Geometria Computacional:

Principais Algoritmos Usados

André Maués Brabo Pereira – Depto. de Eng. Civil – UFF

e

Luiz Fernando Martha – Depto. de Eng. Civil – PUC-Rio

Adaptado para a disciplina:

CIV2802 – Sistemas Gráficos para Engenharia

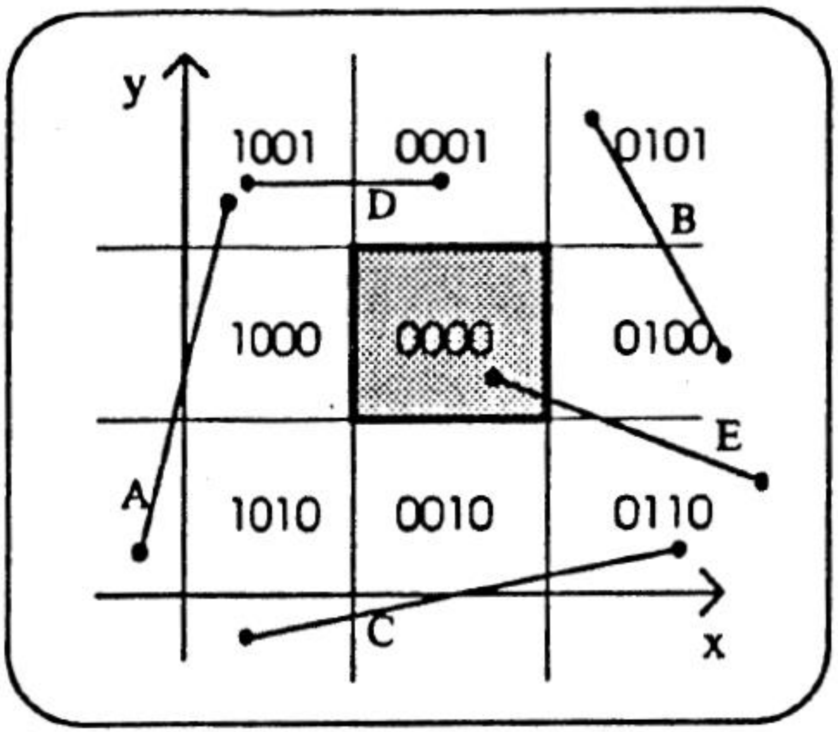
Conteúdo

- Pick de segmento de reta
- Ponto mais próximo em um segmento de reta
- Tesselagem de polígonos
- Interseção de segmentos de reta
- Verificação de inclusão de ponto em polígono

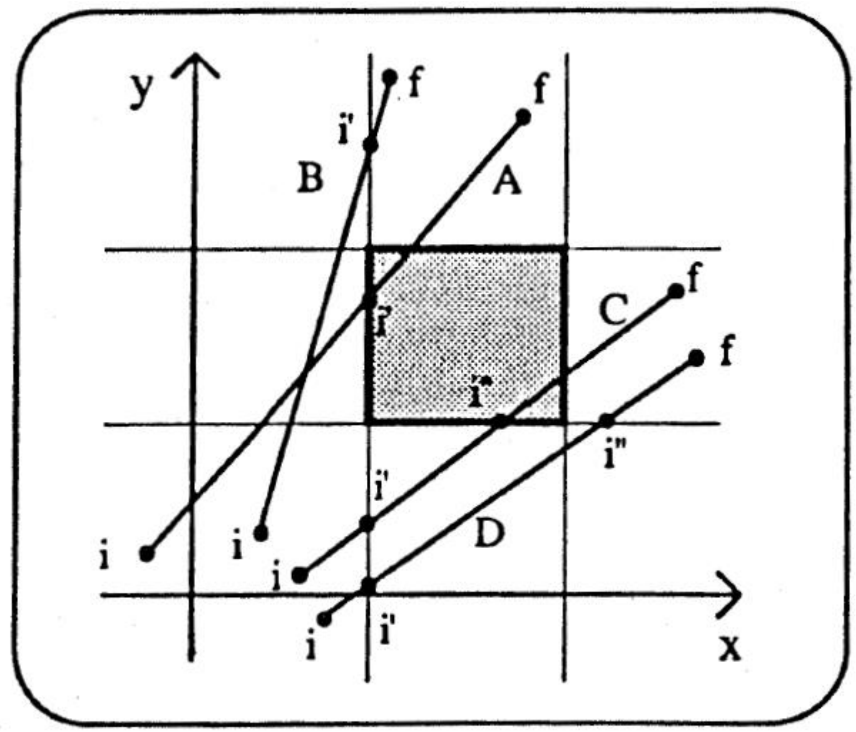
Pick de Segmento de Reta

Seleção (Pick) de Segmento de Reta
(baseada no algoritmo de cerceamento de linhas)

Regiões com o mesmo código e posições triviais (A, B, C, D):



Algoritmo recursivo para recair nos casos triviais:



```python
# ----------------------------------------------------------------------
# pickLine: check to see if given point (x,y) touches given line
# (x0,y0)-(x1,y1) based on given tolerance. Uses auxiliary method
# pickCode.
def pickCode(x, y, xmin, xmax, ymin, ymax):
    cod = [x < xmin, x > xmax, y < ymin, y > ymax]
    return cod

def pickLine(x0, y0, x1, y1, x, y, tol):
    # Define atraction window.
    xmin = x - tol
    xmax = x + tol
    ymin = y - tol
    ymax = y + tol

    cod1 = Curve.pickCode(x1, y1,  xmin, xmax, ymin, ymax)
    while True:
        cod0 = Curve.pickCode(x0, y0,  xmin, xmax, ymin, ymax)

        count = 0
        for i in range(0, 4):
            if cod0[i] and cod1[i]:  # Test no-trivial pick
                break
            else:
                count += 1
        if count != 4:
            break

        # Move point 0 to window limit.
        if cod0[0]:
            y0 += (xmin - x0) * (y1 - y0) / (x1 - x0)
            x0 = xmin
        elif cod0[1]:
            y0 += (xmax - x0) * (y1 - y0) / (x1 - x0)
            x0 = xmax
        elif cod0[2]:
            x0 += (ymin - y0) * (x1 - x0) / (y1 - y0)
            y0 = ymin
        elif cod0[3]:
            x0 += (ymax - y0) * (x1 - x0) / (y1 - y0)
            y0 = ymax
        else:
            return True

    return False
```

Ponto mais Próximo em um Segmento de Reta

PONTO MAIS PRÓXIMO EM UM SEGMENTO DE RETA UTILIZANDO PRODUTO INTERNO

Projeção do ponto C na reta AB:

$$\boxed{C' = A + t_{C'}\left(B - A\right)}$$

Ponto mais próximo de C no segmento AB:

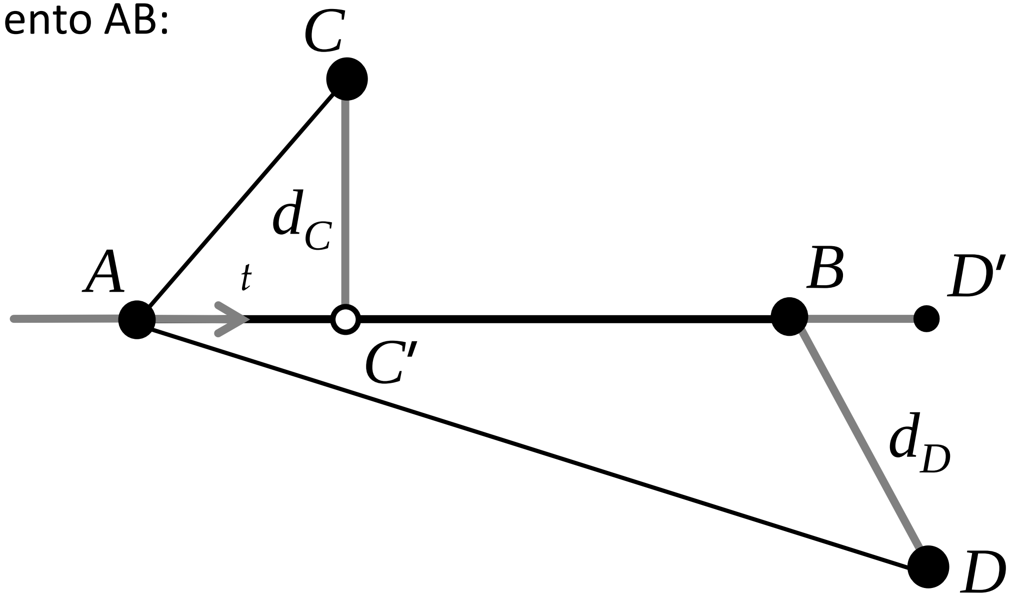
$$\boxed{P = C'}$$

Valor paramétrico do ponto C' no segmento AB:

$$\boxed{t_{C'} = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2}}$$

(produto interno)

$$\boxed{0 < t_{C'} < 1}$$



Projeção do ponto D na reta AB:

$$\boxed{D' = A + t_{D'}\left(D - C\right)}$$

Valor paramétrico do ponto D' no segmento AB:

$$\boxed{t_{D'} = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2}}$$

$$\boxed{t_{D'} > 1}$$

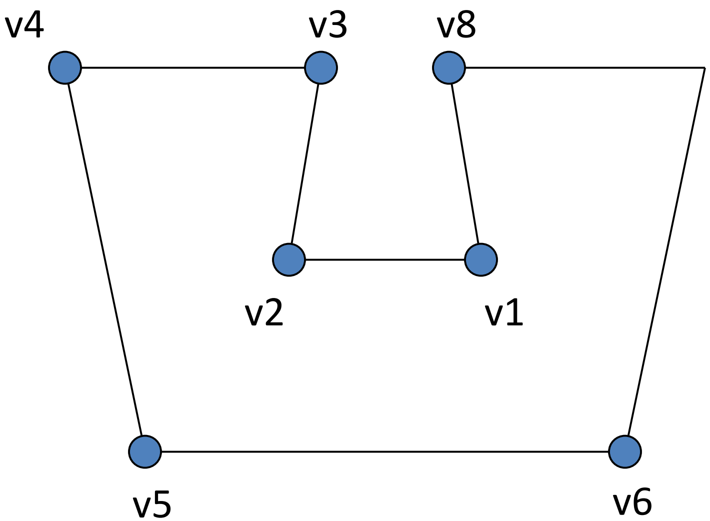
Ponto mais próximo de D no segmento AB:

$$\boxed{P = B}$$

Algoritmo para Tesselagem de Polígonos

Como **tecer** uma face não convexa?

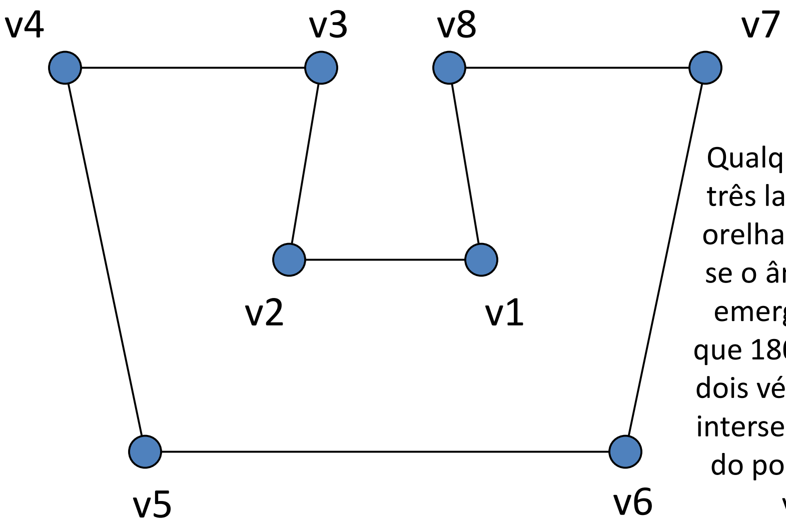
Solução de SKIENA & REVILLA, 2002, *Programming Challenges*, p.319



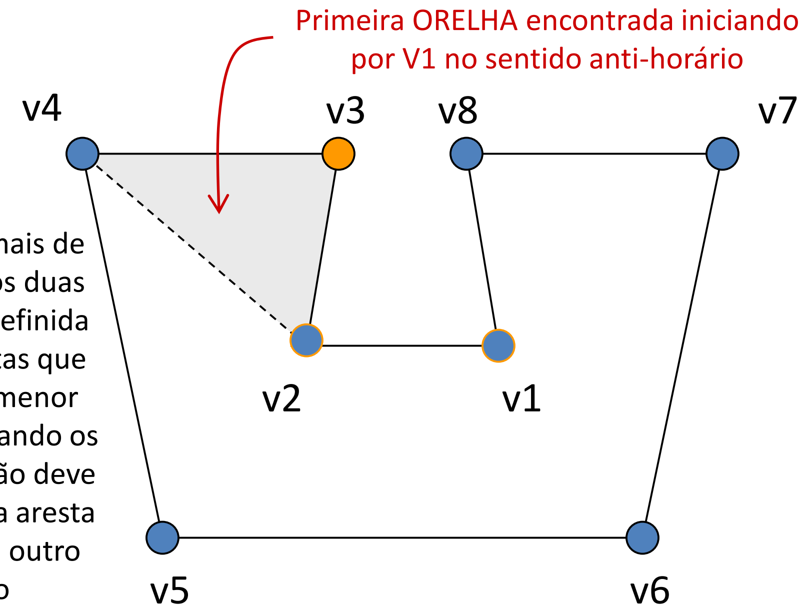
Encontrar ORELHA do polígono até remanescer um único triângulo.
POL = 1 / 2 / 3 / 4 / 5 / 6 / 7 / 8
Defina duas listas com os vértices anteriores e posteriores:
L = 8 / 1 / 2 / 3 / 4 / 5 / 6 / 7
R = 2 / 3 / 4 / 5 / 6 / 7 / 8 / 1

Como **tecer** uma face não convexa?

Solução de SKIENA & REVILLA, 2002, *Programming Challenges*, p.319



Qualquer polígono com mais de três lados tem pelo menos duas orelhas. Uma ORELHA é definida se o ângulo entre as arestas que emergem do vértice for menor que 180° e a corda conectando os dois vértices adjacentes não deve intersectar nenhuma outra aresta do polígono (i.e. nenhum outro vértice deve ficar no triângulo/orelha).



Encontrar ORELHA do polígono até remanescer um único triângulo.

POL = 1 / 2 / 3 / 4 / 5 / 6 / 7 / 8

Defina duas listas com os vértices anteriores e posteriores:

L = 8 / 1 / 2 / 3 / 4 / 5 / 6 / 7

R = 2 / 3 / 4 / 5 / 6 / 7 / 8 / 1

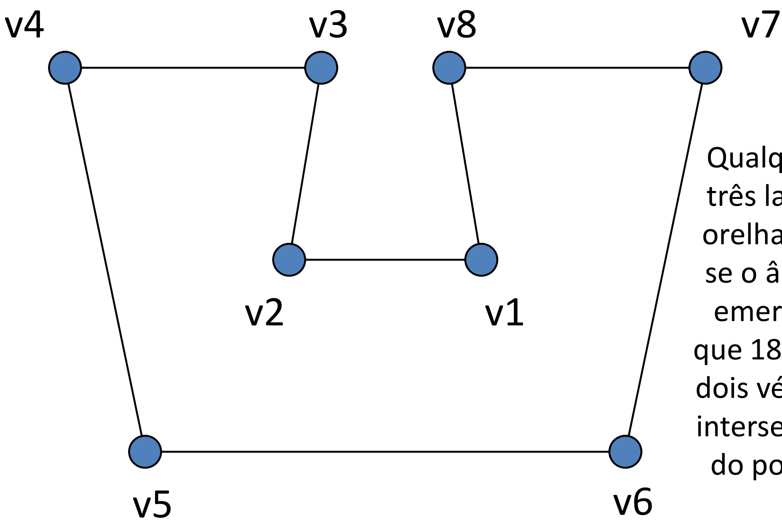
Atualize a lista após o primeiro triângulo encontrado:

L = 8 / 1 / 2 / **2** / 4 / 5 / 6 / 7

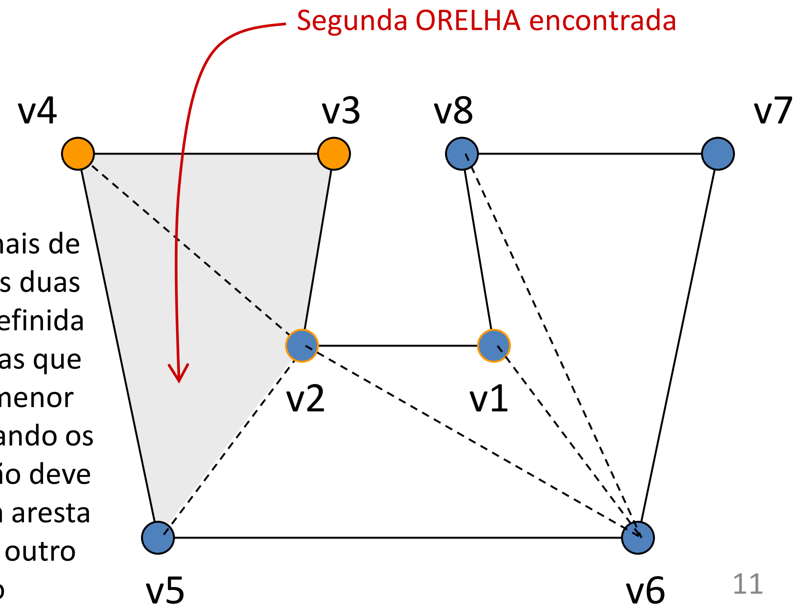
R = 2 / **4** / 4 / 5 / 6 / 7 / 8 / 1

Como **tecer** uma face não convexa?

Solução de SKIENA & REVILLA, 2002, *Programming Challenges*, p.319



Qualquer polígono com mais de três lados tem pelo menos duas orelhas. Uma ORELHA é definida se o ângulo entre as arestas que emergem do vértice for menor que 180° e a corda conectando os dois vértices adjacentes não deve intersectar nenhuma outra aresta do polígono (i.e. nenhum outro vértice deve ficar no triângulo/orelha).



Encontrar ORELHA do polígono até remanescer um único triângulo.

POL = 1 / 2 / 3 / 4 / 5 / 6 / 7 / 8

Defina duas listas com os vértices anteriores e posteriores:

L = 8 / 1 / 2 / 3 / 4 / 5 / 6 / 7

R = 2 / 3 / 4 / 5 / 6 / 7 / 8 / 1

Atualize a lista após o primeiro triângulo encontrado:

L = 8 / 1 / 2 / **2** / 4 / 5 / 6 / 7

R = 2 / **4** / 4 / 5 / 6 / 7 / 8 / 1

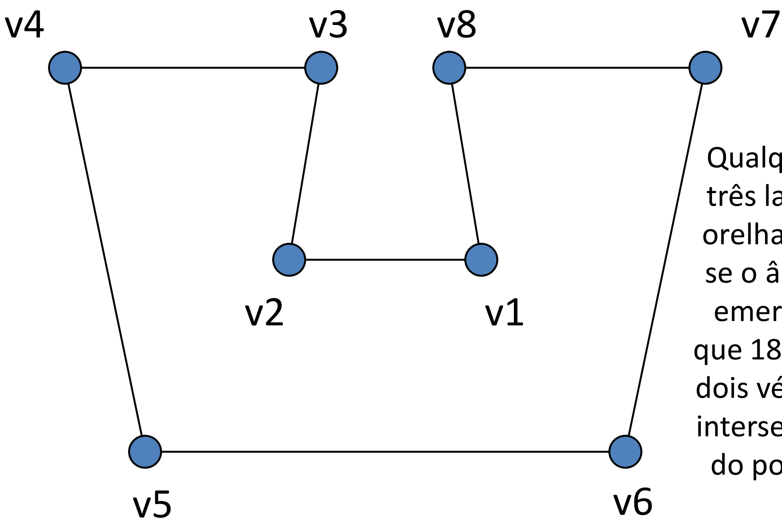
Atualize a lista após o segundo triângulo encontrado:

L = 8 / 1 / 2 / **2** / **2** / 5 / 6 / 7

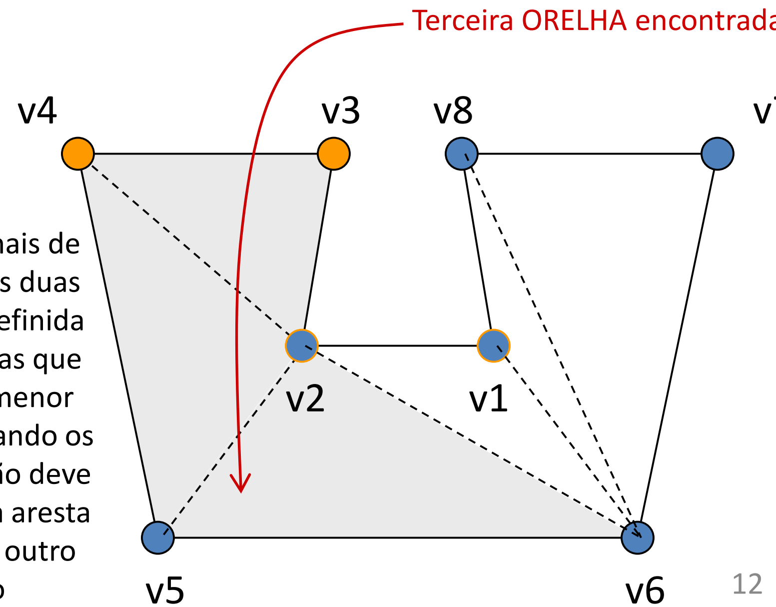
R = 2 / **5** / 4 / **5** / 6 / 7 / 8 / 1

Como **tecer** uma face não convexa?

Solução de SKIENA & REVILLA, 2002, *Programming Challenges*, p.319



Qualquer polígono com mais de três lados tem pelo menos duas orelhas. Uma ORELHA é definida se o ângulo entre as arestas que emergem do vértice for menor que 180° e a corda conectando os dois vértices adjacentes não deve intersectar nenhuma outra aresta do polígono (i.e. nenhum outro vértice deve ficar no triângulo/orelha).



Encontrar ORELHA do polígono até remanescer um único triângulo.

POL = 1 / 2 / 3 / 4 / 5 / 6 / 7 / 8

Defina duas listas com os vértices anteriores e posteriores:

L = 8 / 1 / 2 / 3 / 4 / 5 / 6 / 7

R = 2 / 3 / 4 / 5 / 6 / 7 / 8 / 1

Atualize a lista após o primeiro triângulo encontrado:

L = 8 / 1 / 2 / **2** / 4 / 5 / 6 / 7

R = 2 / **4** / 4 / 5 / 6 / 7 / 8 / 1

Atualize a lista após o segundo triângulo encontrado:

L = 8 / 1 / 2 / **2** / **2** / 5 / 6 / 7

R = 2 / **5** / 4 / 5 / 6 / 7 / 8 / 1

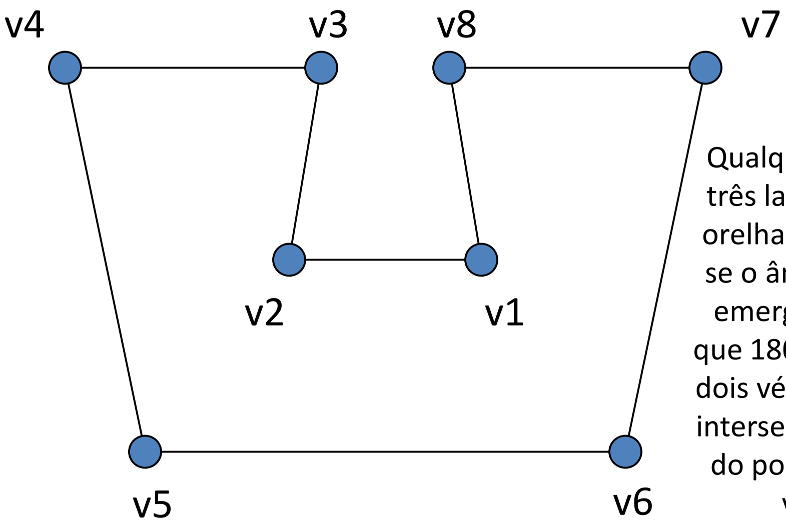
Atualize a lista após o terceiro triângulo encontrado:

L = 8 / 1 / 2 / **2** / **2** / **2** / 6 / 7

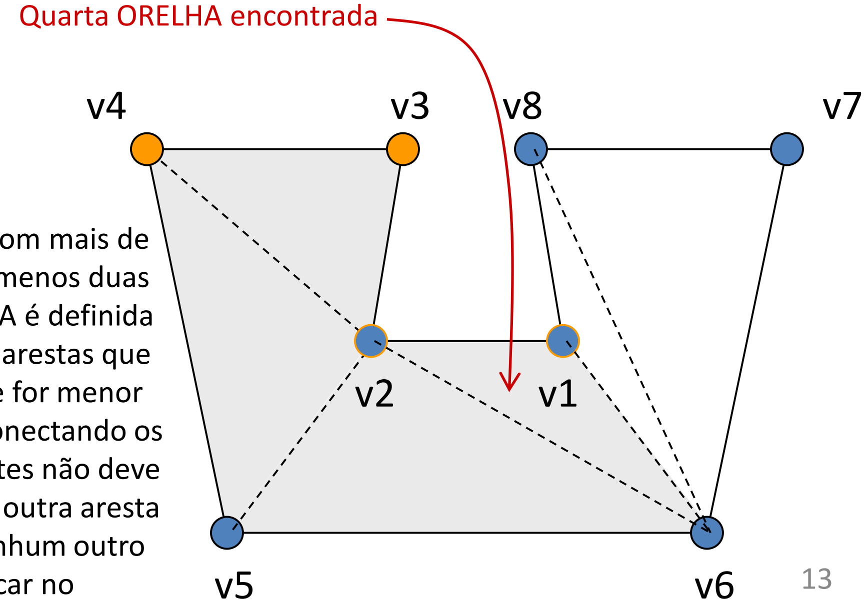
R = 2 / **6** / 4 / 5 / 6 / 7 / 8 / 1

Como **tecer** uma face não convexa?

Solução de SKIENA & REVILLA, 2002, *Programming Challenges*, p.319



Qualquer polígono com mais de três lados tem pelo menos duas orelhas. Uma ORELHA é definida se o ângulo entre as arestas que emergem do vértice for menor que 180° e a corda conectando os dois vértices adjacentes não deve intersectar nenhuma outra aresta do polígono (i.e. nenhum outro vértice deve ficar no triângulo/orelha).



Encontrar ORELHA do polígono até remanescer um único triângulo.

POL = 1 / 2 / 3 / 4 / 5 / 6 / 7 / 8

Defina duas listas com os vértices anteriores e posteriores:

L = 8 / 1 / 2 / 3 / 4 / 5 / 6 / 7
R = 2 / 3 / 4 / 5 / 6 / 7 / 8 / 1

Atualize a lista após o primeiro triângulo encontrado:

L = 8 / 1 / 2 / **2** / 4 / 5 / 6 / 7
R = 2 / **4** / 4 / 5 / 6 / 7 / 8 / 1

Atualize a lista após o segundo triângulo encontrado:

L = 8 / 1 / 2 / **2** / **2** / 5 / 6 / 7
R = 2 / **5** / 4 / 5 / 6 / 7 / 8 / 1

Atualize a lista após o terceiro triângulo encontrado:

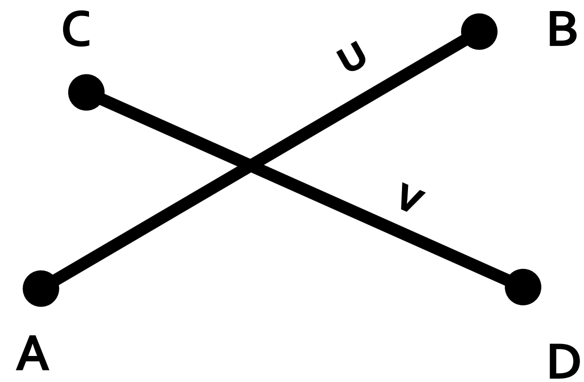
L = 8 / 1 / 2 / **2** / **2** / **2** / 6 / 7
R = 2 / **6** / 4 / 5 / 6 / 7 / 8 / 1

Atualize a lista após o quarto triângulo encontrado:

L = 8 / 1 / 2 / **2** / **2** / **1** / 6 / 7
R = **6** / **6** / 4 / 5 / 6 / 7 / 8 / 1

Algoritmo para Interseção de Segmentos de Reta

COMO TRATAR A INTERSEÇÃO DE SEGMENTOS DE RETA DE FORMA ROBUSTA E EFICIENTE?

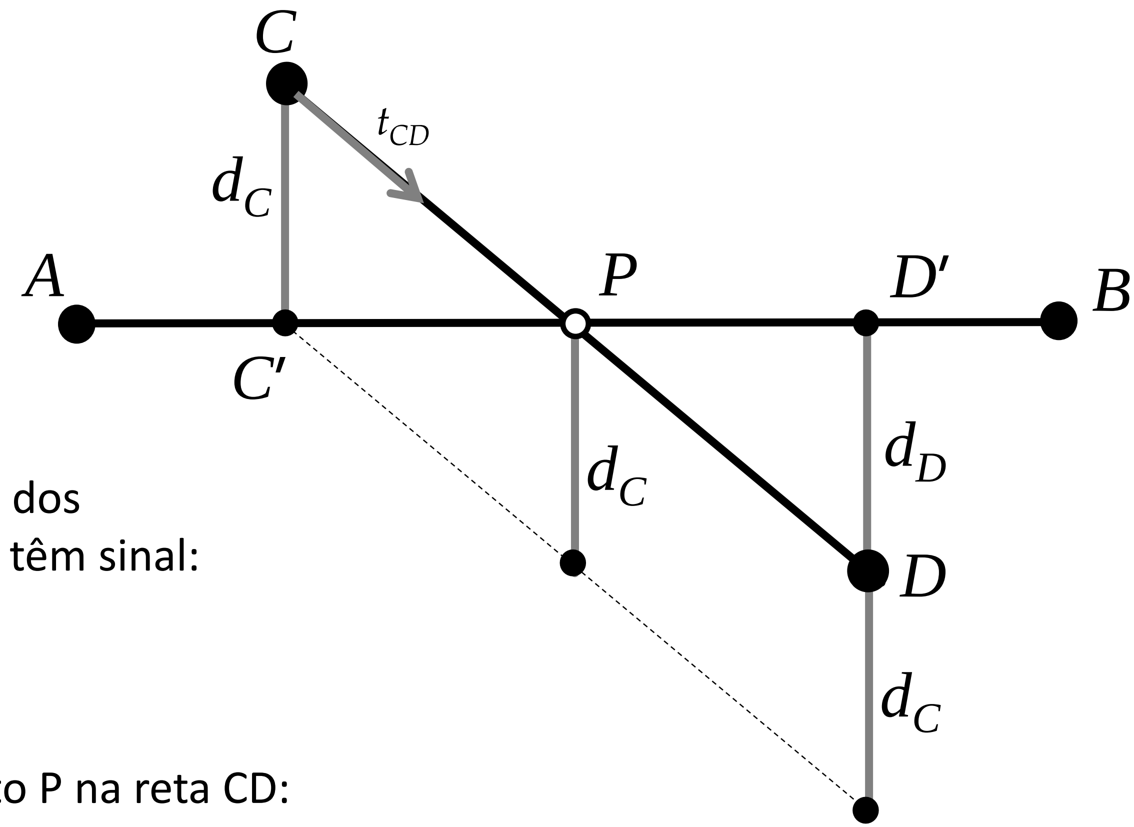


Fonte: Ricardo Marques

INTERSEÇÃO BASEADA NA REPRESENTAÇÃO PARAMÉTRICA DOS SEGMENTOS

$$\boxed{P = A + t_{AB}(B - A)}$$

$$\boxed{P = C + t_{CD}(D - C)}$$



Considere que as distâncias dos pontos C e D para a reta AB têm sinal:

$$\boxed{d_C > 0} \qquad \boxed{d_D < 0}$$

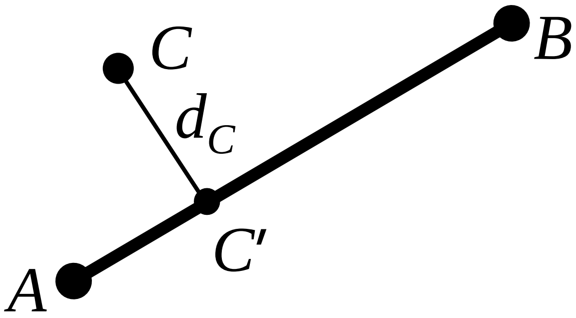
Valor paramétrico do ponto P na reta CD:

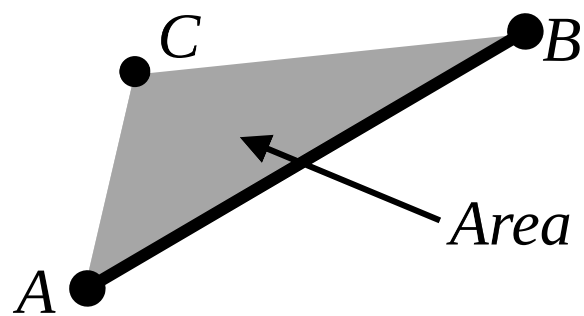
$$\boxed{t_{CD} = \frac{|d_C|}{|d_C| + |d_D|}} \qquad \boxed{t_{CD} = \frac{d_C}{d_C - d_D}} \qquad \boxed{0 \le t_{CD} \le 1}$$

M. Gavrilova and J. G. Rokne. (2000) “Reliable line segment intersection testing”, CAD 32, 737–746

INTERSEÇÃO BASEADA NA REPRESENTAÇÃO PARAMÉTRICA DOS SEGMENTOS

Distância com sinal pode ser substituída por produto vetorial





$$\boxed{Area = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot d_C}{2}}$$

$$\boxed{Area = \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{2}}$$

$$\boxed{Area = \frac{(B-A)\times(C-A)}{2}}$$

Definição: (dobro da) área orientada do triângulo

$$\boxed{orient2d(A,B,C) = (B-A)\times(C-A)}$$

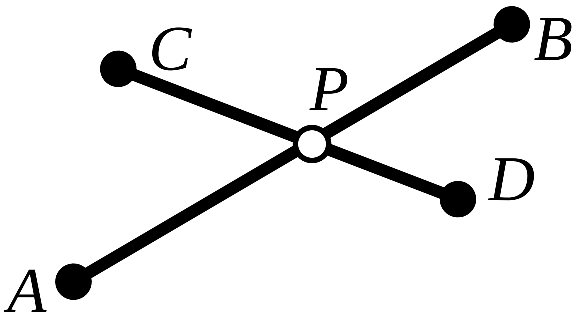
Portanto: $$\boxed{d_C = \frac{orient2d(A,B,C)}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}}$$

Analogamente: $$\boxed{d_D = \frac{orient2d(A,B,D)}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}}$$

Observe que os sinais das distâncias
são resolvidos naturalmente.

INTERSEÇÃO BASEADA NA REPRESENTAÇÃO PARAMÉTRICA DOS SEGMENTOS

Valor paramétrico do ponto P na reta CD:



$$t_{CD} = \frac{d_C}{d_C - d_D}$$

$$d_C = \frac{orient2d(A,B,C)}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} \qquad d_D = \frac{orient2d(A,B,D)}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$$

Portanto: $$t_{CD} = \frac{orient2d(A,B,C)}{orient2d(A,B,C) - orient2d(A,B,D)} \qquad P = C + t_{CD}(D - C)$$

Analogamente: $$t_{AB} = \frac{orient2d(C,D,A)}{orient2d(C,D,A) - orient2d(C,D,B)} \qquad P = A + t_{AB}(B - A)$$

Segment_Segment_Intersection(u, v):

if both endpoints of **u** are over **v** **then**
    return false
end if

$\boxed{orient2d(C,D,A) > 0}$ $\boxed{orient2d(C,D,B) > 0}$

if both endpoints of **u** are under **v** **then**
    return false
end if

$\boxed{orient2d(C,D,A) < 0}$ $\boxed{orient2d(C,D,B) < 0}$

if both endpoints of **v** are over **u** **then**
    return false
end if

$\boxed{orient2d(A,B,C) > 0}$ $\boxed{orient2d(A,B,D) > 0}$

if both endpoints of **v** are under **u** **then**
    return false
end if

$\boxed{orient2d(A,B,C) < 0}$ $\boxed{orient2d(A,B,D) < 0}$

if **u** and **v** are collinear **then**
    return false
end if

$\boxed{orient2d(C,D,A) = 0}$ $\boxed{orient2d(C,D,B) = 0}$

ou $\boxed{orient2d(A,B,C) = 0}$ $\boxed{orient2d(A,B,D) = 0}$

~~**if** **u** and **v** are parallel **then**~~
~~**return false**~~
~~**end if**~~

$\cancel{\boxed{orient2d(C,D,A) = orient2d(C,D,B)}}$

ou $\cancel{\boxed{orient2d(A,B,C) = orient2d(A,B,D)}}$

if **u** touches **v** **then**
    return true
end if

(there are many cases)

$\boxed{orient2d(C,D,B) = 0}$ $\boxed{orient2d(C,D,A) < 0}$

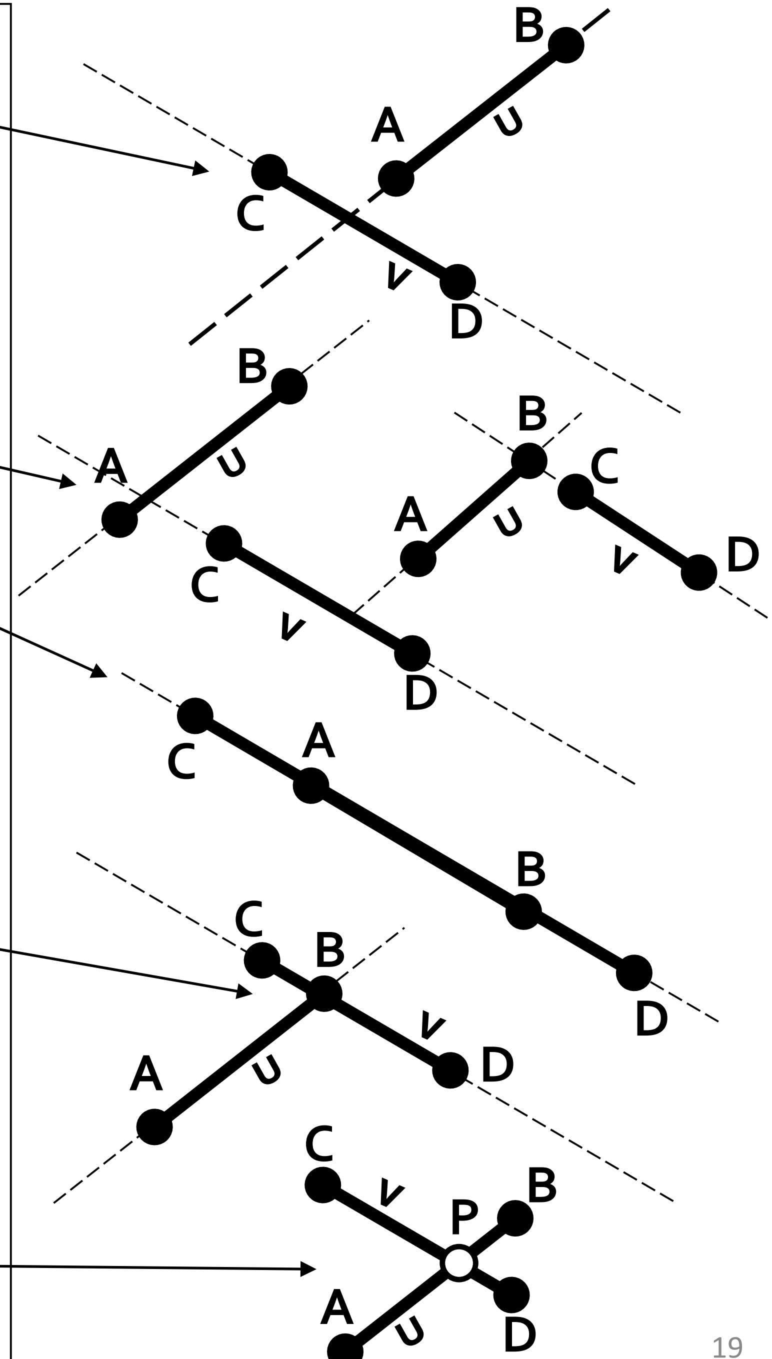
$\boxed{P = B}$

// When get to this point, there is an intersection point

$$\boxed{t_{CD} = \frac{orient2d(A,B,C)}{orient2d(A,B,C) - orient2d(A,B,D)}}$$

return true

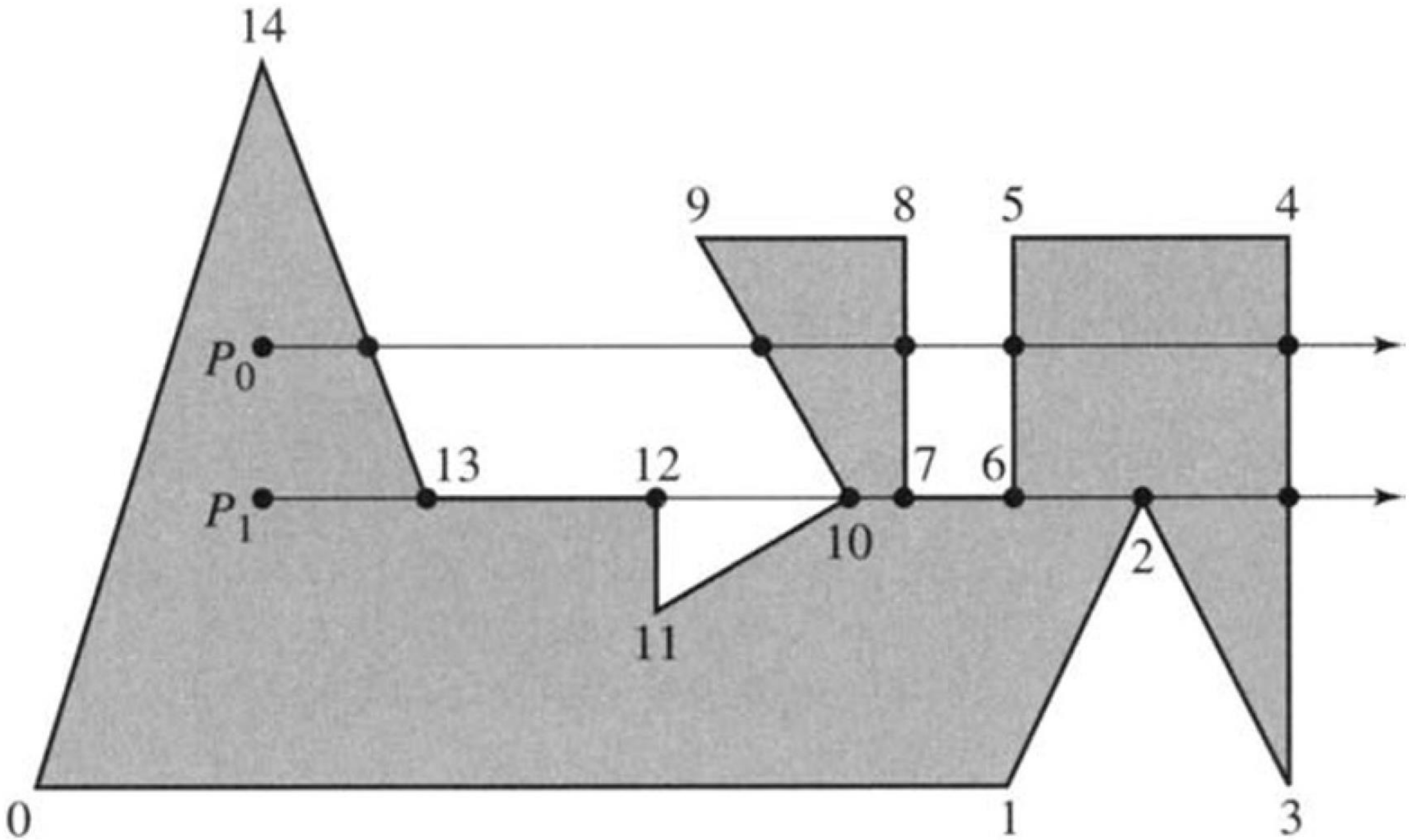
$$\boxed{P = C + t_{CD}(D - C)}$$



Algoritmo para verificação de ponto dentro de polígono

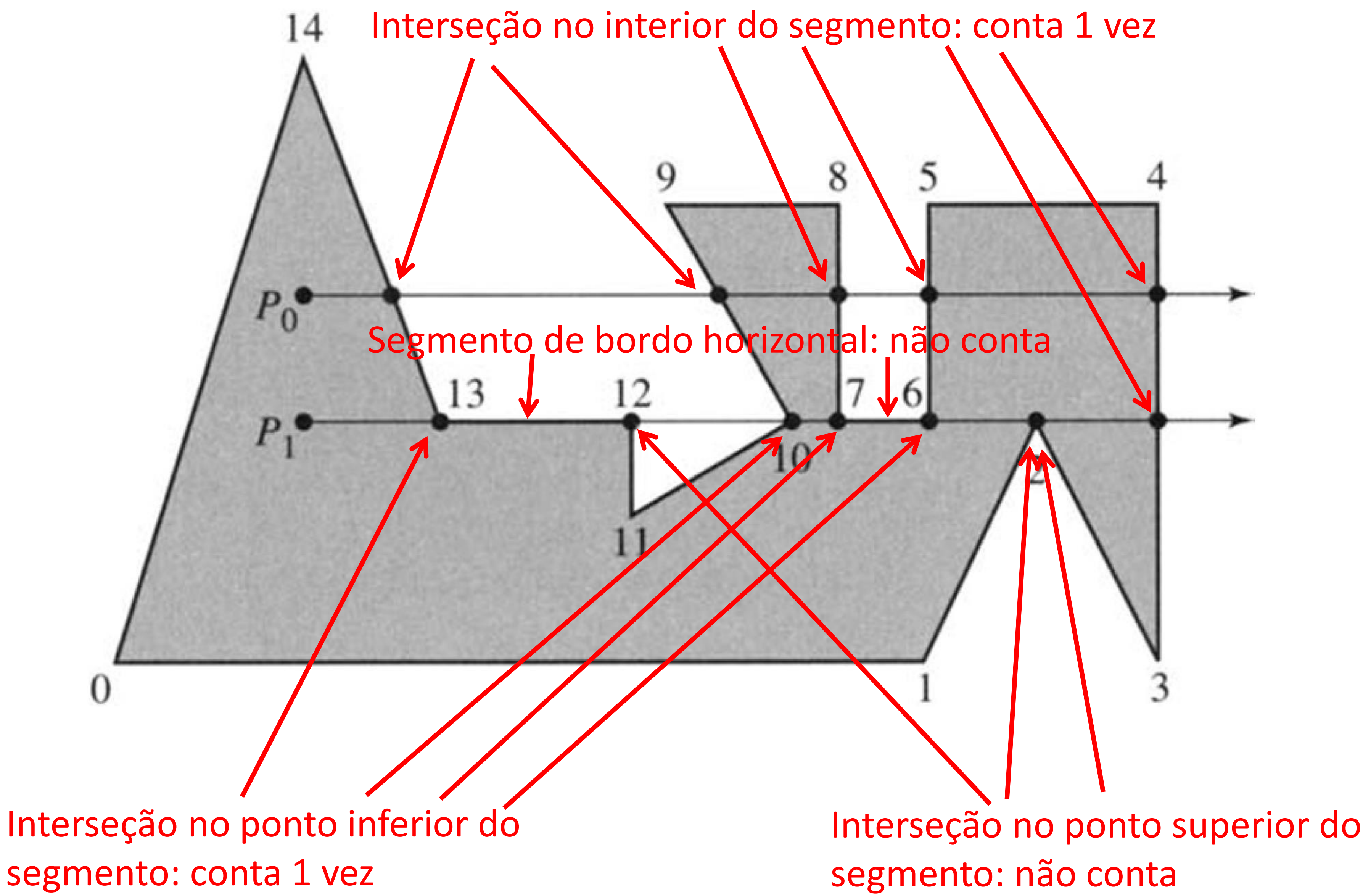
Algoritmo do raio (ou tiro)

Philip Schneider and David Eberly Geometric Tools for Computer Graphics, 2003, p.70

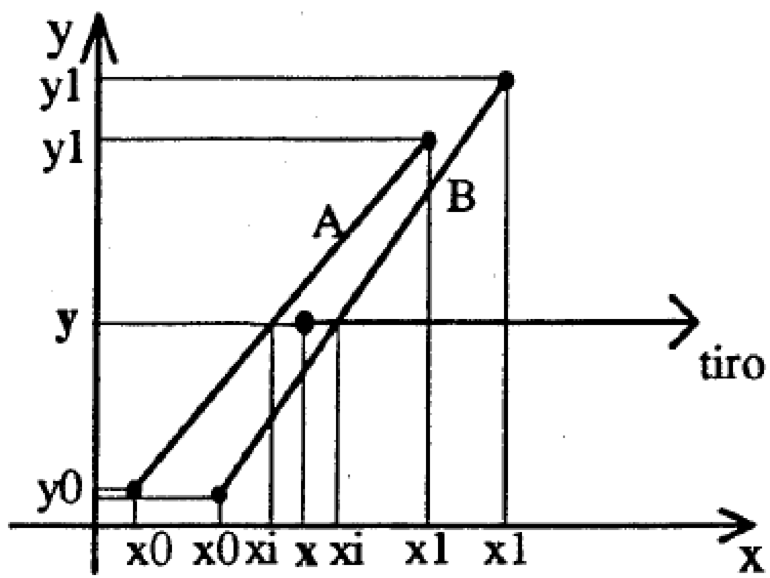


Uma semirreta (raio) que parte de qualquer ponto dentro de polígono em uma direção qualquer cortará as curvas no bordo do polígono um número impar de vezes. Se a semirreta cortar a fronteira do polígono um número par de vezes, o ponto está fora do polígono.

Critérios para contar interseções do raio com um segmento de bordo



Tratamento dos casos não triviais:



$$\boxed{x_i = x_0 + \frac{(y - y_0)\cdot(x_1 - x_0)}{(y_1 - y_0)}}$$

$$\boxed{x_i \geq x \quad \Rightarrow \quad \text{Interseção conta 1 vez}}$$

```python
def isPointInPolygon(_poly, _p):
    x = _p.getX()
    y = _p.getY()
    n = len(_poly)  # number of polygon points
    ni = 0  # number of intersections

    for i in range(0, n):
        p1 = _poly[i]  # first point of current line segment
        p2 = _poly[(i+1) % n]  # second point of current line segment

        if (p1.getY() == p2.getY()):  # discard horizontal line
            continue

        if p1.getY() > y and p2.getY() > y:  # discard line above ray
            continue

        if p1.getX() < x and p2.getX() < x:  # discard line to the left of point
            continue

        if p1.getY() < y and p2.getY() < y:  # discard line below ray
            continue

        if p1.getY() == y:  # ray passes at first line point
            if p1.getX() > x and p2.getY() > y:
                # Count intersection if first point is to the right of given point
                # and second point is above.
                ni += 1
        else:
            if p2.getY() == y:  # ray passes at second point
                if p2.getX() > x and p1.getY() > y:
                    # Count intersection if first point is to the right of given point
                    # and second point is above.
                    ni += 1
            else:  # ray passes with first and second points
                if p1.getX() > x and p2.getX() > x:
                    # Count intersection if first point is to the right of given point
                    # and second point is above.
                    ni += 1
                else:
                    # Compute x coordinate of intersection of ray with line segment
                    dx = p1.getX() - p2.getX()
                    xc = p1.getX()

                    if dx != 0.0:
                        xc += (y - p1.getY())*dx / (p1.getY()-p2.getY())

                    if xc > x:
                        # Count intersection if first point is to the right of given point
                        # and second point is above.
                        ni += 1

    # If number of intersections is odd, point is inside polygon.
    if (ni % 2) > 0:
        return True

    # If number of intersections if even, point is outside polygon.
    return False
```