

Rodrigo Bird Burgos

**Avaliação de Cargas Críticas e Comportamento Pós-
Crítico Inicial de Pórticos Planos**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio.

Orientadores: Raul Rosas e Silva
Luiz Fernando Campos Ramos Martha

Rio de Janeiro, fevereiro de 2005



Rodrigo Bird Burgos

**Avaliação de Cargas Críticas e Comportamento Pós-
Crítico Inicial de Pórticos Planos**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Raul Rosas e Silva

Orientador

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Prof. Luiz Fernando Campos Ramos Martha

Co-orientador

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Prof. Paulo Batista Gonçalves

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Prof. Luiz Eloy Vaz

Coppe/UFRJ

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador(a) Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 23 de fevereiro de 2005

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Rodrigo Bird Burgos

Graduou-se em Engenharia Civil pela PUC-Rio, em dezembro de 2002, com ênfase em Estruturas e Geotecnia. Recebeu bolsa da ANP (Agência Nacional do Petróleo) entre 2000 e 2002 pelo Programa Interdepartamental de Petróleo e Gás.

Ficha Catalográfica

Burgos, Rodrigo Bird

Avaliação de cargas críticas e comportamento pós-crítico inicial de pórticos planos / Rodrigo Bird Burgos ; orientadores: Raul Rosas e Silva, Luiz Fernando Campos Ramos Martha. – Rio de Janeiro : PUC, Departamento de Engenharia Civil, 2005.

v., 120 f. : IL. ; 29,7 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil.

Incluí referências bibliográficas.

1. Engenharia Civil – Teses. 2. Estabilidade estrutural. 3. Cargas críticas. 4. Pórticos. 5. Flambagem. 6. Elementos finitos. I. Silva, Raul Rosas e. II. Martha, Luiz Fernando Campos Ramos. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. IV. Título.

CDD: 624

À minha esposa, Juliana.
À minha mãe, Maria Nélide.
À memória de meu pai, Rodolfo Cesar Burgos.

Agradecimentos

Ao professor Raul Rosas e Silva pela amizade, dedicação, paciência e ensinamentos, desde os tempos de graduação.

Ao professor Luiz Fernando Martha pela motivação e ajuda.

Aos professores integrantes da banca examinadora.

À secretária Ana Roxo, pela inesgotável paciência, e aos demais integrantes do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio.

À minha esposa, Juliana, pelo amor, pela companhia, pela paciência e ajuda principalmente no período em que tive de me dedicar exclusivamente ao término da dissertação.

Aos meus pais, Rodolfo e Maria Nélida, pelo incentivo, amor e dedicação infinita.

Aos meus sogros, Itamar e Teresa, pela ajuda e carinho.

Ao CNPQ pelo auxílio financeiro.

Resumo

Burgos, Rodrigo Bird; Silva, Raul Rosas; Martha, Luiz Fernando. **Avaliação de Cargas Críticas e Comportamento Pós-Crítico Inicial de Pórticos Planos.** Rio de Janeiro, 2005. 120p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Nesta dissertação estuda-se a flambagem e o comportamento pós-crítico inicial de pórticos planos através da formulação de elementos finitos com graus de liberdade adicionais para posterior implementação no programa de análise FTOOL. Realizaram-se análises linearizadas para a determinação das cargas críticas clássicas e modos de flambagem de colunas com diferentes condições de contorno. Em um segundo momento, realizaram-se testes numéricos no sentido de prever a estabilidade do caminho pós-crítico (sensibilidade a imperfeições) de algumas estruturas cujos resultados analíticos são conhecidos. Finalmente, criaram-se alguns exemplos no FTOOL para comprovar a sua eficácia na obtenção de cargas críticas e avaliação do comportamento pós-crítico inicial de pórticos planos. Utilizou-se o pórtico de Roorda como exemplo para a detecção da sensibilidade a imperfeições, devido à sua simplicidade e ao conhecimento dos seus resultados analíticos.

Palavras-chave

estabilidade estrutural, cargas críticas, pórticos, bifurcação, flambagem, elementos finitos

Abstract

Burgos, Rodrigo Bird; Silva, Raul Rosas (Advisor); Martha, Luiz Fernando (Co-advisor). **Evaluation of Critical Loads and Initial Post-Buckling Behavior of Portal Frames**. Rio de Janeiro, 2005. 120p. MSc Dissertation – Departamento de Engenharia Civil, Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The buckling and post-buckling behavior of portal frames are studied by the formulation of finite elements with additional degrees of freedom in order to implement a new routine for obtaining critical loads in FTOOL, a structural analysis educational interactive system. Linearized analyses were performed in order to obtain critical loads and buckling modes for columns with different boundary conditions. Later, numerical tests were done in order to predict the stability of the post-critical path (sensitivity to imperfections) of some structures which analytical results are known. Finally, some examples were modeled in FTOOL to verify its accuracy in obtaining critical loads of portal frames. Roorda's frame was used as an example for the detection of the sensitivity to imperfections, based on its simplicity and knowledge of its analytical results.

Keywords

structural stability, critical loads, portal frames, bifurcation, buckling, finite elements method

Sumário

1 INTRODUÇÃO	15
1.1. Motivação e objetivos	15
1.2. Organização da tese	18
1.3. Representação do ponto decimal	19
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	20
2.1. Estabilidade de Estruturas	20
2.1.1. Critérios de Estabilidade Estrutural	21
2.1.2. Formas de Instabilidade	24
2.1.3. Métodos Aproximados para a Obtenção de Cargas Críticas	28
2.1.4. Análise Matricial	34
2.1.5. Sensibilidade a Imperfeições	35
2.2. Método dos Elementos Finitos	35
2.2.1. O Elemento de Pórtico Plano	39
2.2.2. Matrizes de Rigidez Elástica e Geométrica	42
2.2.3. Obtenção do Problema de Autovalor	46
2.2.4. Análise Dinâmica	48
2.2.5. Formulação Hierárquica no MEF	51
3 ELEMENTOS COM GRAUS DE LIBERDADE ADICIONAIS	54
3.1. Elemento BSB2	55
3.1.1. Função de forma do grau de liberdade adicional	55
3.1.2. Matrizes de Rigidez, de Massa e Geométrica	56
3.1.3. Matriz de Rotação	58
3.2. Elemento BSB3	59
3.2.1. Funções de Forma dos Graus de Liberdade Adicionais	60
4 ESTUDO DOS PONTOS DE BIFURCAÇÃO	63

5 TESTES NUMÉRICOS EM COLUNAS	66
5.1. Cálculo de Cargas Críticas	66
5.1.1. Coluna Engastada e Livre	67
5.1.2. Coluna Bi-apoiada	69
5.1.3. Coluna Bi-engastada	71
5.1.4. Coluna Engastada e Apoiada	73
5.1.5. Coluna com Engaste e Apoio Deslizante	75
5.1.6. Coluna com Apoios Simples e Deslizante	77
5.2. Avaliação do Tipo de Bifurcação	79
5.2.1. Bifurcação Simétrica Estável	81
5.2.2. Bifurcação Simétrica Instável	84
5.2.3. Bifurcação Assimétrica	86
6 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	90
6.1. Modificações introduzidas no FRAMOOOP	91
6.2. Modificações Introduzidas no FTOOL	93
7 TESTES NUMÉRICOS EM PÓRTICOS	96
7.1. Quadros Planos – Obtenção de Cargas Críticas	96
7.2. Pórtico de Roorda – Comportamento Pós-Crítico Inicial	101
8 CONCLUSÕES	108
8.1. Comentários sobre este Trabalho	108
8.2. Sugestões para Trabalhos Futuros	109
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	111
APÊNDICE A - EXEMPLO DE IMPLEMENTAÇÃO NO MATHCAD	114

Lista de símbolos

Romanos

A – área da seção transversal

C – constante arbitrária

\mathbf{d} – vetor dos deslocamentos da estrutura

d_i – graus de liberdade do elemento

dx – deslocamento na direção x

dy – deslocamento na direção y

E – módulo de elasticidade

\mathbf{f} – vetor de forças da estrutura

I – momento de inércia da seção reta

k – rigidez da mola

\mathbf{K}_E – matriz de rigidez elástica da estrutura

\mathbf{K}_G – matriz geométrica da estrutura

\mathbf{k}_E – matriz de rigidez elástica do elemento

\mathbf{k}_G – matriz geométrica do elemento

L – comprimento do elemento

m – massa de uma partícula

\mathbf{m} – matriz de massa do elemento

\mathbf{M} – matriz de massa da estrutura

N_i – funções de forma

n – número de funções adicionais

P – força axial

P_{cr} – carregamento crítico

P_{imp} – carregamento crítico para a estrutura imperfeita

q_i – coordenadas generalizadas

$Q(x)$ – função de carregamento transversal

\mathbf{q}_b – vetor dos deslocamentos estáticos

r_z – rotação segundo o eixo z

U – energia interna de deformação
 \mathbf{u} – vetor dos deslocamentos axiais
 V – energia potencial das cargas externas
 \mathbf{v} – vetor dos deslocamentos transversais e rotações

Gregos

Π – energia potencial total
 $\Delta\Pi$ – variação da energia potencial total
 δ – parâmetro de deslocamento
 δ_0 – imperfeição inicial
 λ – parâmetro de carga
 λ_{cr} – fator de carga crítico
 λ_{imp} – fator de carga crítico para a estrutura imperfeita
 σ – tensão axial
 ε – deformação axial
 Δ – deslocamento
 κ – curvatura
 ω – frequência de vibração
 ρ – massa por unidade de volume
 α – ângulo que o elemento faz com o eixo x
 λ_R – carga crítica de Rankine
 λ_C – carga crítica clássica
 λ_P – carga de colapso elasto-plástico
 ξ – multiplicador escalar do autovetor normalizado

Lista de tabelas

Tabela 5.1 – Resultados para a coluna engastada e livre	67
Tabela 5.2 – Resultados para a coluna bi-apoiada	69
Tabela 5.3 – Resultados para a coluna bi-engastada	71
Tabela 5.4 – Resultados para a coluna engastada e apoiada	73
Tabela 5.5 – Resultados para a coluna com engaste e apoio deslizante	75
Tabela 5.6 – Resultados para a coluna com apoios simples e deslizante	77
Tabela 7.1 – Cargas críticas de quadros planos	98
Tabela 7.2 – Resultados para o quadro plano testado no FTOOL	99
Tabela 7.3 – Quadrados das frequências de vibração para o exemplo	99
Tabela 7.4 – Deslocamentos correspondentes ao primeiro modo de flambagem do pórtico de Roorda	102
Tabela 7.5 – Deslocamentos estáticos do pórtico de Roorda submetido ao carregamento crítico	103
Tabela 7.6 – Deslocamentos para o primeiro modo crítico do pórtico de Roorda com carregamento alternativo	105
Tabela 7.7 – Deslocamentos estáticos do pórtico de Roorda submetido ao carregamento crítico alternativo	106

Lista de figuras

Figura 2.1 – Posições de equilíbrio estático	21
Figura 2.2 – Pontos críticos	25
Figura 2.3 – Bifurcação simétrica estável	26
Figura 2.4 – Bifurcação simétrica instável	27
Figura 2.5 – Bifurcação assimétrica	27
Figura 2.6 – Região linear da curva tensão x deformação	29
Figura 2.7 – Deformações na flambagem	30
Figura 2.8 – Exemplo de discretização	36
Figura 2.9 – Elemento de viga	39
Figura 2.10 – Funções de forma do elemento de viga	40
Figura 2.11 – Elemento de treliça	41
Figura 2.12 – Funções de forma do elemento de treliça	41
Figura 2.13 – Elemento de pórtico plano	41
Figura 3.1 – Elemento BSB2	55
Figura 3.2 – Função de forma do grau de liberdade adicional	56
Figura 3.3 – Elemento BSB3	59
Figura 3.4 – Função de forma do grau de liberdade d_7	60
Figura 3.5 – Função de forma do grau de liberdade d_8	61
Figura 3.6 – Funções de forma adicionais para o elemento BSB3-H	62
Figura 4.1 – Formas linearizadas de bifurcação	64
Figura 5.1 – Coluna engastada e livre	67
Figura 5.2 – Deslocamentos da coluna engastada e livre	68
Figura 5.3 – Coluna bi-apoiada	69
Figura 5.4 – Deslocamentos para a coluna bi-apoiada	70
Figura 5.5 – Coluna bi-engastada	71
Figura 5.6 – Deslocamentos para a coluna bi-engastada	72
Figura 5.7 – Coluna engastada e apoiada	73
Figura 5.8 – Deslocamentos para a coluna engastada e apoiada	74
Figura 5.9 – Coluna engastada e com apoio deslizante	75

Figura 5.10 – Deslocamentos para a coluna engastada e com apoio deslizante	76
Figura 5.11 – Coluna com apoios simples e deslizante	77
Figura 5.12 – Deslocamentos para a coluna com apoios simples e deslizante	78
Figura 5.13 – Caminhos de equilíbrio da coluna de Euler com imperfeição inicial	80
Figura 5.14 – Modelo de coluna com bifurcação simétrica estável	81
Figura 5.15 – Deslocamentos para a coluna com bifurcação estável	82
Figura 5.16 – Caminho pós-crítico linearizado para o exemplo 5.2.1	83
Figura 5.17 – Coluna com bifurcação simétrica instável	84
Figura 5.18 – Deslocamentos da coluna com bifurcação simétrica instável	85
Figura 5.19 – Caminho pós-crítico linearizado para o exemplo 5.2.2	86
Figura 5.20 – Coluna com bifurcação assimétrica	87
Figura 5.21 – Deslocamentos da coluna com bifurcação assimétrica	88
Figura 5.22 – Caminho pós-crítico linearizado para o exemplo 5.2.3	89
Figura 6.1 – Etapas de processamento no FTOOL	90
Figura 6.2 – Discretização de uma barra de pórtico	92
Figura 6.3 – Interface gráfica do FTOOL (em detalhe as modificações introduzidas)	94
Figura 7.1 – Modos de flambagem de quadros planos	97
Figura 7.2 – Quadro plano testado no FTOOL	98
Figura 7.3 – Relação entre o carregamento axial e o quadrado da primeira frequência de vibração	100
Figura 7.4 – Pórtico de Roorda	101
Figura 7.5 – Primeiro modo de flambagem do pórtico de Roorda	102
Figura 7.6 – Caminho pós-crítico linearizado para o pórtico de Roorda	104
Figura 7.7 – Pórtico de Roorda com carregamento alternativo	104
Figura 7.8 – Modo de flambagem para o pórtico de Roorda com carregamento alternativo	105
Figura 7.9 – Caminho pós-crítico linearizado para o pórtico de Roorda submetido ao carregamento alternativo	107

1 INTRODUÇÃO

1.1. Motivação e objetivos

A estabilidade estrutural é um objeto de estudo desde o século XVIII, quando Euler (1744) obteve para uma coluna bi-apoiada sob a ação de uma carga concentrada de compressão aplicada em seu topo, sem a consideração do peso próprio, a carga crítica de flambagem. Desde então, diversos tipos de estruturas com diferentes condições de contorno e carregamento têm sido estudadas, no intuito de avaliar a sua estabilidade, através da determinação das cargas críticas de flambagem e do caminho pós-crítico de equilíbrio, que são de grande importância no desenvolvimento de um projeto estrutural.

Com o surgimento do Método dos Elementos Finitos (MEF), o estudo da estabilidade estrutural deixou de ser restrito a colunas com condições de contorno bem estabelecidas, passando a ser possível a realização de uma análise em estruturas mais complexas.

Neste trabalho utiliza-se a chamada linearização clássica do problema de estabilidade, em que as cargas de flambagem são obtidas através de uma análise de autovalor. Partindo da hipótese de que as deflexões e rotações que antecedem a perda de estabilidade podem ser desprezadas, toma-se como base a configuração indeformada da estrutura para a formulação das equações de equilíbrio.

Uma estrutura pode ter um comportamento não-linear, ainda que constituída de um material que obedeça à lei de Hooke. Para valores relativamente grandes de deslocamentos, a deflexão lateral de um membro pode trazer como consequência o aparecimento de momentos fletores adicionais (denominados de segunda ordem) em virtude da presença de um esforço normal. A esse tipo de comportamento dá-se o nome de não-linearidade geométrica. Nesses casos, torna-se necessário o uso

da configuração deformada da estrutura para a formulação das equações de equilíbrio, o que foge ao escopo desta dissertação.

No caso da análise de estruturas reticuladas pelo MEF, é desaconselhável o uso de um elemento de pórtico padrão por barra para a obtenção de cargas de flambagem pela solução do problema de autovalor, devido ao fato de as funções de forma desse elemento não levarem em conta a existência de uma força axial de compressão. Esta questão pode ser solucionada com a subdivisão de uma barra de pórtico em vários elementos para aumentar o grau de precisão do MEF. Outra solução possível para este problema é o uso de uma análise não-linear completa, que tem a desvantagem de ser muito exigente do ponto de vista computacional, além de envolver muitas tomadas de decisões, como os valores de incremento de carga ou de deslocamento, embora seja mais realista.

O programa FTOOL (Martha, 1999) foi desenvolvido para o ensino de conceitos de análise estrutural. Uma de suas principais vantagens é o uso de uma interface gráfica amigável, que permite ao usuário, de forma simples e intuitiva, manipular eficientemente os dados de entrada do modelo estrutural (pré-processamento). A partir da definição da estrutura, o programa executa uma análise linear, baseada no Método da Rigidez Direta (Martha, 1993), e apresenta os resultados de uma forma gráfica explícita (pós-processamento).

Sendo o FTOOL um programa com objetivos acadêmicos, utilizado como auxílio em disciplinas de graduação para que os alunos se familiarizem com a análise de estruturas, não seria apropriado exigir que os graduandos tivessem conhecimento do Método dos Elementos Finitos, a fim de dividir uma barra em vários elementos, ou conhecessem as possibilidades de uma análise não-linear de estruturas.

Um problema apresentava-se então: como obter uma boa aproximação da carga crítica de quadros modelados por elementos de pórtico plano com apenas um elemento por barra utilizando uma análise linear? Uma barra bi-engastada, por exemplo, por não ter nenhum grau de liberdade livre, apresentaria uma carga

crítica absurdamente grande, devido à falsa rigidez concedida à estrutura nessa modelagem.

A solução encontrada foi utilizar graus de liberdade adicionais, no interior dos elementos, cujas funções de forma fossem formuladas de tal maneira que não alterassem os deslocamentos nodais. Esses graus de liberdade existem apenas para o cálculo da carga crítica e das frequências de vibração, não aparecendo na estrutura de dados da análise estática linear. Como não há força associada (os graus de liberdade adicionais não pertencem a um nó do elemento), não há necessidade de se modificar a estrutura de dados de nós e carregamentos dos elementos finitos. Como os graus de liberdade extras pertencem a apenas uma barra, não há contribuição de mais de um elemento num mesmo ponto da matriz de rigidez global, fazendo com que o espalhamento das matrizes locais na matriz global seja executado sem a necessidade de se utilizar a matriz de rotação para esses graus de liberdade.

Foram testados vários modelos, com um e dois graus de liberdade adicionais, cujas funções de interpolação foram obtidas tanto pela formulação nodal convencional como a hierárquica. Foram implementadas para os graus de liberdade adicionais funções na forma de polinômios de quinto grau e funções trigonométricas (Lages, 1992).

Todos os testes para os novos elementos foram feitos no programa Mathcad para seis tipos de colunas: bi-apoiada, engastada e livre, engastada e apoiada, bi-engastada, com engaste e apoio deslizante e com apoio simples numa extremidade e deslizante na outra. Após bem sucedidos os testes no Mathcad, procedeu-se à implementação no programa de análise FRAMOOOP, que é utilizado como uma biblioteca do FTOOL. Foram feitos novamente testes numéricos para a verificação dos exemplos e só então foram introduzidas modificações na interface gráfica do FTOOL.

1.2. Organização da tese

Além da introdução, esta tese conta com os seguintes capítulos:

- Capítulo 2 – Aqui se encontram todos os fundamentos teóricos que serviram de base para este trabalho. Discutem-se os conceitos básicos de Estabilidade Estrutural, Método dos Elementos Finitos e Análise Matricial de Estruturas.
- Capítulo 3 – Neste capítulo são apresentados os elementos finitos BSB2 e BSB3, sendo que este último é formulado tanto com funções trigonométricas quanto polinomiais. São apresentadas matrizes de rigidez, de massa e geométrica, assim como as matrizes de rotação correspondentes.
- Capítulo 4 – Nesta seção, discute-se a caracterização dos pontos de bifurcação obtidos a partir do problema de autovalor aplicado à análise linear da estabilidade de pórticos. A partir da caracterização do ponto de bifurcação, é possível fazer uma previsão da sensibilidade da estrutura a imperfeições, baseando-se nos estudos feitos por Guimarães (1999) e Waszczyszyn et al. (1994).
- Capítulo 5 – Neste capítulo, são apresentados os resultados numéricos obtidos para os diferentes tipos de elementos com o objetivo de chegar à conclusão de qual o melhor elemento para a implementação no FTOOL.
- Capítulo 6 – Neste capítulo são apresentadas todas as modificações introduzidas no FTOOL, tanto no programa de análise (FRAMOOOP), quanto na interface gráfica.
- Capítulo 7 – São apresentados alguns exemplos de pórticos analisados no FTOOL para a comprovação de sua eficácia.

- Capítulo 8 – Aqui são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.
- Apêndice A – Neste apêndice é mostrada a implementação em Mathcad do elemento BSB2.

1.3. Representação do ponto decimal

Neste trabalho optou-se por utilizar um ponto (“.”) para identificar as casas decimais de números reais, ao invés de utilizar uma vírgula, como é a convenção no Brasil. Isto foi necessário para que não houvesse uma incoerência entre o texto da dissertação e o programa FTOOL que, por ter a sua interface em inglês, adota o ponto como símbolo decimal.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. Estabilidade de Estruturas

Uma estrutura em equilíbrio estático pode, eventualmente, ser deslocada de sua posição original. Perturbações externas, como a ação do vento ou um impacto qualquer, poderiam ocasionar esse deslocamento. A resposta do sistema estrutural ao distúrbio vai estar relacionada, entre outras coisas, à natureza do equilíbrio na posição original.

Analisando o problema de forma simples e sob um ponto de vista dinâmico, mais geral, pode-se afirmar que se a posição original corresponder a um estado de equilíbrio estável, a amplitude da vibração da estrutura é limitada e diminuirá com a remoção do distúrbio devido a efeitos de atrito e amortecimento. Caso contrário, a amplitude da vibração aumenta, caracterizando um estado de equilíbrio instável. Existe também o chamado equilíbrio neutro ou indiferente, quando não surgem vibrações da estrutura próxima à configuração de equilíbrio.

A Figura 2.1 mostra um sistema constituído por uma esfera de massa m repousando em três superfícies potenciais distintas. Nesses pontos extremos, onde a inclinação é nula, verifica-se o equilíbrio estático. Na figura 2.1a, o equilíbrio é estável, já que qualquer perturbação levará a esfera a voltar para o estado inicial. Na figura 2.1b, o equilíbrio é instável, pois uma perturbação fará a esfera se afastar desse ponto e entrar em movimento, buscando um outro nível de energia. Já na figura 2.1c, o equilíbrio é indiferente, pois, para qualquer perturbação condizente com as condições de contorno, a esfera continuará com a mesma quantidade de energia potencial.

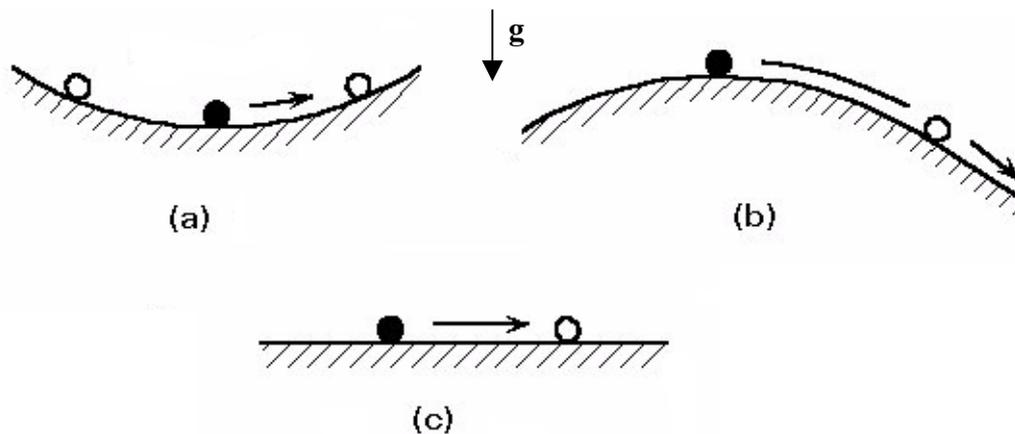


Figura 2.1 – Posições de equilíbrio estático

2.1.1. Critérios de Estabilidade Estrutural

Na literatura, três critérios são normalmente empregados para a determinação da estabilidade estática de um sistema conservativo. Abaixo está uma breve descrição de cada um desses três critérios, dando-se mais ênfase ao Critério Energético de Estabilidade, que é o mais amplamente utilizado e servirá de base para as demais deduções neste capítulo.

2.1.1.1. Critério Estático de Estabilidade

Verifica-se, neste critério, se as forças estáticas originadas em resposta à existência de pequenos deslocamentos, relacionados a uma determinada posição de equilíbrio, tendem a fazer com que a estrutura retorne para a configuração original. A tendência a restaurar o sistema ao seu estado original de equilíbrio representa uma condição de equilíbrio estável. Pode-se aplicar esse critério ao exemplo das figuras 2.1a e 2.1b, verificando-se que a resultante das forças peso (na direção da aceleração da gravidade) e normal (perpendicular à superfície) faz a esfera retornar à posição original no primeiro caso e a afasta da configuração de equilíbrio no segundo. No caso da figura 2.1c, as forças peso e normal estão sempre em equilíbrio, caracterizando a condição neutra.

2.1.1.2. Critério Dinâmico de Estabilidade

Este critério estabelece o comportamento dinâmico do sistema quando submetido a pequenas perturbações em torno da posição de equilíbrio. Tais perturbações podem ficar limitadas a todo instante ou desestabilizar o sistema, afastando-o do equilíbrio. Este comportamento relaciona-se com a solução das equações diferenciais que governam o sistema: se as frequências naturais de vibração da estrutura são reais, tem-se que o equilíbrio é estável; quando ao menos uma frequência torna-se nula, estamos diante de um ponto crítico; se alguma frequência torna-se imaginária, o equilíbrio passa a ser instável. Para sistemas não-conservativos, só o critério dinâmico é capaz de prever o comportamento da estrutura e obter seus pontos críticos, o que não é o caso dos exemplos estudados neste trabalho. Estudos sobre o comportamento de sistemas não-conservativos podem ser obtidos nos trabalhos de Suanno (1988) e Guimarães (1999).

2.1.1.3. Critério Energético de Estabilidade

Aplicável a sistemas conservativos, esse critério é baseado no Teorema de Lagrange, estabelecendo que se a energia potencial, assumida como uma função contínua das coordenadas generalizadas, tem um mínimo relativo em determinada posição de equilíbrio, então essa posição de equilíbrio é estável. Em sistemas estruturais elásticos e sob ação de cargas conservativas, a energia potencial total é definida como:

$$\Pi = U + V \quad (2.1)$$

onde U é a energia interna de deformação elástica e V é o potencial das forças externas conservativas. Desvios em relação a uma determinada posição de equilíbrio irão ocasionar uma variação na energia potencial, devido ao acúmulo de energia de deformação no sistema somado ao trabalho realizado pelas forças externas, como pode ser visto em (2.2).

$$\Delta\Pi = \Delta U + \Delta V \quad (2.2)$$

Para sistemas discretizados, como no caso do Método dos Elementos Finitos, onde os deslocamentos são referidos às coordenadas generalizadas q_i , essa variação é expressa por:

$$\Delta\Pi = \Pi(q_1 + \delta q_1, \dots, q_n + \delta q_n, \lambda) - \Pi(q_1, \dots, q_n, \lambda) \quad (2.3)$$

onde n é o número de coordenadas generalizadas do sistema, q_1, \dots, q_n representam uma determinada posição inicial de equilíbrio, $\delta q_1, \dots, \delta q_n$ são deslocamentos em relação à referida posição, e λ é o parâmetro de carga, assumido constante durante os deslocamentos.

O Princípio da Energia Potencial Estacionária diz que, num estado de equilíbrio, a energia potencial do sistema será sempre um extremo (máximo ou mínimo), portanto:

$$\frac{\partial(\Delta\Pi)}{\partial q_i} = 0 \quad (2.4)$$

O resultado de (2.4) corresponde, para cada q_i , a uma equação de equilíbrio estático em sistemas conservativos discretizados e a solução do sistema de equações gerado descreve o comportamento da estrutura quando sujeita a perturbações no seu estado inicial. Muitas vezes essas equações têm um grau de não-linearidade muito grande, fazendo com que o sistema seja de difícil solução analítica.

Para verificar se uma posição de equilíbrio que satisfaz a equação (2.4) é estável ou instável, faz-se necessário avaliar se a energia na referida posição trata-se de um máximo ou um mínimo. Caso seja um mínimo, todas as perturbações possíveis levam a um aumento da energia potencial e o sistema está em equilíbrio estável (Princípio da Energia Potencial Mínima de Lagrange). Caso contrário, estamos diante de uma posição de equilíbrio instável.

Para sistemas com um grau de liberdade, avaliar o sinal da segunda derivada da variação da energia potencial é suficiente para determinar se o ponto estudado trata-se de um máximo ou um mínimo de energia potencial. Para sistemas com mais de um grau de liberdade, é necessário avaliar a segunda variação da energia potencial, que é dada pela seguinte forma quadrática, obtida pela expansão da equação (2.3) em Séries de Taylor até o termo de segunda ordem:

$$\delta^2(\Delta\Pi) = \sum_i \delta q_i \left[\sum_j \frac{\partial^2(\Delta\Pi)}{\partial q_i \partial q_j} \delta q_j \right] \quad (2.5)$$

A matriz formada pelas derivadas parciais segundas em relação às coordenadas generalizadas q_i determinará a estabilidade da posição de equilíbrio representada pelos deslocamentos δq_i . Caso a forma quadrática seja positiva-definida, o equilíbrio é estável para o nível de carga dado. Se $\delta^2(\Delta\Pi)$ é nula para algum δq_i , δq_j , sua forma quadrática não é mais positiva-definida e a estabilidade da posição original de equilíbrio vai depender do sinal das variações de maior ordem em $\Delta\Pi$. Nessa situação, diz-se que a carga crítica foi alcançada. Se, aumentando-se a carga, $\delta^2(\Delta\Pi)$ passa a ser menor que zero em relação ao mesmo δq_i , δq_j , o estado de equilíbrio original é considerado instável.

O critério energético é amplamente utilizado na análise da estabilidade de sistemas estruturais conservativos, em virtude da sua relativa simplicidade em relação ao critério dinâmico no que diz respeito à aplicação de métodos numéricos e obtenção de resultados analíticos.

2.1.2. Formas de Instabilidade

O comportamento do sistema estrutural quando a carga crítica é alcançada está relacionado com o tipo de carregamento atuante e, eventualmente, com as condições de contorno geométricas. Para sistemas sob ação de cargas conservativas, uma formulação estática, baseada na energia potencial, é suficiente para descrever tal comportamento.

Uma determinada configuração de equilíbrio tem sua característica modificada quando um determinado nível de carregamento (medido pelo parâmetro de carga λ) é alcançado, ou seja, a forma como a energia potencial se comporta para pequenas perturbações é alterada. A este nível de carregamento dá-se o nome de carga crítica e o ponto correspondente na curva *parâmetro de carga x parâmetro de deslocamento* é denominado ponto crítico.

Um ponto crítico pode ser um ponto limite ou de bifurcação. O primeiro configura-se como um extremo na curva *parâmetro de carga x parâmetro de deslocamento*, porém sem a existência de estados adjacentes de equilíbrio para um mesmo carregamento, que é a característica de um ponto de bifurcação. A obtenção de pontos limites normalmente exige uma análise não-linear, já que ocorrem apenas em estruturas que apresentam grande não-linearidade geométrica.

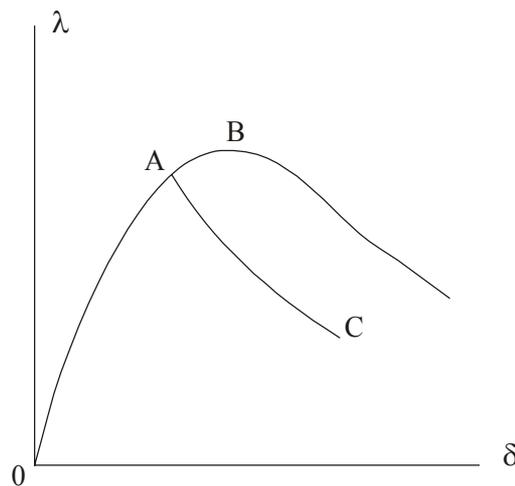


Figura 2.2 – Pontos críticos

Na figura 2.2, B é um ponto limite, A é um ponto de bifurcação e AC é um caminho de equilíbrio adjacente. No ponto A, pode-se notar que, para um mesmo nível de carga, a estrutura pode se comportar de duas formas diferentes. Analisando-se a estabilidade das configurações de equilíbrio é possível prever, numa estrutura real, qual caminho é o preferencial.

Para caracterizar um ponto de bifurcação é necessário estudar cada um dos caminhos de equilíbrio possíveis quanto à sua estabilidade. Segundo este critério, há três tipos básicos de bifurcação, que serão vistos adiante.

2.1.2.1. Bifurcação Simétrica Estável

Este tipo de bifurcação caracteriza-se por apresentar um caminho de equilíbrio adjacente no qual a estrutura ganha rigidez, podendo absorver mais carga. A posição original do sistema torna-se instável e qualquer perturbação, por mínima que seja, leva o mesmo a uma nova configuração de equilíbrio, que é estável.

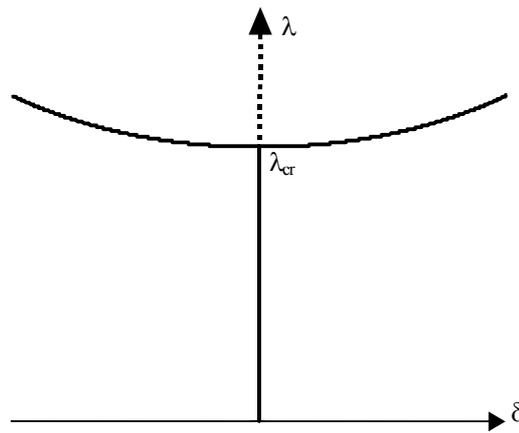


Figura 2.3 – Bifurcação simétrica estável

2.1.2.2. Bifurcação Simétrica Instável

Este tipo de bifurcação caracteriza-se por apresentar um caminho de equilíbrio adjacente no qual a estrutura perde rigidez, não podendo absorver mais carga. A posição original do sistema torna-se instável e qualquer perturbação, por mínima que seja, leva o mesmo a uma condição em que o equilíbrio não pode mais ser alcançado, analogamente ao que aconteceria com a esfera na posição B da figura 2.1.

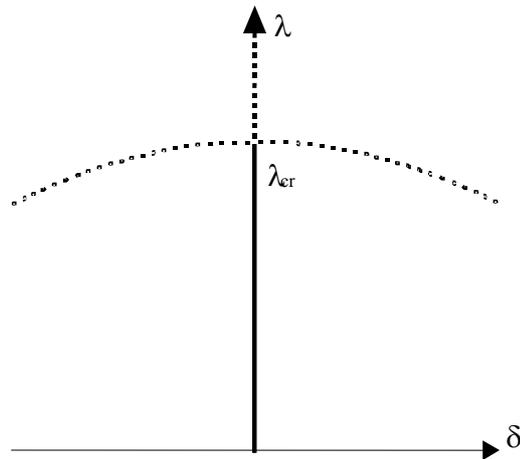


Figura 2.4 – Bifurcação simétrica instável

2.1.2.3. Bifurcação Assimétrica

Este tipo de bifurcação é uma combinação dos dois anteriores, no qual o sistema se comporta de forma estável para uma perturbação positiva (ou negativa), porém torna-se instável para perturbações de sinal contrário.

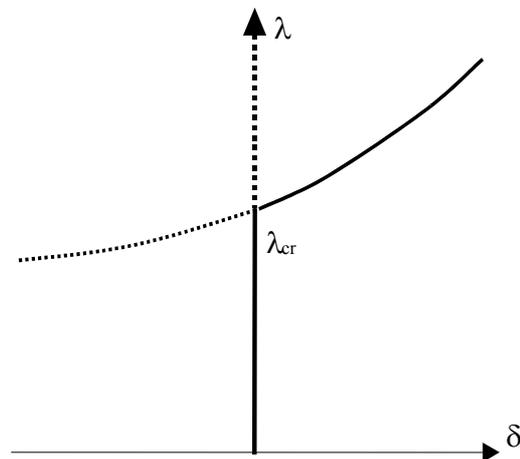


Figura 2.5 – Bifurcação assimétrica

Neste trabalho serão consideradas apenas situações nas quais o caminho de equilíbrio pré-crítico pode ser admitido como levemente não-linear, ou seja, situações em que as rotações nos elementos, anteriores à flambagem, podem ser

desconsideradas, tornando possível o uso da chamada linearização clássica para a determinação da carga crítica que, neste caso, representa sempre um ponto de bifurcação.

2.1.3.

Métodos Aproximados para a Obtenção de Cargas Críticas

O princípio da energia potencial estacionária diz que uma estrutura sempre se deformará de tal forma que o estado de equilíbrio atingido leve a um valor extremo (máximo ou mínimo) na energia do sistema.

No entanto, para algumas estruturas, é difícil obter-se o valor da energia potencial, já que seus deslocamentos e as funções que os descrevem não são previamente conhecidos. Para resolver essa questão, é possível aproximar a deformada verdadeira da estrutura por uma forma de deflexão presumida, como acontece no Método dos Elementos Finitos.

A partir dessa hipótese, surgiram dois métodos aproximados para a obtenção de cargas críticas: os quocientes de Rayleigh e Timoshenko.

2.1.3.1.

Quociente de Rayleigh

Como foi visto no item 2.1, para a obtenção de cargas críticas é necessário que se conheça a variação da energia potencial do sistema. Esta é formada por duas parcelas, U e V . A energia de deformação por unidade de volume de uma estrutura é dada pela área sob a curva *tensão x deformação*, que é de fácil obtenção analítica na região em que o material é linear, como pode ser visto na figura 2.6. Esta energia deve ser integrada em todo o volume da estrutura para que se obtenha a energia de deformação total do sistema (Timoshenko, 1984).

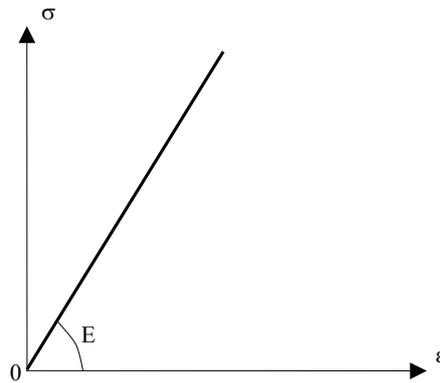


Figura 2.6 – Região linear da curva tensão x deformação

$$U = \iiint_V \sigma \epsilon \, dV = \iiint_V \frac{1}{2} E \epsilon^2 \, dV \quad (2.6)$$

Na equação acima, E é o módulo de Young do material. Na expressão da energia potencial, a parcela V é dada pelo trabalho realizado pelas forças externas na direção dos deslocamentos da estrutura. Esse trabalho é sempre negativo, já que a força externa se opõe ao retorno do sistema à sua posição original.

$$V = - \sum_i P_i \Delta_i \quad (2.7)$$

Numa viga, sabe-se que grande parte da deformação pode ser atribuída à flexão, sendo que a parcela correspondente à deformação axial pura (energia de membrana) pode ser desprezada. Sabe-se também que a deformação por flexão é dada por:

$$\epsilon = -y\kappa \quad (2.8)$$

onde y é a distância da fibra neutra ao ponto em que se quer averiguar a deformação e κ é a curvatura da viga.

Segundo as hipóteses de pequenas deformações, κ pode ser aproximada pela seguinte expressão:

$$\kappa = \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \tag{2.9}$$

onde $v(x)$ é a função que descreve o deslocamento transversal na viga.

Substituindo-se as equações (2.8) e (2.9) na fórmula da energia de deformação e retirando-se da integral a expressão do momento de inércia I da seção transversal da viga, chega-se a:

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right]^2 dx \tag{2.10}$$

Deve-se agora obter uma expressão para o deslocamento Δ que o relacione com $v(x)$ para a inclusão do efeito do trabalho das forças externas na energia potencial (Gonçalves, 1994).

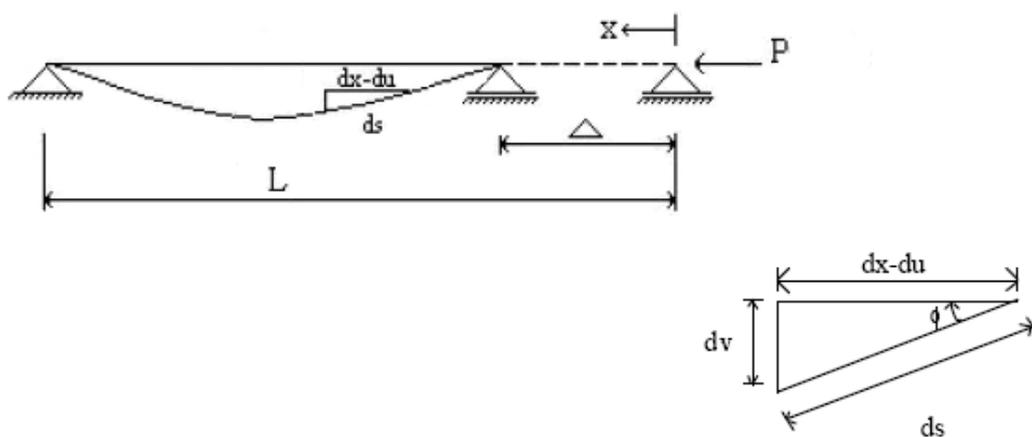


Figura 2.7 – Deformações na flambagem

Usando o elemento infinitesimal do eixo da coluna deformado, mostrado na figura 2.7, pode-se afirmar, pelo teorema de Pitágoras, que:

$$(ds)^2 = (dx - du)^2 + dv^2 \tag{2.11}$$

Dividindo-se (2.11) por $(dx)^2$, obtém-se:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dx - du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \quad (2.12)$$

Como as deformações axiais puras (membrana) podem ser desprezadas, tem-se que $ds \approx dx$ e, portanto:

$$\frac{du}{dx} = 1 - \left[1 - \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{1/2} \quad (2.13)$$

Usando Séries de Taylor, pode-se fazer a seguinte aproximação:

$$du = \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx \quad (2.14)$$

Sabe-se que:

$$\Delta = \int_0^L du \quad (2.15)$$

Substituindo (2.14) em (2.15) e utilizando o resultado em (2.7), chega-se à expressão completa da energia potencial. Aplicando-se o Princípio da Energia Potencial Estacionária, chega-se à seguinte equação:

$$\frac{EI}{2} \int_0^L \left[\frac{d^2v(x)}{dx^2}\right]^2 dx - \int_0^L \frac{P}{2} \left[\frac{dv(x)}{dx}\right]^2 dx = 0 \quad (2.16)$$

Como a força axial é constante, pode ser retirada da integral, e a equação (2.16) pode ser reescrita de forma a obter o valor de P pelo quociente de Rayleigh, que é dado pela equação (2.17).

$$P_R = \frac{EI \int_0^L \left[\frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right]^2 dx}{\int_0^L \left[\frac{dv(x)}{dx} \right]^2 dx} \quad (2.17)$$

Uma generalização do quociente de Rayleigh para estruturas com mais de um grau de liberdade leva ao problema de autovalor utilizado na Análise Matricial de Estruturas para a obtenção de cargas críticas. A precisão desse método depende da escolha da função aproximadora. Funções trigonométricas geram melhores resultados do que polinômios, já que os modos críticos de colunas obtidos analiticamente são dados por funções seno e cosseno.

2.1.3.2. Quociente de Timoshenko

A diferença básica entre os quocientes de Rayleigh e Timoshenko está na obtenção da energia de deformação U . Enquanto o primeiro a formula a partir da expressão da energia em função da curvatura, o segundo utiliza a seguinte relação entre o momento fletor na viga e a curvatura para obter essa energia:

$$M = -EI\kappa \quad (2.18)$$

A energia de deformação pode ser, portanto, reescrita da seguinte forma:

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \kappa^2 dx = \frac{1}{2EI} \int_0^L M^2 dx \quad (2.19)$$

Utiliza-se então a própria função aproximadora para calcular o momento fletor em qualquer ponto da coluna, pela seguinte relação:

$$M = P v(x) \quad (2.20)$$

Substituindo (2.19) em (2.18), a energia de deformação fica:

$$U = \frac{1}{2EI} \int_0^L P^2 [v(x)]^2 dx \quad (2.21)$$

Aplicando o Princípio da Energia Potencial Estacionária da mesma forma como na seção anterior, chega-se à seguinte equação:

$$\int_0^L \frac{P^2 [v(x)]^2}{2EI} dx - \int_0^L \frac{P}{2} \left[\frac{dv(x)}{dx} \right]^2 dx = 0 \quad (2.22)$$

Como a força axial é constante e não nula pode ser simplificada e retirada da integral, e a equação (2.22) pode ser reescrita de forma a obter o valor de P pelo quociente de Timoshenko.

$$P_T = \frac{\int_0^L \left[\frac{dv(x)}{dx} \right]^2 dx}{\int_0^L \frac{[v(x)]^2}{EI} dx} \quad (2.23)$$

A aproximação pelo quociente de Timoshenko é sempre mais precisa do que a de Rayleigh. A desvantagem, no entanto, é que o quociente de Timoshenko só pode ser usado para estruturas estaticamente determinadas (isostáticas), já que só nesses casos o momento fletor pode ser expresso em função da curva que descreve o deslocamento transversal (Bazant, 1991).

2.1.4. Análise Matricial

A equação matricial de equilíbrio estático para um sistema discretizado pode ser obtida a partir da aplicação da equação (2.4) a um funcional de energia potencial total Π , dado em função das coordenadas generalizadas q_i :

$$\mathbf{K}_E \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (2.24)$$

onde \mathbf{K}_E é a matriz de rigidez elástica, \mathbf{d} é o vetor de deslocamentos nodais e \mathbf{f} é o vetor de cargas, todos referidos ao sistema de eixos global da estrutura.

Em problemas de flambagem, nos quais as rotações que antecedem o estado crítico podem ser desconsideradas, a expressão acima é modificada pela inclusão da matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_G , que depende da força axial:

$$(\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G) \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (2.25)$$

A carga crítica, para estes casos, irá corresponder a um ponto de bifurcação, ou seja, a configuração de equilíbrio original e uma outra configuração de equilíbrio adjacente poderão existir para um mesmo valor de carga.

Expressando (2.25) em uma forma incremental, tem-se:

$$(\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G) \delta \mathbf{d} = \delta \mathbf{f} \quad (2.26)$$

A partir da afirmação anterior, pode-se dizer que existe um nível de carga no qual é possível ocorrer um incremento $\delta \mathbf{d}$ nos deslocamentos, sem que essa carga sofra uma modificação significativa. Obtém-se, portanto:

$$(\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G) \delta \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (2.27)$$

A expressão acima corresponde à formulação estática para a determinação da carga crítica.

2.1.5. Sensibilidade a Imperfeições

Se uma estrutura imperfeita exibe uma carga limite menor que a carga crítica da estrutura dita perfeita, então essa estrutura é denominada como sensível ao efeito da imperfeição (Bazant, 1991).

O equilíbrio no estado crítico é estável se a carga P para o estado de equilíbrio pós-crítico adjacente é maior que a carga de bifurcação da estrutura perfeita. Nesse caso, os estados de equilíbrio pós-crítico são estáveis e a estrutura é insensível a imperfeições.

Por outro lado, o equilíbrio no estado crítico é instável se existem estados adjacentes de equilíbrio para os quais a carga P é menor que a carga de bifurcação da estrutura perfeita. As imperfeições fazem diminuir a carga que torna a estrutura instável. Também pode ser provado (Koiter, 1960) que a sensibilidade a imperfeições em estruturas que exibem bifurcação assimétrica é maior em comparação com aquelas que exibem bifurcação simétrica e também instável.

Essas conclusões serão de grande importância para a caracterização do ponto de bifurcação obtido da análise do problema de autovalor generalizado, como será visto adiante.

2.2. Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF), um procedimento numérico para a análise de estruturas e meios contínuos, nasceu devido à necessidade de se obterem resultados numéricos para problemas nos quais a solução analítica era complicada ou, em alguns casos, impossível (Cook, 1989).

Dois conceitos básicos resumem o método: a discretização do contínuo e as funções de interpolação.

A discretização consiste em se dividir um meio contínuo em um número finito de elementos que estarão conectados entre si apenas por seus vértices (nós), por exemplo. Um princípio fundamental dessa discretização diz que dois elementos de uma determinada dimensão só podem se interceptar em uma entidade de dimensão inferior. Por exemplo, dois elementos de barra só podem se conectar através de seus nós, porém dois elementos de placa poderiam se interceptar tanto em seus nós quanto em suas arestas. Uma imagem que exemplifica a discretização é a de uma folha de papel cortada em diversos “elementos” menores, que permanecem ligados através de seus vértices, como mostra a figura 2.8.

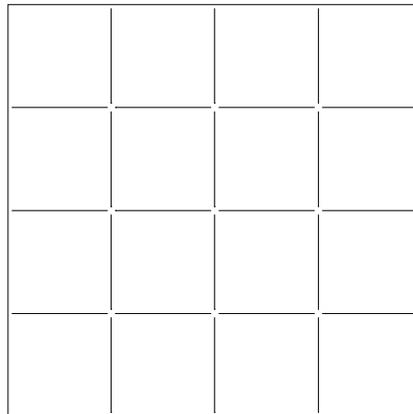


Figura 2.8 – Exemplo de discretização

O contínuo, com infinitos graus de liberdade, é então representado por um modelo discreto que tem um número finito de graus de liberdade, no qual as integrações são substituídas por somas finitas e as equações do contínuo são reduzidas a sistemas de equações algébricas.

As relações constitutivas que governam o contínuo são usadas como base para a formulação dos elementos e o objetivo da solução é tornar-se o mais próxima possível do comportamento real do sistema.

O MEF foi concebido como um procedimento de análise estrutural, mas hoje em dia também é utilizado para problemas de transferência de calor, escoamento de fluidos, distribuição de campos elétricos e magnéticos, entre outros.

No caso da análise estrutural, o objetivo principal é obter a solução para a distribuição de tensões e deformações em todo o domínio da estrutura. Uma vez que o campo de deslocamentos é descrito apenas pelos deslocamentos dos nós dos elementos, faz-se necessário um recurso que relacione os valores nodais do campo com os valores no interior do elemento. Surgem então as funções de forma (ou de interpolação), que são escritas para que o deslocamento em qualquer ponto do elemento possa ser calculado tomando-se como base apenas os valores dos deslocamentos nos nós (Assan, 1999).

$$u(x) = \sum_i N_i(x) u_i \quad (2.28)$$

onde $u(x)$ é a função que descreve um deslocamento qualquer no interior do elemento, $N_i(x)$ são as funções de forma e u_i são os deslocamentos nodais.

A relação entre o campo de deslocamentos e o campo de forças em um elemento é obtida através de uma matriz, chamada matriz de rigidez, que funciona para o elemento de forma análoga ao coeficiente k de uma mola elástica que segue a Lei de Hooke.

$$F = k x \quad (2.29)$$

Os coeficientes dessa matriz são obtidos a partir do Princípio da Energia Potencial Estacionária, de forma semelhante ao que é feito no quociente de Rayleigh.

Para problemas dinâmicos, nos quais a variável tempo deve ser considerada, é necessária a introdução de outra matriz, chamada matriz de massa, que desempenha um papel análogo à massa de uma partícula na equação clássica da dinâmica para sistemas com um grau de liberdade:

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + k x = f(t) \quad (2.30)$$

Na expressão (2.30), m é a massa da partícula, k a rigidez da mola e $f(t)$ uma força aplicada que varia com o tempo.

A matriz de massa consistente é assim denominada porque nela adotam-se para as acelerações as mesmas funções de interpolação utilizadas para os deslocamentos na obtenção da matriz de rigidez elástica do elemento, como veremos adiante.

Em problemas de estabilidade deve ser também introduzida a matriz geométrica, como já mencionado na seção 2.1.3.3, cuja forma de obtenção é semelhante à da matriz de rigidez, desta vez considerando parcelas de ordem superior na aproximação das deformações.

O MEF pode ser interpretado como uma generalização dos procedimentos adotados em uma análise estrutural convencional de sistemas reticulados. De fato, a formulação matricial obtida pelo Método dos Deslocamentos (ou da Rigidez) em estruturas apertadas é o próprio MEF na sua formulação em deslocamentos.

A diferença básica entre a análise de pórticos e o MEF está no próprio modelo estrutural. Em ambos os casos, o modelo estrutural é formado pela montagem de componentes ou elementos estruturais individuais. No primeiro caso, os elementos aparecem quase que naturalmente a partir da própria concepção da estrutura. No segundo, a estrutura é modelada por um número finito de elementos (regiões) para representar um meio contínuo (Martha, 1994).

Neste trabalho será utilizado o elemento de pórtico plano, cuja descrição é feita a seguir. No Capítulo 3 serão apresentadas algumas modificações que podem tornar este elemento mais preciso para a análise de estabilidade.

2.2.1. O Elemento de Pórtico Plano

O elemento de pórtico plano (por vezes designado como elemento de viga ou barra em programas de análise) é formulado através da combinação das funções de forma de dois elementos básicos: o elemento de viga e o elemento de treliça.

Como foi dito na seção anterior, o MEF aplicado a estruturas aporricadas confunde-se com o próprio Método dos Deslocamentos para análise de tais estruturas. Isto ocorre porque as funções de interpolação para elementos de viga são as soluções exatas da equação diferencial característica dessa estrutura:

$$EI \frac{d^{IV} v(x)}{dx^{IV}} = Q(x) \quad (2.31)$$

onde $Q(x)$ é uma função que descreve o carregamento transversal aplicado à viga.

Um dos fundamentos do MEF é o de que o carregamento só pode ser aplicado nas regiões de interseção dos elementos, ou seja, nos nós, no caso de barras. Sendo assim, o valor de $Q(x)$ é sempre nulo na equação (2.31), o que leva a um polinômio de terceiro grau como solução da equação diferencial para $v(x)$. No caso de haver algum carregamento distribuído no elemento, este será transformado em cargas aplicadas nos nós, conhecidas como “cargas equivalentes nodais”.



Figura 2.9 – Elemento de viga

O campo de deslocamentos do elemento é descrito pelas seguintes funções:

$$N_2(x) = 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \quad (2.32)$$

$$N_3(x) = 1 - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (2.32)$$

$$N_5(x) = 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \quad (2.34)$$

$$N_6(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (2.35)$$

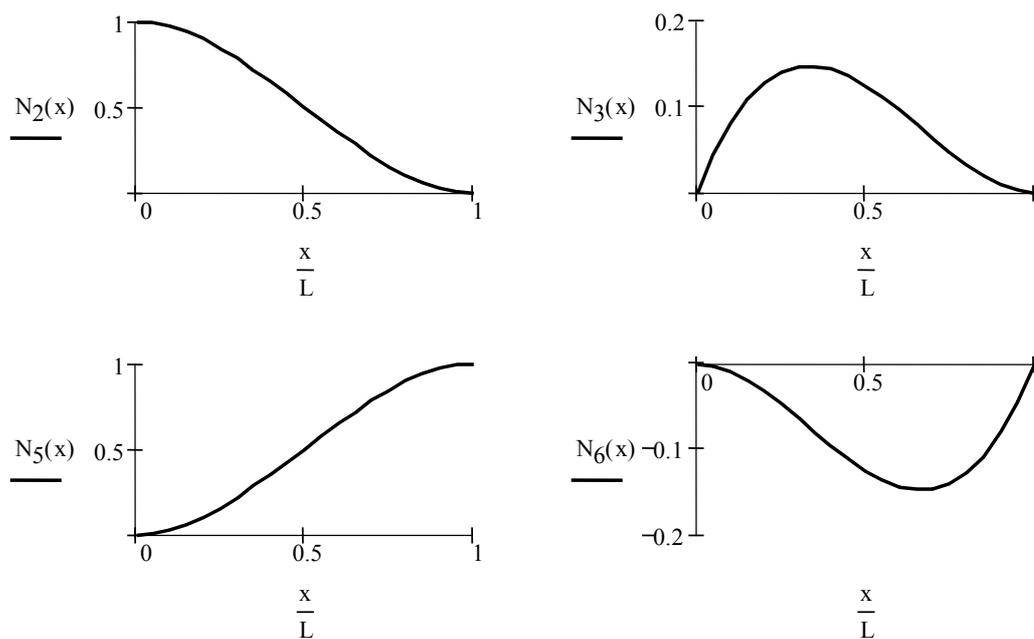


Figura 2.10 – Funções de forma do elemento de viga

Numa barra de uma estrutura aperticada, além dos deslocamentos transversais ao seu eixo e das rotações, há também deslocamentos axiais. Para modelar tais deslocamentos, utilizam-se as funções do elemento de treliça, já que esta é uma estrutura formada apenas por escoras e tirantes, elementos que só apresentam esforços axiais.



Figura 2.11 – Elemento de treliça

O campo de deslocamentos do elemento é descrito pelas seguintes funções, que são as soluções exatas para o problema de tensões e deformações axiais no caso de estruturas lineares:

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \tag{2.36}$$

$$N_4(x) = \frac{x}{L} \tag{2.37}$$

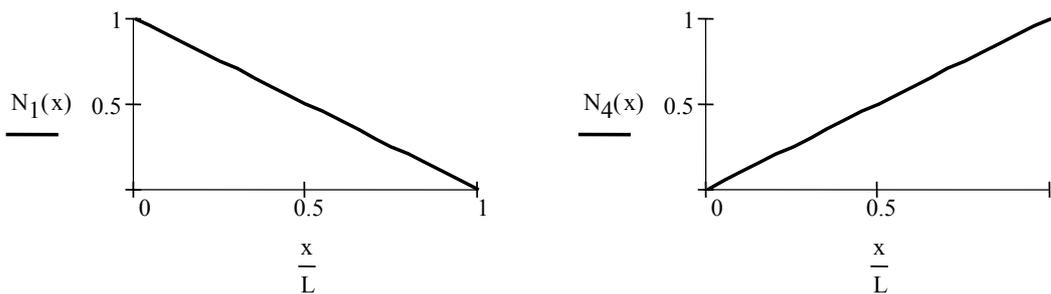


Figura 2.12 – Funções de forma do elemento de treliça

Utilizando como hipótese simplificadora o fato de não haver qualquer interação entre os efeitos axiais e transversais, pode-se “somar” as contribuições de cada um dos elementos acima, formando o elemento de pórtico plano.



Figura 2.13 – Elemento de pórtico plano

A matriz das funções de forma relaciona os campos de deslocamentos $u(x)$ e $v(x)$ com os deslocamentos nodais da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & 0 & N_4(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_2(x) & N_3(x) & 0 & N_5(x) & N_6(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

A matriz de rigidez do elemento de pórtico plano pode ser obtida tanto pelos coeficientes de rigidez do método dos deslocamentos (Método da Rigidez Direta) quanto pelo critério mais geral dos MEF (utilizando as funções de forma e o Princípio da Energia Potencial Estacionária), levando aos mesmos resultados. Cada coeficiente i,j tem como significado físico a força que surge na direção i quando é imposto um deslocamento unitário na direção j .

A matriz geométrica é obtida também pelo Princípio da Energia Potencial Estacionária, desta vez considerando-se para a formulação da energia de deformação parcelas que são desconsideradas para a análise linear estática.

2.2.2. Matrizes de Rigidez Elástica e Geométrica

Em problemas lineares relacionados à mecânica dos corpos deformáveis elásticos, os deslocamentos são proporcionais às cargas. O problema da flambagem, entretanto, tem como característica básica a desproporção que surge entre o deslocamento e a carga quando um certo nível de carregamento é alcançado, em virtude da possibilidade de ocorrer um incremento considerável nos deslocamentos sem que ocorra um incremento significativo da carga aplicada, em decorrência da perda de rigidez da estrutura. Configura-se, portanto, a não-linearidade geométrica para esse tipo de problema.

Apesar de haver ainda uma certa divergência quanto à obtenção da matriz de rigidez geométrica para elementos tridimensionais (Vasquez, 1987), para um

elemento de viga-coluna no plano sua formulação tornou-se clássica, havendo apenas uma pequena diferença com relação a serem ou não consideradas as contribuições axiais para formação desta matriz. Para alguns autores, basta considerar a parte do elemento de pórtico que se deforma transversalmente ao seu eixo. A consideração ou não das contribuições dos termos originados pelo elemento de treliça não afeta os resultados de maneira significativa (Guimarães, 1999).

Para a análise de estabilidade por elementos de pórtico plano, a aproximação feita na seção 2.1.3, que desconsiderava a parcela correspondente à deformação axial pura (energia de membrana), não pode ser utilizada. A deformação longitudinal passa a ser dada por:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} - y\kappa \quad (2.39)$$

Levando-se em conta os efeitos da deformação axial que foram desconsiderados em (2.13), a energia de deformação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$U = \frac{EA}{2} \int_0^L \left[\frac{du}{dx} \right]^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\frac{d^2v}{dx^2} \right]^2 dx + \frac{P}{2} \int_0^L \left[\frac{du}{dx} \right]^2 dx + \int_0^L \frac{P}{2} \left[\frac{dv}{dx} \right]^2 dx \quad (2.40)$$

Alguns autores desconsideram o terceiro membro do lado direito da equação (2.40), o que modifica a matriz geométrica nas linhas 1 e 4. Essa diferença tem se mostrado pouco importante, já que os efeitos de flexão são mais relevantes para a flambagem do que os de membrana. De qualquer forma, optou-se por manter esse termo já que a matriz geométrica torna-se mais completa deste modo.

Substituindo as expressões de $u(x)$ e $v(x)$ dadas pelo MEF em (2.40) e aplicando o Princípio da Energia Potencial Estacionária, chega-se a uma formulação matricial para as equações de equilíbrio, de onde podem ser extraídas as matrizes de rigidez e geométrica.

$$U = \frac{EA}{2} \mathbf{u}^T \left[\int_0^L \left(\frac{d(\mathbf{N}_u^T)}{dx} \right) \left(\frac{d(\mathbf{N}_u)}{dx} \right) dx \right] \mathbf{u} + \frac{EI}{2} \mathbf{v}^T \left[\int_0^L \left(\frac{d^2(\mathbf{N}_v^T)}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2(\mathbf{N}_v)}{dx^2} \right) dx \right] \mathbf{v} + \frac{P}{2} \mathbf{u}^T \left[\int_0^L \left(\frac{d(\mathbf{N}_u^T)}{dx} \right) \left(\frac{d(\mathbf{N}_u)}{dx} \right) dx \right] \mathbf{u} + \frac{P}{2} \mathbf{v}^T \left[\int_0^L \left(\frac{d(\mathbf{N}_v^T)}{dx} \right) \left(\frac{d(\mathbf{N}_v)}{dx} \right) dx \right] \mathbf{v} \quad (2.41)$$

Na expressão (2.41), \mathbf{N}_u é a matriz que contém as funções de forma do elemento de treliça, \mathbf{N}_v é a matriz que contém as funções de forma do elemento de viga, \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos axiais e \mathbf{v} o vetor dos deslocamentos transversais e rotações.

$$\mathbf{N}_u = [N_1(x) \quad N_4(x)] \quad (2.42)$$

$$\mathbf{u}^T = \{d_1 \quad d_4\} \quad (2.43)$$

$$\mathbf{N}_v = [N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_5(x) \quad N_6(x)] \quad (2.44)$$

$$\mathbf{v}^T = \{d_2 \quad d_3 \quad d_5 \quad d_6\} \quad (2.45)$$

A matriz de rigidez do elemento é dada por:

$$k_{E_{i,j}} = EA \int_0^L \left(\frac{dN_i(x)}{dx} \right) \left(\frac{dN_j(x)}{dx} \right) dx \quad (2.46)$$

$$k_{E_{i,j}} = EI \int_0^L \left(\frac{d^2 N_i(x)}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 N_j(x)}{dx^2} \right) dx \quad (2.47)$$

A expressão (2.46) vale para i e j iguais a 1 e 4. A expressão (2.47) vale para i e j iguais a 2, 3, 5 e 6. Como explicado anteriormente, não há interação entre efeitos de membrana e de flexão, portanto os termos não incluídos nas expressões anteriores são nulos.

$$\mathbf{k}_E = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

A matriz geométrica é dada por:

$$k_{G_{ij}} = P \int_0^L \left(\frac{dN_i(x)}{dx} \right) \left(\frac{dN_j(x)}{dx} \right) dx \quad (2.49)$$

$$\mathbf{k}_G = P \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5L} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2}{15L} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30L} \\ -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30L} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2}{15L} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Nessas expressões, E representa o módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young do material, I é o momento de inércia da seção reta, A representa a área dessa seção, L é o comprimento do elemento e P é a força axial atuante no elemento.

Deve-se observar que a dedução das funções de forma relacionadas ao deslocamento $v(x)$ do eixo central do elemento de viga (N_2 , N_3 , N_5 e N_6) não leva em conta a existência de uma força de compressão axial.

A equação diferencial de uma viga submetida a um carregamento axial P é dada pela equação abaixo (Silva & Soares, 1974).

$$EI \frac{d^{IV} v(x)}{dx^{IV}} + P \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = Q(x) \quad (2.51)$$

As funções de forma que resultam da solução exata da equação diferencial são diferentes para o caso de a força axial ser de compressão ou tração (Weaver & Gere, 1980), o que dificulta a implementação.

2.2.3. Obtenção do Problema de Autovalor

A linearização clássica na análise de estabilidade parte do princípio de que as rotações que antecedem a flambagem são desprezíveis, ou seja, as equações de equilíbrio da estrutura são sempre referidas à sua configuração indeformada.

A análise da flambagem usando a matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_G , pode ser feita com base na seguinte hipótese:

$$\mathbf{K}_G = \lambda \mathbf{K}_{G_{ref}} \quad (2.52)$$

$$\mathbf{f} = \lambda \mathbf{f}_{ref} \quad (2.53)$$

Nas expressões (2.52) e (2.53), $\mathbf{K}_{G_{ref}}$ é a matriz de rigidez geométrica obtida a partir de um carregamento de referência, \mathbf{f}_{ref} , e λ é o parâmetro escalar multiplicador da carga.

O uso dessas equações implica em considerar que não ocorrerão mudanças significativas na distribuição dos esforços caso as cargas f_i sejam multiplicadas por λ , bastando, portanto, multiplicar a matriz de rigidez geométrica por esse mesmo fator. Essa hipótese não inclui efeitos de segunda ordem (não-linearidade geométrica), pois neste tipo de análise supõe-se que os deslocamentos e esforços variam linearmente com o carregamento. Em alguns casos, como o de estruturas

muito esbeltas, nas quais a não-linearidade geométrica é acentuada, essa hipótese não é válida, sendo necessário o uso de uma análise não-linear completa.

Aplicando as expressões (2.52) e (2.53) na equação (2.27), chega-se ao problema de autovalor para o caso da formulação estática:

$$(\mathbf{K}_E + \lambda_{cr} \mathbf{K}_{G_{ref}}) \delta \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (2.54)$$

Os autovalores são os valores de λ_{cr} para os quais o vetor $\delta \mathbf{d}$ representa uma solução não trivial, $\delta \mathbf{d} \neq \mathbf{0}$. Os autovetores $\delta \mathbf{d}$ obtidos para cada autovalor são os modos críticos da estrutura.

Modificando-se a equação (2.54) de forma conveniente, pode-se notar que a mesma é uma generalização do quociente de Rayleigh, que pode ser representado pela seguinte forma geral:

$$\lambda_{cr} = - \frac{\delta \mathbf{d}^T \mathbf{K}_E \delta \mathbf{d}}{\delta \mathbf{d}^T \mathbf{K}_{G_{ref}} \delta \mathbf{d}} \quad (2.55)$$

Portanto, vê-se que a determinação da carga crítica, feita a partir da equação (2.54), passa por duas fases principais, que são: a determinação dos esforços axiais nos elementos, feita a partir da resolução estática do sistema submetido a um determinado carregamento de referência e, posteriormente, a resolução de um problema linear de autovalor generalizado.

Em situações práticas, relacionadas à estabilidade, é importante conhecer as duas primeiras cargas críticas, com o propósito de detectar uma eventual interação ou proximidade entre modos de flambagem ou modos de vibração. No entanto, a discretização da estrutura em um elemento por barra faz com que haja uma perda de precisão na análise, tornando confiável apenas o valor da primeira carga crítica para pórticos planos modelados dessa forma. Para problemas conservativos em pórticos planos, presume-se que a possibilidade de haver interação entre modos de

flambagem próximos é pequena, sendo, portanto, suficiente a obtenção da primeira carga crítica apenas.

Deve-se lembrar que a carga crítica obtida pelo problema de autovalor linearizado deve ser apenas utilizada como uma referência, já que em muitos casos uma estrutura pode sofrer um colapso quando submetida a um carregamento consideravelmente menor do que o esperado. Para estruturas em que existe a possibilidade de grandes deslocamentos e rotações, o grau de não-linearidade geométrica torna-se muito elevado para que se possa considerar confiável um resultado obtido por uma análise linear. Nesses casos, inclusive, é possível que o material já tenha se deformado a tal ponto que sua a relação *tensão x deformação* não seja mais linear.

Diversas formas de obtenção de cargas de colapso de estruturas podem ser encontradas na literatura, como o conceito de Rankine-Merchant (Horne & Merchant, 1965), pelo qual pode-se chegar a um valor de carga de colapso a partir da seguinte expressão:

$$\frac{1}{\lambda_R} = \frac{1}{\lambda_C} + \frac{1}{\lambda_P} \quad (2.56)$$

onde λ_R é o valor da carga de Rankine, λ_C , a carga crítica clássica e λ_P a carga de colapso elasto-plástico da estrutura. A carga de colapso elasto-plástico de estruturas é obtida a partir da formação de rótulas plásticas (Gabbay, 1977).

2.2.4. Análise Dinâmica

Problemas dinâmicos são governados pela equação característica, dada em (2.30), generalizada para mais de um grau de liberdade no caso de vibrações harmônicas (Paz, 1997):

$$\left(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}_E\right) \mathbf{d}(\mathbf{t}) = \mathbf{f}(\mathbf{t}) \quad (2.57)$$

Na expressão (2.57), \mathbf{M} é a matriz de massa, ω_i são as frequências naturais de vibração da estrutura e $\mathbf{f}(\mathbf{t})$ é o vetor de forças que, neste caso, dependem do tempo, assim como os deslocamentos.

Quando $\mathbf{f}(\mathbf{t}) = \mathbf{0}$, a equação (2.57) transforma-se num problema de autovalor generalizado, semelhante ao que foi visto na seção anterior para o cálculo de cargas críticas, no qual, para cada autovalor ω_i , o autovetor \mathbf{d}_i obtido corresponde a um modo de vibração natural da estrutura descarregada.

A matriz de massa, em alguns casos, é formada pela distribuição da massa da estrutura pelos seus nós, o que resulta em uma matriz diagonal. Entretanto, para uma formulação consistente da matriz de massa é necessário fazer uso das funções de forma dos elementos, da seguinte forma:

$$m_{i,j} = \rho A \int_0^L N_i(x) N_j(x) dx \quad (2.58)$$

$$\mathbf{m} = \rho A \begin{bmatrix} \frac{L}{3} & 0 & 0 & \frac{L}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13L}{35} & \frac{11L^2}{210} & 0 & \frac{9L}{70} & -\frac{13L^2}{420} \\ 0 & \frac{11L^2}{210} & \frac{L^3}{105} & 0 & \frac{13L^2}{420} & -\frac{L^3}{140} \\ \frac{L}{6} & 0 & 0 & \frac{L}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9L}{70} & \frac{13L^2}{420} & 0 & \frac{13L}{35} & -\frac{11L^2}{210} \\ 0 & -\frac{13L^2}{420} & -\frac{L^3}{140} & 0 & -\frac{11L^2}{210} & \frac{L^3}{105} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Quando é necessário incluir o efeito da flambagem numa análise dinâmica, a equação (2.57) é modificada pela inclusão da matriz geométrica, da seguinte forma:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}_E + \lambda \mathbf{K}_G) \mathbf{d}(\mathbf{t}) = \mathbf{f}(\mathbf{t}) \quad (2.60)$$

Caso a matriz geométrica seja multiplicada por um fator de carga crítico, obtido do problema de autovalor em (2.54), faz-se necessário que a frequência de vibração correspondente a esse modo crítico se anule. Esta propriedade é utilizada para a obtenção de cargas críticas em problemas dinâmicos e pode também servir para verificar a precisão da carga crítica obtida pela análise de autovalor.

$$\left(-\omega_i^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}_E + \lambda_i \mathbf{K}_G\right) \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (2.61)$$

Nota-se pela equação acima que, quando $\lambda_i = \lambda_{cr}$, necessariamente $\omega_i = 0$, para que a equação (2.54) continue sendo satisfeita. Conclui-se portanto que uma análise de autovalor baseada em (2.61), fazendo $\lambda_i = \lambda_{cr}$, dará como resultado, para a primeira frequência de vibração, um valor nulo.

Pode-se também concluir pela equação (2.61) que as frequências naturais de vibração da estrutura são modificadas pela inclusão da matriz geométrica. Se a estrutura está submetida a uma carga axial de compressão, por exemplo, a primeira frequência de vibração irá diminuir à medida que a carga aumenta, até chegar a um valor nulo quando a primeira carga crítica é atingida.

Reescrevendo a equação (2.61) pode-se obter uma relação entre os fatores de carga críticos λ_i e os quadrados das frequências naturais de vibração ω_i^2 . Verifica-se, portanto, que essa relação é linear desde que o vetor \mathbf{d} não seja nulo (solução trivial) e não haja fatores de carga com valores muito próximos (interação modal), o que permite o uso de interpolações e extrapolações lineares para a determinação da carga crítica de estruturas que apresentem apenas um modo significativo.

$$\left(\mathbf{K}_E + \lambda_i \mathbf{K}_G\right) \mathbf{d} = \omega_i^2 \mathbf{M} \mathbf{d} \quad (2.62)$$

Outras relações entre cargas e frequências de vibração podem ser obtidas para carregamentos não nodais. Jurjo (2001) formulou uma relação entre o peso próprio e a primeira frequência natural de vibração de uma coluna engastada e livre.

2.2.5. Formulação Hierárquica no MEF

A formulação clássica dos elementos finitos envolve o uso de aproximações polinomiais definidas a partir dos nós dos elementos. Diversos trabalhos têm utilizado a chamada formulação hierárquica, em que as funções de interpolação nas arestas ou faces dos elementos são definidas a partir de parâmetros não nodais, mantendo-se a compatibilidade através de pequenas alterações nos algoritmos tradicionais.

Na formulação hierárquica adota-se uma metodologia em que as funções de forma são simplesmente acrescentadas, enriquecendo a solução aproximada, sem interferência nas funções existentes. Isto é possível uma vez que os graus de liberdade generalizados são mantidos como incógnitas.

As funções trigonométricas, por sua simplicidade e alto grau de convergência, constituem-se num recurso interessante para o enriquecimento dos elementos. Tais funções são amplamente utilizadas em métodos aproximados de análise estrutural, como o de Rayleigh-Ritz, para descrever o campo de deslocamentos de uma viga, por exemplo.

Lages (1992) apresentou uma metodologia na qual combinavam-se funções polinomiais e trigonométricas para a análise de problemas em estado plano de tensões e deformações.

Cada função de forma adicional acrescenta um grau de liberdade “fictício” ao elemento, que será mantido como incógnita já que não está associado a um nó. A grande vantagem da formulação hierárquica é, portanto, a possibilidade do aumento na precisão dos elementos sem a necessidade de uma maior discretização, mantendo-se a estrutura de dados original intacta, pois apenas os graus de liberdade nodais são calculados na análise.

Neste trabalho, a formulação hierárquica é utilizada na formulação de elementos para a análise da estabilidade de pórticos planos, já que os elementos de

pórtico padrão apresentam resultados pobres na obtenção de cargas críticas no caso de se discretizar a estrutura com um elemento por barra.

Tomando por base o trabalho de Lages, formularam-se funções hierárquicas para enriquecer os elementos de pórtico, satisfazendo as suas condições de contorno, com o intuito de não alterar os valores dos deslocamentos nodais. Apenas o campo de deslocamentos de viga (flexão) foi enriquecido, sendo mantida a formulação clássica para os deslocamentos de treliça (axiais).

Combinando-se funções polinomiais cúbicas e funções seno, foi gerada uma família de funções da seguinte forma:

$$N_H(x)_n = a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.63)$$

onde n vai de 1 até o número de funções adicionais e L é o comprimento do elemento. Os coeficientes a , b , c e d devem ser obtidos com a imposição das seguintes condições de contorno:

$$N_H(0)_n = 0 \quad (2.64)$$

$$N_H(L)_n = 0 \quad (2.65)$$

$$\left. \frac{dN_H(x)_n}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (2.66)$$

$$\left. \frac{dN_H(x)_n}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad (2.67)$$

As condições de contorno impostas garantem que os valores dos deslocamentos e rotações nodais não serão alterados pelas funções adicionais. A família de funções resultante tem a seguinte forma geral, mostrada na equação (2.68):

$$N_H(x)_n = -\frac{n\pi}{L}x + \frac{n\pi}{L^2}\left[2 + (-1)^n\right]x^2 - \frac{n\pi}{L^3}\left[1 + (-1)^n\right]x^3 + \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.68)$$

As matrizes de rigidez, de massa e geométrica são acrescidas de uma linha e uma coluna para cada função adicional, mas a parcela relativa ao elemento finito original não é modificada.

A matriz de rigidez do elemento enriquecido, por exemplo, é dada por:

$$\mathbf{k}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_E^{PP} & \mathbf{k}_E^{PH} \\ \mathbf{k}_E^{HP} & \mathbf{k}_E^{HH} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

onde \mathbf{k}_E^{PP} é a matriz de rigidez original do elemento pela formulação polinomial e \mathbf{k}_E^{HP} , \mathbf{k}_E^{PH} e \mathbf{k}_E^{HH} são dadas por:

$$k_E^{PH}_{i,j} = k_E^{HP}_{j,i} = EI \int_0^L \left(\frac{d^2 N_i(x)}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 N_H(x)_j}{dx^2} \right) dx \quad (2.70)$$

$$k_E^{HH}_{i,j} = EI \int_0^L \left(\frac{d^2 N_H(x)_i}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 N_H(x)_j}{dx^2} \right) dx \quad (2.71)$$

No caso da formulação polinomial e trigonométrica, as matrizes \mathbf{k}_E^{HP} e \mathbf{k}_E^{PH} são nulas, garantido o total desacoplamento entre os graus de liberdade nodais e adicionais na matriz de rigidez, o que permite que a análise linear elástica permaneça inalterada. É importante lembrar que nas matrizes geométrica e de massa não existe esse desacoplamento, sendo esta a razão de a formulação hierárquica ser especialmente útil para problemas de estabilidade e dinâmica.

4 ESTUDO DOS PONTOS DE BIFURCAÇÃO

No caso da estabilidade linear elástica “clássica”, todos os pontos críticos obtidos a partir do problema de autovalor são pontos de bifurcação. Pontos limites só podem ser obtidos através de uma análise não-linear completa, que foge ao escopo deste trabalho.

A caracterização do ponto de bifurcação permite avaliar a sensibilidade da estrutura às imperfeições. Sabe-se que, na prática, não há estruturas perfeitas, sendo muito importante determinar qual o comportamento pós-crítico do sistema caso haja imperfeições na sua geometria, na aplicação do carregamento ou em ambos.

Há diversas formas de se determinar o tipo de bifurcação de uma estrutura, sendo que a mais comum é verificar o sinal do determinante da matriz de rigidez tangente na vizinhança do ponto crítico, já que tal procedimento é análogo a verificar o sinal da forma quadrática da segunda variação da energia potencial (Parente, 2000). Essa metodologia é de fácil entendimento, porém implica em esforço computacional. Na literatura podem-se encontrar maneiras mais simples de caracterização de pontos de bifurcação a partir do problema de autovalor generalizado (Guimarães, 1999; Waszczyszyn, 1994).

De uma maneira intuitiva, podemos concluir que, se uma estrutura apresenta bifurcação simétrica estável, sua rigidez tangente aumenta com as deformações, fazendo com que a mesma suporte mais carga. Sendo assim, é de se esperar que uma nova análise de autovalor, realizada na estrutura submetida a um certo nível de deformação, leve a um valor de carga crítica maior do que na estrutura indeformada. Analogamente, se a carga crítica diminui para o caso da estrutura deformada, o sistema apresenta bifurcação simétrica instável. Pode acontecer, ainda, de o valor da carga crítica aumentar para certo nível de deformação e

diminuir para outro de sinal contrário; neste caso, o ponto crítico é caracterizado por uma bifurcação assimétrica, que também é instável. Tal raciocínio pode ser visto no esquema da figura 4.1, onde λ_{imp} é o autovalor para a estrutura deformada (imperfeita) e λ_{cr} é o autovalor da estrutura perfeita. Pode-se notar que no caso da figura 4.1a o valor de λ_{imp} aumenta qualquer que seja o parâmetro de deslocamento (bifurcação simétrica estável). No caso da figura 4.1b, o valor de λ_{imp} é menor do que λ_{cr} qualquer que seja δ (bifurcação simétrica instável). Já no caso da figura 4.1c, λ_{imp} é maior do que λ_{cr} para valores positivos de δ e menor do que λ_{cr} para valores negativos de δ (bifurcação assimétrica). Deve-se lembrar que os gráficos da figura 4.1 representam uma linearização do caminho pós-crítico que, neste caso, é avaliado em apenas três pontos.

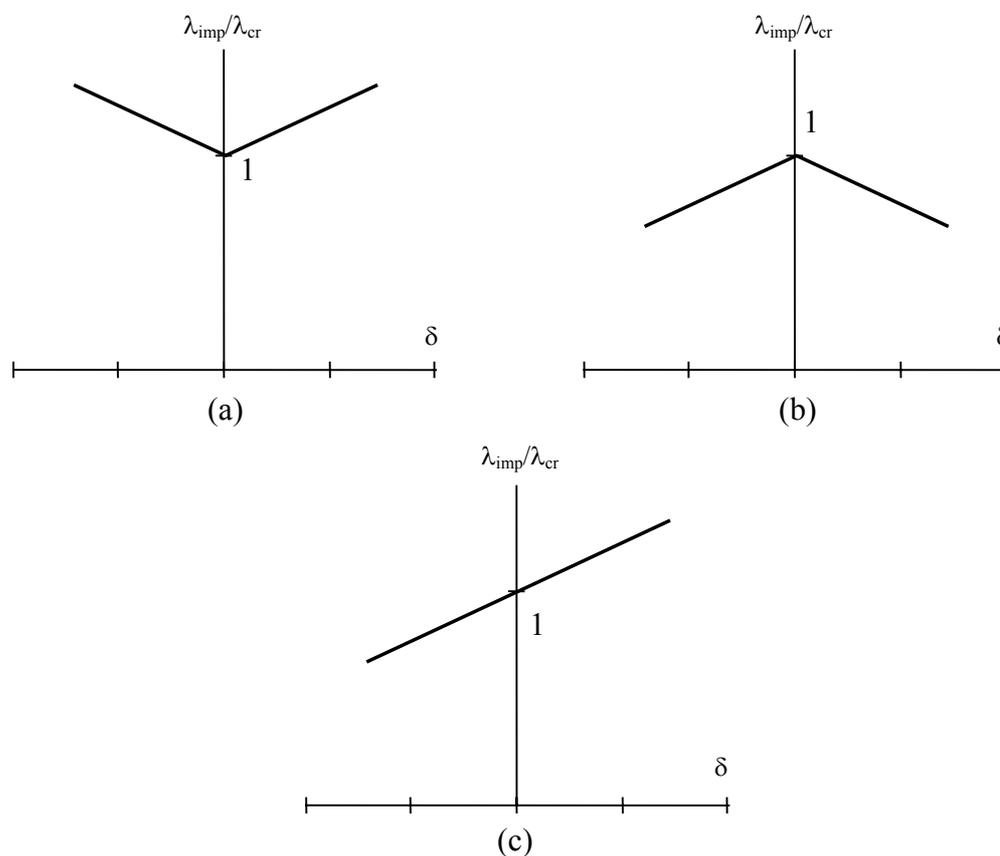


Figura 4.1 – Formas linearizadas de bifurcação

Avaliando-se a matriz tangente da estrutura no ponto de bifurcação e adicionando-se uma perturbação na direção do autovetor correspondente à

primeira carga crítica pode-se facilmente avaliar o comportamento do ponto de bifurcação, da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_E(\mathbf{q}_B + \xi \mathbf{v}) + \lambda_{\text{imp}}^+ \mathbf{K}_G(\mathbf{q}_B + \xi \mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{K}_E(\mathbf{q}_B - \xi \mathbf{v}) + \lambda_{\text{imp}}^- \mathbf{K}_G(\mathbf{q}_B - \xi \mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

Nas equações acima, \mathbf{q}_B é o vetor dos deslocamentos da análise linear para a estrutura perfeita submetida ao carregamento crítico, \mathbf{v} é o autovetor normalizado correspondente ao primeiro autovalor obtido da análise de estabilidade linearizada, λ_{imp}^+ e λ_{imp}^- são os novos valores para os fatores de carga críticos, na vizinhança do ponto de bifurcação e ξ é um multiplicador escalar menor que a unidade.

Resolve-se o sistema de equações, usando a matriz de rigidez elástica original (estrutura perfeita) e, posteriormente, através dos deslocamentos obtidos, somados a um valor proporcional ao primeiro modo de flambagem, forma-se um novo campo de coordenadas nodais. Obtidas as coordenadas nodais da estrutura deformada, acrescidas de uma perturbação, utiliza-se o procedimento usual para formar as novas matrizes de rotação dos elementos. As novas matrizes de rigidez e geométrica da estrutura são então formadas a partir da nova geometria. Tal procedimento é análogo ao realizado por Guimarães (1999), com a ressalva de que as “imperfeições” neste caso são proporcionais ao modo de flambagem da estrutura, além do fato de o comprimento das barras ser recalculado após a modificação das coordenadas dos nós, resultando na modificação não apenas da matriz de rigidez, mas também da matriz geométrica, já que esta depende do comprimento da barra e do esforço axial na mesma, que também é modificado com a variação na geometria da estrutura.

5 TESTES NUMÉRICOS EM COLUNAS

Os elementos finitos propostos serão agora testados em termos de resultados numéricos. Os exemplos utilizados são condizentes com a hipótese de que as rotações anteriores à flambagem são suficientemente pequenas, podendo ser desconsideradas.

Nesta fase, todos os testes foram realizados com o auxílio do programa Mathcad. Uma descrição mais detalhada do que foi implementado encontra-se no Apêndice A.

Primeiramente, serão calculadas as primeiras cargas críticas para as seis condições de contorno usuais em colunas submetidas a um carregamento axial.

Num segundo momento, serão analisados três exemplos para o estudo do ponto de bifurcação. Cada exemplo estudado tem como resultado analítico um tipo de bifurcação: a primeira é do tipo simétrica estável, a segunda, simétrica instável e a terceira, assimétrica (também instável). Para esta análise foi utilizado apenas o elemento BSB2.

5.1. Cálculo de Cargas Críticas

As cargas críticas são obtidas através da resolução do problema de autovalor generalizado, no que é conhecido como a análise de estabilidade “clássica”.

Foram estudados modelos com um e 2 elementos BSB1 (padrão) e com um elemento BSB2, BSB3-H e BSB3-P por barra. Para não haver interferência das unidades adotadas e facilitar a visualização imediata das cargas críticas obtidas, optou-se por utilizar um valor unitário para todos os parâmetros do modelo, ou seja, $E = L = I = 1$. O único parâmetro com um valor diferente da unidade é a

área da seção transversal, $A = 100$, definida desta forma para manter uma relação coerente com o momento de inércia I . Caso o valor da área fosse unitário, as rigidezes de treliça e viga teriam valores equivalentes, o que não representa uma estrutura real.

5.1.1. Coluna Engastada e Livre

Procedeu-se ao cálculo da primeira carga crítica da coluna engastada e livre, cujo valor analítico é $P_{cr} = \pi^2 EI / (4L^2)$. A figura 5.1 mostra o esquema da coluna citada.



Figura 5.1 – Coluna engastada e livre

O valor de referência para a carga crítica é $P_{cr} = \pi^2 / 4 = 2.4674$, já que as outras grandezas envolvidas na fórmula são unitárias. Os resultados obtidos podem ser vistos na tabela 5.1.

	Valor analítico	BSB1		BSB2	BSB3-H	BSB3-P
Nº elementos		1	2	1	1	1
Carga crítica	2.4674	2.486	2.469	2.469	2.4675	2.4674
% de erro	-	0.75 %	0.06 %	0.06 %	0.01 %	0 %

Tabela 5.1 – Resultados para a coluna engastada e livre

O valor obtido para o primeiro modo crítico, ou seja, o autovetor para a primeira carga crítica é mostrado na equação (5.1) para o elemento BSB2.

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.53701 \\ -0.84356 \\ 0.00570 \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

Os valores obtidos foram interpolados pelas funções de forma relativas aos deslocamentos transversais e rotações do elemento BSB2 e o resultado da distribuição do campo de deslocamentos pode ser visto na figura 5.2. Nota-se que o resultado da interpolação é condizente com o modo crítico da coluna engastada e livre, que é $v(x) = C (1 - \cos(\pi x/2L))$, sendo C uma constante arbitrária.

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{i=2}^{i=3} N_i(\mathbf{x})v_i + \sum_{i=5}^{i=7} N_i(\mathbf{x})v_i \quad (5.2)$$

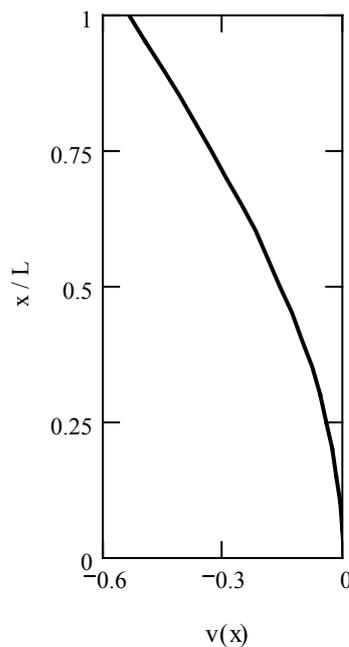


Figura 5.2 – Deslocamentos da coluna engastada e livre

5.1.2. Coluna Bi-apoiada

Procedeu-se ao cálculo da primeira carga crítica da coluna de Euler, cujo valor analítico é $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$. A figura 5.3 mostra o esquema da coluna bi-apoiada.



Figura 5.3 – Coluna bi-apoiada

O valor de referência para a carga crítica é, portanto, $P_{cr} = \pi^2 = 9.8696$. Os resultados obtidos podem ser vistos na tabela 5.2.

	Valor analítico	BSB1		BSB2	BSB3-H	BSB3-P
Nº elementos		1	2	1	1	1
Carga crítica	9.8696	12	9.944	9.9579	9.8696	9.8751
% de erro	-	21.58 %	0.75 %	0.89 %	0 %	0.06 %

Tabela 5.2 – Resultados para a coluna bi-apoiada

O valor obtido para o primeiro modo crítico, ou seja, o autovetor para a primeira carga crítica é mostrado na equação (5.3) para o elemento BSB2.

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.70628 \\ 0 \\ 0 \\ 0.70628 \\ -0.04828 \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

Os valores obtidos foram interpolados pelas funções de forma relativas aos deslocamentos transversais e rotações do elemento BSB2 e o resultado da distribuição do campo de deslocamentos pode ser visto na figura 5.4. Nota-se que o resultado da interpolação é condizente com o modo crítico da coluna bi-apoiada, que é $v(x) = C \text{sen}(\pi x/L)$, sendo C uma constante arbitrária.

$$v(x) = \sum_{i=2}^{i=3} N_i(x)v_i + \sum_{i=5}^{i=7} N_i(x)v_i \quad (5.4)$$

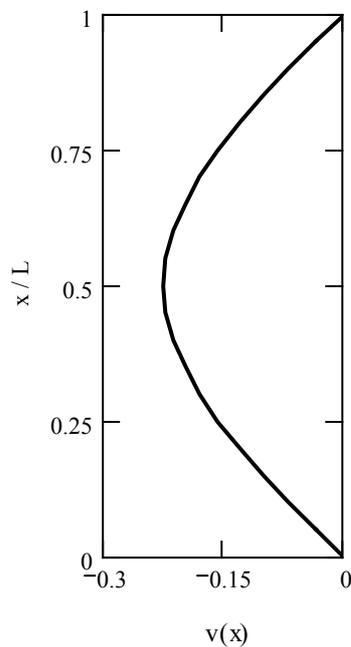


Figura 5.4 – Deslocamentos para a coluna bi-apoiada

5.1.3. Coluna Bi-engastada

Procedeu-se ao cálculo da primeira carga crítica da coluna bi-engastada, cujo valor analítico é $P_{cr} = 4\pi^2 EI/L^2$. A figura 5.5 mostra o esquema da coluna.



Figura 5.5 – Coluna bi-engastada

O valor de referência para a carga crítica é, portanto, $P_{cr} = 4\pi^2 = 39.4784$. Os resultados obtidos podem ser vistos na tabela 5.3.

	Valor analítico	BSB1		BSB2	BSB3-H	BSB3-P
Nº elementos		1	2	1	1	1
Carga crítica	39.4784	-	40	39.4784	41.0652	42
% de erro	-	-	1.32 %	0 %	4.02 %	6.39 %

Tabela 5.3 – Resultados para a coluna bi-engastada

O valor obtido para o primeiro modo crítico, ou seja, o autovetor para a primeira carga crítica é mostrado na equação (5.5) para o elemento BSB2.

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

Os valores obtidos foram interpolados pelas funções de forma relativas aos deslocamentos transversais e rotações do elemento BSB2 e o resultado da distribuição do campo de deslocamentos pode ser visto na figura 5.6. Nota-se que o resultado da interpolação é condizente com o modo crítico da coluna bi-engastada, que é $v(x) = C (1 - \cos(2\pi x/L))$, sendo C uma constante arbitrária.

$$v(x) = \sum_{i=2}^{i=3} N_i(x)v_i + \sum_{i=5}^{i=7} N_i(x)v_i \quad (5.6)$$

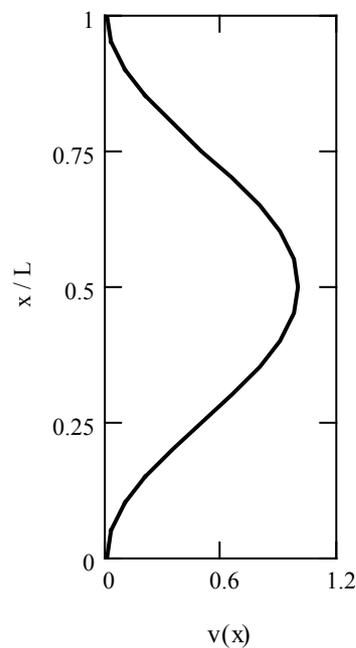


Figura 5.6 – Deslocamentos para a coluna bi-engastada

5.1.4. Coluna Engastada e Apoiada

Procedeu-se ao cálculo da primeira carga crítica da coluna engastada e apoiada, cujo valor analítico é $P_{cr} = \pi^2 EI / (0.701L)^2$. A figura 5.7 mostra o esquema da coluna.



Figura 5.7 – Coluna engastada e apoiada

O valor de referência para a carga crítica é $P_{cr} = 2.035\pi^2 = 20.0846$. Os resultados obtidos podem ser vistos na tabela 5.4.

	Valor analítico	BSB1		BSB2	BSB3-H	BSB3-P
Nº elementos		1	2	1	1	1
Carga crítica	20.0846	30	20.71	20.9711	20.2228	20.2858
% de erro	-	49.37 %	3.11 %	4.41 %	0.69 %	1 %

Tabela 5.4 – Resultados para a coluna engastada e apoiada

O valor obtido para o primeiro modo crítico, ou seja, o autovetor para a primeira carga crítica é mostrado na equação (5.7) para o elemento BSB2.

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.99347 \\ 0.11406 \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

Os valores obtidos foram interpolados pelas funções de forma relativas aos deslocamentos transversais e rotações do elemento BSB2 e o resultado da distribuição do campo de deslocamentos pode ser visto na figura 5.8. Nota-se que o resultado da interpolação é condizente com o modo crítico da coluna engastada e apoiada.

$$v(x) = \sum_{i=2}^{i=3} N_i(x)v_i + \sum_{i=5}^{i=7} N_i(x)v_i \quad (5.8)$$

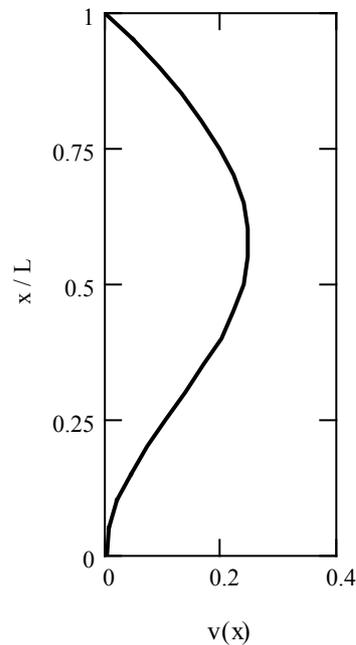


Figura 5.8 – Deslocamentos para a coluna engastada e apoiada

5.1.5. Coluna com Engaste e Apoio Deslizante

Procedeu-se ao cálculo da primeira carga crítica da coluna com engaste numa extremidade e apoio deslizante na outra, cujo valor analítico é $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$. A figura 5.9 mostra o esquema da coluna.



Figura 5.9 – Coluna com engaste e apoio deslizante

O valor de referência para a carga crítica é, portanto, $P_{cr} = \pi^2 = 9.8696$. Os resultados obtidos podem ser vistos na tabela 5.5.

	Valor analítico	BSB1		BSB2	BSB3-H	BSB3-P
Nº elementos		1	2	1	1	1
Carga crítica	9.8696	10	9.944	10	9.8715	9.8698
% de erro	-	1.32 %	0.75 %	1.32 %	0.02 %	0.01 %

Tabela 5.5 – Resultados para a coluna engastada e com apoio deslizante

O valor obtido para o primeiro modo crítico, ou seja, o autovetor para a primeira carga crítica é mostrado na equação (5.9) para o elemento BSB2.

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

Os valores obtidos foram interpolados pelas funções de forma relativas aos deslocamentos transversais e rotações do elemento BSB2 e o resultado da distribuição do campo de deslocamentos pode ser visto na figura 5.10. Nota-se que o resultado da interpolação é condizente com o modo crítico da coluna com engaste e apoio deslizando, que é $v(x) = C (1 - \cos(\pi x/L))$, sendo C uma constante arbitrária.

$$v(x) = \sum_{i=2}^{i=3} N_i(x)v_i + \sum_{i=5}^{i=7} N_i(x)v_i \quad (5.10)$$

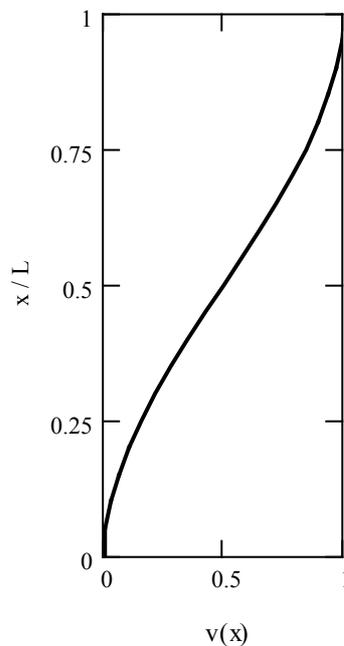


Figura 5.10 – Deslocamentos para a coluna engastada e com apoio deslizando

5.1.6. Coluna com Apoios Simples e Deslizante

Procedeu-se ao cálculo da primeira carga crítica da coluna com apoio simples numa extremidade e deslizante na outra, cujo valor analítico é $P_{cr} = \pi^2 EI / (4L^2)$. A figura 5.11 mostra o esquema da coluna.



Figura 5.11 – Coluna com apoios simples e deslizante

O valor de referência para a carga crítica é, portanto, $P_{cr} = \pi^2 / 4 = 2.4674$. Os resultados obtidos podem ser vistos na tabela 5.6.

	Valor analítico	BSB1		BSB2	BSB3-H	BSB3-P
Nº elementos		1	2	1	1	1
Carga crítica	2.4674	2.486	2.469	2.469	2.4675	2.4674
% de erro	-	0.75 %	0.06 %	0.06 %	0.01 %	0 %

Tabela 5.6 – Resultados para a coluna com apoios simples e deslizante

O valor obtido para o primeiro modo crítico, ou seja, o autovetor para a primeira carga crítica é mostrado na equação (5.11) para o elemento BSB2.

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.84356 \\ 0 \\ 0.53701 \\ 0 \\ 0.00570 \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

Os valores obtidos foram interpolados pelas funções de forma relativas aos deslocamentos transversais e rotações do elemento BSB2 e o resultado da distribuição do campo de deslocamentos pode ser visto na figura 5.12. Nota-se que o resultado da interpolação é condizente com o modo crítico da coluna com apoios simples e deslizante, que é $v(x) = C \cos(\pi x/2L)$, sendo C uma constante arbitrária.

$$v(x) = \sum_{i=2}^{i=3} N_i(x)v_i + \sum_{i=5}^{i=7} N_i(x)v_i \quad (5.12)$$

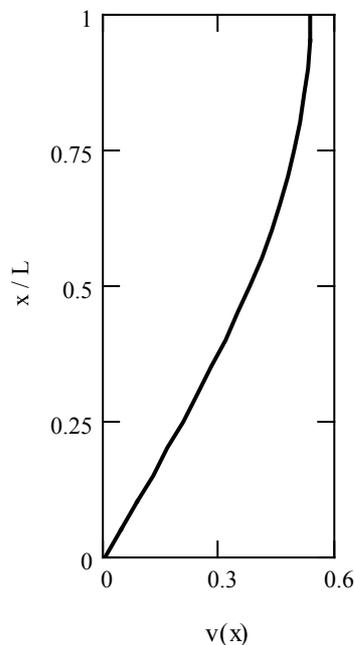


Figura 5.12 – Deslocamentos para a coluna com apoios simples e deslizante

5.2. Avaliação do Tipo de Bifurcação

Para a caracterização do comportamento da estrutura na vizinhança do ponto crítico, será somado ao vetor de deslocamentos obtido da análise linear elástica um vetor correspondente ao modo crítico, ou seja, as matrizes elástica e geométrica serão calculadas no seguinte ponto (o coeficiente que multiplica o autovetor não é relevante, já que este indica apenas uma direção preferencial de deslocamento da estrutura):

$$\mathbf{K}_E = \mathbf{K}_E (\mathbf{q}_B + \xi \mathbf{v}) \quad (5.13)$$

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{K}_G (\mathbf{q}_B + \xi \mathbf{v}) \quad (5.14)$$

Nas equações acima, \mathbf{q}_B é o vetor dos deslocamentos da análise linear para a estrutura perfeita submetida ao carregamento crítico, \mathbf{v} é o autovetor normalizado correspondente ao primeiro autovalor obtido da análise de estabilidade linearizada e ξ é um multiplicador escalar menor que a unidade.

Para a verificação da simetria ou não da bifurcação, as matrizes são avaliadas também no seguinte ponto:

$$\mathbf{K}_E = \mathbf{K}_E (\mathbf{q}_B - \xi \mathbf{v}) \quad (5.15)$$

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{K}_G (\mathbf{q}_B - \xi \mathbf{v}) \quad (5.16)$$

O vetor de deslocamentos \mathbf{q}_B pode ser obtido da análise linear elástica para $P = P_{cr}$. Neste caso, optou-se pela não utilização de \mathbf{q}_B , já que o deslocamento axial provocado pela carga P numa análise linear elástica pode ser desprezado. A nova geometria da estrutura foi dada pela introdução de \mathbf{v} na formação das novas coordenadas. Vale lembrar que apenas as modificações nas coordenadas x e y do elemento serão introduzidas, já que o eixo do mesmo é representado por uma barra rígida não podendo, portanto, haver variação de rotações ao longo do

elemento. Em outras palavras, os deslocamentos introduzidos pelo autovetor v são deslocamentos de corpo rígido e não deformações.

A mudança de coordenadas acarreta uma mudança na matriz de transformação, que agora deve levar em consideração o ângulo que o elemento faz com o eixo x . As matrizes de rigidez e geométrica são, portanto, modificadas em relação aos seus valores para a estrutura perfeita.

Como visto no Capítulo 4, uma nova análise de autovalor é feita para a estrutura modificada e as cargas críticas obtidas (para valores positivos e negativos do autovetor) são comparadas com o valor para a estrutura perfeita.

A solução analítica para caminhos de equilíbrio correspondentes aos das colunas imperfeitas mostra que não existe uma carga de flambagem para estas estruturas (Bazant, 1991). Entretanto, a formulação matricial utilizada permite calcular um valor para o parâmetro de carga crítico da estrutura imperfeita, o qual está sendo denominado λ_{imp} . A figura abaixo mostra o caminho pós-crítico analítico para a coluna de Euler imperfeita ($\delta_0 \neq 0$), onde se pode notar a inexistência de uma carga de bifurcação.

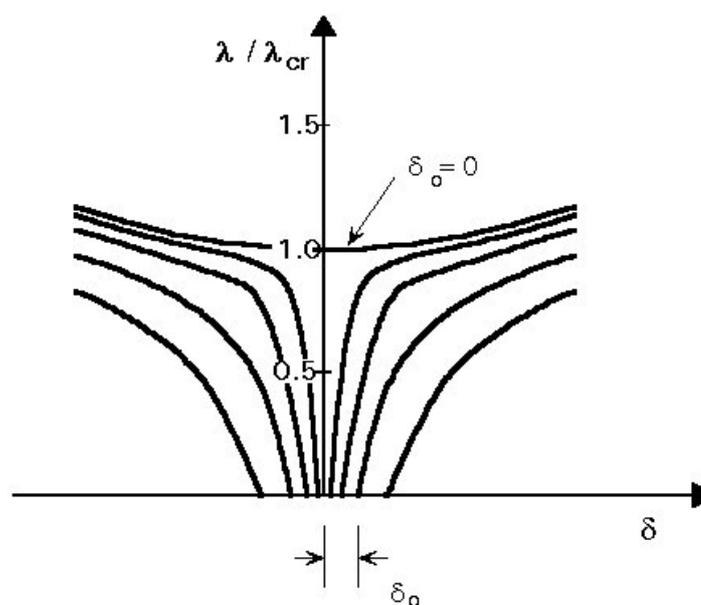


Figura 5.13 – Caminhos de equilíbrio da coluna de Euler com imperfeição inicial

Três exemplos clássicos foram formulados, com resultados analíticos já conhecidos, cada um correspondendo a um tipo de bifurcação. O parâmetro de deslocamento utilizado foi o deslocamento transversal ao eixo da coluna, que é um valor existente no modo crítico de todos os exemplos estudados. O elemento utilizado para a modelagem foi o BSB2.

5.2.1. Bifurcação Simétrica Estável

Procedeu-se ao cálculo do primeiro fator de carga crítico da coluna rígida com apoio fixo em x e y e uma mola rotacional de rigidez finita em z , cujo valor analítico é $\lambda_{cr} = k/L$, sendo k a constante de rigidez da mola, que foi estabelecida unitária, de forma análoga ao que foi feito na seção anterior. A figura 5.14 mostra o esquema da coluna.



Figura 5.14 – Modelo de coluna com bifurcação simétrica estável

O valor obtido para o fator de carga crítico utilizando o elemento BSB2 foi $\lambda_{cr} = 0.74$, que é bem distante do esperado, $\lambda_{teórico} = 1$. No entanto, para uma análise qualitativa do tipo de bifurcação, o erro não é relevante.

O valor obtido para o modo crítico, ou seja, o autovetor para a primeira carga crítica é mostrado na equação (5.17).

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.43954 \\ 0 \\ 0.59382 \\ 0.67393 \\ -0.00045 \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

Os valores obtidos foram interpolados pelas funções de forma relativas aos deslocamentos transversais e rotações do elemento BSB2 e o resultado da distribuição do campo de deslocamentos pode ser visto na figura 5.15. Nota-se que a coluna mantém-se quase reta, o que indica o deslocamento de corpo rígido.

$$v(x) = \sum_{i=2}^{i=3} N_i(x)v_i + \sum_{i=5}^{i=7} N_i(x)v_i \quad (5.18)$$

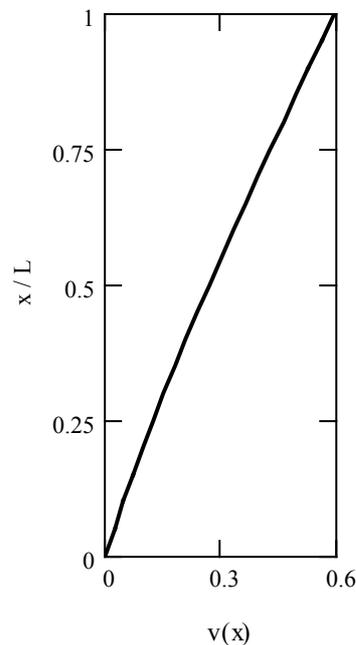


Figura 5.15 – Deslocamentos para a coluna com bifurcação estável

Seguindo o procedimento descrito no Capítulo 4, procedeu-se à transformação das matrizes de rigidez e geométrica para as novas coordenadas, tanto para valores positivos quanto negativos de v . Tal transformação é feita

introduzindo-se o ângulo α entre a barra e o eixo x na matriz de rotação. Uma descrição mais detalhada de toda a implementação pode ser encontrada no Apêndice A.

Após a transformação das matrizes de rigidez e geométrica, foi feita uma nova análise de autovalor, a partir da qual foram obtidos os fatores de carga $\lambda_{imp}^+ = 0.92$ e $\lambda_{imp}^- = 0.92$, correspondentes, respectivamente, a valores positivos e negativos de v .

Usando como parâmetro o deslocamento transversal, denominado δ , foi elaborado um gráfico que pode ser visto na figura 5.16:

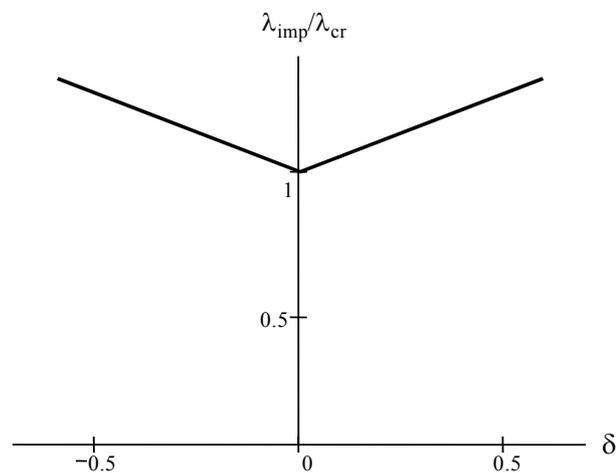


Figura 5.16 – Caminho pós-crítico linearizado para o exemplo 5.2.1

Para esse exemplo, os valores de λ_{imp} são maiores que λ_{cr} , correspondente à estrutura perfeita, levando a um $\Delta\lambda$ positivo, tanto para valores positivos quanto negativos de v . Fisicamente, o valor de λ_{imp} não ocorreria, porém, numericamente, esse valor é detectado e, sendo maior que λ_{cr} , constata-se que o sistema não se mostra sensível à existência da imperfeição. O resultado da bifurcação simétrica estável é compatível com o analítico.

5.2.2. Bifurcação Simétrica Instável

Procedeu-se ao cálculo do primeiro fator de carga crítico da coluna com apoio fixo em x e y no nó 1 e uma mola translacional no nó 2, cujo valor analítico é $\lambda_{cr} = kL$, sendo k a constante de rigidez da mola, que foi estabelecida unitária, de forma análoga ao que foi feito na seção anterior. A figura 5.17 mostra o esquema da coluna.

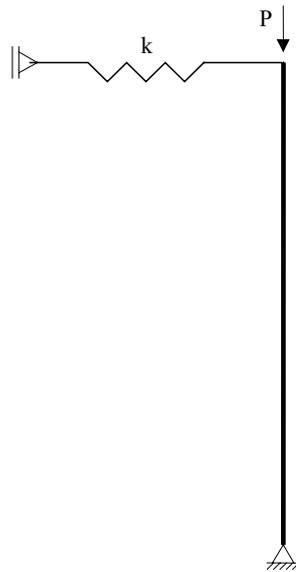


Figura 5.17 – Coluna com bifurcação simétrica instável

O valor obtido para o fator de carga crítico utilizando o elemento BSB2 foi $\lambda_{cr} = 1$, que é igual ao teórico, $\lambda_{teórico} = 1$.

O valor obtido para o primeiro modo crítico, ou seja, o autovetor para a primeira carga crítica é mostrado na equação (5.19).

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.54974 \\ 0 \\ 0.54974 \\ 0.54974 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

Os valores obtidos foram interpolados pelas funções de forma relativas aos deslocamentos transversais e rotações do elemento BSB2 e o resultado da distribuição do campo de deslocamentos pode ser visto na figura 5.18. Nota-se que a coluna mantém-se quase reta, o que indica o deslocamento de corpo rígido.

$$v(x) = \sum_{i=2}^{i=3} N_i(x)v_i + \sum_{i=5}^{i=7} N_i(x)v_i \quad (5.20)$$

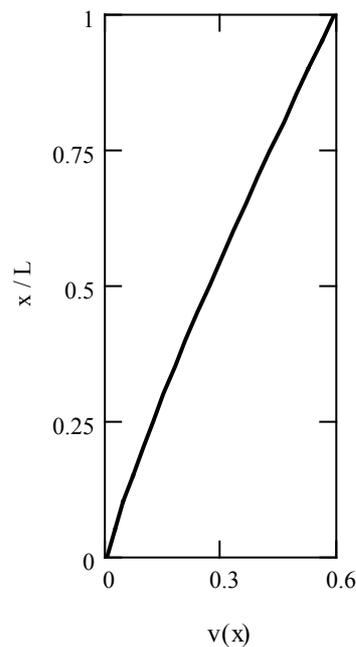


Figura 5.18 – Deslocamentos da coluna com bifurcação simétrica instável

Seguindo o procedimento descrito no Capítulo 4, procedeu-se à transformação das matrizes de rigidez e geométrica para as novas coordenadas, tanto para valores positivos quanto negativos de v . Tal transformação é feita introduzindo-se o ângulo α entre a barra e o eixo x na matriz de rotação.

Após a transformação das matrizes de rigidez e geométrica, foi feita uma nova análise de autovalor, a partir da qual foram obtidos os fatores de carga de $\lambda_{imp}^+ = 0.54$ e $\lambda_{imp}^- = 0.54$, correspondentes, respectivamente, a valores positivos e negativos de v .

Usando como parâmetro o deslocamento transversal, denominado δ , foi elaborado um gráfico que pode ser visto na figura 5.19:

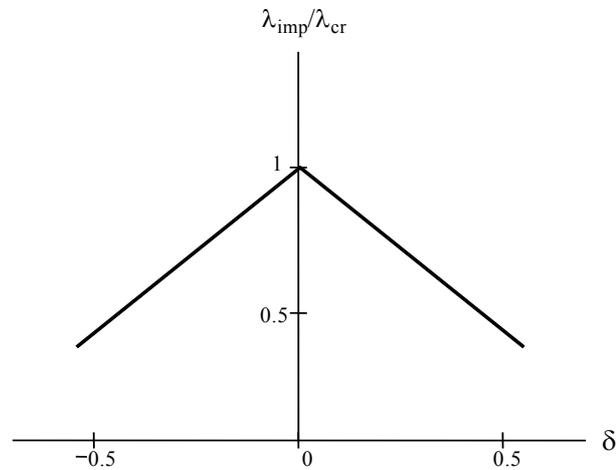


Figura 5.19 – Caminho pós-crítico linearizado para o exemplo 5.2.2

Para esse exemplo, os valores de λ_{imp} são menores que λ_{cr} , correspondente à estrutura perfeita, levando a um $\Delta\lambda$ negativo, tanto para valores positivos quanto negativos de v . Fisicamente, o valor de λ_{imp} não ocorreria, porém, numericamente, esse valor é detectado e, sendo menor que λ_{cr} , constata-se que o sistema mostra-se sensível à existência da imperfeição. O resultado da bifurcação simétrica instável é compatível com o analítico.

5.2.3. Bifurcação Assimétrica

Procedeu-se ao cálculo do primeiro fator de carga crítico da coluna com apoio fixo em x e y e uma mola translacional de rigidez k inclinada a 45° no nó 2, cujo valor analítico é $\lambda_{cr} = k/2L$. A constante de rigidez da mola foi estabelecida unitária, de forma análoga ao que foi feito na seção anterior. A figura 5.20 mostra o esquema da coluna.

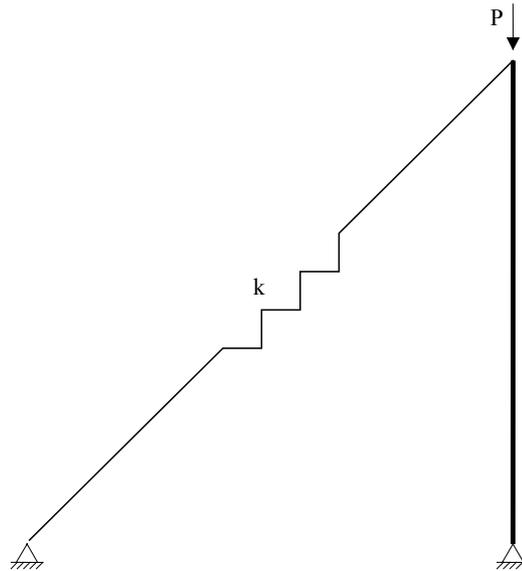


Figura 5.20 – Coluna com bifurcação assimétrica

O valor obtido para o fator de carga crítico utilizando o elemento BSB2 foi $\lambda_{cr} = 0.5$, que é igual ao teórico, $\lambda_{teórico} = 0.5$.

O valor obtido para o modo crítico, ou seja, o autovetor para a primeira carga crítica é mostrado na equação (5.21):

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.57735 \\ 0 \\ 0.57735 \\ 0.57735 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.21)$$

Os valores obtidos foram interpolados pelas funções de forma relativas aos deslocamentos transversais e rotações do elemento BSB2 e o resultado da distribuição do campo de deslocamentos pode ser visto na figura 5.21. Nota-se que a coluna mantém-se quase reta, o que indica o deslocamento de corpo rígido.

$$v(x) = \sum_{i=2}^{i=3} N_i(x)v_i + \sum_{i=5}^{i=7} N_i(x)v_i \quad (5.22)$$

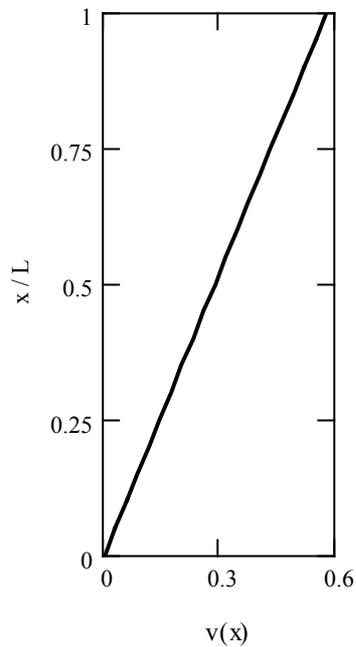


Figura 5.21 – Deslocamentos da coluna com bifurcação assimétrica

Seguindo o procedimento descrito no Capítulo 4, procedeu-se à transformação das matrizes de rigidez e geométrica para as novas coordenadas, tanto para valores positivos quanto negativos de v . Tal transformação é feita introduzindo-se os ângulos α e θ entre a barra e o eixo x e entre a mola e o eixo x , respectivamente, na matriz de rotação.

Após a transformação das matrizes de rigidez e geométrica, foi feita uma nova análise de autovalor, a partir da qual foram obtidos os fatores de carga $\lambda_{imp}^+ = 0.42$ e $\lambda_{imp}^- = 0.63$, correspondentes, respectivamente, a valores positivos e negativos de v .

Usando como parâmetro o deslocamento transversal, denominado δ , foi elaborado um gráfico que pode ser visto na figura 5.22.

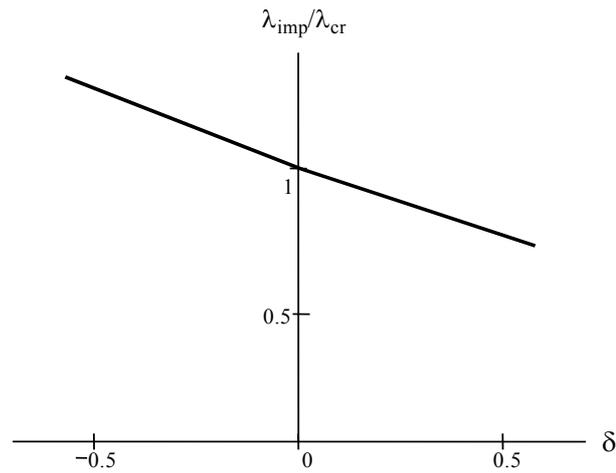


Figura 5.22 – Caminho pós-crítico linearizado para o exemplo 5.2.3

Para esse exemplo, os valores de λ_{imp} são maiores que λ_{cr} para valores negativos de \mathbf{v} , e menores para valores positivos de \mathbf{v} . Fisicamente, os valores de λ_{imp} não ocorreriam, porém, numericamente, esses valores são detectados e constata-se que o sistema mostra-se sensível à existência da imperfeição, já que a bifurcação é assimétrica.

6 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

O FTOOL, um programa gráfico interativo para análise de pórticos planos, é formado por dois componentes principais: o módulo FRAMOOOP e a interface gráfica propriamente dita.

O FRAMOOOP é, na verdade, uma simplificação do FEMOOOP, um programa de análise estrutural baseado no Método dos Elementos Finitos (Guimarães, 1992), em que foram mantidos apenas os algoritmos necessários para a análise de pórticos planos. O FRAMOOOP é responsável por toda a análise numérica do FTOOL, não tendo interface gráfica. A entrada de dados neste programa é feita por um arquivo neutro (*Neutral File*) e a resposta é dada também em forma de arquivo.

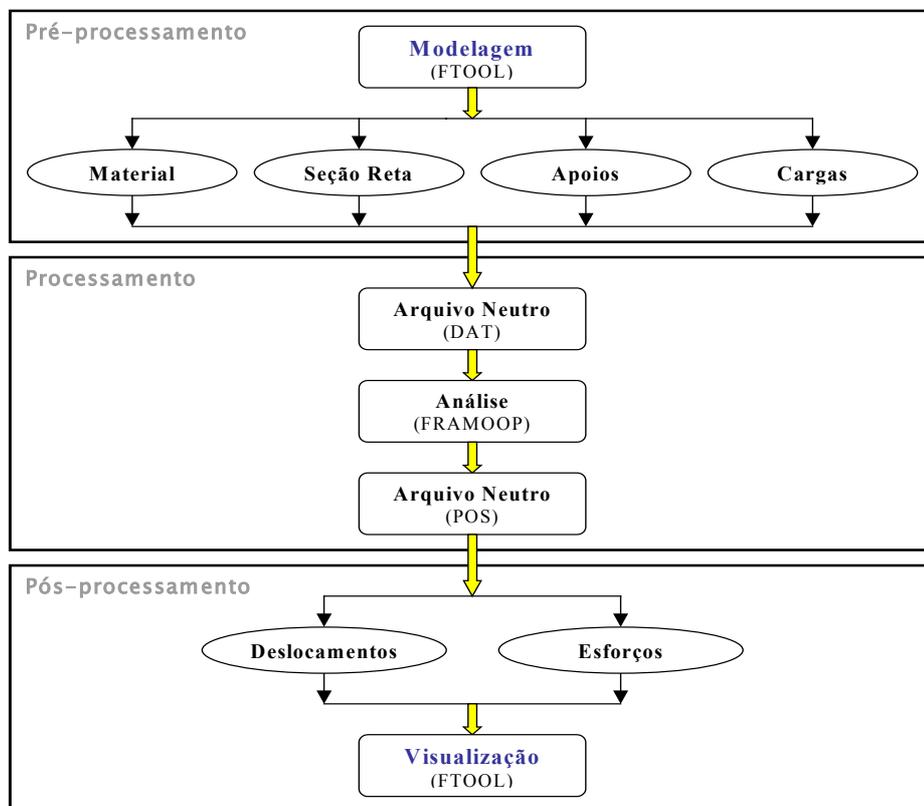


Figura 6.1 – Etapas de processamento no FTOOL

A interface gráfica do FTOOL é baseada na manipulação direta de entidades, utilizando um sistema de janelas, com menus em cascata e botões. São utilizados na sua implementação o sistema de interface IUP/LED (Levy, 1993; Prates, 1994) e o sistema gráfico CD (*Canvas Draw*), ambos desenvolvidos pelo TecGraf/PUC-RJ. Na fase de pré-processamento, toda a estrutura é criada através do uso de uma biblioteca de modelagem chamada HED (*Half-Edge Data Structure*), implementada por Celes (1990), e os atributos do modelo são escritos num arquivo neutro (com extensão DAT) que será analisado pelo FRAMOOOP. Após o processamento do arquivo neutro, outro arquivo (com extensão POS) é gerado e o arquivo DAT apagado. Nesta fase, a de pós-processamento, os resultados contidos no arquivo POS são lidos e apresentados pelo FTOOL.

A seguir serão mostradas de forma separada as modificações realizadas no programa de análise (FRAMOOOP) e na interface gráfica (FTOOL).

6.1. Modificações introduzidas no FRAMOOOP

Foi escolhido o elemento BSB3-H para a análise da estabilidade de pórticos, devido à sua maior precisão na obtenção de cargas críticas de colunas, como apresentado no capítulo anterior.

Para a análise de autovalor foi utilizado um algoritmo presente no FEMOOOP, mas retirado do mesmo na implementação original do FRAMOOOP. Tal algoritmo já era utilizado com sucesso para a obtenção dos modos de vibração das estruturas modeladas. As modificações introduzidas foram a substituição da matriz de massa pela matriz geométrica e a retirada da rotina que extraía a raiz quadrada dos autovalores, já que estes eram dados pelos quadrados das frequências de vibração, o que não acontece para os fatores de carga críticos.

Para a implementação da análise de estabilidade, pensou-se primeiramente em introduzir os graus de liberdade adicionais na matriz de rigidez local do elemento e condensá-la antes de somá-la na matriz de rigidez global da estrutura. Tal proposta foi descartada, já que o fato de as equações correspondentes aos

graus de liberdade adicionais serem desacopladas das demais fazia com que a matriz de rigidez do elemento BSB3-H resultasse idêntica à do BSB1.

Num segundo momento, propôs-se criar matrizes de rigidez elástica, de massa e geométrica locais com duas linhas e duas colunas adicionais, de forma a manter os graus de liberdade extras nas matrizes globais. A tentativa, no entanto, foi dificultada pela estrutura de dados do FRAMOOOP, que obriga todos os graus de liberdade do elemento a pertencerem a um nó, já que todas as rotinas de análise linear e de obtenção de autovalores dependem dessa formulação para a numeração das equações de equilíbrio.

Diante das dificuldades encontradas, a solução encontrada foi a de aproveitar a estrutura de dados original do FRAMOOOP, que prevê a possibilidade de serem analisados pórticos tridimensionais. Tal estrutura apresentava doze graus de liberdade por elemento, sendo que apenas seis eram utilizados; os demais eram descartados criando-se apoios “fictícios” nessas direções, o que não influenciava em nada a análise linear bidimensional. Qualquer um desses seis graus de liberdade ignorados poderia ser modificado de forma a se comportar segundo as funções de forma obtidas para o elemento BSB3-H. O grande obstáculo, no entanto, era a necessidade de que cada par de graus de liberdade adicionais permanecesse associado a apenas um elemento, o que era impossibilitado pelo fato de os mesmos pertencerem a um nó da estrutura, que seria compartilhado por dois ou mais elementos.

Muito embora a proposta inicial do trabalho fosse a de se discretizar cada barra da estrutura com apenas um elemento, esta foi rechaçada para que a estrutura original do programa não fosse sobremaneira modificada. A solução, portanto, foi dividir cada barra do modelo em dois elementos, da seguinte forma:

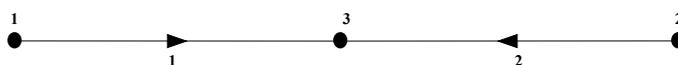


Figura 6.2 – Discretização de uma barra de pórtico

Pode-se notar que as orientações dos dois elementos que formam uma barra são opostas. Esta foi a solução encontrada para satisfazer a necessidade de o grau de liberdade adicional pertencer a somente uma barra, não podendo ser compartilhado. Dois graus de liberdade antes ignorados, as rotações segundo os eixos x e y , foram escolhidos para a implementação das funções de forma adicionais. A escolha das rotações ao invés de deslocamentos foi feita devido à necessidade de a matriz de rotação não modificar os graus de liberdade internos, como visto anteriormente. Como as rotações não são modificadas pela matriz de rotação, sendo multiplicadas por um, a escolha de tais graus de liberdade deu-se naturalmente. As rotações então se transformaram em deslocamentos e a solução para simular graus de liberdade no interior de uma barra foi dividi-la em dois elementos cujo segundo nó estivesse na metade da mesma, como pode ser visto na figura 6.1. Os graus de liberdade adicionais são sempre pertencentes ao segundo nó do elemento, permanecendo o primeiro intacto.

Para manter a filosofia inicial deste trabalho, que era a de não obrigar um usuário inexperiente a dividir uma barra de uma estrutura em mais de um elemento, modificou-se o programa FTOOL de modo a manter a visualização de apenas um elemento por barra, realizando a discretização internamente, como poderá ser visto na próxima seção.

6.2. Modificações Introduzidas no FTOOL

A principal modificação introduzida no FTOOL foi a de reimplementar a forma como o arquivo neutro é escrito, subdividindo internamente cada barra da estrutura em dois elementos com orientação oposta. Os nós inicial e final das barras são mantidos inalterados e é criado um nó adicional que só existirá nos arquivos DAT e POS, mas não será visualizado pelo usuário.

A criação dos nós adicionais não altera a estrutura de dados da parte gráfica do FTOOL, como vértices e arestas, já que tais nós existem apenas nos arquivos neutros, sendo considerados somente pelo FRAMOOOP. Elementos adicionais também são criados de forma a conectar os nós adicionais, tendo sempre a

característica de que, numa mesma barra, dois elementos têm orientações opostas. Os nós extras são liberados das restrições impostas originalmente às rotações em torno de x e y, sendo que neste caso tais rotações representam deslocamentos.

Na interface gráfica foram introduzidos poucos elementos novos, para não alterar de maneira excessiva a aparência do programa. Foram criados dois novos itens na lista que escolhe o tipo de visualização, além de dois botões que permitem a navegação entre os modos de vibração da estrutura. A figura 6.2 mostra em detalhe essas modificações.

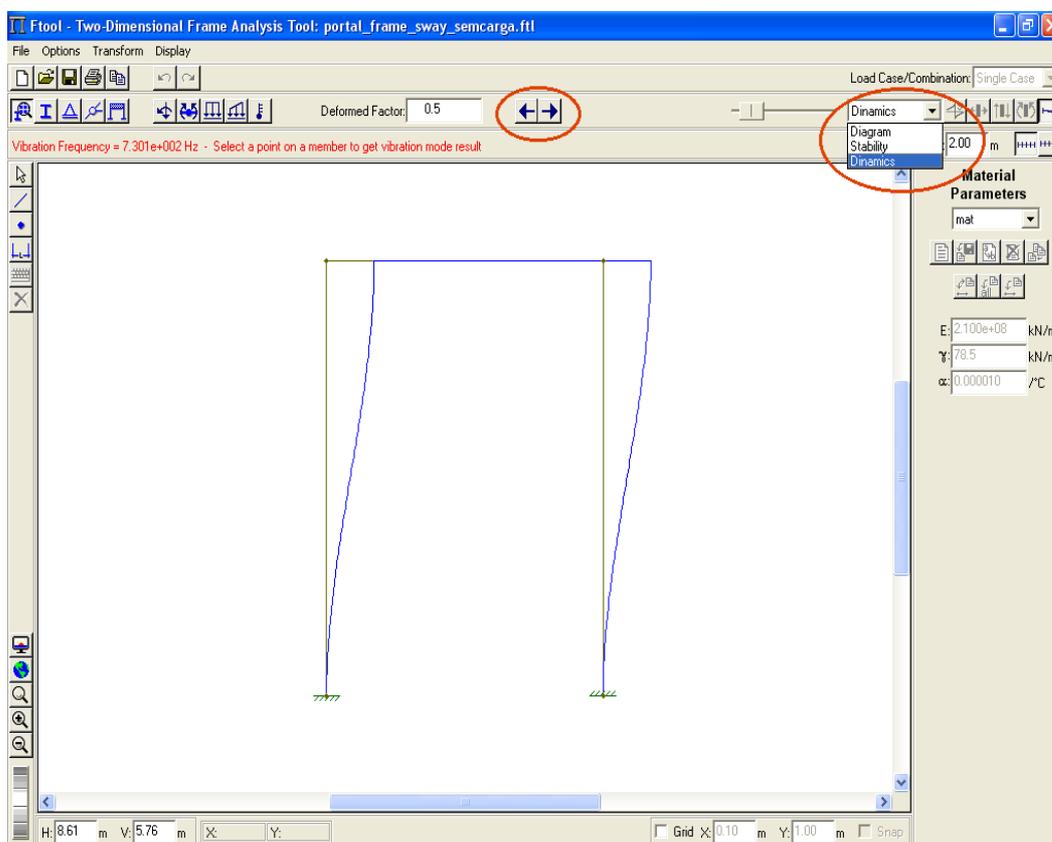


Figura 6.3 – Interface gráfica do FTOOL (em detalhe as modificações introduzidas)

Caso a opção *Stability* seja escolhida, automaticamente os botões de apresentação de diagramas ficam desabilitados e somente o botão de visualização da deformada pode ser pressionado. Uma vez selecionada, essa opção mostra o primeiro modo de flambagem da estrutura e o fator de carga crítico correspondente. Com o item *Dinamics* ocorre o mesmo, mas desta vez os botões de navegação entre os modos de vibração são habilitados. Quando se pressiona o

botão de visualização da deformada, são mostrados o primeiro modo de vibração da estrutura e a frequência correspondente. À medida que são pressionados os botões de navegação é possível visualizar os demais modos de vibração, até o décimo. Deve-se lembrar que a obtenção dos modos de vibração leva em conta os esforços existentes nas barras da estrutura, ou seja, é incluída a matriz geométrica nesta análise.

8 CONCLUSÕES

8.1. Comentários sobre este Trabalho

Neste trabalho foram descritos elementos com graus de liberdade adicionais, modelados por funções de forma polinomiais e trigonométricas, para a avaliação de cargas críticas de pórticos planos e o estudo de seu comportamento pós-crítico inicial.

De acordo com o esperado, a formulação hierárquica utilizando uma combinação de funções polinomiais e trigonométricas mostrou-se eficaz na obtenção de cargas críticas, já que os resultados analíticos para os modos críticos de colunas são dados por funções trigonométricas.

Diversos testes foram realizados no intuito de avaliar o comportamento pós-crítico inicial, linearizado, de colunas cujos resultados analíticos eram conhecidos. Todos os testes e previsões, implementados no programa Mathcad, foram coerentes com os resultados teóricos.

Para a implementação da análise de pórticos pelo Método dos Elementos Finitos, foi utilizado o programa FTOOL, já que além do cálculo de cargas críticas seria possível também visualizar os modos de flambagem. Superadas algumas dificuldades inerentes à adaptação dos novos elementos a uma estrutura de dados pré-existente, a implementação foi realizada com sucesso e todos os resultados obtidos ficaram dentro de uma margem de erro tolerável.

É válido ressaltar a importância do Método dos Elementos Finitos, constituindo-se em uma ferramenta computacional de grande versatilidade. Deve-se também reafirmar a utilidade do uso da análise linearizada da flambagem, pelo

menos para exemplos em que os deslocamentos e rotações antecedentes à perda de estabilidade sejam desprezíveis.

Os algoritmos para extração de autovalores e autovetores mostraram-se muito eficientes tanto na obtenção de cargas críticas e modos de flambagem, quanto no cálculo de frequências e modos de vibração. A estrutura de dados topológica existente no FTOOL e a total separação entre as partes de visualização e análise foram fundamentais para a implementação das modificações desejadas sem que fosse necessário alterar demasiadamente o código original. Deve-se lembrar também que as alterações efetuadas não introduziram qualquer tipo de problema ou falha no funcionamento do sistema e todas as funções que constavam da versão original permaneceram intactas.

A avaliação do caminho pós-crítico em pórticos foi feita introduzindo-se manualmente as imperfeições no arquivo neutro para análise no FRAMOOOP. Este procedimento ainda não está automatizado, devido a dificuldades encontradas na implementação de uma nova análise no FTOOL, já que este está preparado para reconhecer apenas dois estágios de utilização, que são a fase de pré e pós-processamento.

8.2. Sugestões para Trabalhos Futuros

Os seguintes tópicos são sugeridos como continuações possíveis deste trabalho:

- Implementação de algoritmos para a análise de sistemas não conservativos, com a possibilidade de inclusão de cargas seguidoras e dirigidas para um ponto no FTOOL.
- Implementação de novas entidades gráficas no FTOOL, como arcos e anéis, com a possibilidade de combinação destes com os elementos de pórtico já existentes.

- Implementação de uma análise dinâmica completa, com a possibilidade de serem incluídas forças e deslocamentos dependentes do tempo, uma vez que já são calculados e visualizados com sucesso os modos de vibração de pórticos planos.
- Automatização do processo de avaliação dos pontos críticos das estruturas estudadas, com a possibilidade de visualização do caminho pós-crítico inicial dentro do próprio programa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ASSAID, L. M. B. **Técnicas para a determinação de cargas de flambagem a partir das frequências naturais de vibração.** Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-RJ, 1989.
- ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos: primeiros passos.** São Paulo: Editora da Unicamp, 1999.
- BARNETT, S; STOREY, C. **Matrix methods in stability theory.** London: Nelson, 1970
- BAZANT, Z. P.; CEDOLIN, L. **Stability of structures: elastic, inelastic, fracture, and damage theories.** New York: Oxford University Press, 1991.
- CELES, W. **Um pós-processador genérico de elementos finitos sólidos baseados na representação da fronteira dos elementos.** Tese de Mestrado, Departamento de Informática, PUC-RJ, 1990.
- CELES, W.; MARTHA, L. F.; GATTASS, M. **Uma estrutura de dados eficiente para pós-processamento de elementos finitos sólidos.** XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 105-108, 1991
- CHEN, W. F.; LUI, E. M. **Structural stability: theory and implementation.** New York: Elsevier, 1987.
- COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. **Concepts and applications of finite element analysis.** New York: Wiley, 1989.
- CROLL, J. G. A.; WALKER, A. C. **Elements of structural stability.** London: MacMillan, 1972.
- EULER, L. **De Curvis Elasticis,** 1744.
- FARSHAD, M. **Stability of structures.** Amsterdam: Elsevier, 1994.
- GABBAY, A. – **Conceito de Rankine-Merchant e o cálculo automatizado de cargas aproximadas de colapso de pórticos planos,** Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-RJ, Agosto 1977.
- GUIMARÃES, L. G. S. **Disciplina de programação orientada a objetos para análise e visualização bidimensional de modelos de elementos finitos.** Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-RJ, Agosto 1992.
- GUIMARÃES, W. M. – **Avaliação do efeito das imperfeições sobre a flambagem de estruturas sob a ação de cargas dependentes dos deslocamentos.** Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-RJ, Abril 1999.
- GONÇALVES, P. B. **Uma introdução à instabilidade de estruturas.** Notas de aula do curso de Instabilidade das Estruturas, PUC-RJ, Agosto 1994

- HORNE, M.R.; MERCHANT, W. **The stability of frames**. London: Pergamon Press Ltd, 1965.
- JURJO, D. L. B. R. **Estabilidade de colunas sujeitas ao peso próprio**. Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-RJ, Maio 2001.
- KOITER, W. T. **The theory of thin elastic shells**. Proceedings of Symposium on the theory of thin elastic shells, Technological University of Delft, Amsterdam, 1960
- LAGES, E. N. **Formulação hierarquica-espectral de elementos finitos**. Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-RJ, Agosto 1992.
- LEVY, C. H. **IUP/LED: um sistema portátil de interface com o usuário**. Tese de Mestrado, Departamento de Informática, PUC-RJ, Agosto 1993.
- MARTHA, L. F. **O método da rigidez direta sob um enfoque matricial**. Notas de aula do curso de Análise de Estruturas III, PUC-RJ, Agosto 1993.
- MARTHA, L. F. **Curso de Elementos Finitos**. Notas de aula, PUC-RJ, Agosto 1994.
- MARTHA, L. F. **FTOOL: A Structural Analysis Educational Interactive Tool**. Proceedings of Workshop in Multimedia Computer Techniques in Engineering Education, Institute of Structural Analysis, Technical University of Graz, Austria, 1999, pp. 51-65.
- PARENTE, E. J. **Otimização de estruturas sujeitas a instabilidade global: aplicação a treliças planas**. Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-RJ, Abril 1995.
- PARENTE, E. J. **Análise de sensibilidade e otimização de forma de estruturas geometricamente não-lineares**. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-RJ, Março 2000.
- PAZ, M. **Structural Dynamics: theory and computation**. New York: Chapman & Hall, 1997.
- PRATES, R. O. **Visual LED: uma ferramenta interativa para geração de interfaces gráficas**, Tese de Mestrado, Departamento de Informática, PUC-RJ, Agosto 1994.
- SILVA, R. R.; SOARES, W. J. **Bifurcação do equilíbrio em pórticos planos**. Rio de Janeiro: PUC, Departamento de Engenharia Civil, 1974.
- SILVESTRE, N; CAMOTIM, D. **An asymptotic-numerical method to analyze the post-buckling behavior, imperfection sensitivity and mode interaction in frames**. Universidade Técnica de Lisboa, 2003.
- SUANNO, R.L.M. – **Análise da estabilidade de estruturas sob a ação de cargas não-conservativas**, Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-RJ, Março 1988.
- TECGRAF, **Canvas Draw** – Manual. PUC-RJ, 2002. Disponível na internet através do site <http://www.tecgraf.puc-rio.br/cd>.
- TECGRAF, **FTOOL** – Manual (Versão 2.11). PUC-RJ, 2002. Disponível na internet através do site <http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftool>.

- TECGRAF, **Neutral File Format**. Disponível na internet através do site <http://www.tecgraf.puc-rio.br/neutralfile>.
- TIMOSHENKO, S.P.; GERE, J. E. **Mecânica dos sólidos**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1998.
- VASQUEZ, J.A.R. – **Estudo comparativo de matrizes geométricas para análise da estabilidade de pórticos espaciais**. Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-RJ, Novembro 1987.
- VIANNA, A. C. **Modelagem geométrica completa para modelos bidimensionais de elementos finitos**. Tese de Mestrado, Departamento de Informática, PUC-RJ, Agosto 1992.
- WASZCZYSZYN, Z; CHICHON, C; RADWANSKA, M. **Stability of structures by finite element methods**. Amsterdam: Elsevier, 1994.
- WEAVER, W., GERE, J.M. **Matrix analysis of framed structures**, New York: D. Van Nostrand Company, 1980.
- WEAVER, W., JOHNSTON, P.R. – **Finite elements for structural analysis**, New Jersey: Prentice-Hall, 1984

APÊNDICE A EXEMPLO DE IMPLEMENTAÇÃO NO MATHCAD

Neste apêndice serão mostradas as implementações feitas em Mathcad para a obtenção de cargas críticas com o elemento BSB2. Serão apresentados dois exemplos: a coluna engastada e livre e o caso em que há bifurcação assimétrica.

Atributos do material, seção reta, comprimento e carregamento axial:

$$E = 1 \quad I = 1 \quad A = 100 \quad \rho = 1 \quad L = 1 \quad P = 1$$

Funções de forma dos graus de liberdade principais:

$$N(x) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ 1 - 3 \cdot \frac{x^2}{L^2} + 2 \cdot \frac{x^3}{L^3} \\ x - 2 \cdot \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ \frac{x}{L} \\ 3 \cdot \frac{x^2}{L^2} - 2 \cdot \frac{x^3}{L^3} \\ \frac{-x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{pmatrix} \quad dN(x) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} N(x)_1 \\ \frac{d}{dx} N(x)_2 \\ \frac{d}{dx} N(x)_3 \\ \frac{d}{dx} N(x)_4 \\ \frac{d}{dx} N(x)_5 \\ \frac{d}{dx} N(x)_6 \end{pmatrix} \quad ddN(x) = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dx^2} N(x)_1 \\ \frac{d^2}{dx^2} N(x)_2 \\ \frac{d^2}{dx^2} N(x)_3 \\ \frac{d^2}{dx^2} N(x)_4 \\ \frac{d^2}{dx^2} N(x)_5 \\ \frac{d^2}{dx^2} N(x)_6 \end{pmatrix}$$

Função de forma adicional:

$$N_H(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \cos \left(2 \cdot \pi \cdot \frac{x}{L} \right) \right) \quad dN_H(x) = \frac{d}{dx} N_H(x) \quad ddN_H(x) = \frac{d^2}{dx^2} N_H(x)$$

Montagem das matrizes de rigidez e geométrica:

$$K_E = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & -100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 0 & -12 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & -6 & 2 & 0 \\ -100 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6 & 0 & 12 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 194.81818 \end{pmatrix}$$

$$K_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0.1 & 0 & -1.2 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.13333 & 0 & -0.1 & -0.03333 & 0.5 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.2 & -0.1 & 0 & 1.2 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 & -0.03333 & 0 & -0.1 & 0.13333 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 4.9348 \end{pmatrix}$$

As condições de contorno são impostas através de molas com valores grandes de rigidez. Para o exemplo da coluna engastada e livre:

$$cmola_1 = 1 \cdot 10^{20} \quad cmola_4 = 0 \cdot 10^{20}$$

$$cmola_2 = 1 \cdot 10^{20} \quad cmola_5 = 0 \cdot 10^{20}$$

$$cmola_3 = 1 \cdot 10^{20} \quad cmola_6 = 0 \cdot 10^{20}$$

Imposição das condições de apoio na matriz de rigidez:

$$K_{E2} = K_E$$

$$i = 1..6$$

$$K_{E2_{i,i}} = K_{E_{i,i}} + cmola_i$$

Resolvendo o problema de autovalores para a carga crítica:

$$\text{InvP}_{\text{critico}} = \text{eigenvals}\left(-K_{E2}^{-1} \cdot K_G\right)$$

$$\text{InvP}_{\text{critico}}^T = (0 \quad -0.40502 \quad 0 \quad -0.04278 \quad -0.01087 \quad 0 \quad 0)$$

$$P_{\text{critico}} = \left(\text{InvP}_{\text{critico}_2}\right)^{-1}$$

$$P_{\text{critico}} = -2.46904$$

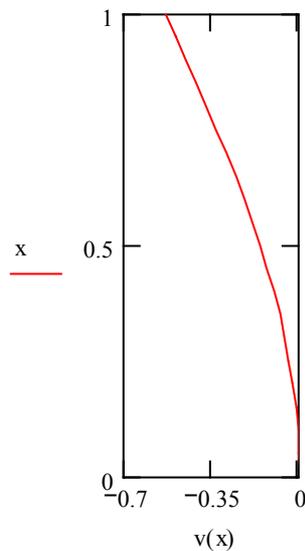
Obtenção do autovetor:

$$\text{InvV}_{\text{critico}} = \text{eigenvec}\left(-K_{E2}^{-1} \cdot K_G, \text{InvP}_{\text{critico}_2}\right)$$

$$\text{InvV}_{\text{critico}}^T = \left(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -0.53701 \quad -0.84356 \quad 5.70204 \times 10^{-3}\right)$$

Visualização dos deslocamentos transversais:

$$v(x) = \sum_{i=2}^3 N(x)_i \cdot \text{InvV}_{\text{critico}_i} + \sum_{i=5}^6 N(x)_i \cdot \text{InvV}_{\text{critico}_i} + N_H(x) \cdot \text{InvV}_{\text{critico}_7}$$



Para o exemplo da bifurcação assimétrica é necessário introduzir as matrizes de rigidez e rotação da mola que se encontra inicialmente a 45°:

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$K_M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad RM = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$KM = (RM^T) \cdot K_M \cdot RM \quad KM = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Condições de contorno da coluna:

$$\begin{aligned} cmola_1 &= 1 \cdot 10^{20} & cmola_4 &= 0 \cdot 10^{20} \\ cmola_2 &= 1 \cdot 10^{20} & cmola_5 &= 0 \cdot 10^{20} \\ cmola_3 &= 0 \cdot 10^{20} & cmola_6 &= 0 \cdot 10^{20} \end{aligned}$$

Imposição das condições de apoio e da rigidez da mola na matriz de rigidez:

$$K_{E2} = K_E$$

$$i = 1..6$$

$$K_{E2_{i,i}} = K_{E2_{i,i}} + cmola_1 + KM_{1,i}$$

Resolvendo o problema de autovalores para a carga crítica:

$$\text{InvP}_{\text{critico}} = \text{eigenvals}\left(-K_{E2}^{-1} \cdot K_G\right)$$

$$\text{InvP}_{\text{critico}}^T = \left(0 \quad -0.66667 \quad -0.10042 \quad -2 \quad -0.01667 \quad -8.2413 \times 10^{-3} \quad 0\right)$$

$$P_{\text{critico}} = \left(\text{InvP}_{\text{critico}_4}\right)^{-1}$$

$$P_{\text{critico}} = -0.5$$

Obtenção do autovetor:

$$\text{InvV}_{\text{critico}} = \text{eigenvec}\left(-K_{E2}^{-1} \cdot K_G, \text{InvP}_{\text{critico}_4}\right)$$

$$\text{InvV}_{\text{critico}}^T = (0 \quad 0 \quad 0.57735 \quad 0 \quad 0.57735 \quad 0.57735 \quad 0)$$

Obtenção da matriz de rotação da barra cujas coordenadas foram modificadas a partir da soma do autovetor. As matrizes de rigidez e geométrica são modificadas:

$$\alpha = \text{asin}(0.57735)$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_{E2} = \left(R^T\right) \cdot K_E \cdot R$$

$$K_{G2} = \left(R^T\right) \cdot \cos(\alpha) \cdot K_G \cdot R$$

A matriz da mola é modificada a partir da inclusão do seu novo ângulo:

$$\theta = \text{atan}\left(\frac{\cos(\alpha)}{L + 0.57735}\right)$$

$$KM = (RM^T) \cdot K_M \cdot RM$$

Uma nova resolução do problema de autovalor é realizada:

$$\text{InvP}_{\text{critico}} = \text{eigenvals}\left(-K_{E2}^{-1} \cdot K_{G2}\right)$$

$$\text{InvP}_{\text{critico}}^T = \left(0 \quad -1.63299 \quad -0.54433 \quad -0.01361 \quad -0.08199 \quad -6.72899 \times 10^{-3} \quad 0\right)$$

$$P_{\text{critico}} = \left(\text{InvP}_{\text{critico}_2}\right)^{-1}$$

$$P_{\text{critico}} = -0.61237$$

Obtenção da matriz de rotação da barra cujas coordenadas foram modificadas a partir da subtração do autovetor. As matrizes de rigidez e geométrica são modificadas:

$$\alpha = \text{asin}(-0.57735)$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_{E2} = (R^T) \cdot K_E \cdot R$$

$$K_{G2} = (R^T) \cdot \cos(\alpha) \cdot K_G \cdot R$$

A matriz da mola é modificada a partir da inclusão do seu novo ângulo:

$$\theta = \text{atan}\left(\frac{\cos(\alpha)}{L - 0.57735}\right)$$

$$KM = (RM^T) \cdot K_M \cdot RM$$

Uma nova resolução do problema de autovalor é realizada:

$$\text{InvP}_{\text{critico}} = \text{eigenvals}\left(-K_{E2}^{-1} \cdot K_{G2}\right)$$

$$\text{InvP}_{\text{critico}}^T = \left(0 \quad -2.36945 \quad -0.49323 \quad -0.01361 \quad -0.08199 \quad -6.72899 \times 10^{-3} \quad 0\right)$$

$$P_{\text{critico}} = \left(\text{InvP}_{\text{critico}_2}\right)^{-1}$$

$$P_{\text{critico}} = -0.42204$$