

Modelo matemático do comportamento axial e à flexão de barras

Este capítulo resume os principais conceitos matemáticos envolvidos na idealização do comportamento de barras. Tal idealização baseia-se em hipóteses simplificadoras adotadas para o comportamento axial e para o comportamento à flexão (condensado na teoria de vigas de Navier). Esses conceitos são básicos para a análise de estruturas reticuladas e podem ser encontrados em vários livros-texto de mecânica dos sólidos (resistência dos materiais) ou de análise estrutural. O resumo aqui apresentado baseia-se nos trabalhos dos seguintes autores: Féodosiev (1977), Beer e Johnston (2006), Timoshenko & Gere (1994), White *et al.* (1976) e West (1989).

No contexto deste capítulo, só são considerados materiais idealizados com comportamento elástico-linear e sem limite de resistência. Isso é justificado pelos seguintes motivos:

- De maneira geral, as estruturas civis trabalham em regime elástico-linear. Por isso, a maioria das estruturas é analisada adotando-se essa aproximação.
- Mesmo para projetos com base em regime último, a determinação da distribuição de esforços internos, em geral, é feita a partir de uma análise linear, isto é, faz-se o dimensionamento local no estado último de resistência, com o uso de coeficientes de majoração de carga e de minoração de resistência, mas com esforços calculados através de uma análise global linear. Essa é uma aproximação razoável na maioria dos casos, mas o correto seria fazer uma análise global considerando o material em regime não linear (que é relativamente complexa quando comparada com uma análise linear).
- Na prática, uma análise não linear é executada por computadores de forma incremental, sendo que em cada passo do processo incremental é feita uma análise linear. Como este capítulo é introdutório à análise de estruturas, justifica-se a consideração de um comportamento linear.
- O foco principal deste capítulo é a descrição do modelo matemático do comportamento de barras à flexão. A consideração em si de leis constitutivas não lineares é um tema bastante amplo que foge ao escopo deste capítulo.

Portanto, o material considerado apresenta comportamento elástico-linear. As tensões σ_x e as deformações ε_x que aparecem nesse caso são normais às seções transversais das barras (na direção do eixo local x , na direção axial da barra). A lei constitutiva que relaciona tensões normais e deformações normais é a conhecida lei de Hooke (Beer & Johnston 2006, Féodosiev 1977) e é dada por:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \quad (1)$$

sendo:

E → módulo de elasticidade (propriedade do material) [F/L²];

σ_x → tensão normal na seção transversal da barra (direção longitudinal) [F/L²];

ε_x → deformação normal na direção longitudinal da barra [].

1. Relações entre deslocamentos e deformações em barras

O modelo estrutural tem como premissa uma condição de continuidade dos campos de deslocamentos e deformações no interior das barras. Além disso, esses dois campos têm que ser compatíveis entre si, isto é, os deslocamentos e deformações de uma barra devem estar associados. Nos métodos de análise, a condição de continuidade no interior de uma barra é forçada automaticamente quando só se admitem deformações contínuas para a barra. Esta seção resume as hipóteses básicas do modelo estrutural que garantem continuidade e compatibilidade entre deformações e deslocamentos no interior de uma barra.

O modelo estrutural adotado baseia-se na teoria de vigas de Navier para barras submetidas à flexão acrescida da consideração de efeitos axiais provocados por esforços normais à seção transversal da barra.

Outra hipótese simplificadora adotada aqui é o desacoplamento dos efeitos axiais e transversais (flexão e cisalhamento). Isso significa que esses efeitos podem ser considerados em separado e superpostos, resultando nas mesmas respostas de quando os efeitos atuam em conjunto. Essa hipótese é consistente com a hipótese de pequenos deslocamentos, que também está sendo adotada.

Para definir as relações entre deslocamentos e deformações em uma barra, é adotado um sistema de coordenadas locais para a barra, indicado na Figura 1.

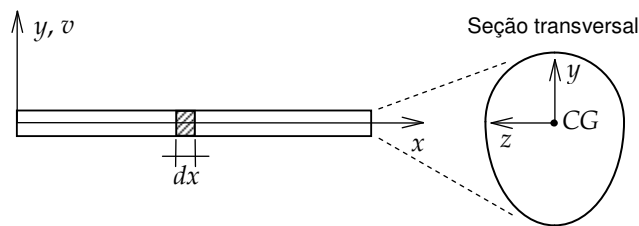


Figura 1 – Sistema de eixos locais de uma barra.

Na Figura 1, o eixo axial da barra, x , passa pelo centro de gravidade das seções transversais e os outros eixos são transversais à barra. Em modelos de quadros planos, o eixo y pertence ao plano da estrutura e o eixo z sai do plano. Com base nesse sistema de coordenadas, são definidos os deslocamentos e rotações dos pontos do eixo de uma barra de pórtico plano:

$u(x)$ → deslocamento axial ou longitudinal (na direção de x) [L];

$v(x)$ → deslocamento transversal (na direção de y) [L];

$\theta(x)$ → rotação da seção transversal por flexão (em torno do eixo z) [R].

Os deslocamentos axiais $u(x)$ e transversais $v(x)$ de uma barra definem uma curva chamada *elástica*. Em pórticos planos e vigas, o sentido positivo do deslocamento transversal $v(x)$ é o do eixo local y e o sentido positivo da rotação por flexão $\theta(x)$ é o anti-horário. Isso é exemplificado para uma viga engastada e em balanço mostrada na Figura 2, onde a elástica está indicada pela linha tracejada desenhada em uma escala exageradamente ampliada.

Considerando que os deslocamentos são pequenos, pode-se aproximar a rotação da seção transversal pela tangente da elástica. Dessa forma, pode-se associar o deslocamento transversal à rotação da seção transversal em uma equação que também é considerada uma relação de compatibilidade:

$$\theta = \frac{dv}{dx} \tag{2}$$

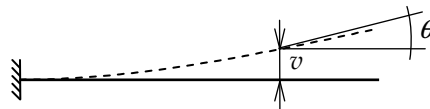


Figura 2 – Elástica de uma viga engastada e em balanço com deslocamento transversal e rotação indicados com seus sentidos positivos.

1.1. Deformações axiais

Uma barra submetida a solicitações axiais centradas (cuja resultante passa pelo centro de gravidade da seção transversal) apresenta uma deformação axial tal que todos os pontos de uma seção transversal têm os mesmos deslocamentos na direção axial. Uma consequência disso é que as seções transversais de uma barra submetida a uma deformação axial permanecem planas, como indica a Figura 3. Tal condição garante a continuidade de deslocamentos no interior da barra.

A deformação axial é obtida com base no deslocamento axial relativo, du , entre duas seções transversais que distam dx entre si (Figura 3). A deformação é igual à razão entre a variação de comprimento do elemento infinitesimal e seu comprimento inicial:

$$\epsilon_x^a = \frac{du}{dx} \tag{3}$$

Nessa equação:

dx → comprimento original de um elemento infinitesimal de barra [L];

du → deslocamento axial (longitudinal) relativo interno de um elemento infinitesimal de barra [L];

$\epsilon_x^a \rightarrow$ deformação normal na direção axial ou longitudinal devida ao efeito axial [].

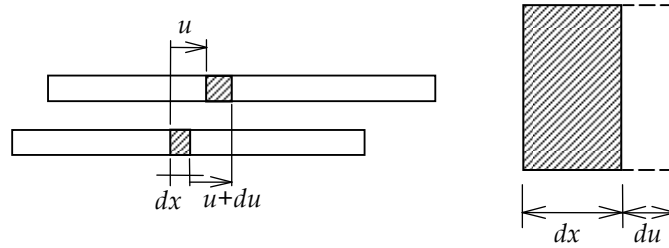


Figura 3 – Deslocamento axial relativo de um elemento infinitesimal de barra.

1.2. Deformações normais por flexão

A teoria de vigas de Navier (1785-1836) está fundamentada em duas hipóteses básicas. A primeira delas é a hipótese de manutenção das seções transversais planas quando a viga se deforma, proposta originalmente por Jacob Bernoulli (1654-1705). A segunda hipótese despreza deformações provocadas por efeitos de cisalhamento. De acordo com tais hipóteses, as seções transversais de uma viga que se deforma à flexão permanecem planas e normais ao eixo deformado da viga. Observe que essa condição também garante uma continuidade de deslocamentos em todos os pontos interiores de uma barra que sofre flexão, pois cada seção transversal permanece encaixada com suas adjacentes.

A manutenção das seções transversais planas e normais ao eixo deformado da barra introduz uma condição de compatibilidade que relaciona deformações normais por flexão com a rotação da seção transversal. Considere a rotação relativa por flexão, $d\theta$, de um elemento infinitesimal de barra indicada na Figura 4.

Cada fibra do elemento infinitesimal é definida por uma coordenada y . Quando se consideram pequenos deslocamentos, a variação de comprimento de uma fibra genérica é $\delta = d\theta \cdot y$. A deformação normal por flexão é dada pela razão entre δ e o comprimento inicial da fibra, dx :

$$\epsilon_x^f = -\frac{d\theta}{dx} \cdot y. \tag{4}$$

Nessa equação:

$d\theta \rightarrow$ rotação relativa interna por flexão de um elemento infinitesimal de barra [R];

$\epsilon_x^f \rightarrow$ deformação normal na direção longitudinal devida ao efeito de flexão [].

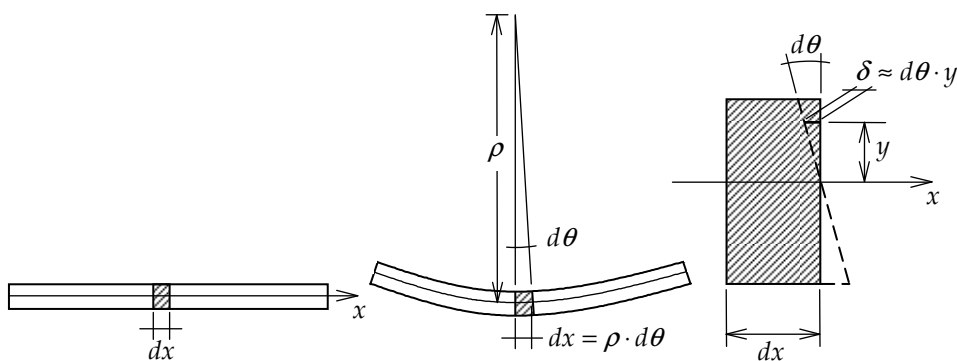


Figura 4 – Rotação relativa por flexão de um elemento infinitesimal de barra.

Na Equação 4, o sinal negativo aparece porque uma fibra superior (y positivo) sofre deformação por encurtamento (negativa) quando $d\theta$ é positiva (anti-horária). O sinal negativo da equação considera uma deformação positiva (alongamento) para uma fibra inferior (y negativo), com $d\theta$ positiva.

Observe na Figura 4 a relação $dx = \rho \cdot d\theta$ entre o raio de curvatura ρ do eixo da barra e o comprimento do elemento infinitesimal de barra. Disso resulta:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\rho}, \tag{5}$$

sendo:

$1/\rho \rightarrow$ curvatura da elástica transversal $v(x)$ da barra [L^{-1}];

$\rho \rightarrow$ raio de curvatura da elástica transversal $v(x)$ da barra [L].

A deformação normal por flexão de um fibra, dada pela Equação 4, também pode ser escrita em função curvatura da barra:

$$\epsilon_x^f = -\frac{y}{\rho}. \quad (6)$$

Em outras palavras, a deformação normal por flexão em uma fibra genérica é proporcional à distância da fibra ao eixo x e à curvatura $1/\rho$ da barra.

A partir da Equação 4, considerando a relação entre o deslocamento transversal $v(x)$ e a rotação da seção transversal $\theta(x)$ dada pela Equação 2, pode-se escrever:

$$\epsilon_x^f = -\frac{d^2v}{dx^2} \cdot y. \quad (7)$$

A Equação 7 é uma relação de compatibilidade entre o deslocamento transversal de uma barra e suas deformações normais por flexão.

Combinando a Equação 2 com a Equação 5, observa-se que existe uma relação entre a curvatura e a derivada à segunda da elástica transversal $v(x)$ em relação a x :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2}. \quad (8)$$

Essa equação é aproximada e é válida somente na condição de pequenos deslocamentos. A expressão completa da curvatura de uma curva para grandes flechas $v(x)$ é (Féodosiev 1977):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v/dx^2}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (9)$$

Observa-se que, para pequenas inclinações dv/dx da curva, a curvatura da Equação 9 se aproxima à fornecida pela Equação 8 para pequenos deslocamentos.

2. Relações diferenciais de equilíbrio em barras

O modelo matemático adotado para a representação do comportamento de estruturas reticuladas considera que as condições de equilíbrio devem ser satisfeitas para a estrutura como um todo, para cada barra ou nó isolado, ou para qualquer porção isolada da estrutura. Isso inclui o equilíbrio de um elemento infinitesimal de barra. Nesta seção, serão indicadas relações diferenciais que resultam do equilíbrio considerado em nível infinitesimal para uma barra de pórtico plano. Conforme mencionado anteriormente, esse modelo matemático baseia-se na teoria de vigas de Navier para barras submetidas à flexão, acrescida da consideração de efeitos axiais.

Para deduzir as relações de equilíbrio para um elemento infinitesimal de barra, adota-se direções positivas de cargas distribuídas e esforços internos. A Figura 5 isola um elemento infinitesimal de barra e indica os sentidos positivos para forças distribuídas e esforços internos.

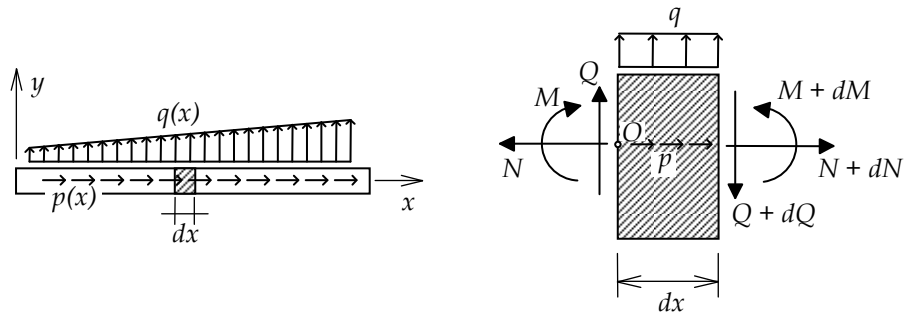


Figura 5 – Equilíbrio de um elemento infinitesimal de barra e direções positivas adotadas para cargas distribuídas e esforços internos.

Na Figura 5, as seguintes entidades são apresentadas:

$p(x)$ → taxa de carregamento (força) longitudinal distribuído na barra [F/L];

$q(x)$ → taxa de carregamento (força) transversal distribuído na barra [F/L];

$N(x)$ → esforço normal (esforço interno axial ou longitudinal) [F];

$Q(x)$ → esforço cortante (esforço interno transversal de cisalhamento) [F];

$M(x)$ → momento fletor (esforço interno de flexão) [F·L].

O equilíbrio de forças no elemento infinitesimal nas direções horizontal e vertical, considerando as direções positivas indicadas na Figura 5, resulta em:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow dN + p(x) \cdot dx = 0 \rightarrow \frac{dN}{dx} = -p(x); \quad (10)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -dQ + q(x) \cdot dx = 0 \rightarrow \frac{dQ}{dx} = q(x). \quad (11)$$

O equilíbrio de momentos em relação ao ponto O do elemento infinitesimal (Figura 5), desprezando os termos de mais alta ordem, proporciona a seguinte relação:

$$\sum M_O = 0 \rightarrow dM - (Q + dQ) \cdot dx + q(x) \cdot \frac{dx^2}{2} = 0 \rightarrow \frac{dM}{dx} = Q(x). \quad (12)$$

As Equações 11 e 12 podem ser combinadas, resultando em uma relação de equilíbrio entre o momento fletor em uma seção transversal e a taxa de carregamento transversal distribuído:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q(x). \quad (13)$$

3. Equilíbrio entre tensões e esforços internos

A formulação geral do modelo matemático para o comportamento de barras também considera relações de equilíbrio, no nível da seção transversal da barra, que associam tensões com esforços internos.

As Seções 1.1 e 1.2 mostram que os efeitos axiais e de flexão provocam deformações normais na direção longitudinal da barra. Como consequência, aparecem tensões normais longitudinais σ_x devidas a esses dois efeitos, como indica a Figura 6.

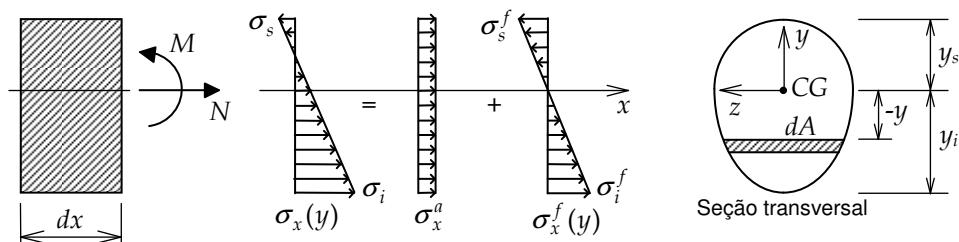


Figura 6 – Decomposição das tensões normais longitudinais em parcelas devidas aos efeitos axial e de flexão.

As tensões indicadas na Figura 6 são:

$\sigma_x^a \rightarrow$ tensão normal na seção transversal da barra devida ao efeito axial $[F/L^2]$;

$\sigma_x^f \rightarrow$ tensão normal na seção transversal da barra devida à flexão $[F/L^2]$.

Tais tensões devem estar em equilíbrio com o esforço normal e o momento fletor na seção transversal, isto é, as resultantes das tensões normais longitudinais, integradas ao longo da seção transversal, devem ser iguais ao esforço normal e ao momento fletor na seção transversal.

Na Figura 6, é considerado um caso de flexão composta reta. A flexão é composta quando é combinada com o efeito axial. A flexão é reta quando ocorre em torno de um dos eixos principais da seção transversal (no caso, o eixo z), tendo como consequência que cada fibra identificada por uma ordenada y apresenta um valor constante de tensão normal. Também é indicado na Figura 6 que as tensões normais longitudinais variam linearmente ao longo da altura da seção transversal. Essa distribuição linear se deve a dois fatores. Primeiro, conforme apresentado nas Seções 1.1 e 1.2, pela hipótese da manutenção das seções transversais planas, as deformações normais longitudinais variam linearmente ao longo da altura da seção. O segundo fator é a consideração de um comportamento linear para o material.

Pela Figura 6, vê-se que, para o efeito axial, as tensões são constantes ao longo da seção transversal e, para o efeito de flexão pura, as tensões normais são nulas na fibra do centro de gravidade (CG) da seção. Dessa forma, as relações de equilíbrio entre as tensões normais longitudinais e o esforço normal e o momento fletor são:

$$\int_A \sigma_x^f dA = 0 \Rightarrow N = \int_A \sigma_x^a dA \rightarrow N = \sigma_x^a \cdot A ; \quad (14)$$

$$\int_A y \cdot \sigma_x^a dA = 0 \Rightarrow M = \int_A (-y) \cdot \sigma_x^f dA . \quad (15)$$

Na Equação 14 tem-se:

$A \rightarrow$ área da seção transversal $[L^2]$.

O sinal negativo que aparece na Equação 15 deve-se à convenção de sinais adotada: uma tensão normal positiva (tração) em uma fibra inferior (y negativo) provoca um momento fletor positivo (como indicado na Figura 6).

4. Deslocamentos relativos internos

A seção anterior mostrou que os esforços internos (esforço normal, esforço cortante, momento fletor e momento torçor) em uma seção transversal representam resultantes de tensões internas integradas ao longo da seção. O modelo matemático adotado para o comportamento de barras permite que as deformações tenham representações integrais no nível de seção transversal. Essas representações têm significado físico e são chamadas de *deslocamentos relativos internos*.

Na verdade, os deslocamentos relativos internos já foram introduzidos na Seção 1 e são resumidos abaixo:

$du \rightarrow$ deslocamento axial (longitudinal) relativo interno de um elemento infinitesimal de barra (Figura 3) $[L]$;

$d\theta \rightarrow$ rotação relativa interna por flexão de um elemento infinitesimal de barra (Figura 4) $[R]$;

Com base nas relações entre deformações e deslocamentos em barras (Seção 1), nas relações das leis constitutivas do material (Equação 1) e nas relações de equilíbrio em tensões na seção transversal e esforços internos (Seção 3), é possível estabelecer relações entre os deslocamentos relativos internos e os esforços internos.

4.1. Deslocamento axial relativo interno provocado por esforço normal

Para o efeito axial, usando as Equações 14, 1 e 3, tem-se que o deslocamento relativo interno provocado por um esforço normal atuando em um elemento infinitesimal de barra (Figura 7) é igual a:

$$N = \sigma_x^a \cdot A = E \cdot \epsilon_x^a \cdot A \rightarrow N = EA \frac{du}{dx} \rightarrow du = \frac{N}{EA} dx . \quad (16)$$

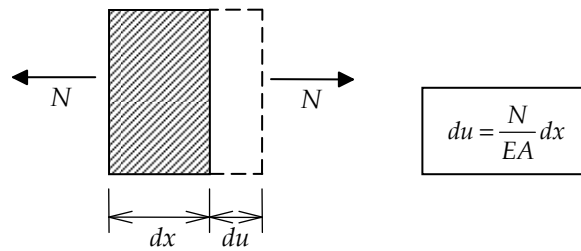


Figura 7 – Deslocamento axial relativo de um elemento infinitesimal de barra provocado por esforço normal.

4.2. Rotação relativa interna provocada por momento fletor

Para o efeito de flexão, usando as Equações 15, 1 e 4, tem-se uma relação entre o momento fletor e a rotação relativa de um elemento infinitesimal de barra (Figura 8):

$$M = \int_A (-y) \cdot \sigma_x^f dA = \int_A (-y) \cdot E \cdot \epsilon_x^f dA = \int_A (-y) \cdot E \cdot \left(-\frac{d\theta}{dx} y\right) dA \rightarrow M = EI \frac{d\theta}{dx}. \quad (17)$$

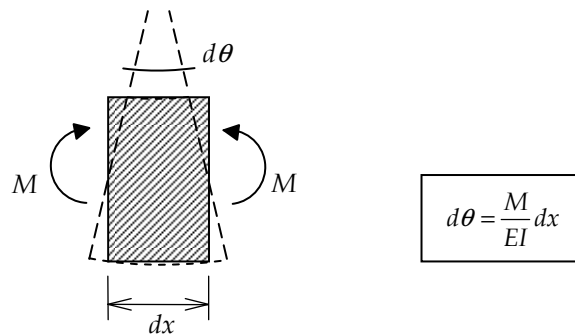


Figura 8 – Rotação relativa interna por flexão de um elemento infinitesimal de barra provocada por momento fletor.

Na Equação 17, aparece um parâmetro geométrico de seção transversal para o comportamento à flexão de barras:

$$I = \int_A y^2 dA \rightarrow \text{momento de inércia à flexão da seção transversal em relação ao eixo } z \text{ [L}^4\text{]}.$$

O momento de inércia à flexão da seção transversal é uma propriedade geométrica que depende de sua orientação com respeito ao plano onde ocorre a flexão da barra. A orientação da seção transversal é importante para a resistência à flexão de uma barra. Por exemplo, a Figura 9 mostra uma viga biapoiada com uma seção transversal retangular com duas orientações: uma em pé e outra deitada. A barra com a seção em pé vai apresentar deformações por flexão menores (menor curvatura) do que com a seção deitada.

A resistência à flexão é maior quanto maior o momento de inércia da seção transversal. O momento de inércia quantifica um “afastamento” de pontos da seção em relação ao eixo neutro (eixo que passa pelo centro de gravidade da seção). Por isso, uma seção em forma de “I” (em pé) é eficiente para a resistência à flexão.

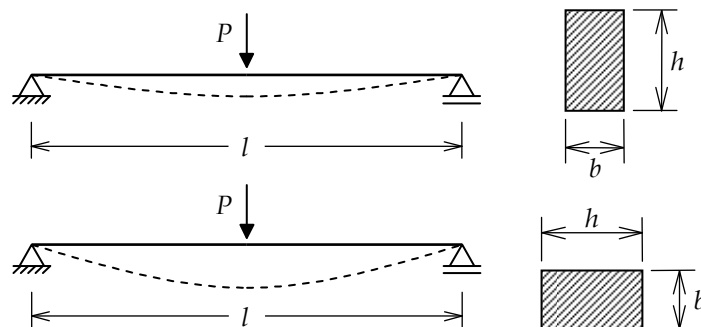


Figura 9 – Comparação entre configurações deformadas de viga biapoiada com seção retangular em pé e deitada.

Existem inúmeros manuais e livros que apresentam fórmulas e tabelas de valores de momentos de inércia (e de outras propriedades geométricas) para diversos tipos de seções transversais.

A partir da Equação 17, a rotação relativa interna por flexão é dada por:

$$d\theta = \frac{M}{EI} dx. \quad (18)$$

Uma importante relação entre a curvatura da viga e o momento fletor é obtida a partir das Equações 5 e 18:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}. \quad (19)$$

A relação entre o momento fletor e a curvatura de uma barra dada pela Equação 19 é explorada na Seção 9 para relacionar o aspecto da curva elástica com o diagrama de momentos fletores.

5. Tensões normais provocadas por efeitos axial e de flexão

As Seções 1.1, 1.2 e 3 mostram que, na idealização do comportamento de barras, o efeito axial e o efeito de flexão provocam deformações e tensões normais à seção transversal. Portanto, os efeitos axial e de flexão se sobrepõem para a distribuição de tensões normais ao longo da seção transversal, como indicado na Figura 6.

O efeito axial provoca uma distribuição uniforme de tensões normais. Da Equação 14, tem-se:

$$\sigma_x^a = \frac{N}{A}. \quad (20)$$

A distribuição de tensões normais provocada por flexão é linear e é obtida utilizando a relação entre tensões normais e deformações normais, e a relação entre a deformação normal por flexão e a curvatura, dada pela Equação 6:

$$\sigma_x^f(y) = -E \frac{y}{\rho}. \quad (21)$$

Utilizando a Equação 19, chega-se à expressão para a distribuição de tensões normais provocada por um momento fletor M em uma seção transversal:

$$\sigma_x^f(y) = -\frac{M \cdot y}{I}. \quad (22)$$

Com base na Equação 22, pode-se determinar a tensão no bordo inferior e a tensão no bordo superior de uma seção transversal submetida a um momento fletor:

$$\sigma_s^f = -\frac{M \cdot y_s}{I} = -\frac{M}{W_s}; \quad (23)$$

$$\sigma_i^f = +\frac{M \cdot y_i}{I} = +\frac{M}{W_i}. \quad (24)$$

Nas Equações 23 e 24, o sinal do momento fletor M é positivo quando traciona as fibras inferiores (convenção usual adotada) e os seguintes parâmetros são definidos (Figura 6):

σ_s^f → tensão normal por flexão no bordo superior da seção transversal [F/L²];

σ_i^f → tensão normal por flexão no bordo inferior da seção transversal [F/L²];

y_s → máxima distância do bordo superior à linha neutra que passa pelo centro de gravidade da seção transversal [L];

y_i → máxima distância do bordo inferior à linha neutra que passa pelo centro de gravidade da seção transversal [L];

$W_s = I / y_s$ → módulo de resistência à flexão superior da seção transversal [L³];

$W_i = I / y_i$ → módulo de resistência à flexão inferior da seção transversal [L³].

A distribuição da tensão normal na seção transversal resultante do efeito axial combinado com efeito de flexão é obtida a partir das Equações 20 e 22:

$$\sigma_x(y) = \frac{N}{A} - \frac{M \cdot y}{I}. \quad (25)$$

Finalmente, têm-se as tensões normais do efeito combinado nos bordos da seção transversal:

$$\sigma_s = \frac{N}{A} - \frac{M}{W_s}; \quad (26)$$

$$\sigma_i = \frac{N}{A} + \frac{M}{W_i}; \quad (27)$$

sendo (Figura 6):

σ_s → tensão normal combinando os efeitos axial e de flexão no bordo superior da seção transversal [F/L²];

σ_i → tensão normal combinando os efeitos axial e de flexão no bordo inferior da seção transversal [F/L²].

6. Equação diferencial para o comportamento axial

O comportamento axial de uma barra pode ser consolidado em uma equação diferencial que leva em conta, para um elemento infinitesimal de barra, as relações de equilíbrio, compatibilidade e lei constitutiva do material. A Equação 10 expressa o equilíbrio do elemento infinitesimal de barra, relacionando o gradiente do esforço interno axial $N(x)$ com a taxa de força axial distribuída aplicada $p(x)$. A Equação 3 estabelece uma relação de compatibilidade entre a deformação normal axial $\varepsilon_x^a(x)$ e o deslocamento axial $u(x)$. E a equação da lei constitutiva do material relaciona tensão normal $\sigma_x^a(x)$ com deformação normal $\varepsilon_x^a(x)$, ambas na direção axial.

As relações de compatibilidade e lei constitutiva estão combinadas na Equação 16 - $N(x) = EA(x) \cdot du/dx$ -, sendo E o módulo de elasticidade do material e $A(x)$ a área da seção transversal, que pode variar ao longo do comprimento da barra. Essa equação também considera a relação de equilíbrio $N(x) = \sigma_x^a(x) \cdot A(x)$ entre tensão normal e o esforço interno axial (Equação 14).

A substituição da Equação 16 na Equação 10 resulta na equação diferencial do comportamento axial:

$$\frac{d}{dx} \left[EA(x) \frac{du}{dx} \right] = -p(x). \quad (28)$$

Para uma barra prismática (com área de seção transversal que não varia ao longo de seu comprimento), tem-se:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{p(x)}{EA}. \quad (29)$$

Com base na Equação 29, observa-se que uma barra com seção transversal constante e sem carregamento axial tem um deslocamento axial que varia linearmente.

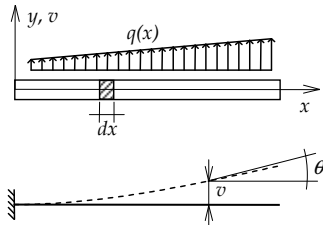
7. Equação de Navier para o comportamento à flexão

O comportamento de vigas à flexão foi formalizado no início do século XIX por Navier. As relações diferenciais de equilíbrio e compatibilidade mostradas neste capítulo para o comportamento à flexão de vigas fazem parte dessa formalização, a chamada *teoria de vigas de Navier*. A Figura 10 faz um resumo de todas as expressões associadas a essa teoria, mostrando o relacionamento entre elas.

TEORIA DE VIGAS DE NAVIER

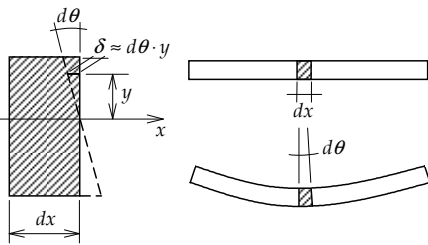
Hipóteses básicas:

- (a) Deslocamentos são pequenos em relação às dimensões da seção transversal.
- (b) Despreza-se deformações por cisalhamento (barras longas, isto é, comprimento é bem maior do que a altura da seção).
- (c) Seções transversais permanecem planas e normais ao eixo da barra quando esta se deforma (Hipótese de Bernoulli).
- (d) Material tem comportamento elástico-linear (Lei de Hooke).



Pequenos deslocamentos: $\theta \approx \tan(\theta) \rightarrow \frac{dv}{dx} = \theta(x)$

Deformação do elemento infinitesimal:



$\epsilon_x^f = -\frac{\delta}{dx} \rightarrow \epsilon_x^f = -\frac{d\theta}{dx} \cdot y \rightarrow \epsilon_x^f = -\frac{d^2v}{dx^2} \cdot y$

Relação tensão vs. deformação:

$\sigma_x^f = E \epsilon_x^f \rightarrow \sigma_x^f = E \cdot \left(-\frac{d\theta}{dx} \cdot y\right)$

$M = \int_A (-y) \cdot E \cdot \left(-\frac{d\theta}{dx} \cdot y\right) dA$

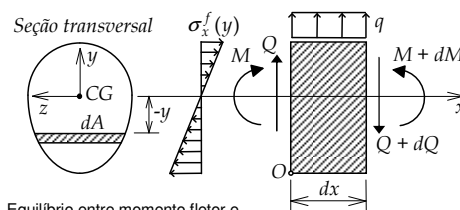
$M = E \cdot \left(\int_A y^2 dA\right) \cdot \frac{d\theta}{dx} \rightarrow M = EI \cdot \frac{d\theta}{dx} \rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI(x)}$

$d\theta = \frac{M}{EI} dx$

Parâmetros envolvidos:

- $E \rightarrow$ módulo de elasticidade do material
- $A \rightarrow$ área da seção transversal
- $dA \rightarrow$ área infinitesimal de uma fibra da seção transversal
- $I = \int y^2 dA \rightarrow$ momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo z
- $q \rightarrow$ taxa de carregamento distribuído transversal ao eixo da barra (positiva na direção de y)
- $Q \rightarrow$ esforço cortante (positivo quando entrando pela esquerda for na direção de y , ou quando entrando pela direita for contrário a y)
- $M \rightarrow$ momento fletor (positivo quando traciona as fibras inferiores da seção transversal)
- $v \rightarrow$ deslocamento transversal (positivo na direção de y)
- $\theta \rightarrow$ rotação da seção transversal por flexão (positiva no sentido anti-horário)
- $d\theta \rightarrow$ rotação relativa interna por flexão de um elemento infinitesimal de barra
- $\delta \rightarrow$ variação de comprimento de uma fibra genérica dada por y
- $\epsilon_x^f \rightarrow$ deformação normal na direção longitudinal de uma fibra devida ao efeito de flexão
- $\sigma_x^f \rightarrow$ tensão normal na direção longitudinal da barra devida ao efeito de flexão

Equilíbrio do elemento infinitesimal:



Equilíbrio entre momento fletor e tensões normais:

$M = \int_A (-y) \cdot \sigma_x^f dA$

$\sum F_y = 0 \rightarrow \frac{dQ}{dx} = q(x)$

$\sum M_O = 0 \rightarrow \frac{dM}{dx} = Q(x)$

$\frac{d^2M}{dx^2} = q(x)$

Equação de Navier:

$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2v}{dx^2} \right] = q(x) \rightarrow \frac{d^4v}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI}$ (momento de inércia constante)

Figura 10 – Resumo da teoria de vigas de Navier.

Essa teoria, que despreza deformações devidas ao efeito cortante, estabelece uma equação diferencial que relaciona os deslocamentos transversais $v(x)$ de uma viga com a taxa de carregamento distribuído transversalmente $q(x)$. Para se chegar a essa equação diferencial, primeiro é obtida uma relação entre o momento fletor na seção transversal e a segunda derivada do deslocamento transversal em relação a x . Isso é deduzido utilizando as Equações 8 e 19, considerando o caso geral de momento de inércia I variável ao longo da barra:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI(x)} \tag{30}$$

A Equação 30 relaciona o momento fletor em uma seção transversal da viga com a curvatura da viga, que pode ser aproximada por d^2v/dx^2 no caso de pequenos deslocamentos.

Combinando-se a Equação 30 com a Equação 13, chega-se a:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 v}{dx^2} \right] = q(x). \quad (31)$$

No caso em que a barra é prismática (momento de inércia I da seção transversal constante ao longo da barra), tem-se:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI}. \quad (32)$$

A Equação 31, ou sua outra versão (Equação 32) para inércia constante, é chamada de *equação de Navier*. Essa equação engloba, no nível de um elemento infinitesimal de barra, todas as condições que o modelo estrutural tem que atender. As Equações 2 e 4 consideram condições de compatibilidade; a Equação 1 considera a lei constitutiva do material; a Equação 13 considera condições de equilíbrio entre carregamento transversal distribuído, esforço cortante e momento fletor; e a Equação 15 considera o equilíbrio entre tensões normais e momento fletor.

Pode-se, ainda, considerar a relação que existe entre o deslocamento transversal e o esforço cortante em uma barra, obtida pelas Equações 12 e 30, considerando I constante:

$$\frac{d^3 v}{dx^3} = \frac{Q(x)}{EI}. \quad (33)$$

8. Comparação entre vigas isostáticas e hiperestáticas

Nesta seção, é feita uma comparação entre o comportamento de vigas isostáticas e hiperestáticas com base na equação de Navier.

Considere, por exemplo, as vigas isostáticas mostradas na Figura 11. A análise do equilíbrio de um elemento infinitesimal de barra resultou na Equação 13, que relaciona o momento fletor $M(x)$ em uma seção transversal da barra com a taxa de carregamento transversal distribuído $q(x)$. Essa equação integrada duas vezes em relação a x ao longo da viga fornece:

$$M(x) = \iint q(x) dx^2 + b_1 x + b_0. \quad (34)$$

As constantes de integração b_0 e b_1 ficam definidas pelas condições de contorno em termos de forças ou momentos nas extremidades das vigas. A viga biapoiada da Figura 11-a apresenta duas condições de contorno em momentos (momentos fletores nulos nas extremidades): $M(0) = 0$ e $M(l) = 0$. E a viga engastada e livre da Figura 11-b apresenta uma condição de contorno em momento (momento fletor nulo na extremidade livre) e outra em força (esforço cortante nulo na extremidade livre): $M(l) = 0$ e $Q(l) = 0$.

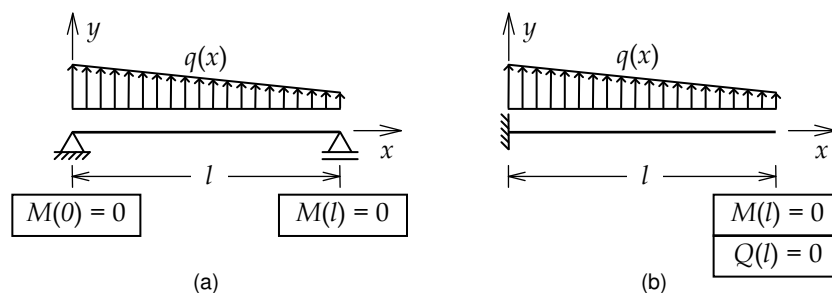


Figura 11 – Duas vigas isostáticas e suas duas condições de contorno em termos de forças ou momentos.

Como, pela Equação 12, $dM/dx = Q(x)$, pode-se concluir que as duas vigas isostáticas da Figura 11 têm condições de contorno suficientes para a determinação das constantes de integração b_0 e b_1 . Assim, os momentos fletores e os esforços cortantes ficam definidos nas vigas isostáticas utilizando somente condições de equilíbrio.

No caso de vigas hiperestáticas, como as indicadas na Figura 12, não existem duas condições de equilíbrio em forças ou momentos disponíveis para a determinação das constantes b_0 e b_1 da Equação 34. Portanto, utilizando somente equilíbrio, não é possível resolver o problema.

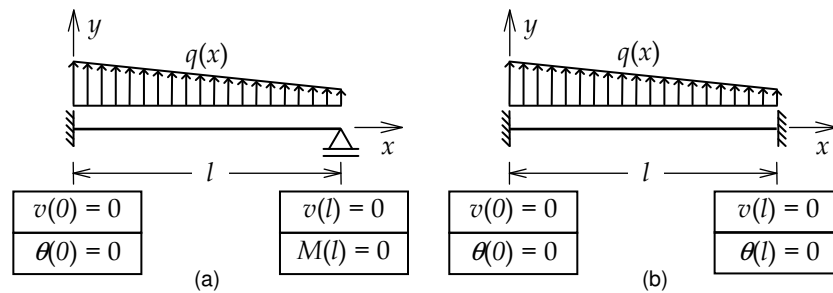


Figura 12 – Duas vigas hiperestáticas e suas quatro condições de contorno em termos de deslocamentos transversais ou de suas derivadas.

Entretanto, as condições de compatibilidade e leis constitutivas devem ser consideradas para resolver as vigas hiperestáticas. Essas outras condições estão incluídas na equação de Navier (Equação 32). Considerando que tais vigas têm módulo de elasticidade E e momento de inércia I da seção transversal constantes, a equação de Navier integrada quatro vezes em relação a x ao longo da viga fornece:

$$v(x) = \iiint \int \frac{q(x)}{EI} dx^4 + c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0. \quad (35)$$

Considerando as Equações 2 e 30, observa-se que existem para as vigas da Figura 12 quatro condições de contorno em termos de deslocamentos transversais $v(x)$ ou de uma de suas derivadas $dv/dx = \theta(x)$ e $d^2v/dx^2 = M(x)/EI$; portanto, é possível determinar as quatro constantes de integração da Equação 35. Uma vez integrada essa equação e com o conhecimento das constantes de integração, os esforços internos (momentos fletores e esforços cortantes) podem ser encontrados pelas Equações 30 e 33.

Na verdade, os métodos básicos da análise estrutural não resolvem vigas hiperestáticas dessa maneira relativamente complexa. A indicação da solução dessa forma é feita apenas para demonstrar que, para resolver uma estrutura hiperestática, é sempre necessário considerar, além do equilíbrio, as condições de compatibilidade entre deslocamentos e deformações e a lei constitutiva do material.

9. Análise qualitativa de diagramas de esforços internos e configurações deformadas em vigas

O projeto e a análise de estruturas formam uma atividade que muitas vezes pode ser trabalhosa, mesmo no caso de estruturas isostáticas para as quais apenas considerações sobre equilíbrio estático são necessárias para determinar a distribuição de esforços na estrutura. No caso de estruturas hiperestáticas, o desafio é maior ainda porque a distribuição de esforços depende de dimensões das seções transversais dos membros estruturais, que não são conhecidas *a priori*, conforme comentado anteriormente.

Tanto no caso de análise de estruturas isostáticas quanto no de estruturas hiperestáticas, o processo pode ser facilitado se o analista estrutural tiver uma noção dos aspectos dos diagramas de esforços internos que resultam da análise. Em algumas situações, uma análise aproximada pode ser executada com base nos aspectos dos diagramas. Por exemplo, a partir do aspecto do diagrama de momentos fletores de uma estrutura hiperestática, pode-se identificar seções transversais nas quais o momento fletor é nulo e transformar a estrutura em uma estrutura isostática através da introdução de rótulas em algumas dessas seções. Dessa forma, se poderia analisar com uma aproximação razoável a estrutura hiperestática utilizando somente condições de equilíbrio. O livro de White, Gergely e Sexsmith (1976) contém um capítulo dedicado a esse tipo de análise.

Esta seção, bastante motivada por esses autores, apresenta características dos diagramas de esforços internos e da configuração deformada de vigas. Essas características podem auxiliar o traçado aproximado dos diagramas. As características apresentadas baseiam-se principalmente nas relações diferenciais da idealização do comportamento de barras à flexão resumidas neste capítulo.

Tal apresentação inicia-se com os aspectos dos diagramas de esforços cortantes e momentos fletores de uma viga biapoiada com duas forças concentradas, indicados na Figura 13. São ressaltados o relacionamento entre esses diagramas e a relação deles com o carregamento.

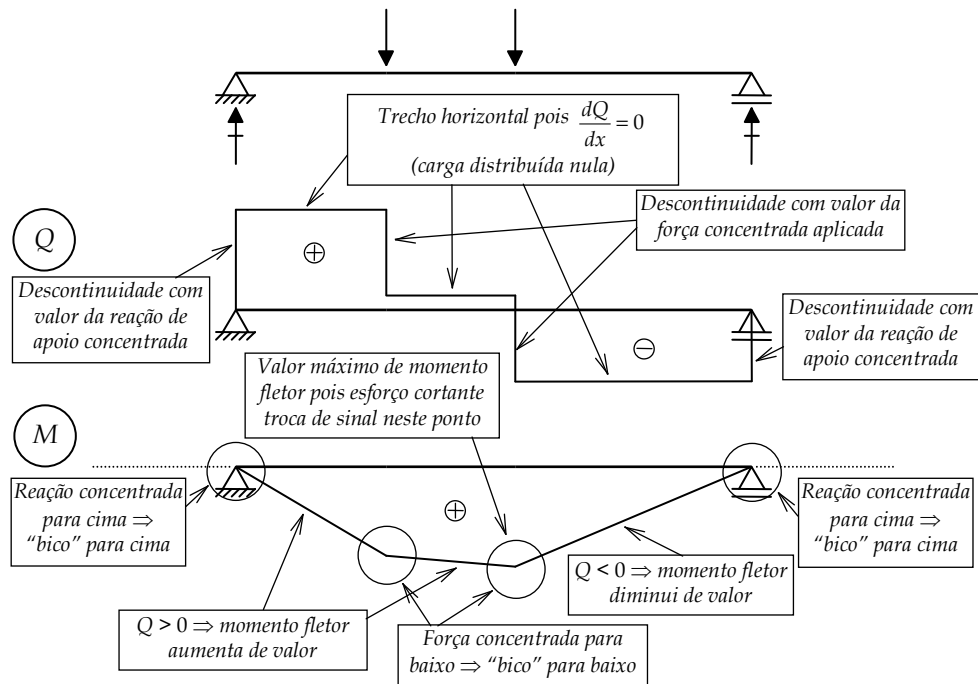


Figura 13 – Características dos diagramas de esforços cortante e de momentos fletores para uma viga biapoiada com duas forças concentradas.

Observa-se, na Figura 13, que o diagrama de esforços cortantes apresenta patamares horizontais e que o diagrama de momentos fletores é formado por uma linha poligonal (trechos lineares). Isso se deve aos trechos descarregados entre reações de apoio e cargas aplicadas. Em cada trecho, com base nas Equações 11 e 12, tem-se que o esforço cortante é constante ($dQ/dx = 0$) e o momento fletor varia linearmente ($dM/dx = Q$).

Também com base nas mesmas relações diferenciais, nos pontos onde atua uma força transversal concentrada (tanto reação de apoio quanto carga aplicada), o diagrama de esforços cortantes da Figura 13 apresenta descontinuidades e o diagrama de momento fletores apresenta "bicos", isto é, pontos onde há uma mudança de inclinação. Observe que as descontinuidades do diagrama de esforços cortantes, quando percorrido da esquerda para a direita, assumem o valor e o sentido da força atuante: nos apoios onde atuam reações para cima, o salto do diagrama é para cima; e, nos pontos que têm forças aplicadas para baixo, o salto é para baixo. Além disso, observe que os "bicos" do diagrama de momentos fletores seguem os sentidos das forças concentradas: reação força para cima nos apoios implica "bico" para cima (imaginando um diagrama com prolongamento nulo fora do domínio da viga, indicado pela linha pontilhada), e força aplicada para baixo resulta em "bico" para baixo. Observa-se que a inclinação do diagrama de momentos fletores está relacionada com o sinal do esforço cortante no trecho: quando o esforço cortante é positivo, o momento fletor aumenta de intensidade da esquerda para a direita; quando o esforço cortante é negativo, o momento fletor diminui de intensidade. Finalmente, verifica-se que o valor máximo de momento fletor ocorre na seção transversal onde ocorre a mudança de sinal do diagrama de esforços cortantes.

As Equações 11 e 12 também fornecem subsídios para o entendimento dos aspectos dos diagramas de esforços cortantes e de momentos fletores de uma viga biapoiada com balanços submetida a uma força uniformemente distribuída para baixo, como ilustrado na Figura 14.

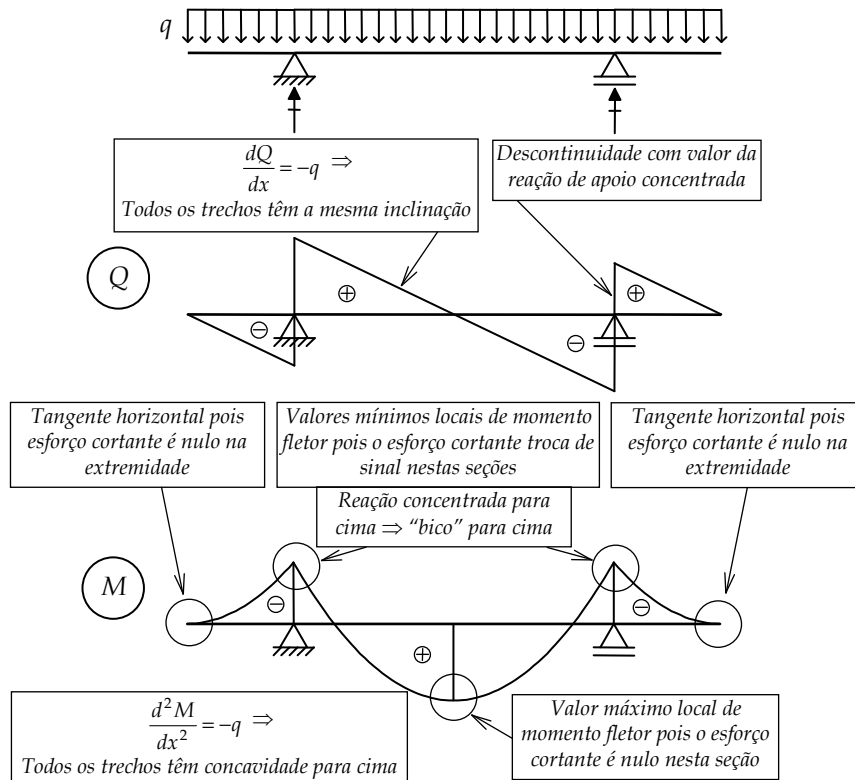


Figura 14 – Características dos diagramas de esforços cortante e de momentos fletores para uma viga biapoiada com balanços submetida a uma força uniformemente distribuída.

O diagrama de esforços cortantes mostrado na Figura 14 apresenta um aspecto de um “serrilhado” cujos trechos têm todos a mesma inclinação, que decresce da esquerda para a direita pois $dQ/dx = -q$ (carga para baixo). As descontinuidades desse diagrama nos apoios apresentam o valor das reações de apoio e têm o sentido para cima porque as reações têm essa direção. Associado a isso, o diagrama de momentos fletores tem “bicos” para cima nos pontos dos apoios. No vão entre apoios, o diagrama de momentos fletores apresenta um máximo local na seção transversal onde o esforço cortante é nulo, pois $dM/dx = Q$. Os valores de momento fletor nas seções transversais dos apoios correspondem a valores de mínimos, pois o esforço cortante nessas seções troca de sinal negativo para positivo (percorrendo da esquerda para a direita). Também por causa da relação $dM/dx = Q$, o diagrama de momentos fletores apresenta tangentes horizontais na extremidade livre dos balanços porque, nessas seções transversais, o esforço cortante é nulo. Finalmente, observa-se que todos os trechos do diagrama de momentos fletores apresentam concavidade para cima. Como o diagrama de momentos fletores é desenhado de forma invertida (valores positivos para baixo), a concavidade para cima está associada a $d^2M/dx^2 < 0$. De fato, considerando que a carga uniformemente distribuída é voltada para baixo, e portanto negativa, pela Equação 13 tem-se $d^2M/dx^2 = -q$.

Os aspectos dos diagramas de esforços cortantes e momentos fletores dos exemplos anteriores de vigas biapoiadas foram analisados levando conta apenas relações diferenciais de equilíbrio – Equações 11, 12 e 13. Uma importante relação diferencial, que envolve equilíbrio e compatibilidade em nível infinitesimal, traz também subsídios para identificar o aspecto do diagrama de momentos fletores. É a relação entre a segunda derivada da elástica e o momento fletor, dada pela Equação 30, ou entre a curvatura da elástica e o momento fletor, dada pela Equação 19:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

Nessa relação, ρ é o raio de curvatura; $v(x)$ é o deslocamento transversal (elástica); $M(x)$ é o momento fletor; e EI é o parâmetro de rigidez à flexão da viga (produto do módulo de elasticidade do material pelo momento de inércia à flexão da seção transversal). A associação entre curvatura (ou concavidade) da elástica e o momento fletor é importante porque é possível identificar intuitivamente o aspecto da elástica para alguns modelos estruturais, como vigas contínuas e pórticos simples. Isso ajuda no traçado do aspecto do diagrama de momentos fletores. Por exemplo, quando a concavidade da elástica é para cima ($d^2v/dx^2 > 0$) o momento fletor é positivo. Isso é consistente com o fato de que um momento fletor positivo é associado à tração nas fibras inferiores da barra e compressão na fibras superiores (concavidade para cima ou convexidade para

baixo). Quando a concavidade é para baixo ($d^2v/dx^2 < 0$), ocorre o inverso: fibras superiores tracionadas e momento fletor negativo.

Outra observação importante é que nas seções transversais da barra onde ocorre mudança de concavidade (raio de curvatura ρ tende a infinito), a concavidade tem valor nulo e o momento fletor também é nulo. Os pontos de uma barra onde isso ocorre são chamados de *pontos de inflexão*.

Na identificação intuitiva do aspecto da elástica, a equação de Navier (Equação 32), para barras com inércia constante, também pode fornecer algum subsídio. Para o caso de trechos de barras sem carregamento transversal, tem-se que $d^2M/dx^2 = 0$ e $d^4v/dx^4 = 0$, isto é, para trechos descarregados, o momento fletor varia linearmente (observado anteriormente) e o deslocamento transversal varia cubicamente (polinômio do terceiro grau que satisfaz $d^4v/dx^4 = 0$). Portanto, em um trecho descarregado de barra, não pode ocorrer mais do que um ponto de inflexão (isso é uma propriedade de um polinômio do terceiro grau).

Para esclarecer esse fato, considere, como exemplo, a viga biapoiada mostrada na Figura 15, sem carregamento transversal e com momentos aplicados nas extremidades (White et al. 1976).

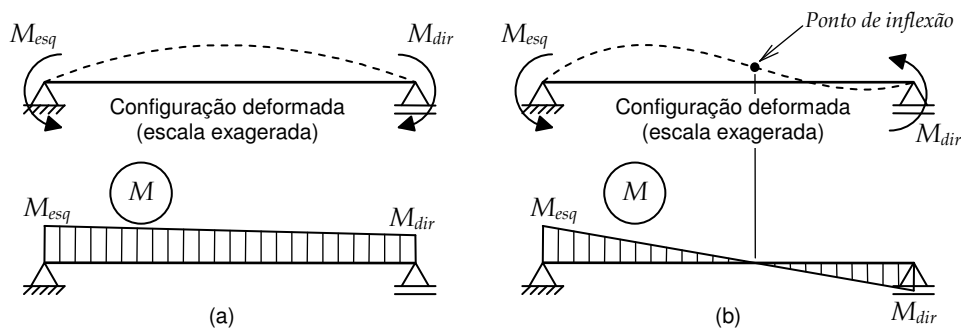


Figura 15 – Viga biapoiada com momentos aplicados nas extremidades (White et al. 1976): (a) uma única concavidade; (b) uma mudança de concavidade.

Na viga da Figura 15-a, os momentos aplicados têm sentidos opostos e provocam uma flexão na viga com uma única concavidade, tracionando as fibras na face superior. Por outro lado, os momentos aplicados na viga da Figura 15-b têm o mesmo sentido, o que provoca uma flexão com uma mudança de concavidade, tracionando as fibras superiores na extremidade esquerda e tracionando as fibras inferiores na extremidade direita. Em ambas as situações, o momento fletor varia linearmente ao longo da viga, sendo que no primeiro caso ele não troca de sinal e no segundo caso ele troca de sinal. Observa-se que, no ponto de inflexão, na seção transversal onde ocorre a mudança de concavidade da viga da Figura 15-b, o momento fletor é nulo.

Os exemplos mostrados na Figura 15 são hipotéticos e servem apenas para entender o comportamento da elástica e do diagrama de momentos fletores em um vão descarregado. Em geral, os vãos de uma viga contínua ou as vigas de um pórtico são solicitados por forças verticais para baixo associadas ao peso próprio ou a cargas acidentais e de ocupação. É interessante, portanto, saber o aspecto da elástica e do diagrama de momentos fletores para tais situações. A Figura 16 ilustra dois exemplos de um vão (uma viga biapoiada) com momentos fletores nas extremidades tracionando as fibras superiores. Essa situação é muito comum em vigas contínuas e em pórticos.

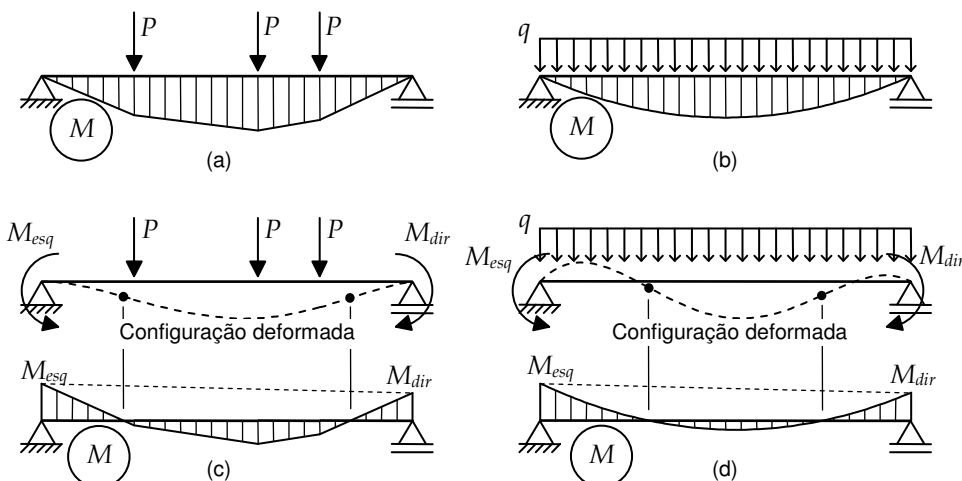


Figura 16 – Viga biapoiada com momentos aplicados nas extremidades e cargas verticais para baixo.

Nas Figuras 16-a e 16-b são mostradas duas vigas biapoiadas com cargas verticais para baixo e sem momentos aplicados nas extremidades. Na primeira, três forças concentradas são aplicadas e, na segunda, uma força uniformemente distribuída abrangendo todo o vão é aplicada. Pelo fato de todas as cargas aplicadas terem sentido para baixo, os correspondentes diagramas de momentos fletores mostrados são positivos, isto é, tracionam as fibras inferiores em todas as seções transversais.

Nas Figuras 16-c e 16-d, as mesmas cargas verticais são superpostas às cargas momento aplicadas nas extremidades da viga da Figura 15-a. As configurações deformadas resultantes das superposições de cargas estão indicadas com uma escala de deslocamentos exagerada e os diagramas de momentos fletores resultantes também estão mostrados. Os diagramas são obtidos pela superposição do diagrama trapezoidal da Figura 15-a com os diagramas das Figuras 16-a e 16-b, isto é, os diagramas finais são obtidos “pendurando” o diagrama de viga biapoiada a partir da linha reta que faz o fechamento das ordenadas do diagrama nas extremidades. Observa-se que, nos dois exemplos, embora a curva elástica possa ter diferentes aspectos, existem dois pontos de inflexão (círculos pretos indicados nas figuras), que correspondem aos dois únicos possíveis pontos de interseção do diagrama “pendurado” com o eixo da viga. Pode haver uma situação na qual existe somente um ponto de inflexão, que seria quando o diagrama de viga biapoiada “pendurado” toca o eixo da viga em apenas um ponto. Em outra situação não haveria ponto de inflexão algum, para o caso do diagrama “pendurado” não interceptar o eixo da viga.

Pode-se concluir que, em um vão com momentos fletores nas extremidades que tracionam fibras superiores e com cargas verticais para baixo no interior, não pode ocorrer mais do que dois pontos de inflexão. Essa é uma situação bastante comum. Um exemplo é mostrado na Figura 17.

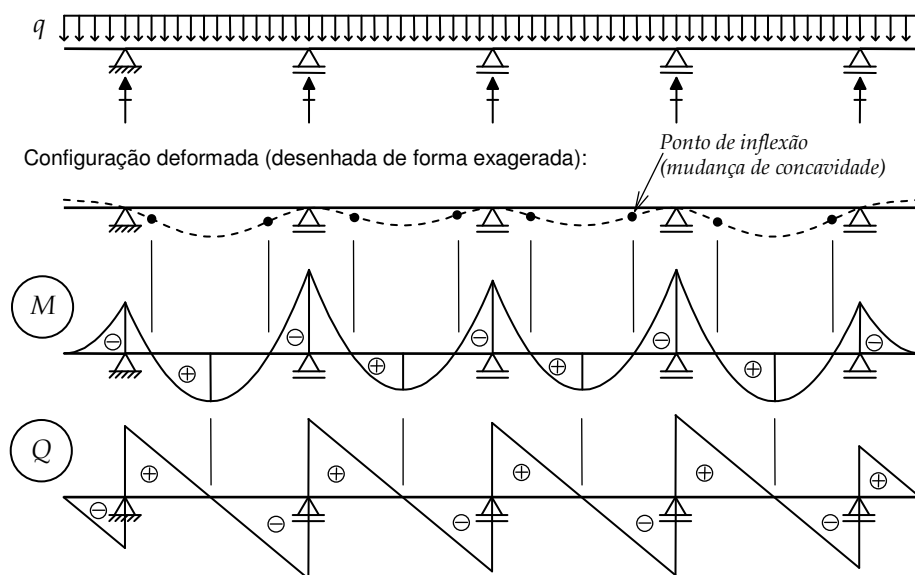


Figura 17 – Características da configuração deformada, do diagrama de momentos fletores e do diagrama de esforços cortantes para uma viga contínua com balanços submetida a uma força uniformemente distribuída.

As mesmas observações feitas para os aspectos dos diagramas de esforços cortantes e de momentos fletores do exemplo da Figura 14 podem ser feitas para os diagramas da viga contínua da Figura 17. Como foi observado, o diagrama de esforços cortantes tem o aspecto de um “serrilhado”. Nos apoios, as descontinuidades desse diagrama têm o mesmo valor e sentido (para cima) das reações de apoio. Consistentemente, nos pontos dos apoios, o diagrama de momentos fletores apresenta “bicos” para cima. Nos vãos entre apoios, o diagrama de momentos fletores apresenta máximos locais nas seções transversais onde o esforço cortante é nulo. Os valores de momento fletor nas seções transversais dos apoios correspondem a valores de mínimos locais pois o esforço cortante nessas seções troca de sinal negativo para positivo. E, nas extremidades livres dos balanços, o diagrama de momentos fletores apresenta tangentes horizontais porque o esforço cortante é nulo.

Essas observações são complementadas pelas características associadas da curva elástica da viga. Observa-se que, em cada um dos vãos internos, existem dois pontos de inflexão, que correspondem às seções transversais onde os momentos fletores são nulos. Nesses pontos ocorre uma mudança de concavidade da elástica, sendo que, nos trechos centrais dos vãos, a concavidade é para cima; e, nos trechos próximos aos apoios, a concavidade é para baixo. Isso é consistente com o fato de os momentos fletores serem positivos (tracio-

nam as fibras inferiores) nos trechos centrais dos vãos e serem negativos (traçom as fibras superiores) nos trechos próximos aos apoios.

Verifica-se, a partir das observações anteriores, que a identificação do aspecto da curva elástica de uma viga é muito importante para a identificação do aspecto do seu diagrama de momentos fletores. Em algumas situações, o traçado da elástica é bastante intuitivo. A Figura 18 ilustra isso com base em dois exemplos de vigas com apenas uma carga concentrada aplicada.

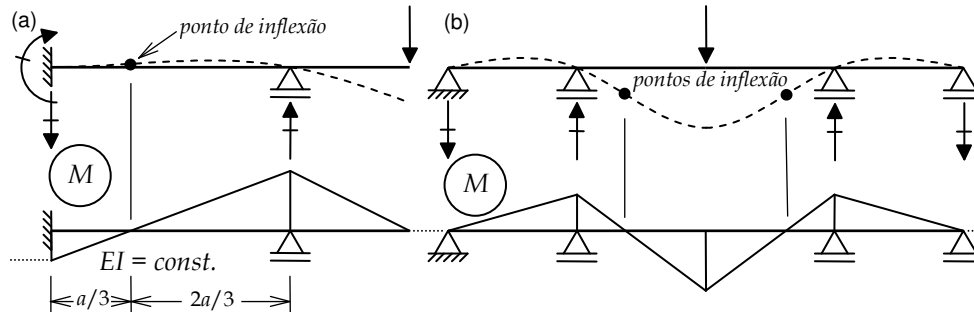


Figura 18 – Vigas submetidas a uma única carga concentrada: aspectos das elásticas e dos diagramas de momentos fletores.

A viga da Figura 18-a tem um vão, entre o engaste e o apoio simples do 1º gênero, e um trecho em balanço. Uma força concentrada é aplicada para baixo na extremidade livre do balanço. O traçado intuitivo da curva elástica começa pelo balanço. A força para baixo provoca uma deflexão do balanço com a concavidade para baixo. A continuidade de rotação da elástica na seção transversal do apoio simples impõe que, nessa seção, a elástica tenha uma rotação no sentido horário. No outro lado do vão, o engaste impõe que a rotação da elástica seja nula. Observa-se que obrigatoriamente a curva elástica tem uma mudança de concavidade (ponto de inflexão) no vão entre apoios, pois a curva parte de uma tangente horizontal no engaste e chega na extremidade oposta do vão com uma rotação no sentido horário. Como esse vão é descarregado, não pode haver outro ponto de inflexão, e o diagrama de momentos fletores varia linearmente. A concavidade para cima da elástica próxima ao engaste indica que os momentos fletores traçom as fibras inferiores nessa região, ao passo que a concavidade para baixo na segunda parte do vão e no balanço mostra que os momentos fletores traçom as fibras superiores. Na seção transversal do apoio simples, o diagrama de momentos fletores tem de ser contínuo, mas apresenta uma mudança brusca de direção, isto é, um “bico” para cima. Todos os “bicos” desse diagrama são consistentes com os sentidos das forças verticais atuantes. Se for considerado que fora do domínio da viga o diagrama se prolonga com valores constantes (linhas pontilhadas na Figura 18-a), existem três “bicos”. No engaste, a reação vertical e o “bico” são para baixo; no apoio simples, a reação vertical e o “bico” são para cima; e, na extremidade livre do balanço, a força vertical aplicada e o “bico” são para baixo. Observa-se também que o sentido horário da reação momento no engaste é consistente com um momento fletor que traçom as fibras inferiores nessa extremidade da viga.

Um fato interessante deve ser salientado com relação à viga da Figura 18-a. Em um vão descarregado, com rigidez à flexão EI constante, engastado em uma extremidade e com uma rotação da elástica na outra extremidade, o ponto de inflexão fica localizado a $1/3$ do vão em relação ao engaste.

A viga contínua com apoios simples mostrada na Figura 18-b tem três vãos e uma força vertical aplicada no vão central. A identificação da elástica é simples se for imaginado que, em uma situação inicial, os apoios das extremidades da viga não existem. Nesse caso, a aplicação da força concentrada no vão central provocaria uma curva elástica que, por compatibilidade de rotação nos apoios do vão, teria balanços livres com deflexão para cima. Reintegrando os apoios das extremidades, a curva elástica seria forçada para baixo. Dessa forma, a elástica ganha concavidades para baixo nos vãos extremos. Também é intuitivo imaginar que as reações verticais nos apoios das extremidades são para baixo, pois forçam a elástica para baixo nos vãos extremos. O resultado é uma curva elástica com concavidades para baixo na esquerda e na direita e concavidade para cima no centro. Os pontos de inflexão, onde mudam as concavidades, obrigatoriamente estão localizados no vão central. Isso pode ser concluído de algumas maneiras. Observe que o diagrama de momentos fletores nos vãos extremos é linear, pois eles estão descarregados. Nos apoios extremos, os momentos fletores são nulos, o que consome os únicos possíveis pontos de inflexão nesses vãos. As reações verticais para baixo provocam tração nas fibras superiores (consistente com as concavidades para baixo). Dessa forma, nas seções transversais dos apoios simples interiores que limitam o vão central, os momentos fletores traçom as fibras superiores. A carga vertical aplicada para baixo no vão central faz com que dois pontos de inflexão apareçam no vão.

O diagrama de momentos fletores da viga da Figura 18-b é consistente com o aspecto da elástica e com as reações de apoio. Observa-se que o diagrama é uma linha poligonal cujos vértices estão associados a “eventos” de forças verticais. Cada “bico” da linha poligonal tem o mesmo sentido da correspondente força vertical. E os momentos fletores são nulos nos pontos onde ocorre mudança de concavidade da curva elástica. Isso é válido também para as extremidades da viga, que podem ser consideradas pontos de inflexão.

Outras situações em que o traçado intuitivo da elástica auxilia na identificação do aspecto do diagrama de momentos fletores são indicadas na Figura 19. Os exemplos dessa figura são vigas contínuas submetidas a um recalque de um dos apoios. As elásticas são traçadas com escala exagerada de deslocamentos. Os sentidos das reações verticais são consistentes com o recalque imposto e com as restrições impostas pelos outros apoios. Os diagramas de momentos fletores resultantes são formados por trechos lineares por vão. Os pontos de inflexão das elásticas correspondem com às seções transversais nas quais o momento fletor é nulo. E os “bicos” dos diagramas têm o mesmo sentido das reações verticais.

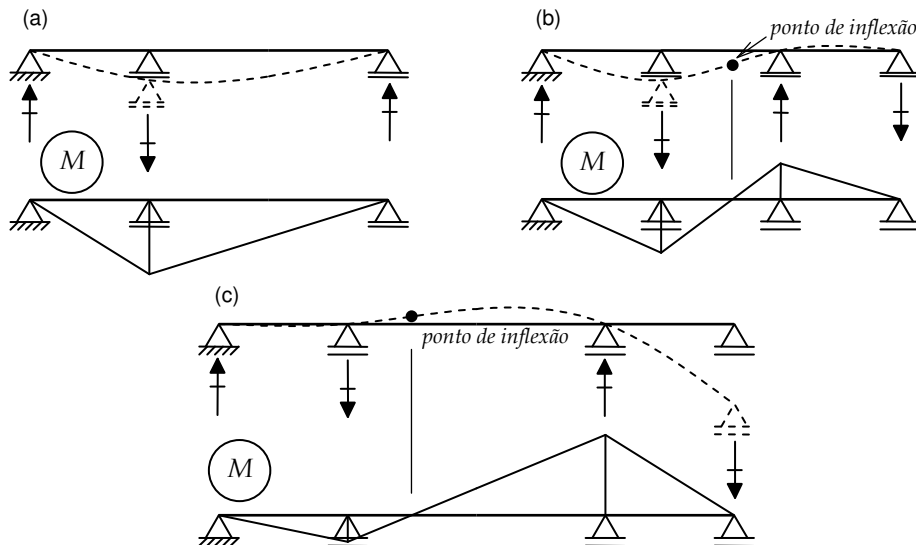


Figura 19 – Vigas submetidas a recalques de apoio: aspectos das elásticas e dos diagramas de momentos fletores.

Os exemplos de vigas apresentados anteriormente nesta seção tratam apenas dos aspectos qualitativos da curva elástica e do diagrama de momentos fletores. A não ser em um único caso (Figura 18-a), não se tem informação precisa sobre a localização de pontos de inflexão. Embora a localização exata de pontos de inflexão não seja o objetivo desta seção, é possível ter mais subsídios para isso através de uma análise em que se varia a rigidez relativa à flexão dos vãos de uma viga contínua. Considere as vigas contínuas com dois vãos mostradas na Figura 20 (Figuras 20-b, 20-c e 20-d). O apoio da esquerda é um engaste e o apoio da direita é simples. A barra do primeiro vão apresenta um parâmetro de rigidez à flexão de referência ($EI = EI_r$) e está carregada com uma força vertical uniformemente distribuída. A barra do segundo vão está descarregada e tem três possibilidades para sua rigidez à flexão. Na Figura 20-b, a barra do segundo vão tem uma rigidez grande ($EI = EI_g > EI_r$); na Figura 20-c, a barra tem o valor de referência da rigidez ($EI = EI_r$); e, na Figura 20-d, a barra tem uma rigidez pequena ($EI = EI_p < EI_r$). Nas figuras, a barra do segundo vão é desenhada com diferentes espessuras para representar a rigidez relativa das três possibilidades.

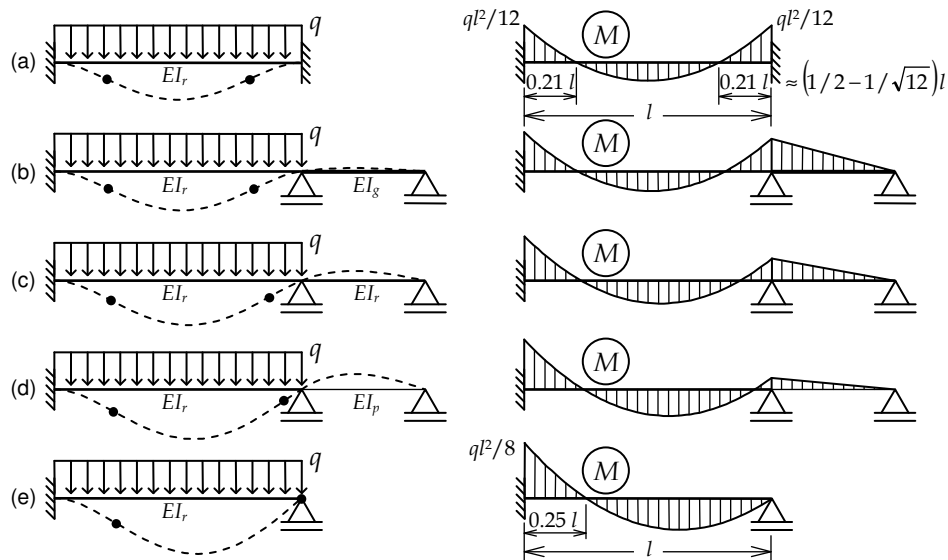


Figura 20 – Vigas com variação da rigidez relativa à flexão entre vãos.

As Figuras 20-a e 20-e representam situações extremas para o comportamento da barra do primeiro vão. No primeiro caso, o nó da direita do vão é considerado engastado, representando uma rigidez infinita para a barra do segundo vão. No último caso, o nó da direita é considerado articulado (apoio simples), representando uma rigidez nula para a barra do segundo vão. Nas duas situações extremas, os valores exatos (para rigidez à flexão constante ao longo da barra) dos momentos fletores nas extremidades da barra estão indicados, assim como as posições das seções transversais onde os momentos fletores são nulos, que correspondem a pontos de inflexão.

É interessante observar como varia o diagrama de momentos fletores da barra do primeiro vão em função da variação de rigidez da barra do segundo vão. Vê-se que o momento fletor na seção transversal à direita aumenta com a rigidez da barra do segundo vão. Conforme comentado na seção anterior, *elementos estruturais mais rígidos tendem a atrair mais esforços internos* (White et al. 1976).

Observa-se também na sequência de situações mostradas (da Figura 20-a à Figura 20-e) que *pontos de inflexão se movem na direção de locais com rigidez reduzida, e os deslocamentos se dão dentro de uma faixa bem limitada de valores* (White et al. 1976).

Conclui-se que é possível, dentro de certos limites, controlar a distribuição de esforços em uma estrutura hiperestática variando a rigidez relativa de seus elementos estruturais. Por exemplo, com a variação da rigidez à flexão da barra do segundo vão, o momento fletor na seção transversal à esquerda do primeiro vão pode ser modificado. Entretanto, esse momento fletor sempre traciona as fibras superiores e está limitado entre dois valores ($q^2 l^2 / 12$ e $q^2 l^2 / 8$), que correspondem às situações extremas das Figuras 20-a e 20-e. Isso não é possível em uma estrutura isostática, haja vista que só existe uma possibilidade de distribuição de esforços internos: a única distribuição que satisfaz as condições de equilíbrio.

10. Flambagem de barras: perda de estabilidade pelo efeito de compressão

Este capítulo considera apenas efeitos de primeira ordem, em que o equilíbrio dos modelos estruturais é sempre imposto para a geometria original e indeformada da estrutura. Entretanto, no comportamento real de estruturas, efeitos de segunda ordem podem ser importantes para o dimensionamento dos elementos estruturais. Esse é o caso de pilares e colunas que trabalham fundamentalmente com esforços de compressão. Para complementar a idealização do comportamento de barras, esta seção descreve a perda de estabilidade de barras submetidas à compressão. Esse fenômeno é conhecido como *flambagem de barras*.

Uma barra idealmente reta submetida a uma compressão centrada apresenta tensões normais com distribuição uniforme. Nessa situação ideal o esforço normal, que é a resultante de tensões normais, atua no centro de gravidade da seção transversal, não aparecendo flexão na barra. Mas na situação real existem sempre imperfeições geométricas, e o esforço normal nunca atua perfeitamente centrado. A excentricidade do esforço normal em relação ao centro de gravidade da seção transversal provoca momentos fletores na barra. No caso de tração, a flexão provocada pelo esforço axial descentrado tende a retificar a barra e, portanto, é um efeito estabilizante. Por outro lado, o esforço axial descentrado de compressão provoca flexão na barra, o

que aumenta mais ainda a excentricidade, isto é, esse efeito se autoalimenta, podendo, inclusive, provocar a perda da capacidade de resistência da barra comprimida.

Para modelar matematicamente esse fenômeno, é necessário considerar as condições de equilíbrio na configuração deformada da barra, ou seja, é preciso considerar efeitos de segunda ordem. O matemático L. Euler, em meados do século XVIII (Féodosiev 1977), descobriu que a estabilidade de colunas submetidas a esforços axiais de compressão depende da relação entre uma propriedade da seção transversal da coluna e de seu comprimento: a carga máxima P_E que uma coluna pode sustentar sem flexionar varia inversamente com o quadrado de seu comprimento l e proporcionalmente com o momento de inércia I da seção transversal:

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (36)$$

Na Equação 36, tem-se:

P_E → carga abaixo da qual a coluna não perde estabilidade (carga de Euler) [F];

E → módulo de elasticidade do material [F/L²];

I → momento de inércia da seção transversal correspondente ao plano onde se dá a flexão (menor momento de inércia da seção transversal) [L⁴];

l → comprimento da coluna [L].

O gráfico da Figura 21 mostra a variação do valor da força P de compressão na coluna em função da deflexão transversal máxima δ do centro da coluna. A expressão de carga de Euler, mostrada na Equação 36, foi deduzida para uma situação ideal. Nessa situação (linha sólida no gráfico da Figura 21), a coluna permanece reta (sem deflexão transversal) até que a carga atinja o valor da carga de Euler. Para valores mais altos da carga de compressão, o equilíbrio da barra pode ser alcançado tanto na configuração reta da barra quanto na configuração deformada. Quando existem duas configurações possíveis para o equilíbrio, diz-se que houve uma *bifurcação da posição de equilíbrio* (McGuire 1968). Ocorre que, no mundo físico real, existem imperfeições de ordem construtiva, como excentricidade na aplicação da carga, imperfeições geométricas das seções transversais etc. Devido a essas imperfeições, em condições reais, não existe bifurcação da posição de equilíbrio, e a flexão da coluna por flambagem pode ocorrer para cargas mais baixas do que a carga de Euler (linha tracejada no gráfico da Figura 21).

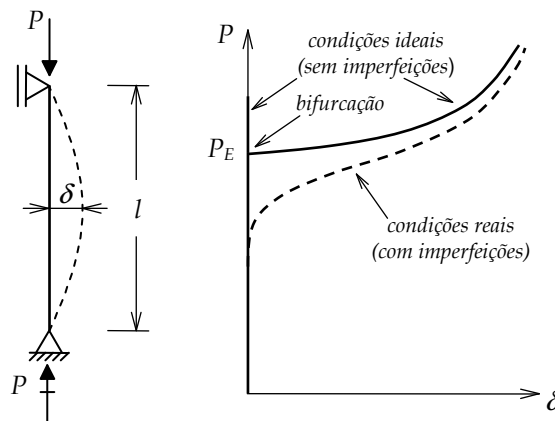


Figura 21 – Coluna de Euler: flexão provocada por efeitos de compressão e perda de estabilidade.

Deve-se ressaltar que a teoria de flambagem de Euler considera como hipótese básica que o material trabalha em um regime elástico, ainda longe do regime de ruptura, isto é, admite-se que a perda de capacidade de resistir a cargas da coluna se dá por flambagem de forma global. A perda de estabilidade também pode ocorrer por algum fenômeno localizado, como a ruína do material em algum ponto, o descolamento da solda entre a mesa e a alma de um perfil metálico, ou mesmo por uma flambagem localizada (caracterizada, por exemplo, pela ondulação da mesa comprimida do perfil metálico).

Também podem ocorrer restrições físicas na estrutura real que dificultam a flambagem, como atrito nas articulações ou atrito lateral da coluna com o restante da estrutura. Nesses casos, a carga crítica para flambagem pode ser mais alta do que a carga de Euler.

A modelagem matemática da flambagem ideal de Euler aplica a condição de equilíbrio na configuração deformada, mas ainda considera que as deflexões e inclinações da elástica da barra são pequenas. Considere a viga biapoiada mostrada na Figura 22, submetida a uma força de compressão P . A figura também mostra um elemento infinitesimal de viga isolado na configuração deformada, isto é, considerando efeitos de segunda ordem (Bazant & Cedolin 1991). O esforço cortante e o momento fletor, atuando em cada lado do elemento infinitesimal, estão indicados com seus sentidos positivos. O esforço normal P é considerado com o sentido de compressão.

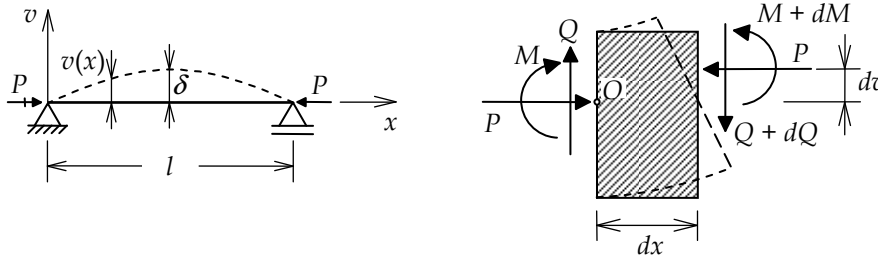


Figura 22 – Efeito de segunda ordem para uma viga biapoiada submetida à compressão.

O equilíbrio de momentos em relação ao ponto O do elemento infinitesimal, desprezando os termos de mais alta ordem, fornece a seguinte relação:

$$\sum M_O = 0 \rightarrow dM - (Q + dQ) \cdot dx + P \cdot dv = 0 \rightarrow \frac{dM}{dx} - Q + P \frac{dv}{dx} = 0. \quad (37)$$

Derivando a Equação 37 em relação a x , e considerando, pela Equação 11, que $dQ/dx = 0$ porque não existe carregamento transversal, chega-se a:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + P \frac{d^2 v}{dx^2} = 0. \quad (38)$$

Pela Equação 30, sabe-se que $M = EI \cdot dv^2/dx^2$. Substituindo essa expressão na Equação 38, considerando rigidez à flexão EI constante, tem-se a relação diferencial do problema da viga submetida à compressão levando em conta efeitos de segunda ordem:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 v}{dx^2} = 0. \quad (39)$$

Essa equação considera pequenas inclinações da elástica $v(x)$ porque, na Equação 30, a curvatura da barra está sendo aproximada à derivada à segunda da elástica. Para grandes deslocamentos, deveria ser utilizada a relação entre a curvatura e a elástica dada pela Equação 9. Além disso, também se considera que, apesar da flexão da barra, a distância entre apoios não se altera, o que é consistente com a hipótese de barras inextensíveis adotada.

A Equação 39 caracteriza um problema de autovalor e autofunção (Boyce & DiPrima 2005), que tem uma solução trivial $v(x) = 0$ e soluções características da forma:

$$v(x) = d_1 \cdot \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x + d_2 \cdot \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x + d_3 \cdot x + d_4. \quad (40)$$

A derivação dessa equação duas vezes em relação a x resulta em:

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -d_1 \cdot \frac{P}{EI} \cdot \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x - d_2 \cdot \frac{P}{EI} \cdot \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x. \quad (41)$$

Para a viga biapoiada, tem-se como condição de contorno $v = 0$ para $x = 0$. Portanto, na Equação 40, $d_2 + d_4 = 0$. A condição de contorno de $M = 0$ para $x = 0$ impõe que $dv^2/dx^2 = 0$ para $x = 0$. A consideração dessa condição na Equação 41 resulta em $d_2 = 0$. Como $d_2 + d_4 = 0$, conclui-se que $d_4 = 0$. A imposição de $dv^2/dx^2 = 0$ para $x = l$ na Equação 41 acarreta:

$$\sin \sqrt{\frac{P \cdot l}{EI}} = 0.$$

Disso resulta que $P = n^2 \pi^2 EI / l^2$, sendo n um inteiro qualquer. A substituição dessa expressão, em conjunto com $d_2 = 0$, $d_4 = 0$ e $v(l) = 0$, na Equação 40 resulta em $d_3 = 0$. Portanto, as soluções características correspondentes para a elástica são:

$$v(x) = d_1 \cdot \text{sen}\left(\pi \frac{n \cdot x}{l}\right).$$

Vê-se que a Equação 39 tem infinitas soluções: uma trivial e as soluções características com infinitos valores para o inteiro n . As soluções características para valores de $n > 1$ correspondem a soluções harmônicas com muitas oscilações que somente fazem sentido do ponto de vista teórico. A única solução de caráter prático corresponde a $n = 1$, que resulta em uma elástica igual a uma meia onda senoidal com amplitude $d_1 = \delta$, como indicado Figura 22:

$$v(x) = \delta \cdot \text{sen}\left(\pi \frac{x}{l}\right). \quad (42)$$

Nessa equação, a amplitude máxima δ tem valor indeterminado. Isso é típico de problemas de autovalor e autofunção: a Equação 42 é uma autofunção associada a um autovalor que é dado pela Equação 36. Nesse caso, o autovalor e a autofunção correspondem a $n = 1$. Uma autofunção define apenas um modo de variação, que não tem amplitude definida. No contexto do problema da instabilidade (flambagem) da barra, o autovalor é denominado *carga crítica* (de Euler) e a autofunção é um *modo de deformação na flambagem*. A carga crítica é o valor limite para a força de compressão, a partir do qual pode ocorrer perda de estabilidade. Na verdade, vai ocorrer instabilidade para cargas mais baixas que a carga crítica, pois a configuração reta é impossível de existir em virtude de imperfeições geométricas (gráfico na Figura 21).

Deve-se ressaltar que a Equação 42 perde sua validade à medida que as deflexões se tornam significativas, pois a Equação 39 considera curvaturas de maneira aproximada, conforme mencionado. Por essa equação, o gráfico P - δ na Figura 21 (para condições ideais) continuaria como uma reta horizontal após a bifurcação. A forma desse gráfico, com valores de P aumentando com a deflexão máxima δ , corresponde a uma modelagem matemática com grandes deflexões para colunas muito flexíveis (McGuire 1968).

O problema clássico da flambagem de Euler considera uma barra simplesmente apoiada, isto é, biarticulada. Outros tipos de restrições de apoio modificam o modo de deformação e a carga crítica de flambagem. Isso é indicado na Figura 23 para colunas com quatro tipos de condições de extremidade.

Os modos de deformação na flambagem das colunas da Figura 23 apresentam pontos de inflexão (pontos de mudança de sentido da concavidade) compatíveis com as restrições de apoio. Os pontos de inflexão correspondem às seções transversais em que o momento fletor é nulo. No caso da coluna biarticulada, os pontos de inflexão ficam situados nas extremidades da barra, e o comprimento efetivo para flambagem é todo o comprimento da coluna. Nas outras situações, os pontos de inflexão estão indicados na figura, e o comprimento efetivo para flambagem em cada caso é a distância entre os pontos de inflexão.

A carga crítica de cada situação da Figura 23 depende do comprimento efetivo para flambagem e é dada pela expressão:

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{(kl)^2}. \quad (43)$$

A Equação 43 generaliza a fórmula de Euler e depende do seguinte parâmetro adicional (Figura 23):

$k \rightarrow$ fator que define o comprimento efetivo da coluna para flambagem [].

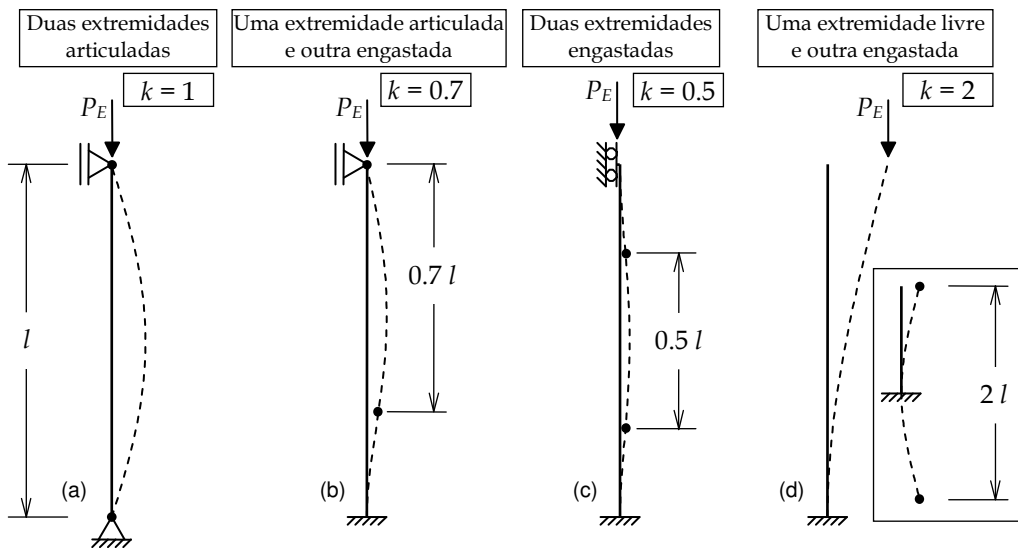


Figura 23 – Efeito de restrições de apoio na flambagem de colunas.

A Equação 43 pode ser utilizada em condições mais gerais, como para colunas com apoios elásticos ou inseridas dentro de pórticos, desde que se conheça o comprimento efetivo para flambagem dado pelo fator k , isto é, desde que se conheçam as posições dos pontos de inflexão no modo de deformação na flambagem.

Conforme mencionado, esta seção apenas introduziu o problema da perda de estabilidade de barras submetidas à compressão, que só pode ser modelado se forem considerados efeitos de segunda ordem. Essa apresentação é feita aqui porque esse fenômeno é importante demais para ser desconsiderado.

11. Referências bibliográficas

- | | |
|------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Bazant & Cedolin 1991 | Z.P. Bazant e L. Cedolin, <i>Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage Theories</i> , Oxford University Press, New York, 1991. |
| Beer & Johnston 2006 | F.P. Beer, E.R. Johnston Jr e J.T. Dewolf, <i>Resistência dos Materiais</i> , Quarta Edição, McGraw-Hill Interamericana, São Paulo, 2006. |
| Boyce & DiPrima 2005 | W.E. Boyce e R.C. DiPrima, <i>Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems</i> , Oitava Edição, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2005. |
| Féodosiev 1977 | V. Féodosiev, <i>Resistência dos Materiais</i> , Edições Lopes da Silva, Porto, Portugal, 1977. |
| McGuire 1968 | W. McGuire, <i>Steel Structures</i> , Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1968. |
| Timoshenko & Gere 1994 | S.P. Timoshenko e J.M. Gere, <i>Mecânica dos Sólidos</i> , Vol. 1, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1994. |
| West 1989 | H.H. West, <i>Analysis of Structures: An Integration of Classical and Modern Methods</i> , Segunda Edição, John Wiley & Sons, New York, 1989. |
| White et al. 1976 | R.N. White, P. Gergely e R.G. Sexsmith, <i>Structural Engineering – Combined Edition – Vol. 1: Introduction to Design Concepts and Analysis – Vol. 2: Indeterminate Structures</i> , John Wiley & Sons, New York, 1976. |