INF 1010
Estruturas de Dados Avançadas

Complexidade de Algoritmos

Introdução

Complexidade computacional

- Termo criado por Juris Hartmanis e Richard Stearns (1965)
- Relação entre o tamanho do problema e seu consumo de tempo e espaço durante a execução

Introdução

Complexidade computacional

- Fundamental para projetar algoritmos eficientes
- Preocupação com complexidade deve ser parte do projeto de um algoritmo

Introdução

Exemplos:

- Ordenar n números
- Multiplicar duas matrizes quadradas $n \times n$ (cada uma com n^2 elementos)

Complexidade de algoritmos

- Complexidade Espacial:
  - Quantidade de recursos utilizados para resolver o problema
- Complexidade Temporal:
  - Quantidade de tempo utilizado, ou número de instruções necessárias para resolver determinado problema
- Medida de complexidade
  - de acordo com o tamanho da entrada

Complexidade de algoritmos

espacial

- recursos (memória) necessários

temporal

- tempo utilizado
- número de instruções necessárias
- perspectivas:
  - pior caso
  - caso médio
  - melhor caso

Complexidade de algoritmos

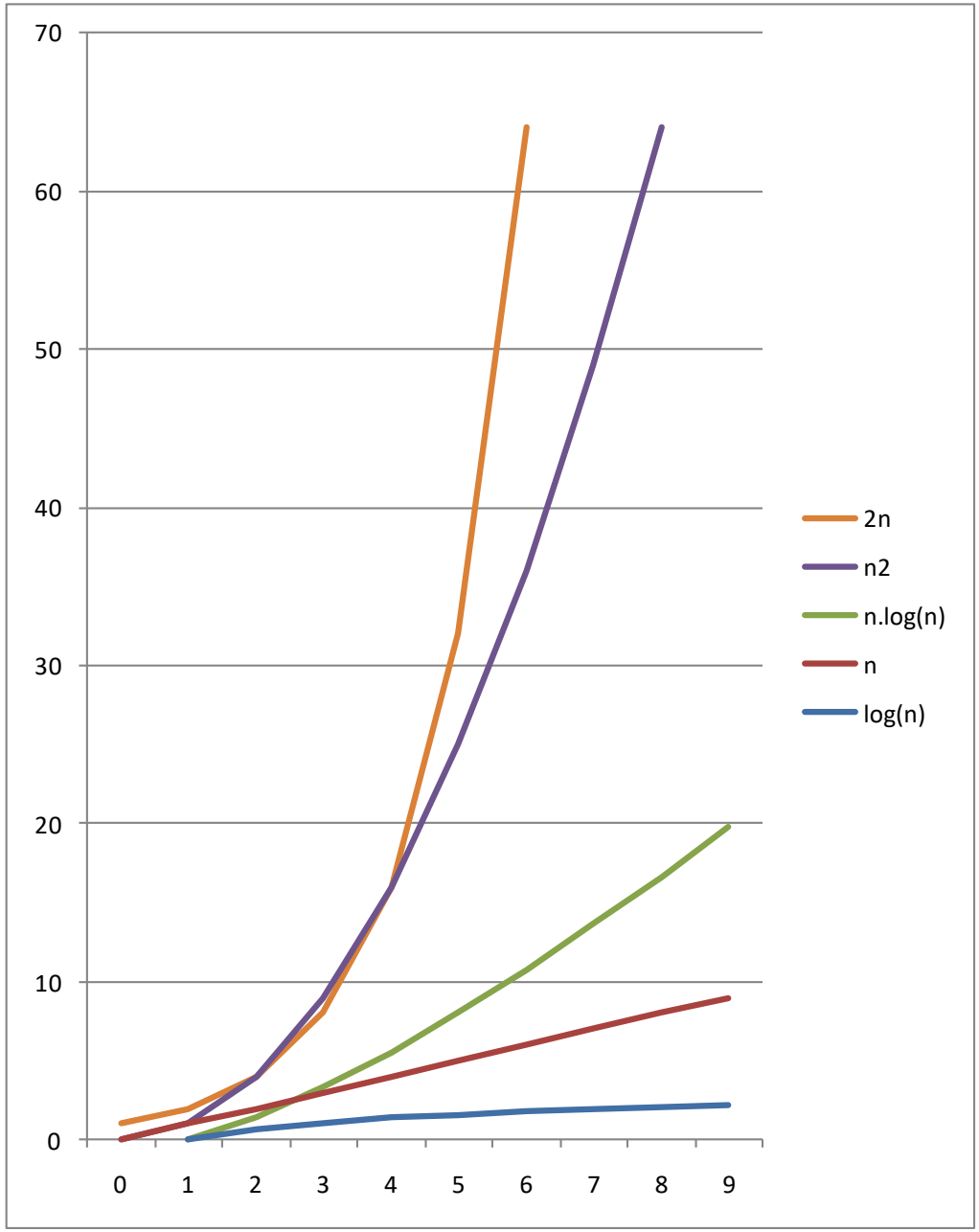
```
float soma (float valores[], int n)
{
  int i;
  float somatemp = 0;
  for (i=0; i < n; i++)
    somatemp += valores[i];
  return somatemp;
}
```

```
/* contando tempo */
#include <time.h>
double tempo;
float soma (float valores[], int n)
{
  int i;
  float somatemp = 0;
  clock_t tinicio = clock();
  for (i=0; i < n; i++)
  {
    somatemp += valores[i];
  }
  tempo=((double)clock()-tinicio)/CLOCK_PER_SEC;
  return somatemp;
}
```

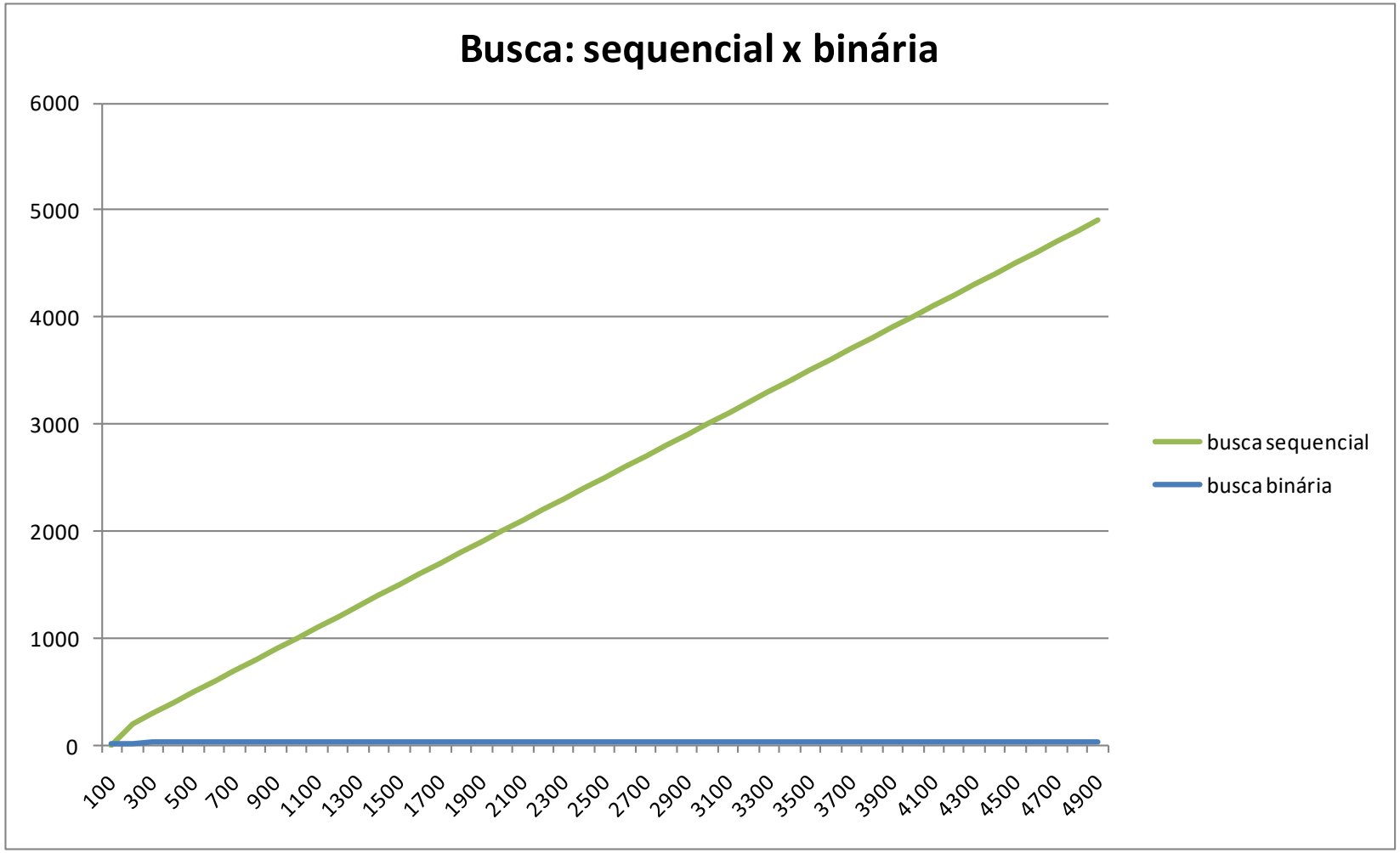
```
/* contando número de passos,
   considerando apenas atribuição
   e retorno de valores */

int count = 0;

float soma (float valores[], int n)
{
  int i;
  float somatemp = 0;
  count++; /* atribuição somatemp */
  for (i=0; i < n; i++)
  {
    count++;  /* incremento for */
              /* atrib somatemp */
    somatemp += valores[i];
  }
  count++;    /* último incr. for */
              /* return */
  return somatemp;
}
```

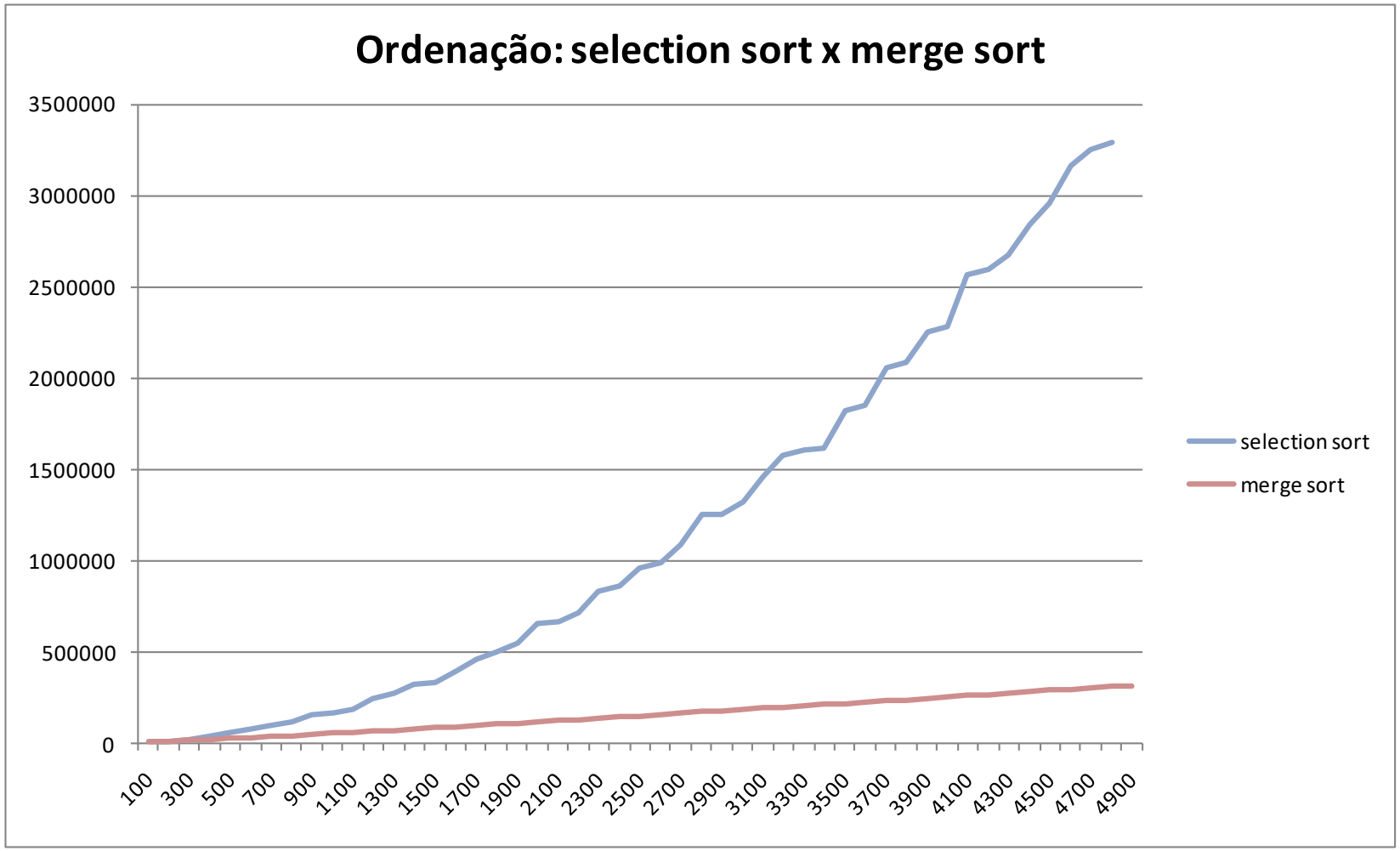
n	*log2(n)*	*n*	*n*log2(n)*	*nˆ2*	*2ˆn*
10	0,00	0 seg	0 seg	0.1 seg	1 seg
100	0,01	0 seg	1 seg	10 seg	milenios
1.000	0,01	1 seg	10 seg	16 min	
10.000	0,01	10 seg	2 min	27 h	
100.000	0,02	2 min	28 min	115 dias	
1.000.000	0,02	17 min	6 h	31 anos	
10.000.000	0,02	3 h	65 h	3 170 anos	

Complexidade...



log(n)	n	n.log(n)	n^2	2^n
0	1	0	1	2
0,69	2	1,39	4	4
1,10	3	3,30	9	8
1,39	4	5,55	16	16
1,61	5	8,05	25	32
1,79	6	10,75	36	64
1,95	7	13,62	49	128
2,08	8	16,64	64	256
2,20	9	19,78	81	512
2,30	10	23,03	100	1024
2,40	11	26,38	121	2048
2,48	12	29,82	144	4096
2,56	13	33,34	169	8192
2,64	14	36,95	196	16384
2,71	15	40,62	225	32768
2,77	16	44,36	256	65536
2,83	17	48,16	289	131072
2,89	18	52,03	324	262144
2,94	19	55,94	361	524288
3,00	20	59,91	400	1048576
3,04	21	63,93	441	2097152
3,09	22	68,00	484	4194304
3,14	23	72,12	529	8388608
3,18	24	76,27	576	16777216
3,22	25	80,47	625	33554432
3,26	26	84,71	676	67108864
3,30	27	88,99	729	1,34E+08
3,33	28	93,30	784	2,68E+08
3,37	29	97,65	841	5,37E+08
3,40	30	102,04	900	1,07E+09
3,43	31	106,45	961	2,15E+09
3,47	32	110,90	1024	4,29E+09
3,50	33	115,38	1089	8,59E+09
3,53	34	119,90	1156	1,72E+10
3,56	35	124,44	1225	3,44E+10
3,58	36	129,01	1296	6,87E+10
3,61	37	133,60	1369	1,37E+11
3,64	38	138,23	1444	2,75E+11
3,66	39	142,88	1521	5,5E+11
3,69	40	147,56	1600	1,1E+12
3,71	41	152,26	1681	2,2E+12
3,74	42	156,98	1764	4,4E+12
3,76	43	161,73	1849	8,8E+12
3,78	44	166,50	1936	1,76E+13
3,81	45	171,30	2025	3,52E+13
3,83	46	176,12	2116	7,04E+13
3,85	47	180,96	2209	1,41E+14
3,87	48	185,82	2304	2,81E+14
3,89	49	190,70	2401	5,63E+14
3,91	50	195,60	2500	1,13E+15


Busca: sequencial x binária
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
100
300
500
700
900
1100
1300
1500
1700
1900
2100
2300
2500
2700
2900
3100
3300
3500
3700
3900
4100
4300
4500
4700
4900
busca sequencial
busca binária


Ordenação: selection sort x merge sort
3500000
3000000
2500000
2000000
1500000
1000000
500000
0
100
300
500
700
900
1100
1300
1500
1700
1900
2100
2300
2500
2700
2900
3100
3300
3500
3700
3900
4100
4300
4500
4700
4900
selection sort
merge sort

Complexidade de algoritmos

Melhor Caso (Ω - ômega)

- o menor tempo de execução para uma entrada de tamanho *n*
- pouco usado, por ter aplicação em poucos casos

Exemplo:

- problema: encontrar um elemento em uma lista de *n* números
- a complexidade no melhor caso:
  - assume-se que o número estaria logo na topo da lista
  - **f(n) = Ω(1)**

Complexidade de algoritmos

Pior Caso (O - ômicron)

- maior tempo de execução sobre entradas de tamanho *n*
- mais fácil de se obter

Exemplo:

- problema: encontrar um elemento em uma lista de *n* números
- complexidade no pior caso
  - assume-se que o número estaria, no pior caso, no final da lista
  - **O(n)**

Complexidade de algoritmos

Caso Médio (θ - theta)

- Média dos tempos de execução de todas as entradas de tamanho *n*, ou baseado em probabilidade de determinada condição ocorrer
- Mais difícil de se determinar

Exemplo (cont.):

- complexidade média é P(1) + P(2) + ... + P(n)

  onde Pi = i/n, com 1 ≤ i ≤ n

  P(1) + P(2) + ... + P(n) = 1/n + 2/n + ... + 1 =

$$\frac{1}{n}(1+2+\ldots+n) = \frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$f(n) = \theta\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Exemplo

Considere o número de operações de cada um dos dois algoritmos que resolvem o mesmo problema:

Algoritmo 1: $f_1(n) = 2n^2 + 5n$ operações

Algoritmo 2: $f_2(n) = 50n + 4000$ operações

Dependendo do valor de n, o Algoritmo 1 pode requerer mais ou menos operações que o Algoritmo 2

n = 10
$f_1(10) = 2(10)^2 + 5*10 = 250$
$f_2(10) = 50*10 + 4000 = 4500$

n = 100
$f_1(100) = 2(100)^2 + 5*100 = 20500$
$f_2(100) = 50*100 + 4000 = 9000$

Comportamento assintótico

Comportamento assintótico:

- Quando n tem valor muito grande ($n \to \infty$)
- Termos inferiores e as constantes multiplicativas contribuem pouco na comparação e podem ser descartados

Exemplo:

- Algoritmo 1: $f_1(n) = 2n^2 + 5n$ operações
- Algoritmo 2: $f_2(n) = 500n + 4000$ operações
- $f_1(n)$ cresce com n^2
- $f_2(n)$ cresce com n
- crescimento quadrático é pior que um crescimento linear
- Algoritmo 2 é melhor do que o Algoritmo 1

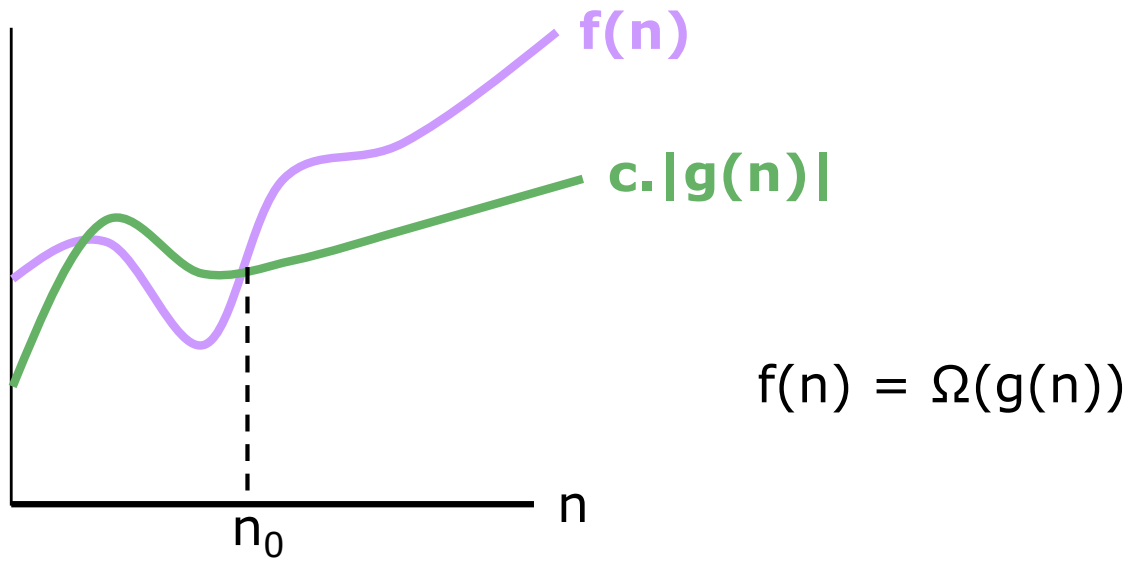
A notação Ω

Definição: Sejam *f* e *g* duas funções de domínio X.

Dizemos que a função f é *Ω(g(n))* sse

$(\exists c \in \Re^+)(\exists n_0 \in X)(\forall n \geq n_0)(c.|g(n)| \leq |f(n)|)$

A notação **Ω** dá um **limite inferior** assintótico.



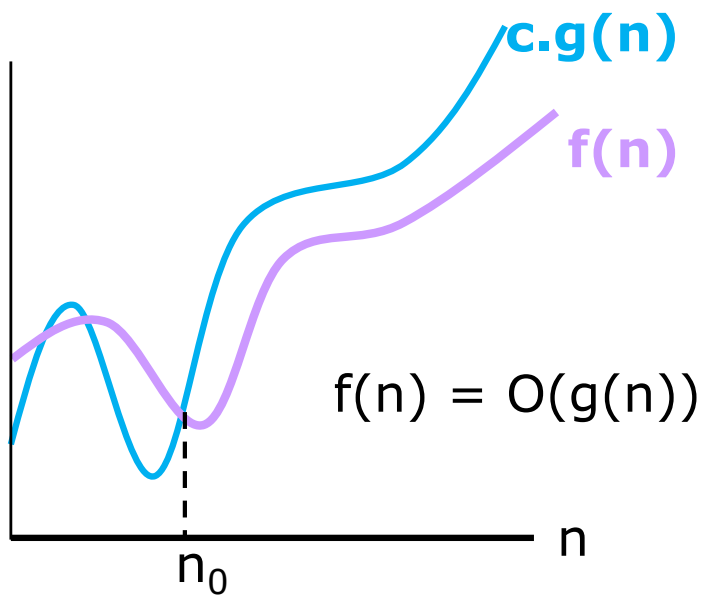
A notação O

Definição: Sejam f e g duas funções de domínio X.

Dizemos que a função f é *O(g(n))* sse

$(\exists c \in \Re^+)(\exists\ n_0 \in X)(\forall\ n \geq n_0)(|f(n)| \leq c.|g(n)|)$

A notação **O** nos dá um **limite superior** assintótico



Exemplos:

$3n + 2 = O(n)$, pois
$3n + 2 \leq 4n$ para todo $n \geq 2$

$1000n^2 + 100n - 6 = O(n^2)$, pois
$1000n^2 + 100n - 6 \leq 1001n^2$ para $n \geq 100$

$f(n) = a_m n^m + ... + a_1 n + a_0 \Rightarrow f(n) = O(n^m)$

A notação Φ

Definição: Sejam f e g duas funções de domínio X.

Dizemos que a função f é $\Phi(g(n))$ sse

$(\exists c_1, c_2 \in \Re^+)(\exists n_0 \in X)(\forall\ n \geq n_0)(c_1.|g(n)| \leq |f(n)| \leq c_2.|g(n)|)$

f(n) é $\Phi(g(n))$ sse existirem

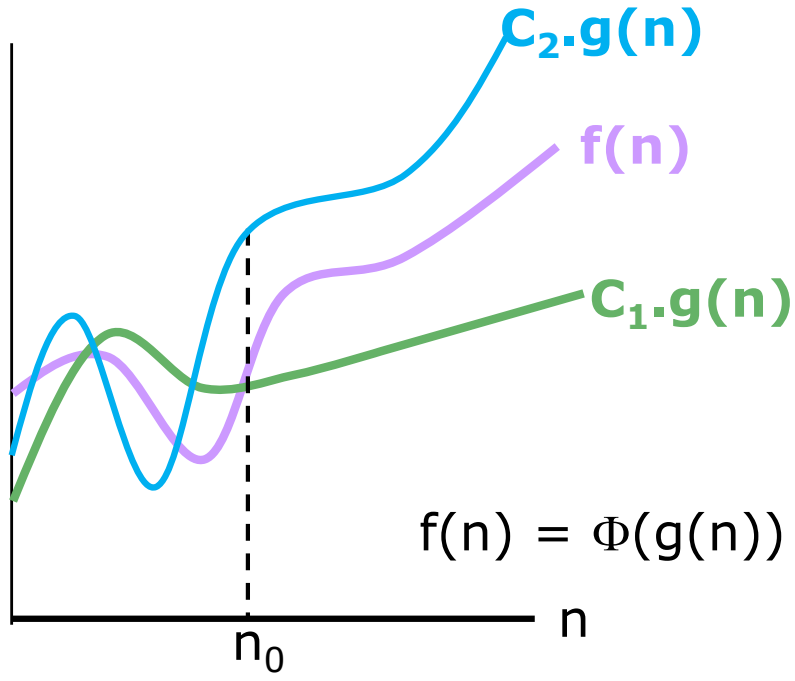
duas constantes positivas c_1, c_2

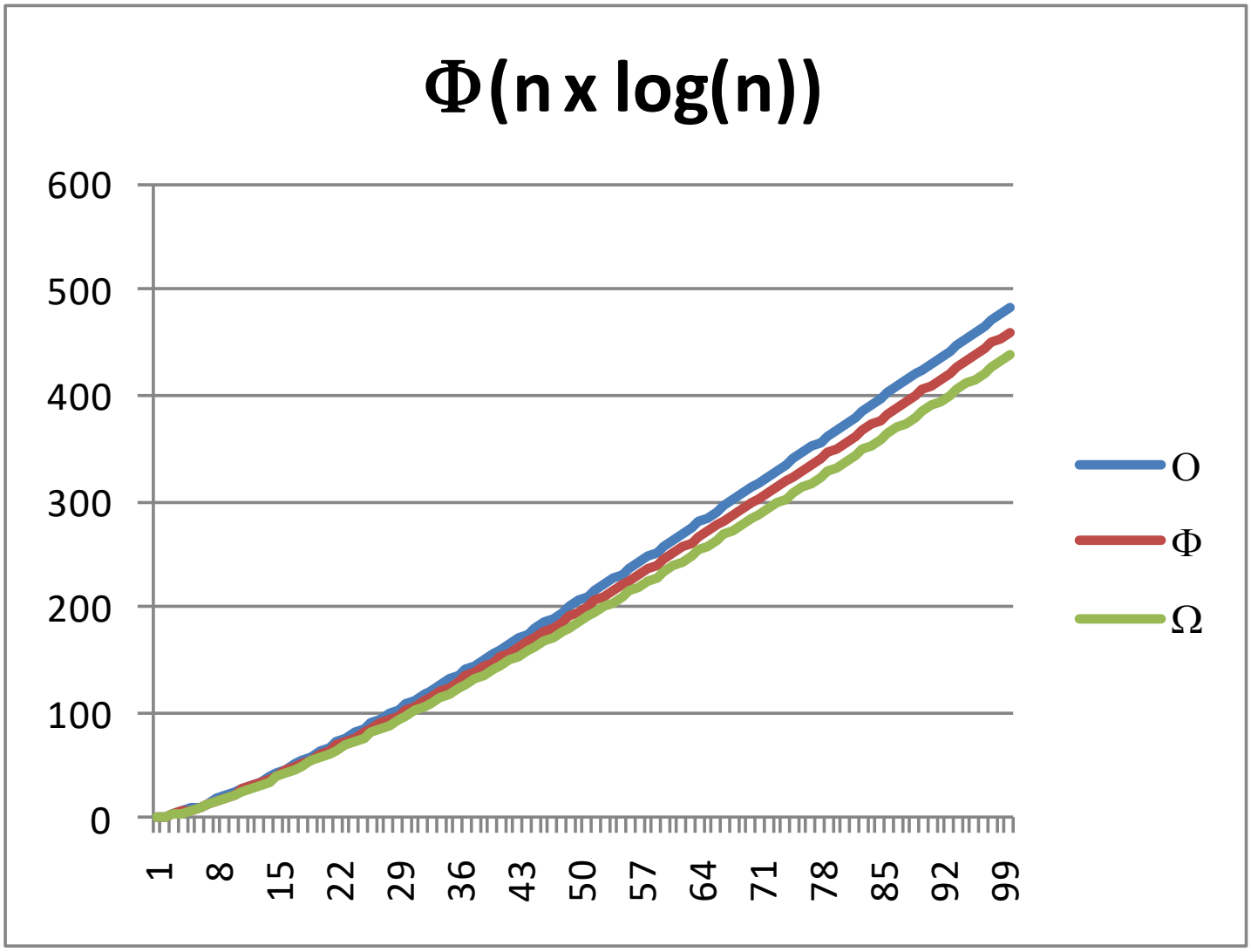
de tal modo que é possível

limitar a função |f(n)|

por $c_1|g(n)|$ e $c_2|g(n)|$

para n suficientemente grande




Φ(n x log(n))
600
500
400
300
200
100
0
1
8
15
22
29
36
43
50
57
64
71
78
85
92
99
O
Φ
Ω

Busca sequencial

```
int buscaSequencial(char vetor[], int n, char dado)
{
    int i;
    for (i=0; i<n; i++){
        if ( vet[i] == dado )
            return i;
    }
    return -1;
}
```

Busca sequencial
Análise do melhor caso (Ω)

Quando acontece o melhor caso?

- Quando o dado procurado está na **primeira posição** do vetor.
- O algoritmo realizará apenas uma comparação, ou seja, f(n) = 1

Complexidade no melhor caso: $\Omega(1)$

Busca sequencial
Análise do pior caso (O)

Quando acontece o pior caso?

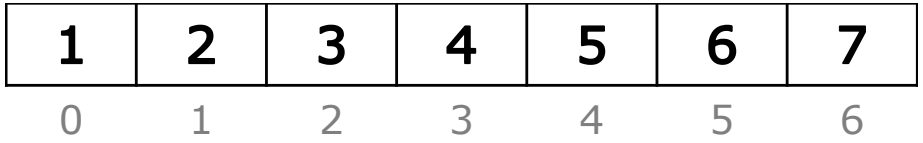
- Quando o dado procurado está na **última** posição do vetor ou **o dado não está no vetor**
- Dado um vetor de tamanho n temos que f(n) = n

Complexidade no pior caso: O(n)

Busca binária (vetor ordenado)

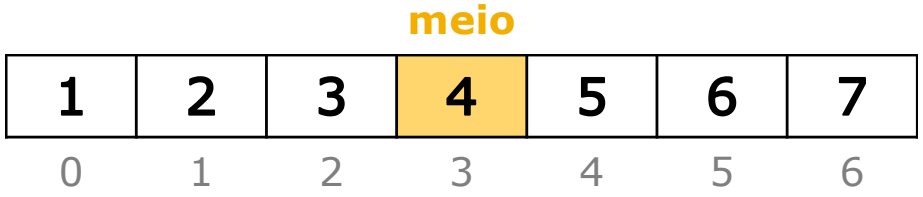
```
int buscaBinaria( char vetor[], char dado, int inicio, int fim)
{
    int meio = (inicio + fim)/2;

    if ( vetor[meio] == dado )  return (meio);

    if ( inicio >= fim )  return -1;

    if ( dado < vetor[meio] )
        return buscaBinaria (vetor, dado, inicio, meio-1);
    else
        return buscaBinaria (vetor, dado, meio+1, fim);
}
```

Busca binária



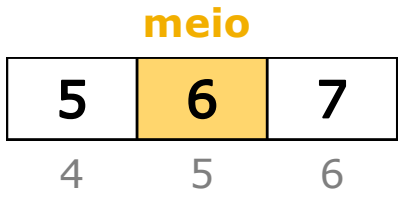
O dado a ser procurado é o '7'.

inic = 0
fim = 6
meio = 0 + 6 / 2 = 3



BuscaBinaria (vet, dado, meio+1, fim);

inic = 4
fim = 6
meio = 4 + 6 / 2 = 5



BuscaBinaria (vet, dado, meio+1, fim);

inic = 6
fim = 6
meio = 6 + 6 / 2 = 6

Busca binária
Análise do melhor caso (Ω)

Quando acontece o melhor caso?

- Quando o elemento procurado está **no meio do vetor** (já na primeira chamada)
- Nesse caso, será executada apenas uma comparação, e a posição já será retornada

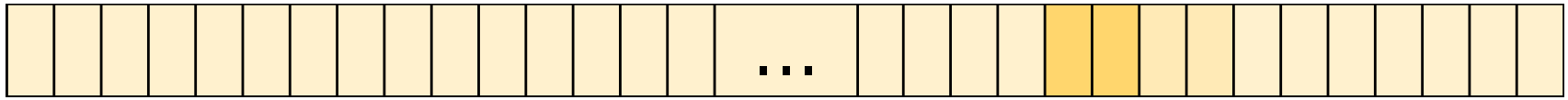
Busca binária
Análise do melhor caso (Ω)

```
int BuscaBinaria( char vet[], char dado, int inic, int fim){
int meio = (inic + fim)/2;
    if( vet[meio] == dado )
        return(meio);
    if (inic >= fim)
        return(-1);
    if (dado < vet[meio])
        BuscaBinaria (vet, dado, inic, meio-1);
    else
        BuscaBinaria (vet, dado, meio+1, fim);
}
```

- Algoritmo tem um comportamento constante: f(n) = 1
- Logo, o algoritmo é Ω(1)

Busca binária
Análise do pior caso (O)

O pior caso acontece quando o elemento procurado não está no vetor



n elementos

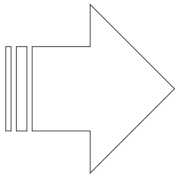
1° iteração: n elementos

2° iteração: n/2 elementos

3° iteração: n/4 elementos

4° iteração: n/8 elementos

5° iteração: n/16 elementos



K-ésima iteração: $n/(2^{k-1})$ elementos

Busca binária
Análise do pior caso (O)

As chamadas param quando:

- a posição do elemento é encontrada ou
- quando não há mais elementos a serem procurados, isto é, quando n < 1.

Para qual valor de k, tem-se n < 1?

$$\frac{n}{2^{k-1}} = 1 \Rightarrow n = 2^{k-1} \Rightarrow \log_2 n = \log_2 2^{k-1} \Rightarrow \log_2 n = (k-1)\log_2 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 n = k-1 \Rightarrow k = 1 + \log_2 n$$

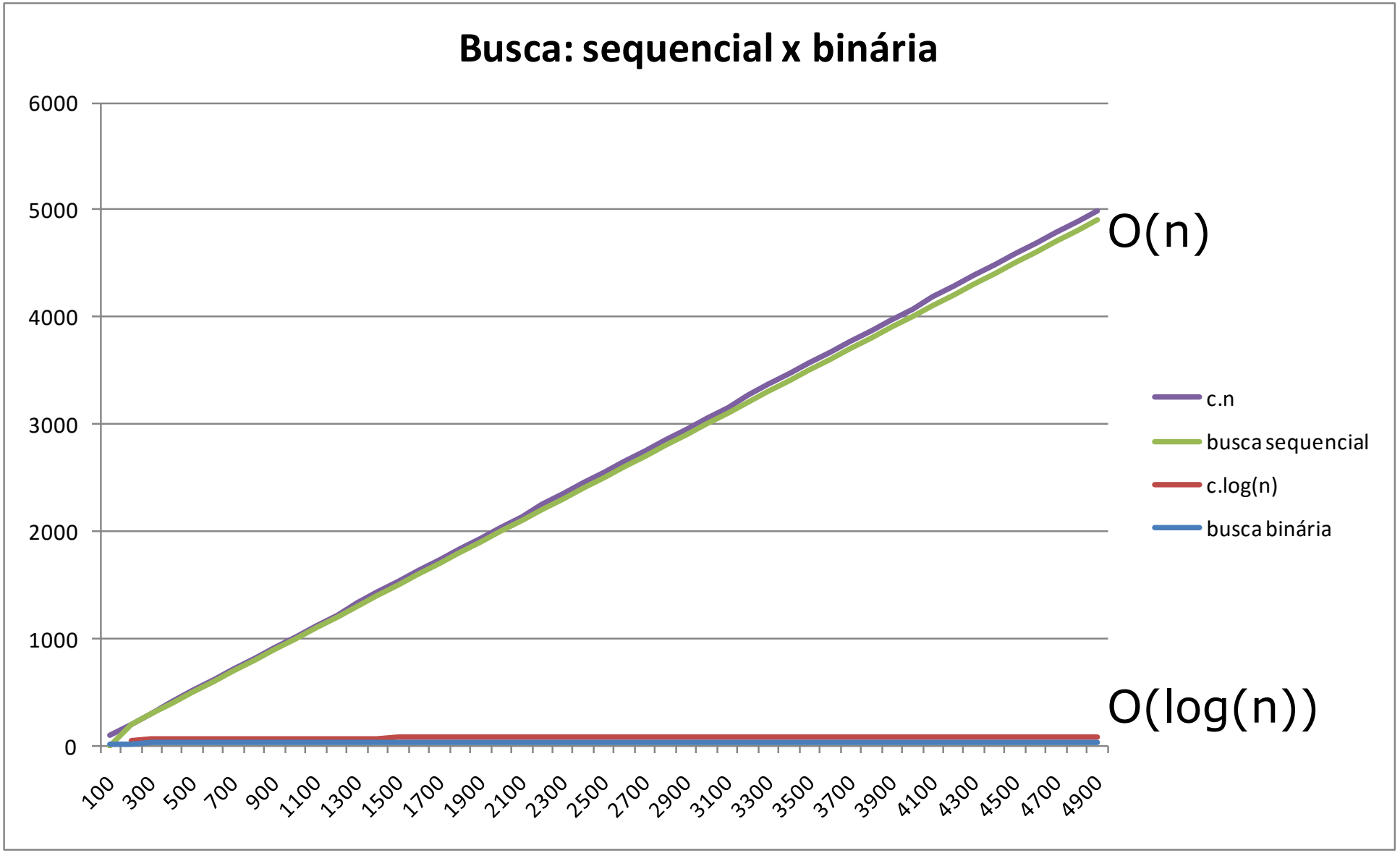
- Há ainda um elemento no vetor quando k = $\log_2 n$
- O algoritmo pára quando k > 1+ $\log_2 n$

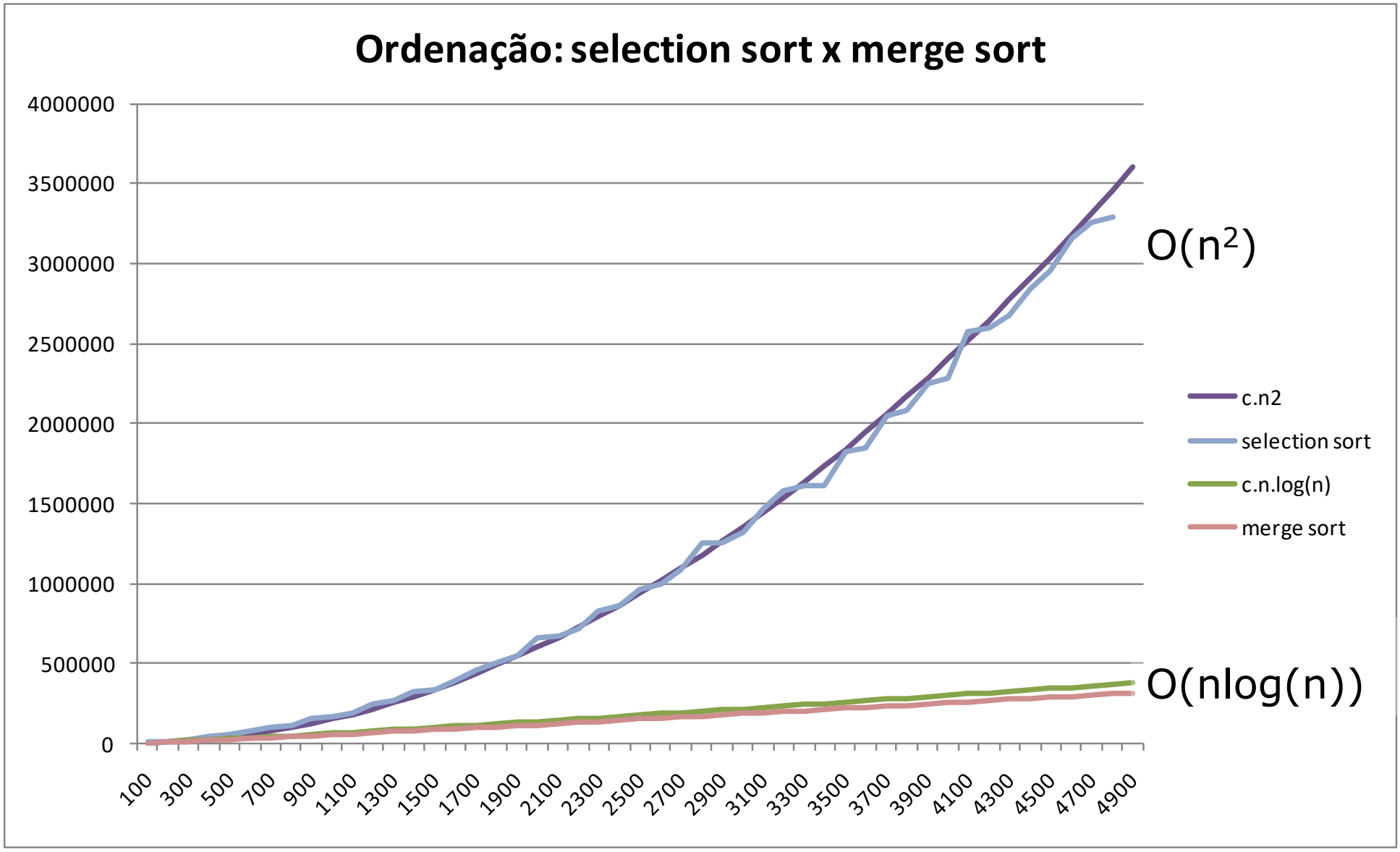
Busca binária
Análise de pior caso (O)

Pior caso: $1 + \log_2 n$ passos

Mas, $1 + \log_2 n < c(\log_2 n)$, para algum $c > 0$.

Complexidade no algoritmo no pior caso: **$O(\log_2 n)$**


Busca: sequencial x binária
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
100
300
500
700
900
1100
1300
1500
1700
1900
2100
2300
2500
2700
2900
3100
3300
3500
3700
3900
4100
4300
4500
4700
4900
O(n)
O(log(n))
c.n
busca sequencial
c.log(n)
busca binária


Ordenação: selection sort x merge sort
4000000
3500000
3000000
2500000
2000000
1500000
1000000
500000
0
100
300
500
700
900
1100
1300
1500
1700
1900
2100
2300
2500
2700
2900
3100
3300
3500
3700
3900
4100
4300
4500
4700
4900
O(n²)
O(nlog(n))
c.n2
selection sort
c.n.log(n)
merge sort

Complexidades comumente encontradas

Notação	Nome	Característica	Exemplo
O(1)	constante	independe do tamanho n da entrada	determinar se um número é par ou ímpar; usar uma tabela de dispersão (hash) de tamanho fixo
O(log n)	logarítmica	o problema é dividido em problemas menores	**busca binária**
O(n)	linear	realiza uma operação para cada elemento de entrada	**busca sequencial**; soma de elementos de um vetor
O(n log n)	log-linear	o problema é dividido em problemas menores e depois junta as soluções	heapsort, quicksort, **merge sort**
$O(n^2)$	quadrática	itens processados aos pares (geralmente loop aninhado)	bubble sort (pior caso); quick sort (pior caso); **selection sort**; insertion sort
$O(n^3)$	cúbica		multiplicação de matrizes n x n; todas as triplas de n elementos
$O(n^c)$, c>1	polinomial		caixeiro viajante por programação dinâmica
$O(c^n)$	exponencial	força bruta	todos subconjuntos de n elementos
O(n!)	fatorial	força bruta: testa todas as permutações possíveis	caixeiro viajante por força bruta

Em geral: $O(1) < O(\log n) < O(n) < O(n \log n) < O(n2) < O(n3) < O(c^n) < O(n!)$

Soma de vetores – Passos de execução

comando	passo	frequência	subtotal
`float soma(float v[], int n)`	0	0	0
`{`	0	0	0
`  int i;`	0	0	0
`  float somatemp = 0;`	1	0	1
`  for (i=0; i < n; i++)`	1	n+1	n+1
`    somatemp += vet[i];`	1	n	n
`  return somatemp;`	1	1	1
`}`	0	0	0
Total			**2n+3**

O(n)

Soma de matrizes – Passos de execução

comando	passo	frequência	subtotal
`float soma(int a[][N], ..., int rows, int cols)`	0	0	0
`{`	0	0	0
`  int i, j;`	0	0	0
`  for (i=0; i < rows; i++)`	1	rows+1	rows+1
`    for (j=0; j < cols; j++)`	1	rows × (cols+1)	rows × (cols+1)
`      c[i][j] = a[i][j]+b[i][j];`	1	rows × cols	rows × cols
`}`	0	0	0
Total			**2rows × cols + 2rows + 1**

$O(n^2)$

Soma de matrizes – complexidade

comando	complexidade assintótica
`float soma(int a[][N], ..., int rows, int cols)`	0
`{`	0
`  int i, j;`	0
`  for (i=0; i < rows; i++)`	$\Phi(rows)$
`    for (j=0; j < cols; j++)`	$\Phi(rows \times cols)$
`      c[i][j] = a[i][j]+b[i][j];`	$\Phi(rows \times cols)$
`}`	0
Total	**$\Phi(rows \times cols)$**

$O(n^2)$

Multiplicação de matrizes – complexidade

comando	complexidade assintótica
`float multi(double *a, double *b, double *c, int n)`	0
`{`	0
`  int i, j, k;`	0
`  for (i=0; i < n; i++)`	n
`    for (j=0; j < n; j++)`	n x n
`    {`	0
`      c[i][j] = 0`	n x n
`      for (k=0; k < n; k++)`	0
`        c[i][j] += a[i][l] * b[l][j];`	n x n x n
`    }`	0
`}`	0
Total	**Φ(rows $\times$ cols)**

$O(n^3)$

Cota Superior (Upper Bound)

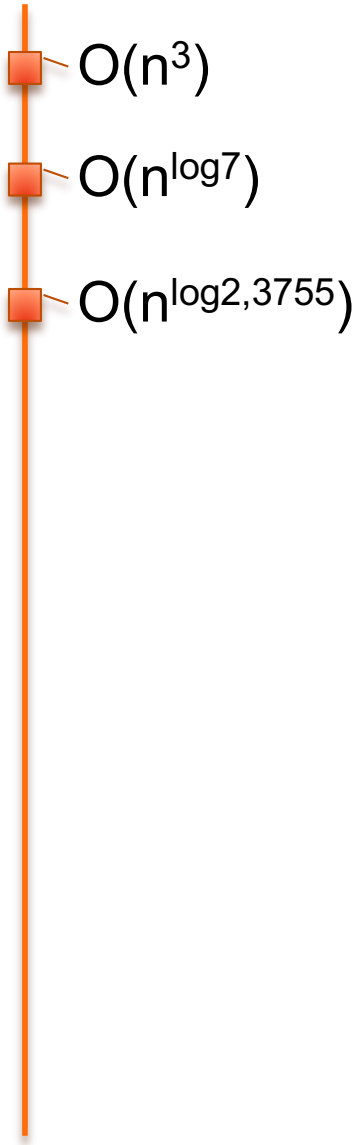
Cota superior de um problema

- Definida pelo algoritmo mais eficiente para resolver este problema
- A complexidade de um problema não pode ser maior que a do melhor algoritmo conhecido
- Conforme novos (e mais eficientes) algoritmos vão surgindo, esta cota vai diminuindo

Cota Superior: Multiplicação de Matrizes

Multiplicação de matrizes quadradas:

- Algoritmo tradicional
  - Complexidade $O(n^3)$.
  - Cota superior é no máximo $O(n^3)$
- Algoritmo de Strassen (1969)
  - Complexidade $O(n^{log7})$
  - Leva a cota superior para $O(n^{log7})$
- Algoritmo de Coppersmith-Winograd (1990)
  - Complexidade $O(n^{2,3755})$



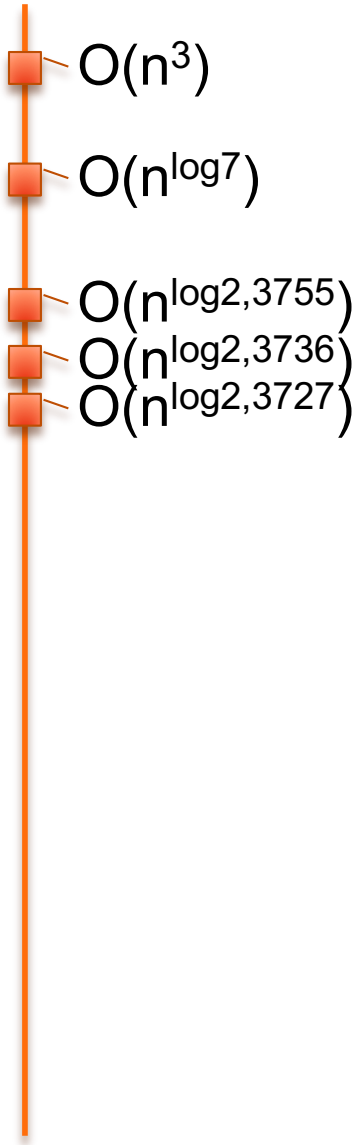
Cota Superior: Multiplicação de Matrizes

Multiplicação de matrizes quadradas:

- Andrew Stothers (2010)
  - melhorou o algoritmo de Coppersmith-Winograd, chegando a $O(n^{2,3736})$
- Virginia Williams (2011)
  - melhorou ainda mais o algoritmo, chegando a $O(n^{2,3727})$
  - define a cota superior conhecida atualmente

Todos esses algoritmos

- só se aplicam a matrizes muito grandes
- dependendo do caso, as matrizes podem nem ser processadas pelos computadores atuais



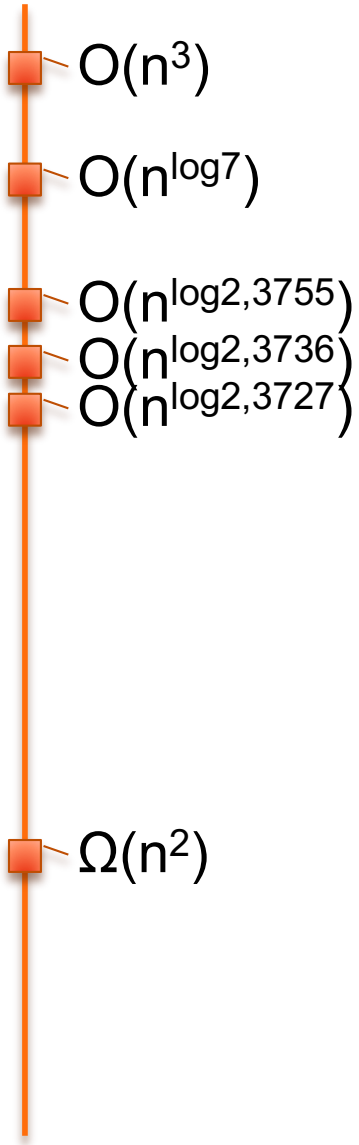
Cota Inferior (lower bound)

Cota inferior de um problema:

- Número mínimo de operações para resolver um problema, independente do algoritmo a usar
- Ou seja, qualquer algoritmo irá precisar de, no mínimo, um certo número de operações

Exemplo: multiplicação de matrizes

- apenas para ler e escrever uma matriz são necessárias n^2 operações
- Assim, a cota inferior seria $\Omega(n^2)$



Assintoticamente Ótimos

Algoritmos assintoticamente ótimos

- complexidade igual a cota inferior

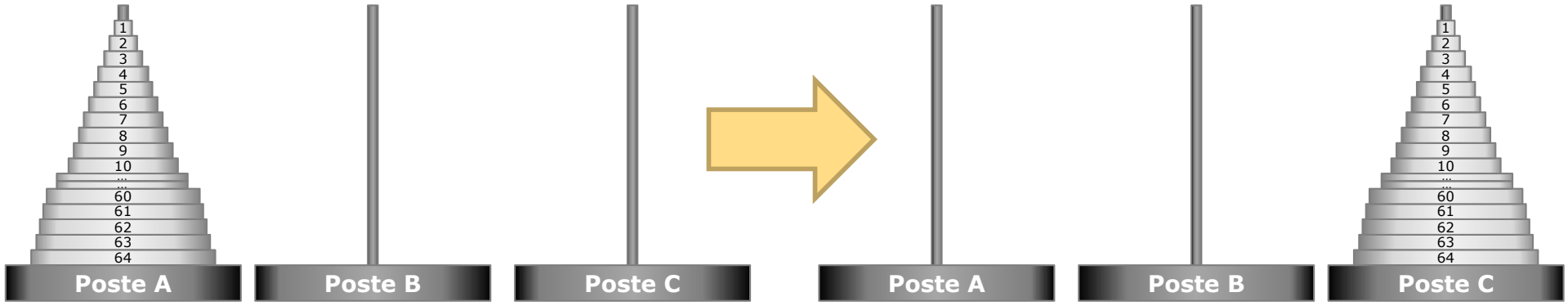
Exemplo: multiplicação de matrizes

- nenhum algoritmo assintoticamente ótimo é conhecido atualmente

Exemplo: Torres de Hanói

Diz a lenda que um monge muito preocupado com o fim do Universo perguntou ao seu mestre quando isto iria ocorrer.

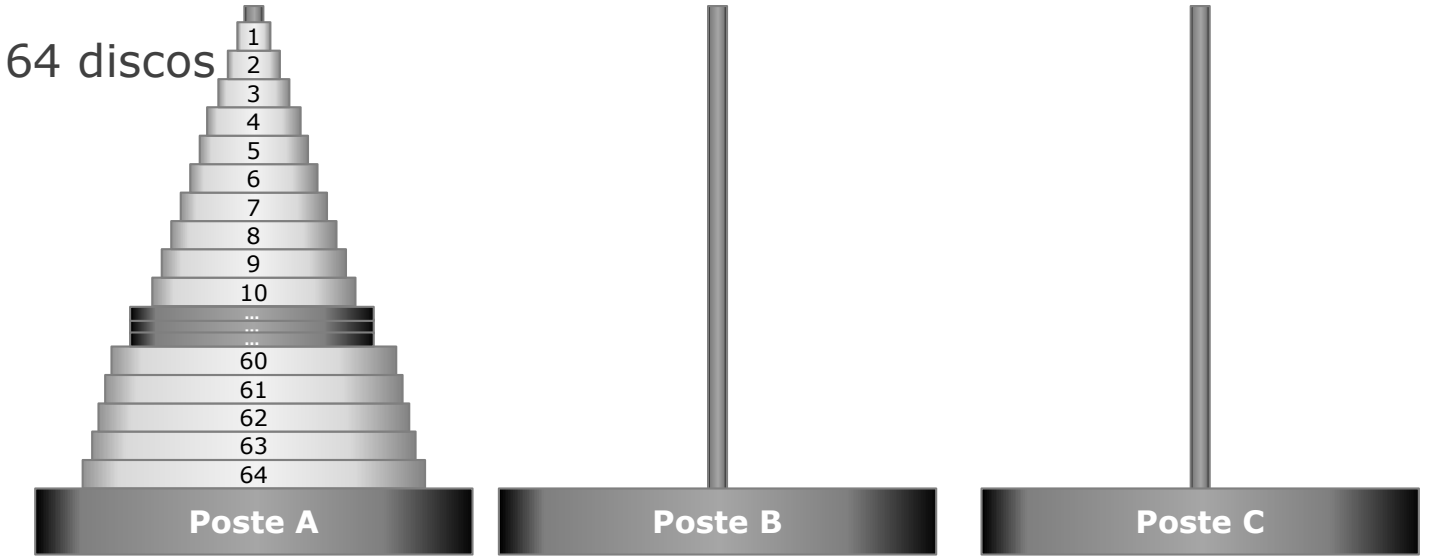
O mestre, vendo a aflição do discípulo, pediu a ele que olhasse para os três postes do monastério e observasse os 64 discos de tamanhos diferentes empilhados no primeiro deles. Disse que se o discípulo quisesse saber o tempo que levaria para o Universo acabar, bastava que ele calculasse o tempo que levaria para ele mover todos os discos do Poste A para o Poste C seguindo uma regra simples: ele nunca poderia colocar um disco maior sobre um menor e os discos teriam que repousar sempre num dos postes.



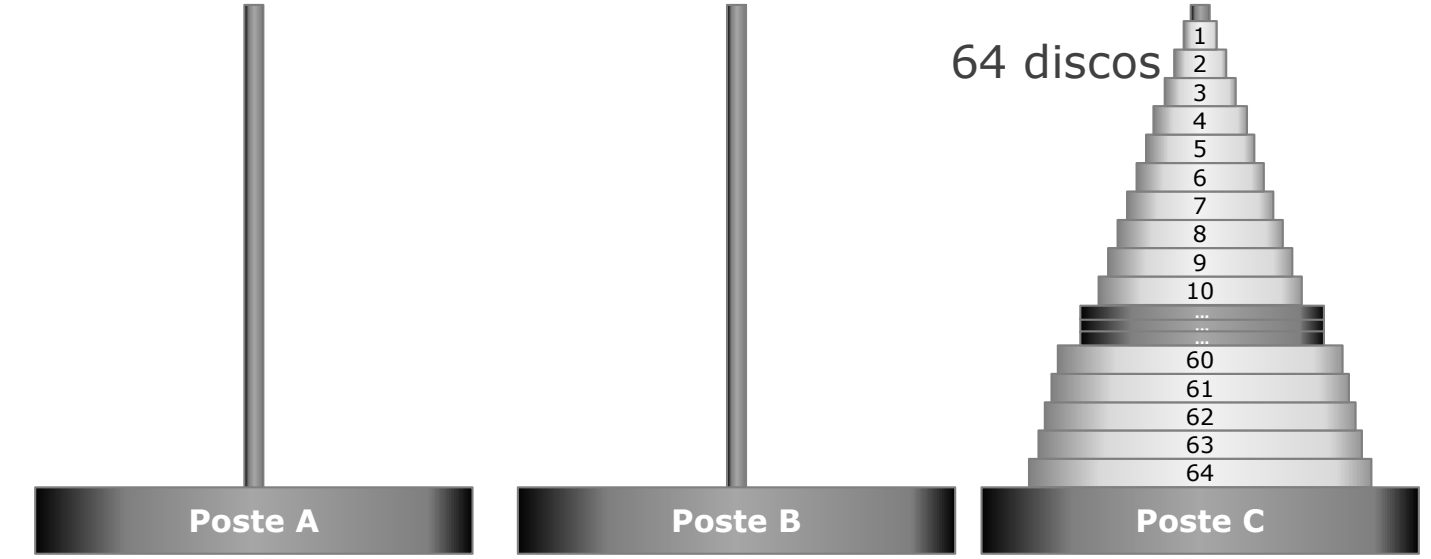
Em quanto tempo você estima que o mestre disse que o Universo vai acabar?

Torres de Hanói

inicial



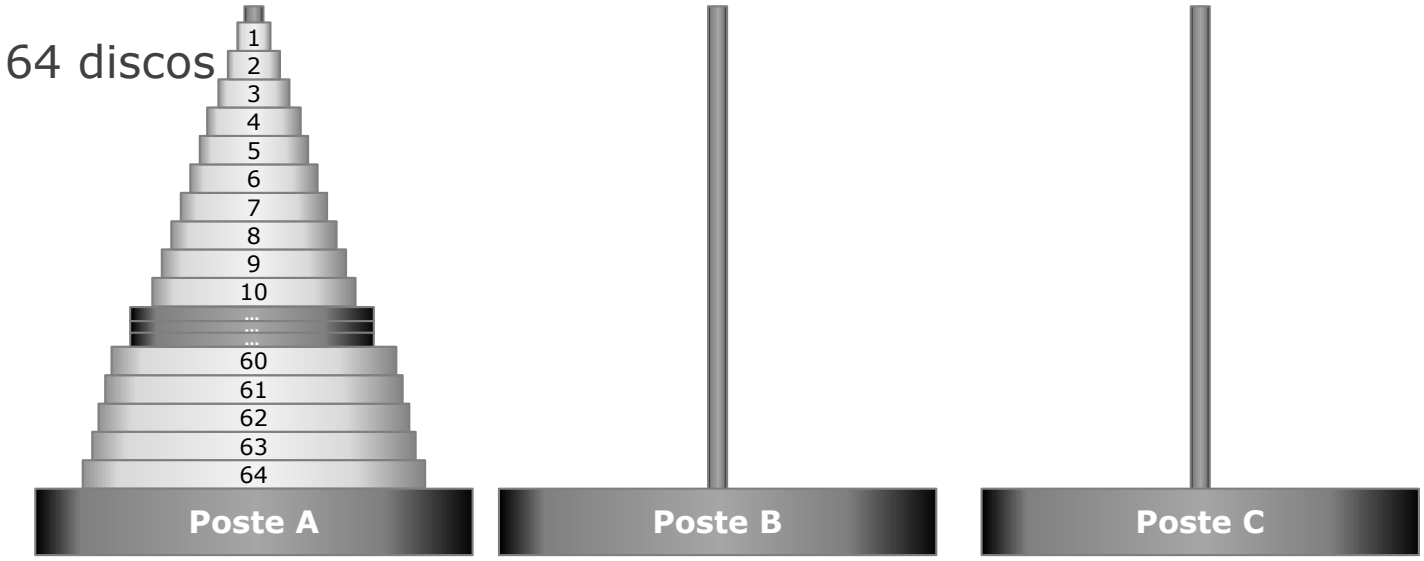
final



Torres de Hanói – Algoritmo recursivo

Suponha que haja uma solução para mover n-1 discos.

A partir dela, crie uma solução para n discos.



Torres de Hanói – Algoritmo recursivo

Passo 1

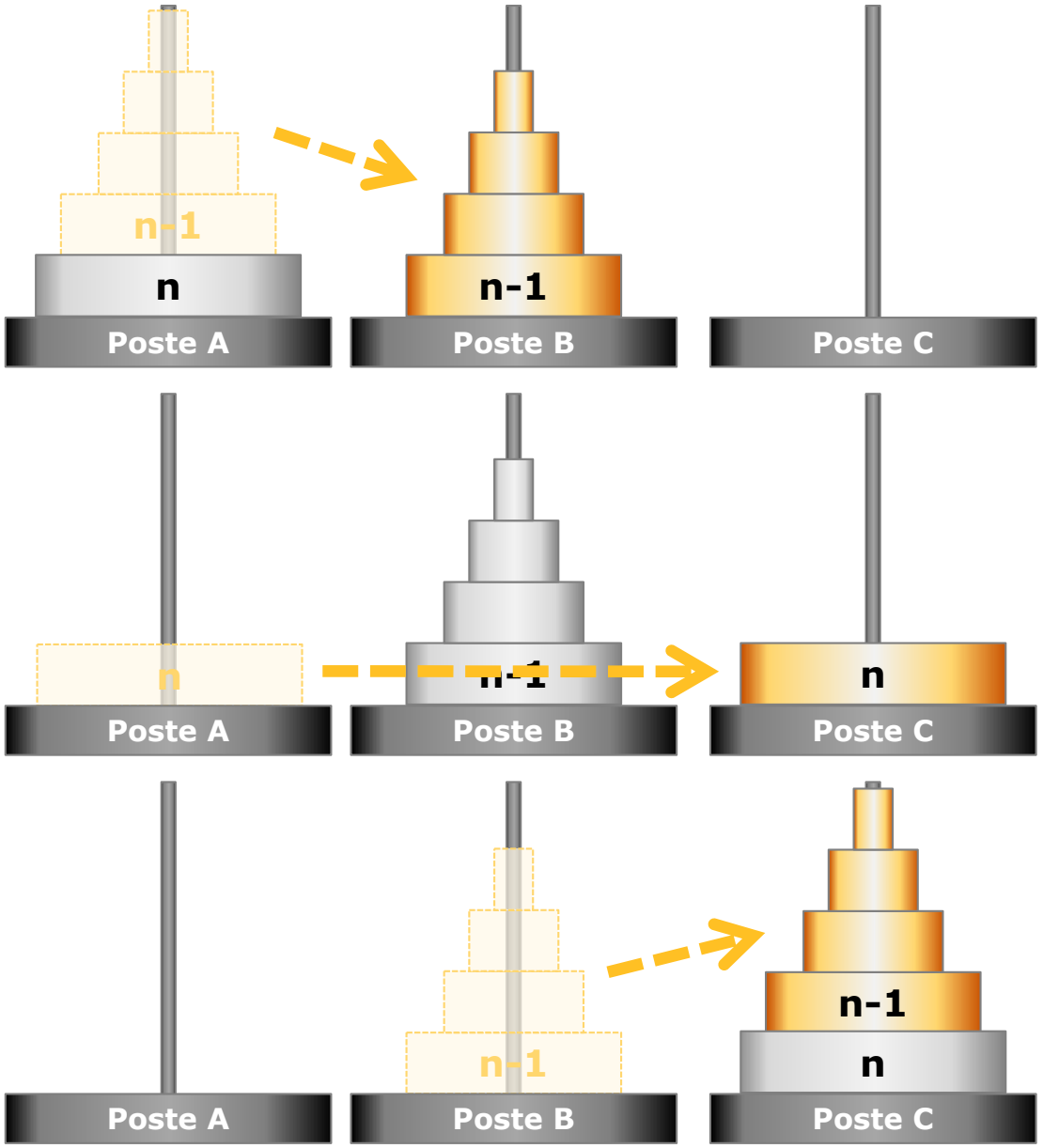
Mova n-1 discos do
poste A para o poste B
(hipótese da recursão)

Passo 2

Mova o n-ésimo disco de
A para C

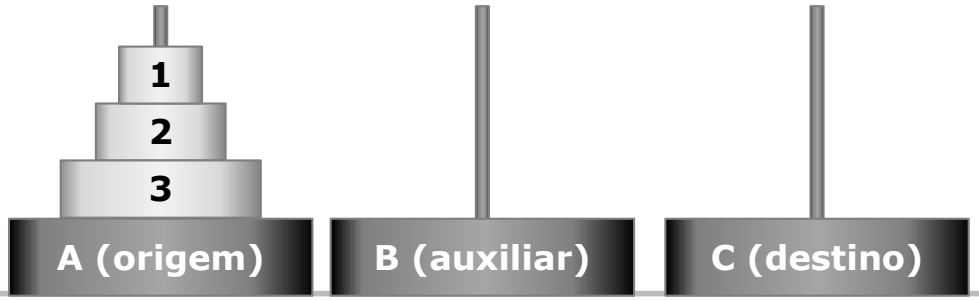
Passo 3

Mova n-1 discos
de B para C
(hipótese da recursão)



Torres de Hanoi – Implementação

```
#include <stdio.h>

void torres(int n, char origem, char destino, char auxiliar)
{
  if (n == 1) {
    printf("Mova o Disco 1 do Poste %c para o Poste %c\n", origem, destino);
    return;
  }
  else {
    torres(n-1, origem, auxiliar, destino);
    printf("Mova o Disco %d do Poste %c para o Poste %c\n", n, origem, destino);
    torres(n-1, auxiliar, destino, origem);
  }
}

int main( void )
{
  torres(3, 'A', 'C', 'B');
  return 0;
}
```



Execução para 3 discos:

Mova o disco 1 do Poste A para o Poste C

Mova o disco 2 do Poste A para o Poste B

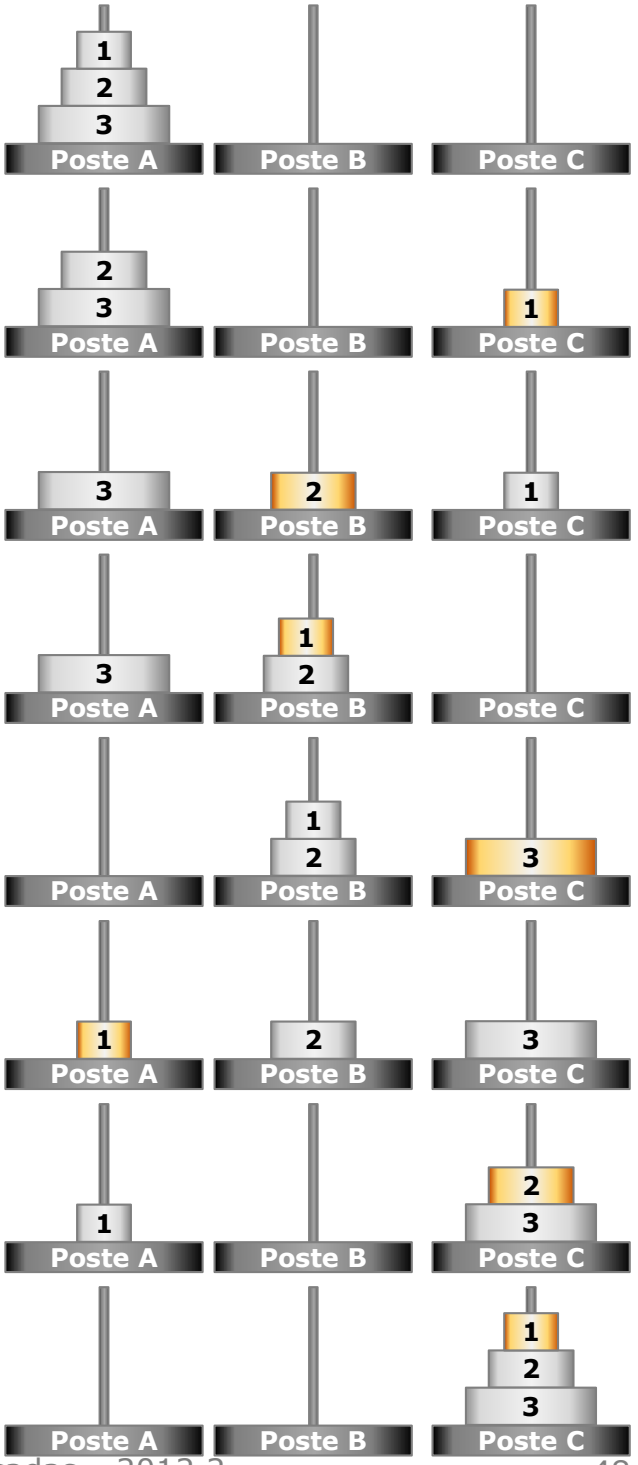
Mova o disco 1 do Poste C para o Poste B

Mova o disco 3 do Poste A para o Poste C

Mova o disco 1 do Poste B para o Poste A

Mova o disco 2 do Poste B para o Poste C

Mova o disco 1 do Poste A para o Poste C



Torres de Hanoi – Análise da complexidade

Seja t_n o tempo necessário para mover n discos

$t_n = 1 + 2t_{n-1}$ (a constante 1 pode ser ignorada)

$t_n \approx 2t_{n-1} = \underbrace{2(2(2(2(2\ldots(2t_1)))))}_{n-1}$

$t_n \approx \mathbf{2^{n-1}}t_1$ (exponencial)

Para 64 discos: $t_{64} \approx 2^{63}t_1 = 9.2 \times 10^{18}t_1$

Supondo que o tempo para mover um disco seja t_1 = 1 s, o monge levaria **292.277.265 milênios** para terminar a tarefa!

n	2^{n-1}
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	32
7	64
8	128
9	256
10	512
11	1024
12	2048
13	4096

Importância da complexidade de um algoritmo

	10	20	100
n	0.00001s	0.00002s	0.0001s
n log(n)	0.00003s	0.00009s	0.0007s
n^2	0.0001s	0.0004s	0.01s
2^n	**0.001s**	**1s**	**40 000 séculos**

intratáveis!