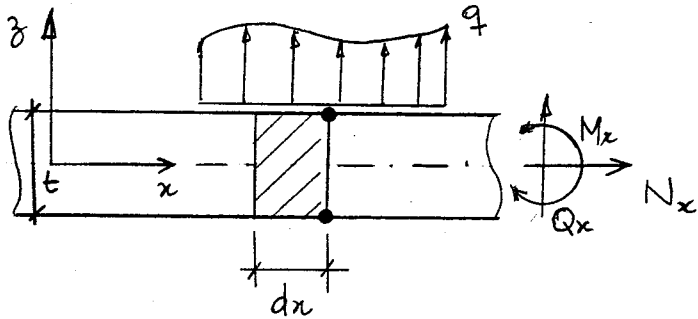
$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-\pi}^{\pi} [B]^T [E] [B] r d\theta |J| d\xi d\eta \quad \text{onde } r = \sum_{i=1}^m M_i r_i$$

Alternativamente,

$$[K]/rad = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [E] [B] r |J| d\xi d\eta$$

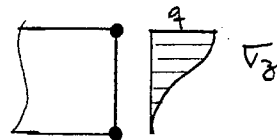
# Flexão de Placas Planas

## • Formulação de vigas delgadas e espessas (Zienkiewicz, Vol. 2, 1991)

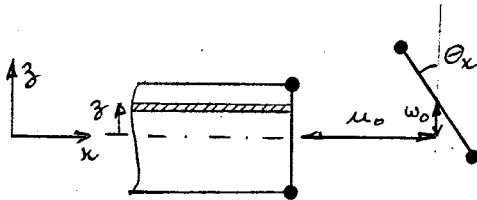


### Hipóteses Básicas

- Seções normais ao plano médio permanecem planas
- Pequenos deslocamentos
- $v_z$  e  $\epsilon_z$  são nulos

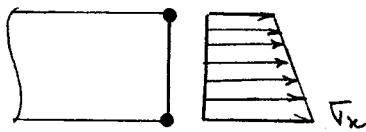


- Estado plano de tensões em cada camada.



$$\begin{cases} u_0 = u_0(x) \\ w_0 = w_0(x) \\ \theta_x = \theta_x(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = -\theta_x \cdot z + u_0 \\ w = w_0 \end{cases}$$



Tensões Normais  $\sigma_x$



Tensões de cisalhamento  $\tau_{xz}$

### Esforços

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz \quad ; \quad M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \cdot z dz \quad ; \quad Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz$$

### Deformações

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \cdot z + \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

## Lei constitutiva do material

$$\sigma_x = E \epsilon_x$$

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz}$$

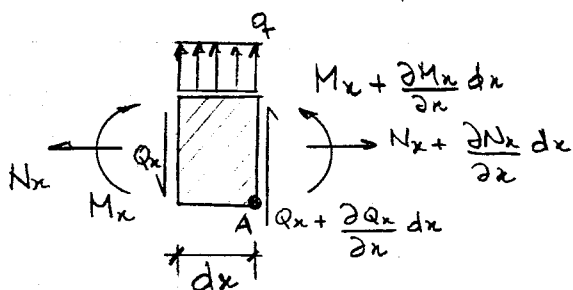
## Esforços em termos de deformações (largura unitária)

$$N_x = Et \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

$$M_x = -\frac{Et^3}{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x}$$

$$Q_x = K G t \left( -\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (\text{tensão média ; } K = 5/6)$$

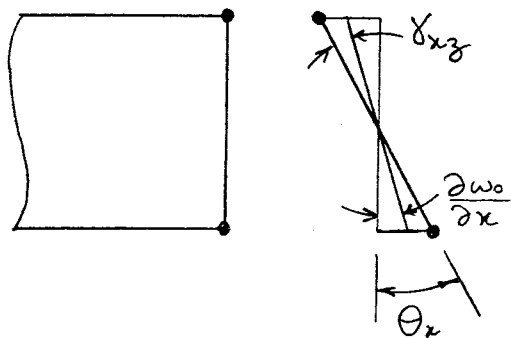
## Condições de Equilíbrio



$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial N_x}{\partial x} = 0 \\ \sum M_A = 0 \Rightarrow \frac{\partial M_x}{\partial x} + Q_x = 0 \\ \sum F_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial Q_x}{\partial x} + q = 0 \end{array} \right.$$

## Conclusões

- Efeito axial ( $u_0$  e  $N_x$ ) é independente e não vai ser considerado.
- Distorções por cisalhamento:  $\gamma_{xz} = -\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}$

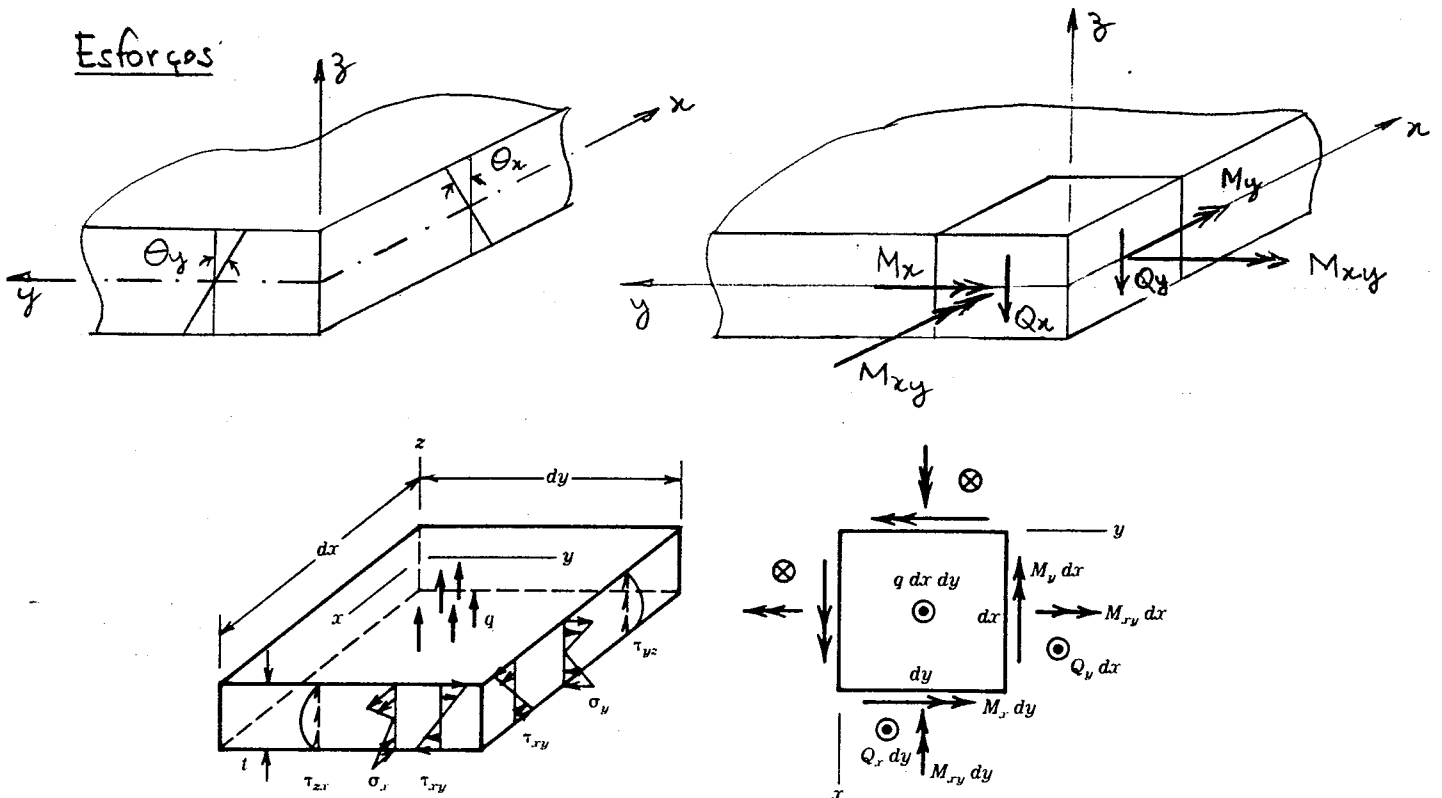


Viga espessa  $\rightarrow \gamma_{xz} \neq 0$

Viga delgada  $\rightarrow \gamma_{xz} = 0 \Rightarrow \theta_x = \frac{\partial w_0}{\partial x}$

$\Rightarrow$  Seções normais ao plano médio permanecem planas e normais a este plano

• Formulações para placas delgadas e espessas (Cook, 1989)



$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \cdot z \, dz \quad ; \quad M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y \cdot z \, dz \quad ; \quad M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} \cdot z \, dz$$

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} \, dz \quad ; \quad Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} \, dz$$

Deslocamentos

$$u = -\theta_x \cdot z \quad ; \quad v = -\theta_y \cdot z \quad ; \quad w = w_0$$

Deformações

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \cdot \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

### Lei constitutiva do material

(cada lâmina é considerada um estado plano de tensões)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

### Esforços em termos de deformações (Momentos x curvatura; Cortantes x distorções)

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = KtG \begin{Bmatrix} -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (K \approx 5/6)$$

### Condições de Equilíbrio

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (3)$$

### Placa delgada ( $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ )

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}$$

$\gg (1), (2), (3) \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + q \frac{12(1-\nu^2)}{Et^3} = 0}$$

Eq. Biharmônica p/ placas delgadas (equilíbrio em termos de deslocamento)

## Energia de deformação

$$U = \int_V \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [E] \{\epsilon\} dV$$

placa delgada:  $\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$   
 ( $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ )

$$[E] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

placa espessa:  $\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -z \cdot (\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}) \\ (-\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x}) \\ (-\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y}) \end{Bmatrix}$

$$[E] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

A integral de volume da energia potencial pode ser dividida em uma integral de área e outra ao longo da espessura. Processando a integral ao longo da espessura resulta em:

$$U = \int_A \frac{1}{2} \{k\}^T [D] \{k\} dA$$

onde  $\{k\}$  é o vetor das curvaturas.

placa delgada :

$$\{k\} = \{k_k\} = \begin{Bmatrix} \partial^2 w / \partial x^2 \\ \partial^2 w / \partial y^2 \\ 2 \partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix}$$

$$[D] = [D_k] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

placa espessa :

$$\{k\} = \begin{Bmatrix} \partial \theta_x / \partial x \\ \partial \theta_y / \partial y \\ \partial \theta_x / \partial y + \partial \theta_y / \partial x \\ \theta_x - \partial w / \partial x \\ \theta_y - \partial w / \partial y \end{Bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{Bmatrix} \end{Bmatrix}} \right\} \begin{matrix} \text{acoplamento entre } w \text{ e} \\ (\theta_x, \theta_y) \text{ só se dá nestes termos.} \end{matrix}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} [D_k] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [D_s] = \begin{bmatrix} kTG & 0 \\ 0 & kTG \end{bmatrix}$$

• Solução pelo M.E.F. para placas delgadas

Variável de campo fundamental :  $w$

Grav de diferenciação que aparece na energia de deformação :  $m=2$

$\Rightarrow$  continuidade entre elementos :  $C^1$

$w, \frac{\partial w}{\partial s}$  e  $\frac{\partial w}{\partial n}$  têm que ser contínuas ao longo de um bordo com direção tangencial  $\vec{s}$  e direção normal  $\vec{n}$ .



Graus de Liberdade nodais :

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w \\ \partial w / \partial x \\ \partial w / \partial y \end{Bmatrix}$$

Nota:

Em uma implementação computacional normalmente se adota  $\{w, R_x, R_y\}^T$  como graus de liberdade nodais, onde  $R_x$  e  $R_y$  são rotações em torno dos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente. Pela convenção adotada tem-se:

$$R_x = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{e} \quad R_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

Interpolação dos graus de liberdade nodais no domínio de um elemento

Admitindo que é possível encontrar funções de forma  $C^1$  para interpolação do deslocamento transversal  $w$  no domínio de um elemento em função dos seus graus de liberdade (mais tarde será visto que isto é impossível), pode-se escrever:

$$w = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ \dots \ N_{3m-2} \ N_{3m-1} \ N_{3m}] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \hline w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \hline w_m \\ \theta_{xm} \\ \theta_{ym} \end{Bmatrix}$$

$w = [N] \{d\}$

Relações graus de liberdade nodais vs. curvaturas

$$\{k_k\} = \begin{Bmatrix} \partial^2 w / \partial x^2 \\ \partial^2 w / \partial y^2 \\ 2 \partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial^2 / \partial x^2 \\ \partial^2 / \partial y^2 \\ 2 \partial^2 / \partial x \partial y \end{bmatrix} [N] \{d\} = [B] \{d\}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial^2 N_{3m-2}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_{3m-1}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_{3m}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_3}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial^2 N_{3m-2}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_{3m-1}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_{3m}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 N_2}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 N_3}{\partial x \partial y} & \dots & 2 \frac{\partial^2 N_{3m-2}}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 N_{3m-1}}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 N_{3m}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez de um elemento

$$U = \frac{1}{2} \{d\}^T [K_e] \{d\} = \int_A \frac{1}{2} \{k_k\}^T [D_k] \{k_k\} dA$$

$$\therefore [K_e] = \int_A [B]^T [D_k] [B] dA$$

• Solução pelo M.E.F. para placas espessas

Variáveis de campo fundamentais:  $w, \theta_x, \theta_y$

Grav de diferenciação que aparece na energia de deformação:  $m=1$

$\Rightarrow$  continuidade entre elementos:  $C^0$

$w, \theta_x, \theta_y$  têm que ser contínuas entre os elementos, mas suas derivadas não precisam ser.

Interpolação dos graus de liberdade nodais no domínio de um elemento

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_m & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_m & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \vdots \\ w_m \\ \theta_{xm} \\ \theta_{ym} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [N] \{d\}$$

Relações graus de liberdade nodais vs. curvaturas

$$\{k\} = \begin{Bmatrix} \partial^2 \theta_x / \partial x^2 \\ \partial^2 \theta_y / \partial y^2 \\ \partial^2 \theta_x / \partial x \partial y + \partial^2 \theta_y / \partial y \partial x \\ \theta_x - \partial w / \partial x \\ \theta_y - \partial w / \partial y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \partial^2 / \partial x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial^2 / \partial y^2 \\ 0 & \partial^2 / \partial x \partial y & \partial^2 / \partial y \partial x \\ -\partial / \partial x & 1 & 0 \\ -\partial / \partial y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [\Delta] \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}$$

$$\{k\} = [\nabla][N]\{d\} = [B]\{d\}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & \partial N_1/\partial x & 0 & \dots & 0 & \partial N_m/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & \partial N_1/\partial y & \dots & 0 & 0 & \partial N_m/\partial y \\ 0 & \partial N_1/\partial y & \partial N_1/\partial x & \dots & 0 & \partial N_m/\partial y & \partial N_m/\partial x \\ \hline -\partial N_1/\partial x & N_1 & 0 & \dots & -\partial N_m/\partial x & N_m & 0 \\ -\partial N_1/\partial y & 0 & N_1 & \dots & -\partial N_m/\partial y & 0 & N_m \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez de um elemento

$$U = \frac{1}{2} \{d\}^T [K_e] \{d\} = \int_A \frac{1}{2} \{k\}^T [D] \{k\} dA$$

$$\therefore [K_e] = \int_A [B]^T [D] [B] dA$$

$$[D] = \begin{bmatrix} [D_k] & [0] \\ [0] & [D_s] \end{bmatrix}$$

$$[D_k] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$[D_s] = \frac{5Gt}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo  $[B] = [B_k] + [B_s]$ , onde

$$[B_k] = \begin{bmatrix} 0 & \partial N_1/\partial x & 0 & \dots & 0 & \partial N_m/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & \partial N_1/\partial y & \dots & 0 & 0 & \partial N_m/\partial y \\ 0 & \partial N_1/\partial y & \partial N_1/\partial x & \dots & 0 & \partial N_m/\partial y & \partial N_m/\partial x \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B_s] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\partial N_1/\partial x & N_1 & 0 & \dots & -\partial N_m/\partial x & N_m & 0 \\ -\partial N_1/\partial y & 0 & N_1 & \dots & -\partial N_m/\partial y & 0 & N_m \end{bmatrix}$$

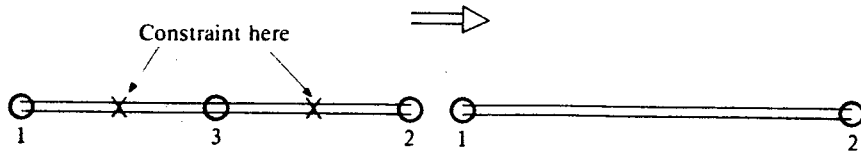
$$\Rightarrow [K_e] = [K_k] + [K_s], \text{ onde}$$

$$[K_k] = \int_A [B_k]^T \begin{bmatrix} [D_k] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} [B_k] dA$$

$$[K_s] = \int_A [B_s]^T \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [D_s] \end{bmatrix} [B_s] dA$$

No limite quando  $t \rightarrow 0$ ,  $\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$  diminui mais rápido que  $\frac{5}{6} Gt$ . Isto implica em:  $[K_s]$  cresce artificialmente em relação à  $[K_k]$  quando  $t \rightarrow 0$ . Assim, não aparece (artificialmente) deformação por flexão, Isto se denomina travamento ("locking") por cisalhamento.

• Elemento de viga com restrições Kirchhoff discretas (Zienkiewicz, Vol. 2)



$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 N_i \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}$$

$N_i \rightarrow$  funções de forma quadráticas  $C^0$

A condição de Kirchhoff  $\theta - \partial w / \partial x = 0$  é forçada somente nos pontos com coordenadas  $x_\alpha$  e  $x_\beta \Rightarrow$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i(x_\alpha)}{\partial x} w_i - \sum_{i=1}^3 N_i(x_\alpha) \theta_i = 0 \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i(x_\beta)}{\partial x} w_i - \sum_{i=1}^3 N_i(x_\beta) \theta_i = 0 \end{cases}$$

Pode-se escrever  $\begin{Bmatrix} w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$  em função dos outros parâmetros nodais:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_3(x_\alpha)}{\partial x} & -N_3(x_\alpha) \\ \frac{\partial N_3(x_\beta)}{\partial x} & -N_3(x_\beta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(x_\alpha)}{\partial x} & -N_1(x_\alpha) \\ \frac{\partial N_1(x_\beta)}{\partial x} & -N_1(x_\beta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} \frac{\partial N_2(x_\alpha)}{\partial x} & -N_2(x_\alpha) \\ \frac{\partial N_2(x_\beta)}{\partial x} & -N_2(x_\beta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$[A_3] \begin{Bmatrix} w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = - [A_1] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} - [A_2] \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = - [A_3]^{-1} [A_1] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} - [A_3]^{-1} [A_2] \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

As novas funções de forma são escritas com o nó do centro eliminado:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^2 [\bar{N}_i] \begin{Bmatrix} \bar{w}_i \\ \bar{\theta}_i \end{Bmatrix}, \text{ onde } [\bar{N}_i] = N_i [\mathbf{I}] - [A_3]^{-1} [A_i] N_3$$

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↑ ?

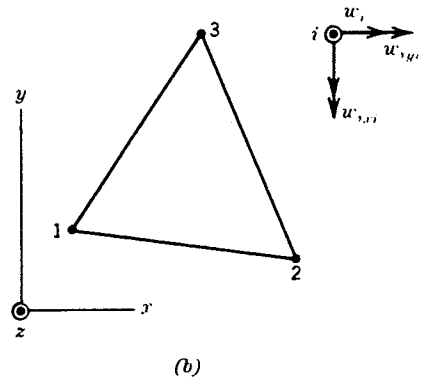
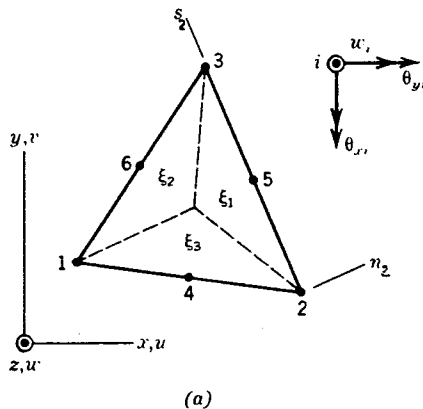
Se  $x_x$  e  $x_p$  coincidirem com as posições, no espaço cartesiano, de pontos de integração de Gauss de uma quadratura de ordem 2, então as funções  $[\bar{N}_i]$  são iguais às funções cúbicas Hermitianas de vigas  $C^1$ .

• Elemento triangular com restrições Kirchhoff discretas - DKT (Cook, 1989)

Este elemento pode ser visto como uma pilha de elementos de membrana quadráticos (T6), ligados por barras rígidas na direção da espessura em cada vértice do triângulo, e com restrições impostas nos nós de meio de lado.

1. O ponto de partida é o elemento triangular quadrático com lados retos, onde as rotações  $\theta_x$  e  $\theta_y$  são interpoladas usando as funções de forma do T6:

$$\begin{aligned} \theta_x &= \sum_{i=1}^6 N_i \theta_{x_i} \\ \theta_y &= \sum_{i=1}^6 N_i \theta_{y_i} \end{aligned} \quad (1)$$



2. É considerado que o deslocamento transversal  $w$  tem uma variação cúbica ao longo de cada lado do triângulo. Assim, a derivada do deslocamento transversal em relação à direção tangencial  $s_i$  de cada lado pode ser obtida em função dos deslocamentos e derivadas dos nós extremos do lado. Em particular, as derivadas em relação a  $s_i$  podem ser avaliadas nos nós dos meios dos lados:

$$\begin{aligned}
 \left[ \frac{\partial w}{\partial s_1} \right]_4 &= -\frac{3}{2L_{12}} [w]_1 - \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial w}{\partial s_1} \right]_1 + \frac{3}{2L_{12}} [w]_2 - \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial w}{\partial s_1} \right]_2 \\
 \left[ \frac{\partial w}{\partial s_2} \right]_5 &= -\frac{3}{2L_{23}} [w]_2 - \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial w}{\partial s_2} \right]_2 + \frac{3}{2L_{23}} [w]_3 - \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial w}{\partial s_2} \right]_3 \\
 \left[ \frac{\partial w}{\partial s_3} \right]_6 &= -\frac{3}{2L_{31}} [w]_3 - \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial w}{\partial s_3} \right]_3 + \frac{3}{2L_{31}} [w]_1 - \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial w}{\partial s_3} \right]_1
 \end{aligned} \quad (2)$$

3. A partir de transformações de coordenadas, as seis derivadas nos nós de canto da expressão (2) são substituídas pelas seguintes seis derivadas:

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_1, \left[ \frac{\partial w}{\partial y} \right]_1, \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_2, \left[ \frac{\partial w}{\partial y} \right]_2, \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_3, \left[ \frac{\partial w}{\partial y} \right]_3.$$

Assim, a expressão (2) é transformada para:

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial s_1} \right]_4 = g_1 \left( [w]_1, \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_1, \left[ \frac{\partial w}{\partial y} \right]_1, [w]_2, \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_2, \left[ \frac{\partial w}{\partial y} \right]_2 \right)$$

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial s_2} \right]_5 = g_2 \left( [w]_2, \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_2, \left[ \frac{\partial w}{\partial y} \right]_2, [w]_3, \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_3, \left[ \frac{\partial w}{\partial y} \right]_3 \right) \quad (3)$$

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial s_3} \right]_6 = g_3 \left( [w]_3, \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_3, \left[ \frac{\partial w}{\partial y} \right]_3, [w]_1, \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_1, \left[ \frac{\partial w}{\partial y} \right]_1 \right)$$

4. É considerado que a derivada do deslocamento transversal em relação à direção normal  $\underline{n}_i$  de cada lado do triângulo tem uma variação linear ao longo de cada lado. Em particular, estas derivadas podem ser avaliadas nos nós de meio de lado:

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial n_1} \right]_4 = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{\partial w}{\partial n_1} \right]_1 + \left[ \frac{\partial w}{\partial n_1} \right]_2 \right\}$$

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial n_2} \right]_5 = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{\partial w}{\partial n_2} \right]_2 + \left[ \frac{\partial w}{\partial n_2} \right]_3 \right\} \quad (4)$$

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial n_3} \right]_6 = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{\partial w}{\partial n_3} \right]_3 + \left[ \frac{\partial w}{\partial n_3} \right]_1 \right\}$$

5. A partir de transformações de coordenadas, as seis derivadas nos nós de canto da expressão (4) são substituídas por derivadas em relação a  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$ , resultando em:



$$\begin{aligned}
 \left[ \frac{\partial w}{\partial n_1} \right]_4 &= h_1 \left( \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_1, \left[ \frac{\partial w}{\partial y} \right]_1, \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_2, \left[ \frac{\partial w}{\partial y} \right]_2 \right) \\
 \left[ \frac{\partial w}{\partial n_2} \right]_5 &= h_2 \left( \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_2, \left[ \frac{\partial w}{\partial y} \right]_2, \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_3, \left[ \frac{\partial w}{\partial y} \right]_3 \right) \\
 \left[ \frac{\partial w}{\partial n_3} \right]_6 &= h_3 \left( \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_3, \left[ \frac{\partial w}{\partial y} \right]_3, \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_1, \left[ \frac{\partial w}{\partial y} \right]_1 \right)
 \end{aligned} \tag{5}$$

6. As restrições de Kirchhoff são impostas nos nós de canto, isto é, as deformações transversais  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  são consideradas nulas:

$$\begin{aligned}
 \theta_{x_1} &= \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_1, & \theta_{y_1} &= \left[ \frac{\partial w}{\partial y} \right]_1 \\
 \theta_{x_2} &= \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_2, & \theta_{y_2} &= \left[ \frac{\partial w}{\partial y} \right]_2 \\
 \theta_{x_3} &= \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_3, & \theta_{y_3} &= \left[ \frac{\partial w}{\partial y} \right]_3
 \end{aligned} \tag{6}$$

7. As restrições de Kirchhoff são impostas nos nós de meio de lado nas direções tangencial  $\underline{s}_i$  e normal  $\underline{n}_i$ , isto é, as deformações transversais  $\gamma_{sz}$  e  $\gamma_{mz}$  são consideradas nulas:

$$\begin{aligned}
 [\theta_{s_1}]_4 &= \left[ \frac{\partial w}{\partial s_1} \right]_4, & [\theta_{m_1}]_4 &= \left[ \frac{\partial w}{\partial m_1} \right]_4 \\
 [\theta_{s_2}]_5 &= \left[ \frac{\partial w}{\partial s_2} \right]_5, & [\theta_{m_2}]_5 &= \left[ \frac{\partial w}{\partial m_2} \right]_5 \\
 [\theta_{s_3}]_6 &= \left[ \frac{\partial w}{\partial s_3} \right]_6, & [\theta_{m_3}]_6 &= \left[ \frac{\partial w}{\partial m_3} \right]_6
 \end{aligned} \quad (7)$$

8. A partir de transformações de coordenadas, as rotações  $\theta_{x_i}$  e  $\theta_{y_i}$  dos nós de meio de lado são expressas em termos de  $\theta_{s_i}$  e  $\theta_{m_i}$ :

$$\begin{aligned}
 \theta_{x_4} &= p_1([\theta_{s_1}]_4, [\theta_{m_1}]_4), & \theta_{y_4} &= q_1([\theta_{s_1}]_4, [\theta_{m_1}]_4) \\
 \theta_{x_5} &= p_2([\theta_{s_2}]_5, [\theta_{m_2}]_5), & \theta_{y_5} &= q_2([\theta_{s_2}]_5, [\theta_{m_2}]_5) \\
 \theta_{x_6} &= p_3([\theta_{s_3}]_6, [\theta_{m_3}]_6), & \theta_{y_6} &= q_3([\theta_{s_3}]_6, [\theta_{m_3}]_6)
 \end{aligned} \quad (8)$$

9. A partir das expressões (3), (5), (6), (7) e (8), pode-se expressar as rotações  $\theta_{x_i}$  e  $\theta_{y_i}$  dos seis nós do elemento triangular em função dos nove graus de liberdade  $[w]_i$ ,  $\left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_i$ ,  $\left[ \frac{\partial w}{\partial y} \right]_i$  dos nós de canto do triângulo:

$$\begin{Bmatrix} \theta_{x_1} \\ \theta_{y_1} \\ \theta_{x_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \theta_{x_6} \\ \theta_{y_6} \end{Bmatrix} = [T]_{(12 \times 9)} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_{,x_1} \\ w_{,y_1} \\ w_2 \\ w_{,x_2} \\ w_{,y_2} \\ w_3 \\ w_{,x_3} \\ w_{,y_3} \end{Bmatrix} \quad \boxed{\{d_\theta\} = [T] \{d\}} \quad (9)$$

10. As curvaturas são definidas como

$$\{k_k\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{array} \right\}$$

e, a partir da expressão (1), tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{x2} \\ \vdots \\ \theta_{x6} \\ \theta_{y6} \end{array} \right\}$$

$$\boxed{\{k_k\} = [B_0] \{d_\theta\}} \quad (10)$$

onde,

$$[B_0] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \dots & \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & \dots & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \dots & \frac{\partial N_6}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial x} \end{bmatrix}$$

(3x12)

11. As curvaturas em um ponto qualquer no interior do elemento são definidas em função dos nove graus de liberdade  $w_i$ ,  $\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]_i = \theta_{xi}$ ,  $\left[\frac{\partial w}{\partial y}\right]_i = \theta_{yi}$ , utilizando a expressão (9):

$$\{k_k\} = [B_0] [T] \{d\}$$

$$\boxed{\{k_k\} = [B] \{d\}} \quad (11)$$

$$\boxed{[B] = [B_0] [T]}$$

12. As deformações são definidas em função das curvaturas, como na Teoria de Placas de Mindlin:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$\{ \epsilon \} = -z [B_0] \{ d\theta \}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \{ \epsilon \} = -z \{ k_k \} \\ \{ \epsilon \} = -z [B] \{ d \} \end{matrix}} \quad (12)$$

13. A energia de deformação de um elemento é dada por:

$$U = \int_V \frac{1}{2} \{ \epsilon \}^T [E] \{ \epsilon \} dV, \quad \text{onde } [E] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Assim, por (12):

$$U = \int_V \frac{1}{2} \{ k_k \}^T [E] \{ k_k \} z^2 dV = \int_A \frac{1}{2} \{ k_k \}^T [E] \{ k_k \} dA \int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz$$

$$\boxed{\begin{matrix} U = \int_A \frac{1}{2} \{ k_k \}^T [D_k] \{ k_k \} dA \\ [D_k] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \\ D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \end{matrix}} \quad (13)$$

14. A matriz de rigidez do elemento DKT é obtida por:

$$U = \frac{1}{2} \{d\}^T [k] \{d\}$$

Utilizando as expressões (11) e (13) tem-se:

$$U = \int_A \frac{1}{2} \{d\}^T [B]^T [D_k] [B] \{d\} dA = \frac{1}{2} \{d\}^T \int_A [B]^T [D_k] [B] dA \{d\}$$

Portanto,

$$\boxed{\begin{aligned} [k] &= \int_A [B]^T [D_k] [B] dA \\ [B] &= [B_0] [T] \end{aligned}} \quad (14)$$

15. Os momentos em qualquer ponto no interior do elemento são obtidos em função de  $\{d\}$  utilizando-se a expressão (12) e as seguintes relações:

$$\{\nabla\} = [E] \{E\} \longrightarrow \begin{Bmatrix} \nabla_x \\ \nabla_y \\ \nabla_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \nabla_x \cdot z \, dz ; \quad M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \nabla_y \cdot z \, dz ; \quad M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \nabla_{xy} \cdot z \, dz$$

Assim, após a integração ao longo da espessura:

$$\boxed{\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -[D_k] [B] \{d\}} \quad (15)$$

---

---

### Observações:

- (a) Para um elemento homogêneo com espessura constante, a matriz de rigidez do elemento DKT pode ser integrada exatamente por uma quadratura com 3 pontos.
- (b) Existem fórmulas fechadas para computer a matriz de rigidez (veja Cook, 1989 - cap. 11).
- (c) O elemento quadrangular com restrições de Kirchhoff discretas - DKQ - é formulado de maneira análoga ao DKT, mas partindo do elemento quadrático quadrilateral - Q8 - com os lados retos.



— APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS FINITOS PARA PLACAS.

Referência Básica: [COOK 89]

Ivan Menezes

18.11.90



ÍNDICE		pag.
1.-	INTRODUÇÃO	1
2.-	TEORIA DAS PLACAS	4
2.1-	TEORIA DAS PLACAS DE KIRCHHOFF	5
(a)	HIPÓTESES BÁSICAS	5
(b)	CAMPO DE DESLOCAMENTOS	5
(c)	RELAÇÃO MOMENTO x CURVATURA	6
(d)	ELEMENTOS FINITOS PARA PLACAS DELGADAS	7
2.2-	CONDIÇÕES DE CONTINUIDADE PARA AS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO	15
2.3-	TEORIA DAS PLACAS DE MINDLIN	22
(a)	HIPÓTESES BÁSICAS	22
(b)	CAMPO DE DESLOCAMENTOS	23
(c)	RELAÇÃO MOMENTO x CURVATURA	24
(d)	ELEMENTOS FINITOS PARA PLACAS ESPESSAS	26
(e)	EXERCÍCIO	31
3.-	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	37



# FLEXÃO DE PLACAS PLANAS

## 1. INTRODUÇÃO

As placas planas são elementos estruturais que suportam esforços transversais por efeitos de FLEXÃO e de CISCALHAMENTO. Pontos situados sobre a superfície média da placa (plano "xy") se deslocam apenas ao longo da direção transversal "z", não havendo portanto, esforços no plano médio da placa (esforços de membrana). A figura (1) ilustra as componentes de tensão que atuam num elemento infinitesimal de placa.

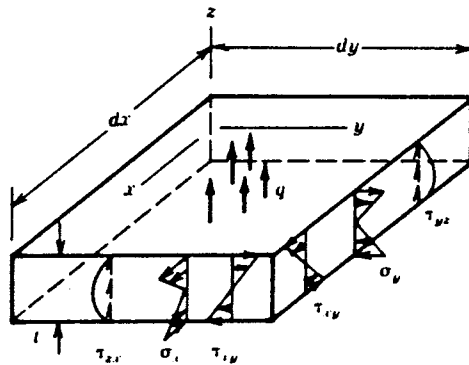


Fig. (1) - Tensões num elemento infinitesimal de placa\*.

O carregamento transversal é "q" (Força por unidade de área) [COOK89].

\* Considerando-se material homogêneo com comportamento linear elástico.

As tensões " $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ " variam linearmente com " $z$ " estão associadas com os momentos flectores " $M_x$  e  $M_y$ " através das seguintes expressões:

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \cdot z \, dz \quad (1)$$

$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y \cdot z \, dz$$

As tensões " $\tau_{xy}$ " também variam linearmente com " $z$ " e estão associadas aos momentos de torção " $M_{xy}$ " por:

$$M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z \, dz \quad (2)$$

Na teoria das placas, as tensões normais " $\sigma_z$ " são desprezíveis em comparação com " $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ ". As tensões de cisalhamento " $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ " variam quadraticamente com " $z$ ".

O termo "placa à flexão" subentende que as cargas externas não possuem componentes no plano " $xy$ " de tal forma que " $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ " são nulas na superfície média ou seja: ( $z=0$ ).

As tensões cisalhantes " $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ " quando integradas ao longo da espessura conduzem aos esforços cortantes " $Q_x$  e  $Q_y$ " dados respectivamente por:

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz \quad (3)$$

$$Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz$$

A fig.(2) mostra um elemento infinitesimal submetido a esforços solicitantes (momentos e cortantes) nos sentidos positivos com relação ao sistema de coordenadas "xyz".

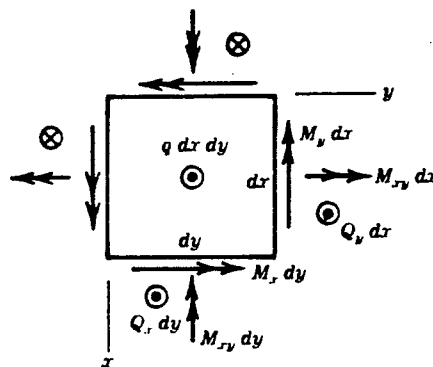


Fig. (2) - Sentidos positivos dos esforços solicitantes.

Convenção para os sentidos das forças cortantes:

- $\odot \Rightarrow$  sentido "+z"
- $\otimes \Rightarrow$  sentido "-z"

As tensões " $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ " assumem valores máximos nas superfícies extremas da placa, ou seja: para " $z = \pm t/2$ " e seus valores para " $z$ " arbitrário são dados por:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{t^3/12} z ; \quad \sigma_y = \frac{M_y}{t^3/12} z ; \quad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{t^3/12} z \quad (4)$$

As tensões de cisalhamento são normalmente pequenas quando comparadas com as demais componentes de tensão. Seus valores máximos ocorrem em " $z = 0$ " e são dados por:

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{Q_x}{t} ; \quad \tau_{yz} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{t} \quad (5)$$

## 2. TEORIA DAS PLACAS

- DELGADAS - Teoria das placas de KIRCHHOFF
- ESPESSAS - Teoria das placas de MINDLIN

"Diferença Básica: As deformações por cisalhamento são consideradas (de forma aproximada) na teoria de MINDLIN".

## 2.1 TEORIA DAS PLACAS DE KIRCHHOFF

### a) HIPÓTESES BÁSICAS:

- Pontos situados na superfície média ( $z=0$ ) movem-se apenas na direção "z" após as deformações por flexão.
- Retas inicialmente normais à sup. média da placa, antes da deformação, permanecem retas e normais à superfície média após as deformações (fig. 3).
- Pontos situados fora da superfície média da placa possuem componentes de deslocamento nas direções "x, y e z", dadas respectivamente por: "u, v e w".

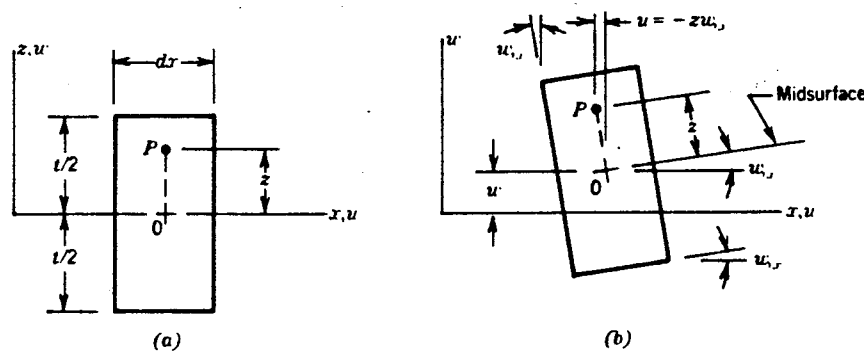


Figura (3) - Elemento infinitesimal de placa delgada: (a) antes e (b) após as deformações:

### b) CAMPO DE DESLOCAMENTOS:

$$\begin{cases} u = -z w_{,x} \\ v = -z w_{,y} \\ w = w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_x = u_{,x} = -z w_{,xx} \\ \epsilon_y = v_{,y} = -z w_{,yy} \\ \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} = -2z w_{,xy} \end{cases} \quad (6)$$

## c) RELACÃO MOMENTO x CURVATURA

- Componentes efetivas de Tensão:  $\tilde{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$  (7)

- Relação Tensão x deformação:

$$\tilde{\sigma} = \tilde{C} \tilde{\epsilon} \quad \text{onde:} \quad \tilde{C} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

A relação MOMENTO x CURVATURA é obtida por integração das relações acima, ou, de forma equivalente, pela substituição de (4) e (6) em (8)

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = - \overbrace{\frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}}^D \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}^{\tilde{C}'} \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

ou ainda:  $\tilde{M} = -D \tilde{C}' \tilde{k}$

onde:  $D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} = \text{Rigidez à flexão da placa}$

$$\tilde{k} = \langle w_{,xx} \quad w_{,yy} \quad 2w_{,xy} \rangle = \text{Curvaturas}$$

$$\tilde{D}_k = D \tilde{C}' \quad (10)$$



## d) ELEMENTOS FINITOS PARA PLACAS DELGADAS

A energia de deformação de uma placa delgada é determinada a partir das componentes " $\epsilon_x, \epsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$ " do tensor das deformações  $\tilde{\epsilon}$ . Por sua vez, as deformações são determinadas a partir do deslocamento transversal " $w(x,y)$ ". O ponto de partida para formulação da matriz de rigidez do elemento é a energia de deformação " $U$ ", a qual é dada por:

$$U = \int_V \frac{1}{2} \tilde{\epsilon}^t \tilde{C} \tilde{\epsilon} dV \quad (11)$$

onde:

$$\tilde{\epsilon}^t = \langle -z w_{,xx} \quad -z w_{,yy} \quad -2z w_{,xy} \rangle,$$

$$\tilde{C} \Rightarrow (\text{vide expressão 8}), \quad (12)$$

$$\text{e } dV = dz dS$$

A integração da expressão (11) ao longo da espessura do elemento conduz a:

$$U = \int_S \frac{1}{2} \tilde{k}^t \tilde{D}_k \tilde{k} dS \quad \text{chegar} \quad (13)$$

onde " $\tilde{k}$  e  $\tilde{D}_k$ " estão definidos em (9) e (10) respectivamente.

A fig. (4) ilustra um elemento finito retangular para placas delgadas (Teoria de Kirchhoff). O elemento possui "12" graus de liberdade [COOK 89].

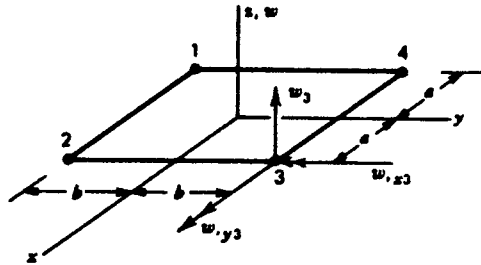


Fig. (4) - Elemento retangular (12 g.lib.), ilustrando os graus de liberdade do nó "3" [COOK 89].

O deslocamento transversal "w" é interpolado a partir de valores nodais "d", segundo a expressão:

$$w = \underset{\sim}{N}_{(1 \times 3n)} \cdot \underset{\sim}{d}_{(3n \times 1)} \quad (14)$$

onde: "n" = número de nós do elemento.

O vetor "k" das curvaturas é obtido diretamente a partir da expressão (14), por diferenciação, ou seja:

$$\underset{\sim}{k} = \left\{ \begin{array}{l} + \partial^2 / \partial x^2 \\ + \partial^2 / \partial y^2 \\ + 2 \partial^2 / \partial x \partial y \end{array} \right\} \underset{\sim}{N} \underset{\sim}{d} \Rightarrow \underset{\sim}{k}_{(3 \times 1)} = \underset{\sim}{B}_{(3 \times 3n)} \underset{\sim}{d}_{(3n \times 1)} \quad (15)$$



- GRAUS DE LIBERDADE DO ELEMENTO KIRCHHOFF ( $\tilde{d}$ ):

$$\tilde{d}^t = \langle w_1; w_{,x_1}; w_{,y_1}; \dots; w_n; w_{,x_n}; w_{,y_n} \rangle \quad (16)$$

- DETERMINAÇÃO DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO ( $\tilde{N}$ )

Para determinação das funções de interpolação para os elementos de placa delgada, é conveniente a utilização de expressões "polinômicas" que relacionam o deslocamento transversal "w" com os "3n" parâmetros nodais denominados "coordenadas generalizadas". Para o elemento em estudo, tem-se que:

$$n = 4 \text{ (n: de nós)} \implies 12 \text{ coordenadas generalizadas}$$

Adota-se, por exemplo:

$$w = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8 x^2 y + a_9 xy^2 + a_{10} y^3 + a_{11} x^3 y + a_{12} xy^3$$

ou ainda:

$$w = \langle 1; x; y; x^2; xy; y^2; x^3; x^2 y; xy^2; y^3; x^3 y; xy^3 \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{12} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Matricialmente:

$$w = \tilde{X} \tilde{a} \quad (18)$$

A escolha dos termos polinomiais do vetor  $\tilde{X}$  deve atender ao requisito básico de "COMPLETITUDE" que juntamente com a condição de "CONTINUIDADE" do campo de deslocamentos, asseguram a convergência do método dos elementos finitos.

Um polinômio de grau "n" para ser completo, deve conter todos os termos de ordem inferior ou igual a "n". No exemplo em estudo são necessários 12 termos polinomiais. No entanto, um polinômio completo de ordem "3" necessita de "10 termos". Neste caso, acrescentam-se dois termos de ordem "4" procurando-se sempre buscar termos que estejam balanceados no TRIÂNGULO DE PASCAL\*, para assegurar a ISOTROPIA GEOMÉTRICA [MART90].

\*

Triângulo de Pascal	Grau do polinômio	Número de termos
1	0	1
x   y	1	3
x <sup>2</sup> xy   y <sup>2</sup>	2	6
x <sup>3</sup> x <sup>2</sup> y   xy <sup>2</sup> y <sup>3</sup>	3	10
x <sup>4</sup> x <sup>3</sup> y   x <sup>2</sup> y <sup>2</sup> xy <sup>3</sup> y <sup>4</sup>	4	15

⚡  
Termos considerados em " $\tilde{X}$ " (vide expressão 17)

Os coeficientes "a<sub>i</sub>" podem ser calculados em função dos graus de liberdade "d<sub>i</sub>" da seguinte forma:

$$w = \tilde{X} \tilde{a}$$

[Vide figura (4)]

$$\begin{cases} w \\ \frac{dw}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dw}{dy} \end{cases} \begin{cases} | \\ | \\ \vdots \\ | \end{cases} \begin{cases} x = -a \\ y = -b \\ \vdots \\ x = -a \\ y = b \end{cases} = \begin{cases} \tilde{X} \\ \frac{d\tilde{X}}{dx} \\ \vdots \\ \frac{d\tilde{X}}{dy} \end{cases} \begin{cases} | \\ | \\ \vdots \\ | \end{cases} \begin{cases} x = -a \\ y = -b \\ \vdots \\ x = -a \\ y = b \end{cases} \tilde{a} = \begin{cases} w_1 \\ w_{,x_1} \\ \vdots \\ w_{,y_4} \end{cases} \quad (19)$$

Escrevendo-se as expressões acima na forma matricial, obtêm-se:

$$\tilde{d} = \tilde{A} \tilde{a} \quad (20)$$

ou também:

$$\tilde{a} = \tilde{A}^{-1} \tilde{d} \quad (21)$$

Substituindo-se a expressão (21) na expressão (18), chega-se a:

$$\underset{\sim}{W} = \underset{\sim}{X} \underset{\sim}{A}^{-1} \underset{\sim}{d} \quad (22)$$

Comparando-se (22) com (14), obtém-se finalmente que:

$$\boxed{\underset{\sim}{N} = \underset{\sim}{X} \underset{\sim}{A}^{-1}} \quad (23)$$

### - MATRIZ DE RIGIDEZ E VETOR DE CARGAS NODAIS EQUIVALENTES

Seja uma placa delgada submetida a um carregamento distribuído uniforme "q". O indicador variacional do problema, que representa a energia potencial total do sistema, é dado por:

$$\Pi = U + V \quad (24)$$

onde:

U = energia interna de deformação

V = potencial das forças externas

De acordo com a expressão (13):

$$U = \int_S \frac{1}{2} \underset{\sim}{k}^t \underset{\sim}{D}_k \underset{\sim}{k} dS$$



O potencial das forças externas "V" é dado por:

$$V = - \int_S q \cdot w \, dS \quad (25)$$

A solução do problema (campo de deslocamentos) é obtida a partir da condição de estacionaridade do funcional  $\Pi$ , ou seja:

$$\delta^{(1)} \Pi = 0 \quad (26)$$

A expressão (26) traduz matematicamente a condição de energia potencial total mínima do sistema.

$$\delta \Pi = 0 \Rightarrow \delta U + \delta V = 0 \quad (27)$$

Substituindo as expressões (13), (14), (15) e (25) na expressão (27), chega-se a:

$$\delta \tilde{d}^t \int_S \tilde{B}^t \tilde{D}_k \tilde{B} \, dS \tilde{d} - \delta \tilde{d}^t \int_S \tilde{N}^t q \, dS = 0$$

Para uma variação arbitrária de " $\tilde{d}$ ", tem-se que:

$$\boxed{\tilde{K} \tilde{d} = \tilde{f}} \quad (28)$$

onde:

$$\underset{\sim}{K} = \int_S \underset{\sim}{B}^t \underset{\sim}{D}_k \underset{\sim}{B} ds \quad (\text{MATRIZ DE RIGIDEZ})$$

(29)

e:

$$\underset{\sim}{f} = \int_S \underset{\sim}{N}^t q ds \quad (\text{CARREGAMENTO NODAL EQUIVALENTE})$$

Para o elemento retangular de 12 graus de liberdade tem-se:

$$w = \underset{\sim}{N} \underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{X} \underset{\sim}{A}^{-1} \underset{\sim}{d}$$

$$\underset{\sim}{k} = \left\{ \begin{array}{l} + \partial^2 / \partial x^2 \\ + \partial^2 / \partial y^2 \\ + 2 \partial^2 / \partial x \partial y \end{array} \right\} \underset{\sim}{X} \underset{\sim}{A}^{-1} \underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{Z} \overset{\underset{\sim}{B}}{\underset{\sim}{A}^{-1}} \underset{\sim}{d} \quad (30)$$

$$\underset{\sim}{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix}$$

(31)

Portanto:

$$\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{A}^{-t} \left[ \int_S \underset{\sim}{Z}^t \underset{\sim}{D}_k \underset{\sim}{Z} ds \right] \underset{\sim}{A}^{-1} \quad ; \quad \underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{A}^{-t} \int_S \underset{\sim}{X}^t q ds \quad (32)$$

## 2.2 - CONDIÇÕES DE CONTINUIDADE PARA AS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO :

Uma condição necessária, porém não suficiente, para que um dado modelo de elementos finitos apresente soluções convergentes é que o campo de deslocamentos adotado satisfaça as chamadas "Condições de Continuidade".

Admitindo-se que a mais alta ordem da derivada que apareça no funcional da energia potencial total para as placas seja " $m$ ", deve-se ter: [MART 90]

### i) Continuidade interna:

O modelo de elementos finitos (em função do deslocamento " $w$ ") deve ser diferenciável até a ordem mais alta " $m$ " que aparece no funcional (para que haja uma integração não trivial).

### ii) Continuidade entre elementos:

O modelo de elementos finitos deve ser contínuo entre os elementos até uma ordem a menos que a mais alta ordem " $m$ " que aparece no funcional, isto é, ele deve ser de Continuidade " $C^{m-1}$ ".



Nos problemas de placas delgadas, o funcional de energia potencial\* contém derivadas segundas das funções incógnitas, logo: " $m=2$ ".

A primeira das duas condições anteriores é garantida pelo fato de se estar utilizando funções polinomiais. No entanto, de acordo com a segunda condição, o modelo de elementos finitos deve apresentar continuidade de 1ª ordem, ou seja: " $C^1$ ".

Portanto, não apenas o campo de deslocamentos " $w$ " deve ser contínuo, mas a sua derivada " $\partial w / \partial n$ " também deve ser contínua na interface entre dois elementos quaisquer.

Para verificação desta condição de continuidade no elemento retangular em estudo, considere-se, por exemplo, a fig. (5) que representa o lado "1-2" de um elemento retangular.

$$* \quad \Pi = U + V \quad \Rightarrow \quad U = \int_V \frac{1}{2} \tilde{k}^t D_k \tilde{k} dv$$

$$\tilde{k} = \begin{Bmatrix} \partial^2 w / \partial x^2 \\ \partial^2 w / \partial y^2 \\ 2\partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad "m=2"$$



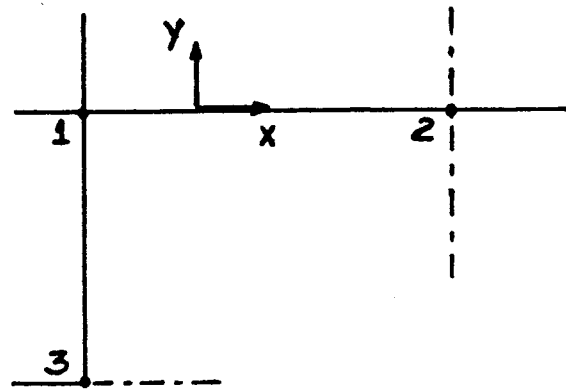


Figura (5) - Condição de Continuidade para as derivadas normais [ZIEN77]

A direcção normal "n" é na realidade a direcção "y", e, portanto, o objetivo é mostrar que "w" e " $\partial w / \partial y$ " estão definidos univocamente pelos valores de "w,  $\partial w / \partial x$  e  $\partial w / \partial y$ " nos pontos nodais que se encontram na linha "1-2".

Ao longo da linha "1-2" (ou seja:  $y = \text{CONST}$ ), tem-se:

$$\begin{cases} w = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots \\ \frac{\partial w}{\partial y} = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \dots \end{cases} \quad (33)$$

O número de constantes " $a_i$  e  $b_i$ " é função do número de parâmetros nodais ao longo da linha "1-2". Por exemplo, se ao longo de "1-2" só existem 2 nós, então o deslocamento "w" pode variar cubicamente já que uma variação cúbica necessita de 4 parâmetros, quais sejam:



" $w_1$ ;  $w_{,x_1}$ ;  $w_2$  e  $w_{,x_2}$ ". Por outro lado, a derivada " $\partial w / \partial y$ " só poderia variar LINEARMENTE em função de " $w_{,y_1}$  e  $w_{,y_2}$ ".

Repetindo-se o raciocínio utilizado nas expressões (33), agora para o lado "1-3" ( $x = \text{const}$ ), ou seja:

$$\begin{cases} w = c_1 + c_2 y + c_3 y^2 + \dots \\ \frac{\partial w}{\partial x} = d_1 + d_2 y + d_3 y^2 + \dots \end{cases} \quad (34)$$

Tem-se então:

Ao longo de (1-2)  $\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial y}$  <sup>(linear)</sup> que só depende dos parâmetros dos nós "1 e 2".

Ao longo de (1-3)  $\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x}$  <sup>(linear)</sup> que só depende dos parâmetros dos nós "1 e 3".

Derivando-se " $\frac{\partial w}{\partial y}$ " com relação a "x" tem-se que:

" $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$ " que depende dos parâmetros dos nós "1 e 2".

Analogamente, derivando-se " $\frac{\partial w}{\partial x}$ " com relação a "y", obtém-se:

" $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ " que depende dos parâmetros dos nós "1 e 3".



No ponto comum (nó "1") surge imediatamente uma incoerência uma vez que não podemos ter automaticamente a condição necessária de continuidade, ou seja:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$$

para valores arbitrários dos parâmetros dos nós "2 e 3".

CONCLUSÃO:

"É impossível definir mediante expressões polinomiais simples, funções de interpolação que assegurem uma compatibilidade completa ( $C^1$ , no caso) quando nos nós só são impostos os valores de "w" e de suas derivadas primeiras" [ZIEN77].

A continuidade do deslocamento "w" está assegurada pois, como já foi dito, uma variação cúbica de "w" necessita de 4 parâmetros para ser definida univocamente, que são os dois deslocamentos transversais " $w_i$  e  $w_j$ " e as duas rotações " $w_{,s_i}$  e  $w_{,s_j}$ ", ao longo de uma linha genérica "i-j".

Por outro lado, a derivada " $\partial w / \partial n$ ", obtida a partir da expressão (17), também apresenta uma variação cúbica, e como só existem 2 parâmetros nodais " $w_{,n_i}$  e  $w_{,n_j}$ ", então esta derivada não é definida de forma unívoca. O Elemento é dito: "NÃO-CONFORME".

Apesar da violação da condição de continuidade de deslocamentos entre elementos não representam necessariamente a não convergência dos resultados (pelo contrário, muitos elementos "não-conformes" têm sido amplamente utilizados com resultados satisfatórios), vários pesquisadores desenvolveram elementos finitos para placas delgadas que satisfizessem as condições de continuidade. Exemplos de Elementos Finitos "CONFORMES" para placas delgadas podem ser encontrados, por exemplo, em [ZIEN 77], capítulo 10, seções 9, 10, 11 e 12.

### — ELEMENTO TRIANGULAR PARA PLACAS DELGADAS —

A tentativa de formulação de um elemento finito triangular de maneira análoga ao elemento retangular estudado anteriormente, encontrou algumas dificuldades. Seja, por exemplo, o elemento finito triangular ilustrado na fig. (6).

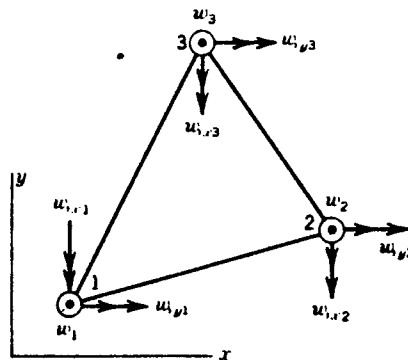


Figura (6) - Elemento finito triangular p/ placas delgadas.



De acordo com a Fig. (6), o elemento apresenta "9" graus de liberdade, e um polinômio cúbico completo apresenta "10" termos.

Dois campos de deslocamentos candidatos podem ser:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 1 \\ \hline & \\ \hline X & Y \\ \hline X^2 & Y^2 \\ \hline X^3 & X^2Y & XY^2 & Y^3 \end{array} \end{array}$$

(a)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 1 & \\ \hline & & \\ \hline X & Y & \\ \hline X^2 & XY & Y^2 \\ \hline X^3 & (X^2Y + XY^2) & Y^3 \end{array} \end{array}$$

(b)

A opção (a) emite o termo "XY". O elemento resultante é incapaz de representar um estado de "TORÇÃO PURA", sendo portanto considerado inaceitável. A opção (b) conduz a um elemento que perde a "Isotropia geométrica", apresenta pobres propriedades de convergência e alguns problemas de singularidade na relação entre os graus de liberdade " $\tilde{d}$ " e as coordenadas generalizadas " $\tilde{a}$ " (vide expressão 20).

Mais informações sobre este elemento finito podem ser encontradas, por exemplo, em [COOK 89, ZIEN 77].

2.3-

## TEORIA DAS PLACAS DE MINDLIN

## a) HIPÓTESES BÁSICAS :

- Pontos situados na superfície média da placa ( $z=0$ ), movem-se apenas na direção "z" após as deformações.
- Pontos situados sobre uma linha reta normal à superfície média da placa antes das deformações, permanecerão sobre esta linha reta, a qual não mais necessariamente será normal à superfície média após as deformações (vide Fig. 7).
- Pontos situados fora da superfície média da placa possuem componentes de deslocamento nas direções "x, y e z" dadas respectivamente por "u, v e w".
- Assim como na teoria de Kirchhoff, as tensões normais à superfície média da placa são desprezíveis.
- Consideram-se (de forma aproximada)\* as deformações por cisalhamento.

\* A hipótese de que as secções planas permanecem planas após as deformações afasta a possibilidade de empenamento ("warping") da secção, daí a expressão: "de forma aproximada".

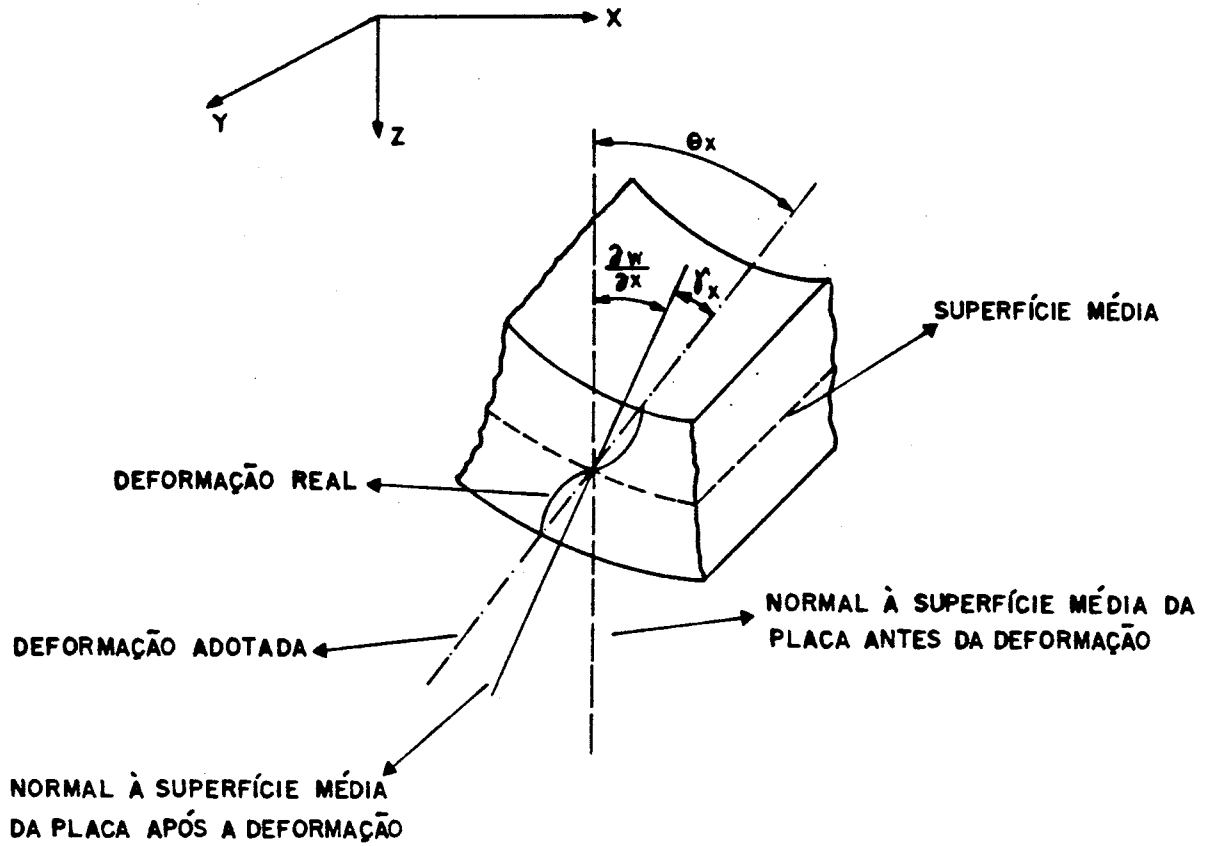


Figura (7) - Elemento infinitesimal de placa espessa.  
[HINT77]

b) CAMPO DE DESLOCAMENTOS E DEFORMAÇÕES

$$\begin{cases} u = -z \theta_x \\ v = -z \theta_y \\ w = w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_x = -z \theta_{x,x} \\ \epsilon_y = -z \theta_{y,y} \\ \gamma_{xy} = -z (\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) \end{cases} \quad (35)$$

Distorções devido ao cisalhamento.

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = w_{,x} - \theta_x \\ \gamma_{yz} = w_{,y} - \theta_y \end{cases}$$

$$\tilde{\epsilon}_K^t = -z \langle \theta_{x,x}; \theta_{y,y}; \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \rangle = -z \tilde{k}_K^t$$

$$\tilde{\epsilon}_S^t = -\langle \theta_x - w_{,x}; \theta_y - w_{,y} \rangle = -\tilde{k}_S^t$$

$\tilde{k}_K$  → vetor de curvaturas para flexão  
 $\tilde{k}_S$  → para cisalhamento



## c) RELAÇÃO MOMENTO x CURVATURA

Componentes efetivas de tensão: 
$$\tilde{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (36)$$

Relação Tensão x Deformação:

$$\tilde{\sigma} = \tilde{C} \tilde{\epsilon}$$

onde:

$$\tilde{C} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

(37)

A relação MOMENTO x CURVATURA é obtida por integração das relações acima ao longo da espessura "t" da placa, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tilde{D}_K & 0 \\ \hline 0 & \tilde{D}_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial\theta_x/\partial x \\ \partial\theta_y/\partial y \\ \partial\theta_x/\partial y + \partial\theta_y/\partial x \\ \theta_x - \partial w/\partial x \\ \theta_y - \partial w/\partial y \end{Bmatrix} \quad (38)$$



onde:

$\tilde{D}_K$  está apresentado na expressão (10)

$$\tilde{D}_s = \begin{bmatrix} K + G & 0 \\ 0 & K + G \end{bmatrix}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Material Isotrópico ( $G_x = G_y = G$ )       $K = \text{coef. de forma}$   
 ( $\approx 5/6$ )

$$\tilde{k}^t = \left\langle \frac{\partial \theta_x}{\partial x}; \frac{\partial \theta_y}{\partial y}; \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}; \theta_x - \frac{\partial w}{\partial x}; \theta_y - \frac{\partial w}{\partial y} \right\rangle$$

↳ Vetor das curvaturas.      (39)

Obs: O coeficiente "K" é introduzido para corrigir a hipótese de que a distribuição de tensões cisalhantes " $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ " é uniforme. O valor "5/6" corresponde à consideração de uma distribuição parabólica das tensões, ou seja:

The diagram illustrates the correction factor K. On the left, a rectangular cross-section is shown with a parabolic shear stress distribution  $\tau$  across its height. This is equated to a uniform shear stress distribution (represented by a rectangle with a vertical double-headed arrow) multiplied by the factor K.

## d) ELEMENTOS FINITOS PARA PLACAS ESPESSAS.

Os elementos de placa formulados de acordo com a teoria de MINDLIN devem ser capazes de representar tanto as deformações por flexão quanto às deformações por cisalhamento. Portanto, na expressão da energia interna de deformação "U" deve constar as parcelas de trabalho das tensões cisalhantes " $\tau_{xz}$  e " $\tau_{yz}$ " sobre as distorções transversais " $\gamma_{xz}$  e " $\gamma_{yz}$ " respectivamente, ou seja:

$$U = \frac{1}{2} \int_S \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dz dS \quad (40)$$

ou na forma matricial:

$$U = \frac{1}{2} \int_S \int_{-t/2}^{t/2} \left[ \begin{matrix} \epsilon_x & \epsilon_y & \gamma_{xy} \end{matrix} \right] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{matrix} \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{matrix} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz dS \quad (41)$$

Integrando-se a expressão (41) ao longo da espessura e substituindo-se a relação Momento x Curvatura (expressão 38), obtém-se :

$$U = \frac{1}{2} \int_S \left[ \underbrace{\tilde{k}_K^t D_K \tilde{k}_K}_{\text{PARCELA DE ENERGIA DEVIDO A FLEXÃO}} + \underbrace{\tilde{k}_S^t D_S \tilde{k}_S}_{\text{PARCELA DE ENERGIA DEVIDO AO CISALHAMENTO}} \right] ds \quad (42)$$

onde:

$$\tilde{k} = \begin{Bmatrix} \tilde{k}_K \\ \tilde{k}_S \end{Bmatrix} = \text{vetor das curvaturas} \quad (\text{vide expressão 39})$$

Os graus de liberdade em cada nó de um elemento de placa espessa consistem num deslocamento transversal "w" e duas rotações "θ<sub>x</sub> e θ<sub>y</sub>".

O deslocamento "w" e as rotações "θ<sub>x</sub> e θ<sub>y</sub>" são interpolados de forma independente pelas mesmas funções de interpolação, ou seja :

$$w = \sum_{i=1}^n N_i w_i \quad ; \quad \theta_x = \sum_{i=1}^n N_i \theta_{x_i} \quad \text{e} \quad \theta_y = \sum_{i=1}^n N_i \theta_{y_i} \quad (43)$$

onde. "n" é o número de nós dos elemento.

A expressão (43) pode ser escrita na forma matricial, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & | & N_2 & 0 & 0 & | & \dots & | & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & | & 0 & N_2 & 0 & | & \dots & | & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & | & 0 & 0 & N_2 & | & \dots & | & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x_1} \\ \theta_{y_1} \\ \vdots \\ w_n \\ \theta_{x_n} \\ \theta_{y_n} \end{Bmatrix} \quad (44)$$

ou ainda:

$$\begin{matrix} \tilde{u} \\ (3 \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} \tilde{N} \\ (3 \times 3n) \end{matrix} \begin{matrix} \tilde{d} \\ (3n \times 1) \end{matrix} \quad (45)$$

As curvaturas ( $\tilde{k}$ ) são dadas por:

$$\tilde{k} = \tilde{\nabla} \tilde{u} \quad (46)$$

onde  $\tilde{\nabla}$  é uma matriz de operadores diferenciais dada por:

$$\tilde{\nabla} = \begin{bmatrix} 0 & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ -\partial/\partial x & 1 & 0 \\ -\partial/\partial y & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Substituindo-se (45) e (47) em (46), obtém-se

$$\underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{\nabla} \underset{\sim}{N} \underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{d} \quad (48)$$

ou seja:

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{N} \quad (49)$$

ou ainda:

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B}_k + \underset{\sim}{B}_s, \text{ onde}$$

$$\underset{\sim}{B}_k = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & | & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & | & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & | & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{B}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{\partial N_1}{\partial x} & N_1 & 0 & | & -\frac{\partial N_1}{\partial x} & N_1 & 0 \\ -\frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & N_1 & | & -\frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & N_1 \end{bmatrix}$$

Tem-se, portanto:

$$\underset{\sim}{k}_k = \underset{\sim}{B}_k \underset{\sim}{d} \quad (50)$$

$$\underset{\sim}{k}_s = \underset{\sim}{B}_s \underset{\sim}{d}$$

- FUNCIONAL DE ENERGIA POTENCIAL TOTAL ( $\Pi$ )

$$\Pi = U + V \quad (51)$$

onde: "U" é dada pela expressão (42)

$$V = - \int_S q w \, ds \quad (52)$$

Substituindo-se as expressões (45) e (50) na condição de estacionaridade de  $\Pi$ , obtém-se:

$$\delta \Pi = \delta U + \delta V = 0$$
$$\delta \tilde{d}^t \int_S \overbrace{B_K^t D_K B_K ds}^{K_K} \tilde{d} + \delta \tilde{d}^t \int_S \overbrace{B_S^t D_S B_S ds}^{K_S} \tilde{d} = \delta \tilde{d}^t \int_S \overbrace{N^t P ds}^{\tilde{f}} \quad (53)$$

onde:  $\tilde{P} = \begin{Bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

Para uma variação arbitrária de " $\tilde{d}$ ", deve-se ter:

$$\underbrace{\left( K_{\tilde{K}} + K_{\tilde{S}} \right)}_{\text{MATRIZ DE RIGIDEZ}} \tilde{d} = \underbrace{\tilde{f}}_{\text{CARREGAMENTO EQUIVALENTE NODAL}} \quad (54)$$

onde:

$$K_{\tilde{K}} = \int_S B_K^t D_K B_K ds$$

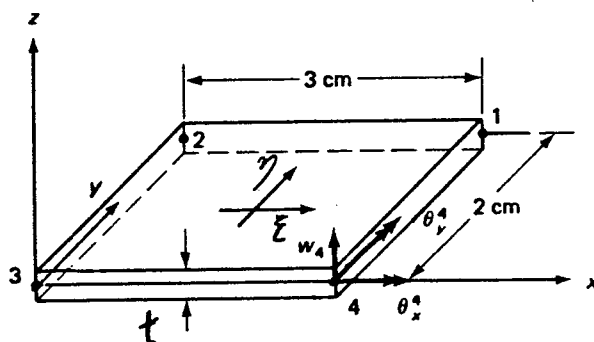
$$K_{\tilde{S}} = \int_S B_S^t D_S B_S ds \quad (55)$$

$$\tilde{f} = \int_S N^t P ds.$$



## e) EXERCÍCIO

Obter as expressões da matriz de rigidez e do vetor de cargas nodais equivalentes, em função das coordenadas locais " $\xi$  e  $\eta$ ", para o elemento de placa indicado na figura abaixo. [BATH82]



RESOLUÇÃO:

Da expressão (54) tem-se:

$$(\underline{K}_K + \underline{K}_S) \underline{d} = \underline{f}$$

onde

$$\underline{K}_K = \int_S \underline{B}_K^t \underline{D}_K \underline{B}_K ds ; \underline{K}_S = \int_S \underline{B}_S^t \underline{D}_S \underline{B}_S ds \quad (56)$$



$$\tilde{D}_k = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; \quad \tilde{D}_s = \begin{bmatrix} ktG & 0 \\ 0 & ktG \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad K = \frac{5}{6}$$

De acordo com as expressões (50) as matrizes " $\tilde{B}_k$  e  $\tilde{B}_s$ " são dadas por:

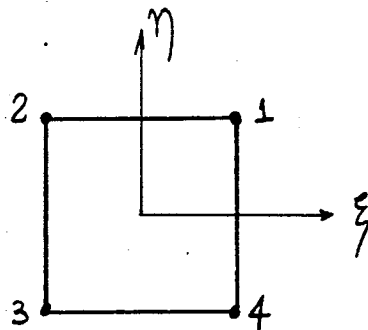
$$B_{\tilde{i}} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_k \\ \tilde{B}_s \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ -\frac{\partial N_i}{\partial x} & N_i & 0 \\ -\frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (58)$$

onde "i" representa o ponto nodal "i".

- Determinação das funções de Interpolação ( $N_i$ ).

- Sistema local

$$\begin{cases} N_1 = \frac{(1+\eta)(1+\xi)}{4} \\ N_2 = \frac{(1+\eta)(1-\xi)}{4} \\ N_3 = \frac{(1-\eta)(1-\xi)}{4} \\ N_4 = \frac{(1-\eta)(1+\xi)}{4} \end{cases} \quad (59)$$







$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$$

termos da matriz Jacobiana  
Inversa

- Cálculo da Transformação Jacobiana

↳ Adotando-se uma representação isoparamétrica:

$$\begin{cases} x = \sum N_i \bar{x}_i \\ y = \sum N_i \bar{y}_i \end{cases}$$

onde:  $\bar{x}_i$  e  $\bar{y}_i$  são as  
coordenadas dos  
pontos nodais

$$x = \frac{1}{4} \left[ (1+\eta)(1+\xi)(3) + (1+\eta)(1-\xi)(0) + \right. \\ \left. (1-\eta)(1-\xi)(0) + (1-\eta)(1+\xi)(3) \right]$$

$$x = \frac{3(1+\xi)}{4} (1+\eta + 1-\eta) \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2} (1+\xi)} \quad (60)$$

Analogamente:

$$y = \frac{1}{4} \left[ (1+\eta)(1+\xi)(2) + (1+\eta)(1-\xi)(2) + \right. \\ \left. (1-\eta)(1-\xi)(0) + (1-\eta)(1+\xi)(0) \right]$$

$$y = \frac{2(1+\eta)}{4} (1+\xi + 1-\xi) \Rightarrow \boxed{y = (1+\eta)} \quad (61)$$

A matriz Jacobiana é dada por:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$\det \underline{J} = 3/2$$

Matriz Jacobiana Inversa:

$$\underline{J}^{-1} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} \quad (63)$$

- Cálculo das Derivadas  $\partial N_i / \partial x$ ,  $\partial N_i / \partial y$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{(1+\eta)}{4} \cdot \frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{(1+\xi)}{4} \cdot 1$$

Analogamente

$$\frac{\partial N_2}{\partial x} = -\frac{(1+\eta)}{4} \cdot \frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial y} = \frac{(1-\xi)}{4} \cdot 1$$



$\frac{\partial N_3}{\partial x} = -\frac{(1-\eta)}{4} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{\partial N_3}{\partial y} = -\frac{(1-\xi)}{4} \cdot 1$	(64)
$\frac{\partial N_4}{\partial x} = \frac{(1-\eta)}{4} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{\partial N_4}{\partial y} = -\frac{(1+\xi)}{4} \cdot 1$	

Portanto

$$\tilde{B}_K = \begin{bmatrix} 0 & \frac{(1+\eta)}{6} & 0 & 0 & -\frac{(1+\eta)}{6} & 0 & 0 & -\frac{(1-\eta)}{6} & 0 & 0 & \frac{(1-\eta)}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1+\xi)}{4} & 0 & 0 & \frac{(1-\xi)}{4} & 0 & 0 & -\frac{(1-\xi)}{4} & 0 & 0 & -\frac{(1+\xi)}{4} \\ 0 & \frac{(1+\xi)}{4} & \frac{(1+\eta)}{6} & 0 & \frac{(1-\xi)}{4} & -\frac{(1+\eta)}{6} & 0 & -\frac{(1-\xi)}{4} & -\frac{(1-\eta)}{6} & 0 & -\frac{(1+\xi)}{4} & \frac{(1-\eta)}{6} \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$\tilde{B}_S = \begin{bmatrix} \frac{(1+\eta)}{6} & \frac{(1+\eta)(1+\xi)}{4} & 0 & \frac{(1+\eta)}{6} & \frac{(1+\eta)(1-\xi)}{4} & 0 & \frac{(1-\eta)}{6} & \frac{(1-\eta)(1-\xi)}{4} & 0 & -\frac{(1-\eta)}{6} & \frac{(1-\eta)(1+\xi)}{4} & 0 \\ -\frac{(1+\xi)}{4} & 0 & \frac{(1+\eta)(1+\xi)}{4} & -\frac{(1-\xi)}{4} & 0 & \frac{(1+\eta)(1-\xi)}{4} & \frac{(1-\eta)}{4} & 0 & \frac{(1-\eta)(1-\xi)}{4} & \frac{(1+\xi)}{4} & 0 & \frac{(1-\eta)(1+\xi)}{4} \end{bmatrix} \quad (66)$$

Substituindo-se as expressões (57), (65) e (66) na expressão (56) e transformando-se o sistema de coordenadas "xy" p/ o sistema natural " $\xi\eta$ ", obtêm-se:

$$\tilde{K}_K = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{B}_K^T \underline{D}_K \tilde{B}_K \det \underline{J} d\xi d\eta \quad (67)$$

Analogamente:

$$\tilde{K}_s = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{B}_s^t \tilde{D}_s \tilde{B}_s \det \tilde{J} d\xi d\eta \quad (68)$$

O carregamento nodal equivalente é dado por:

$$\tilde{f} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{N}^t \tilde{p} \det \tilde{J} d\xi d\eta \quad (69)$$

onde

$$\tilde{N} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & & 0 & 0 & N_4 \end{array} \right] \quad (70)$$

$$\tilde{p} = \begin{Bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow "q" = \text{carregamento uniforme distribuído por unidade de área.}$$



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [BATH 82] - Bathe, K. J. "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1982.
- [COOK 89] - Cook, R. D., Malkus, D. S. and Plesha, M. E. "Concepts and Applications of Finite Element Analysis"; John Wiley & Sons, 3rd edition, 1989.
- [HINT 77] - Hinton, E and Owen, D. R. J., - "Finite Element Programming", Academic Press, Inc., 1977.
- [MART 90] - Martha, L. F., - "Notas de Aula" do curso CIV-2118 - Elementos Finitos, Depto. Eng Civil, PUC-Rio, 1990.
- [ZIEN 77] - Zienkiewicz, O. C. - "The Finite Element Method", McGraw Hill, 3rd Edition, 1977.