

# SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS PARA BARRAS EM MÍSULA PELA ANALOGIA DA VIGA CONJUGADA

**Aluna: Paula de Castro Sonnenfeld Vilela**

**Orientador: Luiz Fernando Martha**

## 1 Introdução

A metodologia de análise de estruturas reticuladas (estruturas compostas por barras) pelo Método dos Deslocamentos faz uma superposição de soluções cinematicamente determinadas [1,2,3]. Essas soluções são configurações deformadas elementares da estrutura sendo analisada. Dentro dessa metodologia, uma configuração deformada elementar isola um determinado efeito ou parâmetro que representa o comportamento cinemático (deformado) da estrutura. Cada configuração deformada elementar é uma *solução fundamental* no contexto do Método dos Deslocamentos. Nesse contexto, uma solução fundamental de uma estrutura reticulada é composta de configurações deformadas elementares das suas barras isoladas.

As soluções fundamentais para uma barra isolada correspondem a *reações de engastamento perfeito* para a barra submetida à solicitação externa (cargas atuando, variação de temperatura, etc.) e a *coeficientes de rigidez local*, que são as forças e momentos que devem atuar nas extremidades da barra para impor deslocamentos ou rotações, isoladamente, nas extremidades da barra. Todas essas soluções podem ser obtidas a partir de *parâmetros fundamentais* que são *momentos de engastamento perfeito* de barra isolada submetida a carregamentos externos e *coeficientes de rigidez à rotação* (momentos que devem atuar nas extremidades da barra para impor rotações nas extremidades da barra).

Os parâmetros fundamentais para barras com seção transversal constante são conhecidas e encontradas em qualquer livro texto de análise de estruturas [1,2]. Entretanto, não existem soluções analíticas fechadas para momentos de engastamento perfeito e coeficientes de rigidez à rotação para barras com seção transversal variável (vigas em mísula).

Este projeto de Iniciação Científica apresenta uma metodologia para determinação dessas soluções fundamentais para barras que têm seção transversal variável (mísula reta) para o comportamento transversal de flexão em regime elástico-linear. Nesse contexto, se considera que os deslocamentos são pequenos e que o material tem um comportamento elástico-linear, isto é, o material segue a Lei de Hooke.

O método apresentado neste artigo é baseado na *analogia da viga conjugada*, também conhecida como *Processo de Mohr* [4]. Essa metodologia resulta em integrais cujos integrandos correspondem a uma divisão de polinômios, que no caso geral não tem solução analítica fechada. Neste trabalho essas integrais são resolvidas numericamente através de uma integração de Gauss implementada adaptativamente para obter uma precisão numérica adequada.

O artigo está organizado da seguinte maneira. Ainda na Introdução, a próxima sub-seção define todos os parâmetros envolvidos no comportamento estrutural de uma barra à flexão e estabelece a convenção de sinais adotada. Na seção 2, são definidos os coeficientes de rigidez à flexão para barras isoladas. O objetivo é mostrar que todos os coeficientes de rigidez local, no caso mais geral de barras com seção transversal variável, podem ser deduzidos em função de poucos parâmetros de rigidez. Estes são os chamados parâmetros fundamentais que serão resolvidos pela analogia da viga conjugada. A seção 3 define as reações momento de engastamento, que servem como base para determinação de todas as outras reações para o compor-

tamento à flexão de uma forma geral. A seção 4 faz um resumo da *Teoria de Vigas de Navier*, que corresponde ao modelo estrutural adotado para a idealização do comportamento de barras à flexão. Esse assunto é básico para a análise de estruturas e pode ser encontrado em qualquer livro texto de Resistência dos Materiais. Esse resumo está sendo apresentado neste artigo apenas para mostrar as expressões diferenciais que são utilizadas para estabelecer a analogia da viga conjugada, o que é feito na seção 0. A seção 6 mostra a determinação dos parâmetros fundamentais de rigidez à flexão pela analogia da viga conjugada. A seção 7 mostra a determinação de reações momento de engastamento para barras isoladas submetidas a um carregamento transversal linearmente distribuído. A seção 8 descreve as funções computacionais que foram implementadas como resultado do desenvolvimento deste trabalho. Finalmente, na seção 0 são feitas conclusões sobre o trabalho e sugestões para continuação em trabalhos futuros.

### 1.1 Parâmetros envolvidos e convenção de sinais

Para definir os parâmetros envolvidos no comportamento estrutural de uma barra à flexão, é adotado um sistema de coordenadas locais para a barra, tal como indicado na Figura 1, sendo:

$l$  → comprimento da barra.

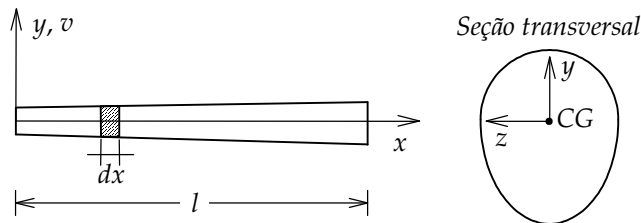


Figura 1 – Sistema de eixos locais de uma barra.

Na Figura 1, o eixo axial da barra,  $x$ , passa pelos centros de gravidade (CG) das seções transversais e os outros eixos são transversais à barra. Portanto, está sendo considerado que existe uma linha reta (o eixo  $x$ ) que passa pelos CG's de todas as seções transversais ao longo da barra.

Com base nesse sistema de coordenadas, são definidos os deslocamentos e rotações que os pontos do eixo de uma barra de um pórtico plano podem ter:

$v(x)$  → deslocamento transversal (positivo na direção de  $y$ );

$\theta(x)$  → rotação da seção transversal por flexão (positivo no sentido anti-horário em torno do eixo  $z$ ).

Os deslocamentos transversais  $v(x)$  de uma barra definem uma curva chamada *elástica*. Os sentidos positivos do deslocamento transversal  $v(x)$  (positivo na direção do eixo local  $y$ ) e da rotação por flexão  $\theta(x)$  (positiva no sentido anti-horário) estão indicados na Figura 2, onde a elástica está indicada pela linha tracejada desenhada em uma escala ampliada exageradamente.

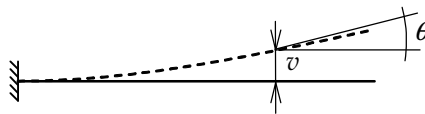


Figura 2 – Elástica de uma viga em balanço com deslocamento transversal e rotação indicados com seus sentidos positivos.

Se por um lado o deslocamento transversal  $v(x)$  e a rotação  $\theta(x)$  são os parâmetros cinemáticos que definem a configuração deformada de uma barra na flexão, por outro lado os parâmetros que definem os esforços na barra são (veja Figura 3):

$q(x)$  → taxa de carregamento distribuído transversal ao eixo da barra;

$Q(x)$  → esforço cortante (esforço interno transversal), positivo quando entrando pela esquerda for na direção de  $y$ , ou quando entrando pela direita for contrário a  $y$ ;

$M(x)$  → momento fletor (esforço interno de flexão), positivo quando traciona as fibras inferiores da seção transversal;

$V_A$  → força transversal externa que atua na extremidade inicial de uma barra (positiva na direção de  $y$ );

$M_A$  → momento de externo que atua na extremidade inicial de uma barra (positivo no sentido anti-horário);

$V_B$  → força transversal externa que atua na extremidade final de uma barra (positiva na direção de  $y$ );

$M_B$  → momento de externo que atua na extremidade final de uma barra (positivo no sentido anti-horário).

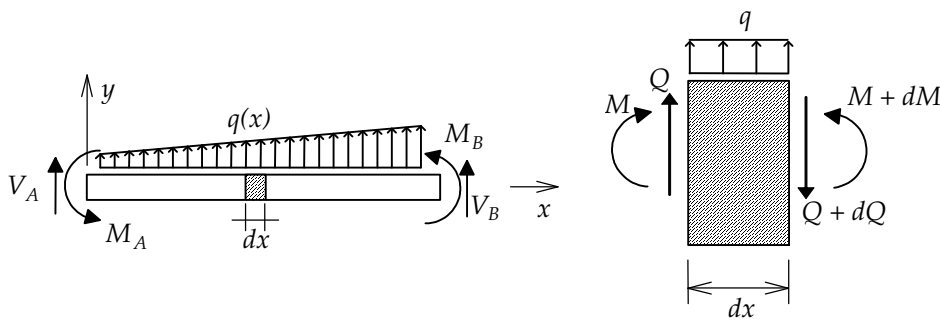


Figura 3 – Direções positivas adotadas para carga distribuída transversal, esforços internos e esforços externos nas extremidades de uma barra para o comportamento à flexão.

Complementando os parâmetros que definem o comportamento de uma barra à flexão, tem-se:

$E$  → módulo de elasticidade do material;

$A$  → área da seção transversal da barra;

$I = \int_A y^2 dA$  → momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo  $z$ .

## 2 Coeficientes de rigidez local à flexão

As mais importantes soluções fundamentais de barra isolada são os chamados *coeficientes de rigidez local ou de barra*. No presente contexto, coeficientes de rigidez de barra são forças e momentos que devem atuar nas extremidades da barra isolada, paralelamente aos seus eixos locais, para equilibrá-la quando uma deslocabilidade (deslocamento ou rotação) é imposta, isoladamente, em uma das suas extremidades. A seguinte notação é utilizada, conforme mostrado na Figura 4:

$d'$  → *deslocabilidade de barra no sistema local*: deslocamento, na direção de um dos eixos locais  $x$  ou  $y$ , ou rotação em uma extremidade de uma barra isolada.

$k'_{ij}$  → *coeficiente de rigidez de barra no sistema local*: força ou momento que deve atuar em uma extremidade de uma barra isolada, na direção da deslocabilidade  $d'_i$ , para equilibrá-la quando a deslocabilidade unitária  $d'_i = 1$  é imposta, isoladamente, em uma das suas extremidades.

O significado físico dos coeficientes de rigidez de barra de pórtico plano no sistema local é mostrado na Figura 4. Essa figura indica, no seu topo, a configuração deformada de uma barra isolada e o conjunto de forças e momentos que atuam nas extremidades da barra, paralelamente a seus eixos locais, para equilibrá-la nessa configuração. Essas forças e momentos são definidos como:

$f'_i$  → *força generalizada de barra no sistema local*: força ou momento que atua na direção da deslocabilidade  $d'_i$  de uma barra para equilibrá-la quando isolada.

Como indica a Figura 4, a configuração deformada de uma barra pode ser decomposta em configurações deformadas elementares. A partir dessa superposição, as forças generalizadas da barra são obtidas pela soma das forças e momentos que equilibram a barra para cada uma das configurações deformadas elementares.

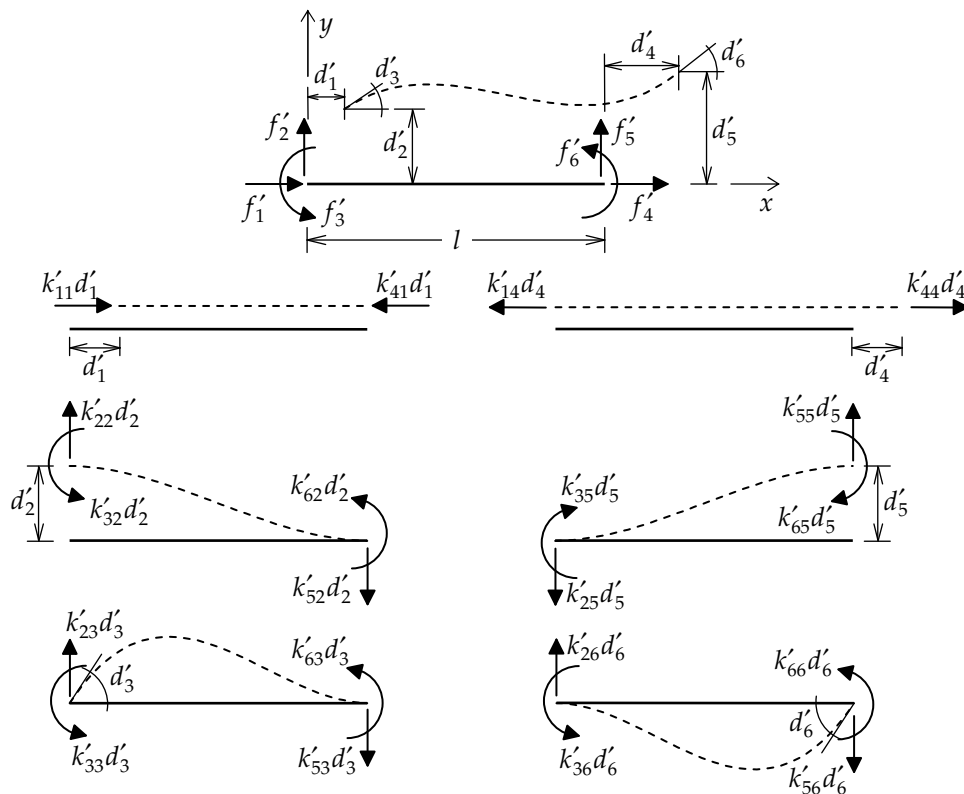


Figura 4 – Superposição de configurações deformadas elementares para compor a elástica final de uma barra de pórtico plano isolada.

Observa-se na Figura 4 o desacoplamento entre os efeitos axiais e transversais de flexão de uma barra. As deformadas elementares axiais provocadas por  $d'_1$  e  $d'_4$  não mobilizam os coeficientes de rigidez de flexão (forças na direção transversal ou momentos). Da mesma forma, as deformadas elementares transversais de flexão provocadas por  $d'_2$ ,  $d'_3$ ,  $d'_5$  e  $d'_6$  não mobilizam coeficientes de rigidez axiais. Devido a esse desacoplamento, alguns coeficientes de rigidez locais são nulos. Neste artigo, apenas os efeitos transversais de flexão estão sendo considerados.

A superposição de configurações deformadas elementares mostrada na Figura 4 resulta em uma relação entre cada força nodal generalizada  $f'_i$  e as deslocabilidades da barra. Por exem-

plo, a força total  $f'_1$  é obtida pela soma das forças axiais na extremidade inicial da barra, resultando em:  $f'_1 = k'_{11}d'_1 + k'_{14}d'_4$ . Analogamente, a força total  $f'_2$  é obtida pela soma das forças transversais na extremidade inicial da barra, resultando em:  $f'_2 = k'_{22}d'_2 + k'_{23}d'_3 + k'_{25}d'_5 + k'_{26}d'_6$ . Generalizando para todas as forças e momentos que atuam nas extremidades da barra, pode-se escrever a seguinte relação matricial:

$$\begin{Bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ f'_4 \\ f'_5 \\ f'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k'_{11} & 0 & 0 & k'_{14} & 0 & 0 \\ 0 & k'_{22} & k'_{23} & 0 & k'_{25} & k'_{26} \\ 0 & k'_{32} & k'_{33} & 0 & k'_{35} & k'_{36} \\ k'_{41} & 0 & 0 & k'_{44} & 0 & 0 \\ 0 & k'_{52} & k'_{53} & 0 & k'_{55} & k'_{56} \\ 0 & k'_{62} & k'_{63} & 0 & k'_{65} & k'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

A Equação (1) também pode ser escrita de uma forma condensada:

$$\{f'\} = [k'] \cdot \{d'\} \quad (2)$$

Sendo:

$\{f'\}$  → *vetor das forças generalizadas de barra no sistema local*: conjunto de forças e momentos que atuam nas extremidades de uma barra (nas direções dos eixos locais) para equilibrá-la quando isolada.

$[k']$  → *matriz de rigidez de uma barra no sistema local*: matriz dos coeficientes de rigidez local  $k'_{ij}$  nas direções dos eixos locais.

$\{d'\}$  → *vetor das deslocabilidades de barra no sistema local*: conjunto de deslocabilidades de uma barra nas direções dos eixos locais.

Duas observações podem ser feitas quanto à matriz de rigidez da barra isolada. A primeira é que pelo Teorema de Maxwell [1,5] a matriz é simétrica, isto é:

$$k'_{ji} = k'_{ij} \quad (3)$$

A segunda observação vem da superposição de configurações deformadas elementares mostrada na Figura 4. Observa-se que os coeficientes de rigidez que correspondem a uma dada configuração deformada elementar têm o mesmo índice  $j$ . Pode-se dizer então:

- A  $j$ -ésima coluna da matriz de rigidez  $[k']$  de uma barra no seu sistema local corresponde ao conjunto de forças generalizadas que atuam nas extremidades da barra, paralelamente a seus eixos locais, para equilibrá-la quando é imposta uma configuração deformada tal que  $d'_j = 1$  (deslocabilidade  $d'_j$  com valor unitário e as demais deslocabilidades com valor nulo).

O Princípio dos Deslocamentos Virtuais pode ser utilizado para deduzir os valores dos coeficientes de rigidez de uma barra prismática, isto é, uma barra com uma seção transversal uniforme ao longo de seu comprimento [3]. Na seção 5 é apresentada a analogia da viga conjugada como uma metodologia para determinação de coeficientes de rigidez para barras não prismáticas.

Existem parâmetros de rigidez à rotação (Figura 5) que são considerados fundamentais, na medida em que todos os coeficientes de rigidez local à flexão podem ser deduzidos a partir deles. Esses parâmetros são definidos como [2]:

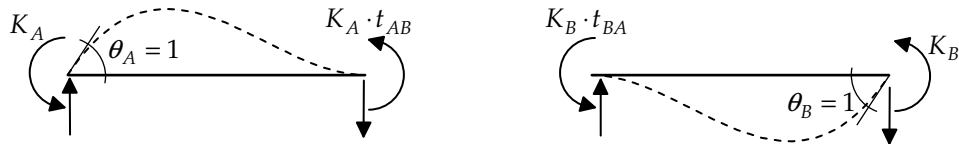


Figura 5 – Parâmetros fundamentais de rigidez à rotação de uma barra.

$K_A$  → *coeficiente de rigidez à rotação na extremidade inicial*: momento que deve atuar na extremidade inicial de uma barra isolada para impor uma rotação unitária  $\theta_A = 1$  na extremidade inicial enquanto todas as outras deslocabilidades são mantidas nulas.

$t_{AB}$  → *coeficiente de transmissão de momento da extremidade inicial para a extremidade final*: parâmetro que estabelece a relação entre o a coeficiente de rigidez  $K_A$  e o momento que é necessário atuar na extremidade final para impor uma rotação  $\theta_A = 1$  na extremidade inicial enquanto todas as outras deslocabilidades são mantidas nulas. O momento na extremidade final sempre tem o mesmo sentido do momento  $K_A$ .

$K_B$  → *coeficiente de rigidez à rotação na extremidade final*: momento que deve atuar na extremidade final de uma barra isolada para impor uma rotação unitária  $\theta_B = 1$  na extremidade final enquanto todas as outras deslocabilidades são mantidas nulas.

$t_{BA}$  → *coeficiente de transmissão de momento da extremidade final para a extremidade inicial*: parâmetro que estabelece a relação entre o a coeficiente de rigidez  $K_B$  e o momento que é necessário atuar na extremidade inicial para impor uma rotação  $\theta_B = 1$  na extremidade final enquanto todas as outras deslocabilidades são mantidas nulas. O momento na extremidade inicial sempre tem o mesmo sentido do momento  $K_B$ .

Embora quatro parâmetros fundamentais sejam apresentados, na verdade apenas três seriam necessários, pois pela Equação (3) deduz-se que  $K_A \cdot t_{AB} = K_B \cdot t_{BA}$ , e portanto [2]:

$$\frac{K_A}{K_B} = \frac{t_{BA}}{t_{AB}}. \quad (4)$$

Optou-se por trabalhar com quatro parâmetros, ao invés de três reduzidos pela Equação (4), para manter uma simetria entre as expressões que relacionam os coeficientes de rigidez local à flexão com os parâmetros fundamentais de rigidez à rotação.

As expressões para todos os coeficientes da matriz de rigidez da barra, com ou sem articulação, podem ser deduzidas diretamente com base nos parâmetros fundamentais de rigidez à rotação [3].

Conforme mencionado, os valores do parâmetros fundamentais de rigidez à rotação para uma barra com uma seção transversal uniforme ao longo de seu comprimento têm expressão analítica fechada. Eles podem ser deduzidos, por exemplo, pelo Princípio dos Deslocamentos Virtuais [3]:

$$K_A = K_B = \frac{4EI}{l}; \quad (5)$$

$$t_{AB} = t_{BA} = \frac{1}{2}. \quad (6)$$

Entretanto, não existem soluções analíticas fechadas para esses parâmetros para barras com seção transversal variável. Na seção 6 é apresentada a analogia da viga conjugada como uma metodologia para determinação dos parâmetros fundamentais de rigidez para barras não prismáticas.

### 3 Reações de engastamento de barra isolada

Esta seção define as soluções fundamentais de engastamento perfeito de barras isoladas para cargas transversais linearmente distribuídas aplicadas. Procedimentos análogos podem ser feitos para outros tipos de solicitações.

A Figura 6 mostra a notação e os sentidos positivos das reações de engastamento perfeito para um carregamento transversal linearmente distribuído, em que:

$\hat{f}'_i \rightarrow$  *reação de engastamento perfeito de barra no sistema local*: reação força ou momento que atua na direção da deslocabilidade local  $d'_i$  de uma barra com as extremidades fixas para equilibrá-la quando atua uma solicitação externa.

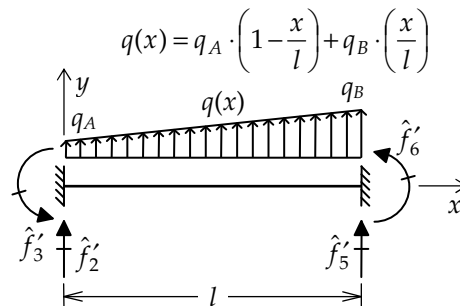


Figura 6 – Notação e sentidos positivos de reações de engastamento perfeito à flexão para uma barra isolada com carga transversal linearmente distribuída.

Para cada tipo de solicitação externa, é possível definir dois parâmetros fundamentais dos quais todas as reações de engastamento perfeito de uma barra isolada:

$\hat{M}_A \rightarrow$  *momento de engastamento na extremidade inicial*: reação momento que atua na extremidade inicial de uma barra com as extremidades fixas para equilibrá-la quando atua uma solicitação externa

$\hat{M}_B \rightarrow$  *momento de engastamento na extremidade final*: reação momento que atua na extremidade final de uma barra com as extremidades fixas para equilibrá-la quando atua uma solicitação externa

A Figura 7 mostra a superposição de efeitos que é utilizada para determinar as reações de engastamento da barra biengastada em função dos parâmetros fundamentais para uma carga transversal linearmente distribuída. Cada parcela dessa superposição isola o efeito das reações momentos fundamentais e o efeito do carregamento distribuído, ambos atuando na viga com apoios simples (biapoiada). A seguinte notação vai ser adotada:

$\hat{V}_A^0 \rightarrow$  *reação força transversal na extremidade inicial da barra biapoiada para a solicitação externa*.

$\hat{V}_B^0 \rightarrow$  *reação força transversal na extremidade final da barra biapoiada para a solicitação externa*.

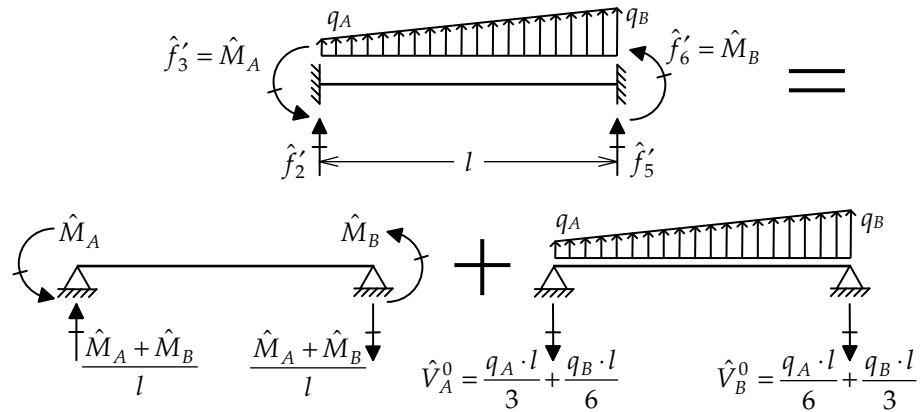


Figura 7 – Superposição de efeitos para determinar reações de engastamento de uma barra com carga transversal linearmente distribuída em função dos parâmetros fundamentais.

As reações de engastamento  $\hat{f}'_3$  e  $\hat{f}'_6$  saem diretamente das reações momentos fundamentais. As reações  $\hat{f}'_2$  e  $\hat{f}'_5$  (forças transversais) podem ser determinadas pela superposição das reações forças devidas às reações momentos fundamentais com as reações forças devidas ao carregamento atuando na barra biapoiada. Isso resulta em:

$$\hat{f}'_3 = \hat{M}_A; \quad (7)$$

$$\hat{f}'_6 = \hat{M}_B; \quad (8)$$

$$\hat{f}'_2 = \frac{\hat{M}_A + \hat{M}_B}{l} + \hat{V}_A^0; \quad (9)$$

$$\hat{f}'_5 = -\frac{\hat{M}_A + \hat{M}_B}{l} + \hat{V}_B^0. \quad (10)$$

Sendo, para o caso da carga transversal linearmente distribuída:

$$\hat{V}_A^0 = -\frac{q_A \cdot l}{3} - \frac{q_B \cdot l}{6}; \quad (11)$$

$$\hat{V}_B^0 = -\frac{q_A \cdot l}{6} - \frac{q_B \cdot l}{3}. \quad (12)$$

Assim como existem soluções analíticas fechadas para os parâmetros fundamentais de rigidez à rotação, é possível obter expressões fechadas para os parâmetros fundamentais de reação de engastamento para uma barra com uma seção transversal constante [3]:

$$\hat{M}_A = -\frac{q_A \cdot l^2}{20} - \frac{q_B \cdot l^2}{30}; \quad (13)$$

$$\hat{M}_B = +\frac{q_A \cdot l^2}{30} + \frac{q_B \cdot l^2}{20}. \quad (14)$$

De mesma forma, não existem soluções analíticas fechadas para esses parâmetros para barras com seção transversal variável. Uma possível metodologia para resolver esse problema vai ser apresentada na seção 7.



#### 4 Idealização do comportamento de barras à flexão

A análise estrutural de estruturas reticuladas (cujos elementos estruturais podem ser considerados como barras, isto é, peças estruturais que têm uma dimensão bem maior do que as outras duas) está fundamentada na concepção de um modelo matemático, aqui chamado de modelo estrutural, que adota hipóteses sobre o comportamento das barras.

O comportamento de vigas à flexão foi formalizado no início do século 19 por Navier (1785-1836). Ele estabeleceu um conjunto de relações diferenciais de equilíbrio e compatibilidade que fazem parte dessa formalização, a chamada *Teoria de Vigas de Navier*. Esta seção faz um resumo das principais relações dessa teoria. Essas relações são básicas para a análise de estruturas reticuladas e podem ser encontradas em vários livros-texto sobre o assunto. O resumo aqui mostrado está baseado nos trabalhos dos seguintes autores: Féodosiev [6], Beer & Johnston [7], Timoshenko & Gere [8], White *et al.* [1] e West [9]. A Figura 8 faz um resumo de todas as expressões associadas a essa teoria, mostrando o seu relacionamento.

A Teoria de Vigas de Navier está fundamentada em quatro hipóteses básicas. A primeira considera que os deslocamentos são pequenos em relação à altura da seção transversal da barra. A segunda hipótese despreza deformações provocadas por efeitos de cisalhamento (esforços cortantes). A terceira é a *hipótese de manutenção das seções transversais planas* quando a viga se deforma, proposta originalmente por Jacob Bernoulli (1654-1705). De acordo com as segunda e terceira hipóteses, as seções transversais de uma viga que se deforma à flexão permanecem planas e normais ao eixo deformado da viga. Como última hipótese, é considerado que o material tem um comportamento elástico-linear, isto é, o material segue a Lei de Hooke.

O modelo estrutural tem como premissa uma condição de continuidade dos campos de deslocamentos e deformações no interior das barras. Essa condição de continuidade é forçada quase que automaticamente quando só se admitem deformações contínuas para as barras. Além disso, os campos deslocamentos e deformações têm que ser compatíveis entre si, isto é, os deslocamentos e deformações de uma barra devem estar associados. Considerando que os deslocamentos são pequenos, pode-se aproximar a rotação da seção transversal pela tangente da elástica. Dessa forma, pode-se associar o deslocamento transversal à rotação da seção transversal em uma equação que também é considerada uma equação de compatibilidade:

$$\theta = \frac{dv}{dx}. \quad (15)$$

A hipótese de manutenção das seções transversais planas garante uma continuidade de deslocamentos no interior de uma barra que sofre flexão, pois cada seção transversal permanece encaixada com as suas adjacentes. Esta condição de compatibilidade pode ser resumida na Equação (16) que relaciona o momento fletor em uma seção transversal da barra com a curvatura da barra, que pode ser aproximada por  $d^2v/dx^2$  no caso de pequenos deslocamentos [8,1]:

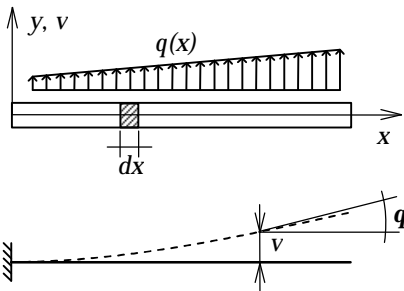
$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI(x)}. \quad (16)$$

A Equação (16) é considerada uma relação diferencial de compatibilidade, mas também engloba, no nível de um elemento infinitesimal de barra, a lei constitutiva do material (relação tensão-deformação) e o equilíbrio entre tensões normais e momento fletor (veja Figura 8). Essa equação considera o caso geral de momento de inércia  $I$  variável ao longo da barra.

## TEORIA DE VIGAS DE NAVIER

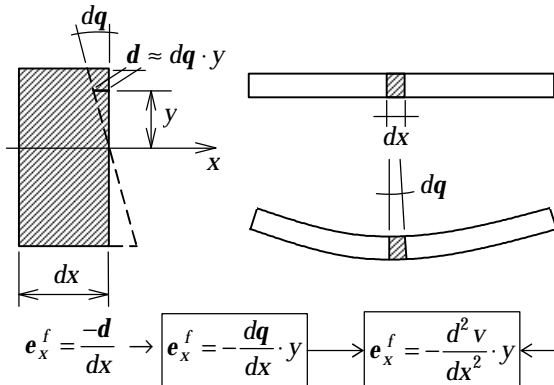
### Hipóteses básicas:

- Deslocamentos são pequenos em relação às dimensões da seção transversal.
- Despreza-se deformações por cisalhamento (barras longas, isto é, comprimento é bem maior do que a altura da seção).
- Seções transversais permanecem planas e normais ao eixo da barra quando esta se deforma (Hipótese de Bernoulli).
- Material tem comportamento elástico-linear (Lei de Hooke).



Pequenos deslocamentos:  $q \approx \tan(q) \rightarrow \frac{dv}{dx} = q(x)$

### Deformação do elemento infinitesimal:



$$e_x^f = \frac{-d}{dx} \rightarrow e_x^f = -\frac{dq}{dx} \cdot y \rightarrow e_x^f = -\frac{d^2 v}{dx^2} \cdot y$$

### Relação tensão vs. deformação:

$$s_x^f = E e_x^f \rightarrow s_x^f = E \cdot \left( -\frac{dq}{dx} \cdot y \right)$$

$$M = \int_A (-y) \cdot E \cdot \left( -\frac{dq}{dx} \cdot y \right) dA$$

$$M = E \cdot \left( \int_A y^2 dA \right) \cdot \frac{dq}{dx}$$

$$M = EI \cdot \frac{dq}{dx} \rightarrow \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI(x)}$$

$$dq = \frac{M}{EI} dx$$

### Parâmetros envolvidos:

$E \rightarrow$  módulo de elasticidade do material

$A \rightarrow$  área da seção transversal

$dA \rightarrow$  área infinitesimal de uma fibra da seção transversal

$I = \int y^2 dA \rightarrow$  momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo z

$q \rightarrow$  taxa de carregamento distribuído transversal ao eixo da barra (positiva na direção de y)

$Q \rightarrow$  esforço cortante (positivo quando entrando pela esquerda for na direção de y, ou quando entrando pela direita for contrário a y)

$M \rightarrow$  momento fletor (positivo quando traciona as fibras inferiores da seção transversal)

$v \rightarrow$  deslocamento transversal (positivo na direção de y)

$q \rightarrow$  rotação da seção transversal por flexão (positiva no sentido anti-horário)

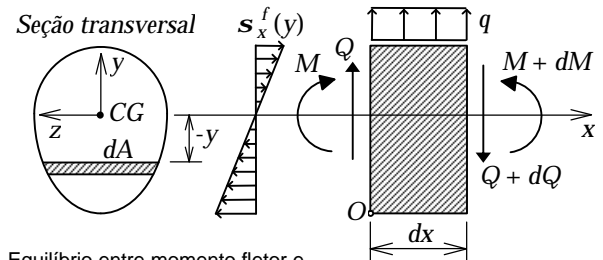
$dq \rightarrow$  rotação relativa interna por flexão de um elemento infinitesimal de barra

$d \rightarrow$  variação de comprimento de uma fibra genérica dada por y

$e_x^f \rightarrow$  deformação normal na direção longitudinal de uma fibra devida ao efeito de flexão

$s_x^f \rightarrow$  tensão normal na direção longitudinal da barra devida ao efeito de flexão

### Equilíbrio do elemento infinitesimal:



Equilíbrio entre momento fletor e tensões normais:

$$M = \int_A (-y) \cdot s_x^f dA$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \frac{dQ}{dx} = q(x)$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow \frac{dM}{dx} = Q(x)$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q(x)$$

### Equação de Navier:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 v}{dx^2} \right] = q(x) \rightarrow \frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI} \text{ (momento de inércia constante)}$$

Figura 8 – Resumo da Teoria de Vigas de Navier.

O modelo matemático adotado para a representação do comportamento de estruturas reticuladas considera que as condições de equilíbrio devem ser satisfeitas para a estrutura como um todo, para cada barra ou nó isolado, ou para qualquer porção isolada na estrutura. Isto inclui o equilíbrio de um elemento infinitesimal de barra.

O equilíbrio de forças no elemento infinitesimal na direção vertical, considerando as direções positivas mostradas na Figura 3, resulta em:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \frac{dQ}{dx} = q(x). \quad (17)$$

O equilíbrio de momentos em relação ao ponto  $O$  no canto inferior esquerdo do elemento infinitesimal (Figura 8), desprezando os termos de ordem superior, fornece a seguinte relação:

$$\sum M_O = 0 \rightarrow \frac{dM}{dx} = Q(x). \quad (18)$$

As Equações (17) e (18) podem ser combinadas, resultando em uma relação de equilíbrio entre o momento fletor em uma seção e a taxa de carregamento transversal distribuído:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q(x). \quad (19)$$

A Teoria de Vigas de Navier estabelece uma equação diferencial que relaciona os deslocamentos transversais  $v(x)$  de uma viga com a taxa de carregamento distribuído transversalmente  $q(x)$ , desprezando deformações devidas ao efeito cortante. A dedução dessa equação está indicada na Figura 8. Considerando o caso geral de momento de inércia  $I$  variável ao longo da barra, tem-se:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 v}{dx^2} \right] = q(x). \quad (20)$$

No caso em que a barra é prismática (momento de inércia  $I$  da seção transversal constante ao longo da barra), tem-se:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI}. \quad (21)$$

A Equação (20), ou a sua outra versão (21) para inércia constante, é chamada de *Equação de Navier*. Essa equação engloba, no nível de um elemento infinitesimal de barra, todas as condições que o modelo estrutural tem que atender: condições de compatibilidade entre deslocamentos, rotações e deformações, lei constitutiva do material, condições de equilíbrio entre carregamento transversal distribuído, esforço cortante e momento fletor, e condições de equilíbrio entre tensões normais e momento fletor.

Pode-se ainda considerar a relação que existe entre o deslocamento transversal e o esforço cortante em uma barra, que é obtida pelas Equações (18) e (16), considerando  $EI$  constante:

$$\frac{d^3 v}{dx^3} = \frac{Q(x)}{EI}. \quad (22)$$

## 5 Analogia da viga conjugada

Esta seção apresenta a *Analogia da Viga Conjugada* como uma metodologia para deduzir soluções fundamentais de vigas. Essa metodologia para análise de vigas está baseada em uma comparação entre as equações diferenciais de equilíbrio e de compatibilidade que regem o comportamento de barras à flexão. Essas equações foram mostradas seção anterior e estão reproduzidas na Tabela 1 de forma comparativa.

A analogia entre as equações diferenciais foi observada inicialmente por Mohr (1835-1918), e por isso esse método é conhecido como *Processo de Mohr* [4].

Tabela 1 – Comparação entre equações diferenciais de equilíbrio e compatibilidade para flexão de vigas.

Equações de Equilíbrio		Equações de Compatibilidade	
$\frac{dM}{dx} = Q(x)$	Eq. (18)	$\frac{dv}{dx} = \theta(x)$	Eq. (15)
$\frac{d^2M}{dx^2} = q(x)$	Eq. (19)	$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI(x)}$	Eq. (16)

Nota-se na Tabela 1 que o papel que  $M(x)$  faz nas equações de equilíbrio é o mesmo que o papel que  $v(x)$  exerce nas equações de compatibilidade, isto é,  $M(x)$  é análogo a  $v(x)$ . Observa-se também que  $Q(x)$  é análogo a  $\theta(x)$  e  $q(x)$  a  $M(x)/EI(x)$ .

A idéia original de Mohr em explorar essa analogia está em utilizar as equações de compatibilidade da viga real como se fossem “equações de equilíbrio” de uma viga fictícia, chamada de *viga conjugada*, com carregamento  $q^c(x) = M(x)/EI(x)$ , esforço cortante  $Q^c(x) = \theta(x)$  e momento fletor  $M^c(x) = v(x)$ , tal como indica a Tabela 2.

Com base nessa analogia, a resolução do problema do equilíbrio da viga conjugada é equivalente à resolução do problema da compatibilidade da viga real. Como a imposição de condições de equilíbrio é, em geral, mais simples e intuitiva do que a imposição de condições de compatibilidade, a analogia da viga conjugada se apresenta como uma alternativa para a imposição de condições de compatibilidade em vigas.

Tabela 2 – Analogia da viga conjugada.

	VIGA REAL	VIGA CONJUGADA
Carregamento	$q(x)$	$q^c(x) = M(x)/EI(x)$
Esforço cortante	$Q(x)$	$Q^c(x) = \theta(x)$
Momento fletor	$M(x)$	$M^c(x) = v(x)$
Rotação	$\theta(x)$	
Deslocamento transversal	$v(x)$	

A analogia da viga conjugada tem diversas aplicações na análise de vigas. As principais são:

- Cálculo de deslocamentos em vigas.

- Análise de vigas hiperestáticas.
- Dedução de coeficientes de rigidez de barras isoladas.
- Determinação de reações de engastamento de vigas para carregamentos arbitrários.

Todas essas aplicações podem ser analisadas utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) [3]. Entretanto, a analogia da viga conjugada é uma alternativa mais simples de ser utilizada em muitos casos, e também muito útil quando a viga tem uma rigidez à flexão variável, isto é, quando  $EI$  não é constante. As seções seguintes deste artigo mostram a determinação dos parâmetros fundamentais de rigidez à flexão e de reações de engastamento para barras isoladas.

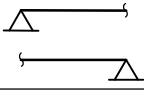
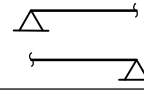
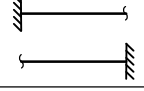
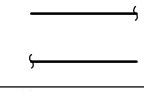
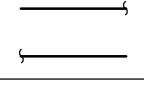
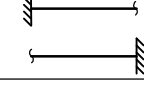
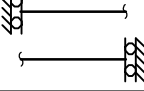
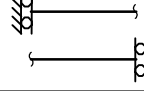

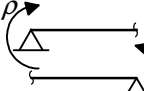
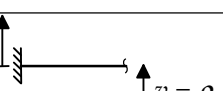
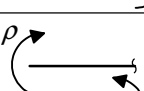

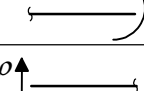
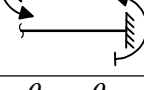
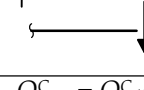
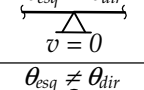
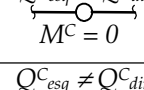
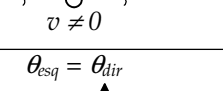
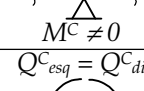
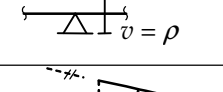
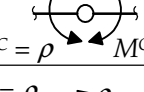
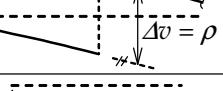
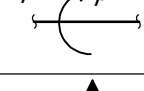
A aplicação da analogia da viga conjugada requer a conversão das restrições de apoio da viga real para a viga conjugada. As restrições de apoio, que são condições de compatibilidade da viga real, são expressas em termos de deslocamentos transversais  $v$  e de rotações  $\theta$ . Na viga conjugada, as restrições relativas a deslocamentos transversais devem ser convertidas para restrições com respeito a momentos fletores  $M^C$ , assim como as restrições que se referem a rotações são traduzidas para restrições impostas a esforços cortantes  $Q^C$ . A Tabela 3 mostra a conversão das possíveis restrições de apoio em vigas (reais) para as correspondentes restrições de apoio na viga conjugada em termos de momentos fletores e esforços cortantes.

Na Tabela 3, os recalques de apoio impostos na viga real têm o sentido positivo, de acordo com a convenção de sinais adotada: deslocamento transversal  $v$  é positivo de baixo para cima e rotação  $\theta$  é positiva no sentido anti-horário. Os correspondentes momentos fletores  $M^C$  e esforços cortantes  $Q^C$  também são positivos na viga conjugada. Dessa forma, quando um recalque vertical positivo é imposto na viga real, o momento que é aplicado na viga conjugada faz com que as fibras inferiores fiquem tracionadas na seção de aplicação (isso corresponde a um momento fletor positivo). Analogamente, quando uma rotação positiva é imposta como recalque de apoio na viga real, a força aplicada na viga conjugada provoca um esforço cortante positivo na seção de aplicação.

Para se analisar uma viga pela analogia da viga conjugada, deve-se adotar a seguinte seqüência de procedimentos:

- 1° Conversão de restrições de apoio da viga real para a viga conjugada conforme indicado na Tabela 3.
- 2° Determinação do diagrama de momentos fletores da viga real parametrizado pelos valores dos momentos fletores nas extremidades das barras.
- 3° Determinação do carregamento na viga conjugada,  $q^C(x) = M(x)/EI(x)$ . A consideração de barras com rigidez à flexão  $EI$  variável (inércia variável) ao longo do comprimento da viga é considerada no carregamento da viga conjugada.
- 4° Imposição de condições de equilíbrio da viga conjugada. Isso equivale a impor condições de compatibilidade da viga real.

Tabela 3 – Conversão de restrições da apoio para a viga conjugada.

VIGA REAL	VIGA CONJUGADA
apoio simples $v = 0 \quad \theta \neq 0$ 	apoio simples $M^C = 0 \quad Q^C \neq 0$ 
engaste $v = 0 \quad \theta = 0$ 	extremidade livre $M^C = 0 \quad Q^C = 0$ 
extremidade livre $v \neq 0 \quad \theta \neq 0$ 	engaste $M^C \neq 0 \quad Q^C \neq 0$ 
engaste deslizante $v \neq 0 \quad \theta = 0$ 	engaste deslizante $M^C \neq 0 \quad Q^C = 0$ 
$v = \rho$ apoio simples com recalque vertical 	$M^C = \rho$ apoio simples com momento aplicado $M^C = \rho$ 
$v = \rho$ engaste com recalque vertical 	$M^C = \rho$ extremidade livre com momento aplicado $M^C = \rho$ 
$\theta = \rho$ engaste com recalque rotação 	$Q^C = \rho$ extremidade livre com força aplicada $Q^C = \rho$ 
$\theta_{esq} = \theta_{dir}$ $v = 0$ apoio simples interno 	$Q^C_{esq} = Q^C_{dir}$ $M^C = 0$ rótula interna 
$\theta_{esq} \neq \theta_{dir}$ $v \neq 0$ rótula interna 	$Q^C_{esq} \neq Q^C_{dir}$ $M^C \neq 0$ apoio simples interno 
$\theta_{esq} = \theta_{dir}$ $v = \rho$ apoio simples interno com recalque vertical 	$Q^C_{esq} = Q^C_{dir}$ $M^C = \rho$ $M^C = \rho$ rótula interna com momento aplicado 
descontinuidade de deslocamento transversal $\Delta v = \rho$ 	$\Delta M^C = \rho$ $\rho$ momento aplicado 
descontinuidade de rotação $\Delta \theta = \rho$ 	$\Delta Q^C = \rho$ $\rho$ força aplicada 

## 6 Determinação dos parâmetros fundamentais de rigidez à flexão

Uma aplicação importante da analogia da viga conjugada é a determinação de coeficientes de rigidez à flexão de barras. Conforme visto na seção 2, todos os coeficientes de rigidez à flexão de uma barra podem ser deduzidos com base nos parâmetros fundamentais de rigidez à rotação  $K_A$ ,  $t_{AB}$ ,  $K_B$  e  $t_{BA}$ . A Figura 9 mostra a determinação de  $K_A$  e  $t_{AB}$ . Essa figura mostra uma viga biengastada com uma rotação  $\theta_A = \rho$  imposta no sentido anti-horário na extremidade inicial da viga. O que se deseja determinar são os momentos  $M_A = K_A \cdot \rho$  e  $M_B = K_B \cdot t_{AB} \cdot \rho$  de devem atuar nas extremidades inicial e final, respectivamente, para impor essa configuração deformada.

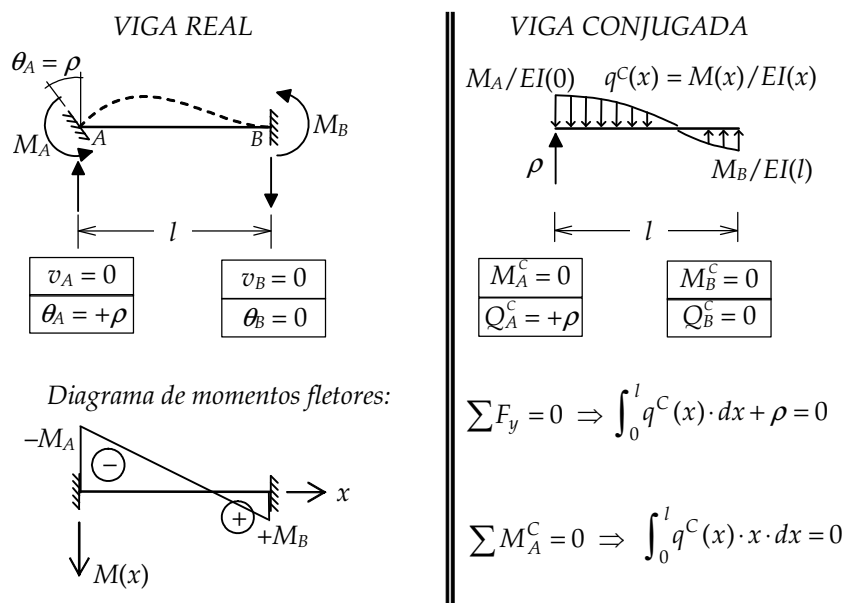


Figura 9 – Cálculo de parâmetros de rigidez à rotação da extremidade inicial de viga biengastada.

A solução de uma viga hiperestática pela analogia da viga conjugada fica facilitada se o aspecto do diagrama de momentos fletores da viga real for determinado *a priori*. A Figura 9 indica os sinais dos momentos fletores nas extremidades com base nos momentos  $M_A$  e  $M_B$ , admitindo por hipótese que eles são positivos, isto é, que eles têm o sentido anti-horário (convenção para momentos externos). Na extremidade inicial o momento fletor é negativo pois as fibras de cima estão tracionadas e na extremidade final o momento fletor é positivo pois as fibras de baixo estão tracionadas. O resultado disso é o diagrama de momentos fletores com uma variação linear que está indicado na viga real da Figura 9. Na viga conjugada, isso resulta em um carregamento distribuído  $q^C(x) = M(x)/EI(x)$  (vide Tabela 2), que no caso geral de momento de inércia variável não tem uma variação linear.

A criação da viga conjugada requer a conversão das condições de contorno em termos de deslocamentos e rotação da viga real para condições de contorno em termos de momentos fletores e esforços cortantes na viga conjugada. A tradução dessas condições de contorno está mostrada na Figura 9 e segue o que está indicado na Tabela 3. As duas extremidades da viga conjugada estão livres (sem apoio) e aparece uma força aplicada com valor  $\rho$  para cima na extremidade inicial pois o esforço cortante na extremidade inicial tem que ser  $Q_A^C = +\rho$ .

Uma observação importante é que a viga conjugada é hipostática. É sempre assim: *uma viga real hiperestática acarreta em uma viga conjugada hipostática*. Isso indica que a viga real hiperestática tem infinitas soluções que satisfazem as condições de compatibilidade isoladamente, assim como tem infinitas soluções que satisfazem as condições de equilíbrio isoladamente (existem infinitos possíveis valores de  $M_A$  e  $M_B$  que satisfazem as equações de equilíbrio da viga real). A solução correta é aquela que satisfaz simultaneamente as condições de equilíbrio e de compatibilidade. Com base na analogia da viga conjugada, a solução correta é aquela que satisfaz as condições de equilíbrio na viga conjugada pois estas substituem as condições de compatibilidade na viga real. Como a viga conjugada é hipostática, o carregamento da viga conjugada tem que ser auto-equilibrado pois não existem vínculos externos suficientes para garantir o equilíbrio em uma estrutura hipostática.

Existem duas condições de equilíbrio na viga conjugada para garantir que o seu carregamento seja auto-equilibrado:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \int_0^l q^C(x) \cdot dx + \rho = 0 ; \quad (23)$$

$$\sum M_A^C = 0 \Rightarrow \int_0^l q^C(x) \cdot x \cdot dx = 0 . \quad (24)$$

A Equação (23) impõe que o somatório das forças verticais na viga conjugada seja nulo e a Equação (24) impõe que o somatório dos momentos em relação ao ponto A na viga conjugada seja nulo. Essas duas condições formam um sistema de duas equações a duas incógnitas que é suficiente para determinar os momentos  $M_A$  e  $M_B$ .

Para determinar este sistema de equações, de forma a explicitar os valores de  $M_A$  e  $M_B$ , é conveniente decompor o diagrama de momentos fletores da Figura 9 em duas parcelas lineares, uma dependente só de  $M_A$  e outra dependente só de  $M_B$ , tal como mostrado na Figura 10:

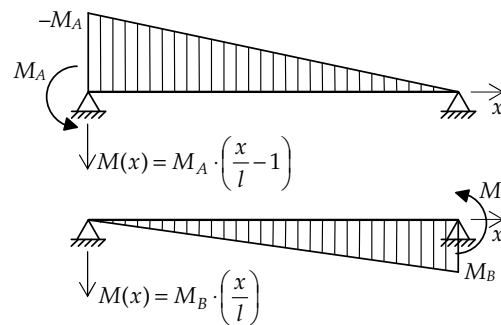


Figura 10 – Parcelas do diagrama de momentos fletores que isolam os efeitos dos momentos aplicados nas extremidades.

$$M(x) = M_A \cdot \left( \frac{x}{l} - 1 \right) ; \quad (25)$$

$$M(x) = M_B \cdot \left( \frac{x}{l} \right) . \quad (26)$$

O diagrama de momentos fletores finais na viga biengastada é obtido pela soma das Equações (25) e (26). Substituindo essas duas expressões nas Equações (23) e (24), resulta em:

$$\left( \int_0^l \frac{(x/l) - 1}{EI(x)} dx \right) \cdot M_A + \left( \int_0^l \frac{x/l}{EI(x)} dx \right) \cdot M_B + \rho = 0 ; \quad (27)$$

$$\left( \int_0^l \frac{(x^2/l) - x}{EI(x)} dx \right) \cdot M_A + \left( \int_0^l \frac{x^2/l}{EI(x)} dx \right) \cdot M_B = 0 . \quad (28)$$

A solução do sistema de equações formado pelas Equações (27) e (28) leva aos valores de  $M_A$  e  $M_B$ . Dessa forma, chega-se aos valores dos parâmetros de rigidez à rotação  $K_A$  e  $t_{AB}$ :

$$K_A = \frac{M_A}{\rho} ; \quad (29)$$

$$t_{AB} = \frac{M_B}{M_A} . \quad (30)$$

A determinação dos parâmetros fundamentais de rigidez à rotação  $K_B$  e  $t_{BA}$  é feita de maneira análoga, tal como indicado na Figura 11. As duas equações de equilíbrio na viga conjugada são:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \int_0^l q^C(x) \cdot dx - \rho = 0; \quad (31)$$

$$\sum M_A^C = 0 \Rightarrow \int_0^l q^C(x) \cdot x \cdot dx - \rho \cdot l = 0. \quad (32)$$

Utilizando a mesma decomposição do diagrama de momentos na viga real mostrada na Figura 10, chega-se no sistema de equações de equilíbrio que permitem a determinação nos momentos nas extremidades da barra isolada:

$$\left( \int_0^l \frac{(x/l)-1}{EI(x)} dx \right) \cdot M_A + \left( \int_0^l \frac{x/l}{EI(x)} dx \right) \cdot M_B - \rho = 0; \quad (33)$$

$$\left( \int_0^l \frac{(x^2/l)-x}{EI(x)} dx \right) \cdot M_A + \left( \int_0^l \frac{x^2/l}{EI(x)} dx \right) \cdot M_B - \rho \cdot l = 0. \quad (34)$$

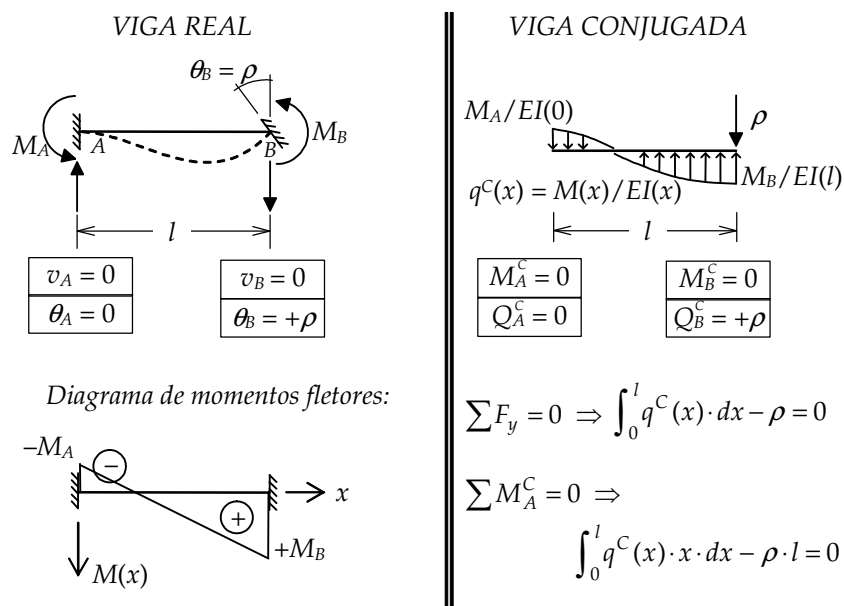


Figura 11 – Cálculo de parâmetros de rigidez à rotação da extremidade final de viga biengastada.

A solução do sistema de equações formado pelas Equações (33) e (34) leva aos valores de  $M_A$  e  $M_B$ . Isso permite determinar os parâmetros de rigidez à rotação  $K_B$  e  $t_{BA}$ :

$$K_B = \frac{M_B}{\rho}; \quad (35)$$

$$t_{BA} = \frac{M_A}{M_B}. \quad (36)$$

Observa-se que a metodologia apresentada resulta em integrais cujos integrandos correspondem a uma divisão de polinômios, que no caso geral não tem solução analítica fechada. Neste trabalho, essas integrais são resolvidas numericamente através de uma integração de Gauss implementada adaptativamente para obter uma precisão numérica adequada. Utiliza-se uma função de interpolação Lagrangeana cúbica para descrever a variação do momento de inércia da seção transversal em  $x$ . Como o momento de inércia varia cubicamente com a altura da seção transversal, isso corresponde ao caso de mísula reta. A Figura 12 indica os valores de amostragem que foram adotados na interpolação Lagrangeana do momento de inércia ao lon-

go da barra. Quatro valores são amostrados ( $I_0=I_A$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3=I_B$ ): no início da barra, a um terço do vão, a dois terços do vão e no final da barra. Os valores intermediários ( $I_1$  e  $I_2$ ) são calculados com base nos valores das alturas intermediárias ( $h_1$  e  $h_2$ ) da seção transversal, que por sua vez são obtidas por interpolação linear (mísula reta) dos valores das alturas da seção nas extremidades ( $h_0=h_A$  e  $h_3=h_B$ ).

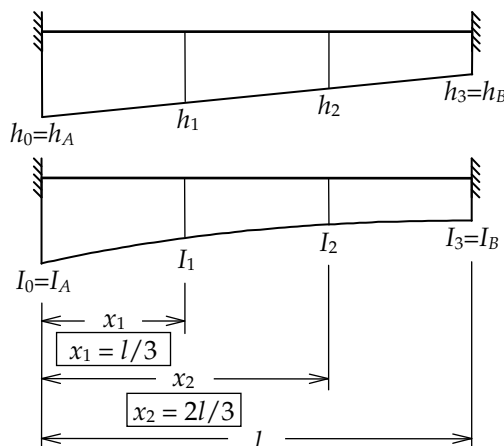


Figura 12 – Mísula reta com variação cúbica do momento de inércia ao longo de uma barra com mísula reta (altura da seção transversal variando linearmente).

Com base na metodologia descrita nesta seção para calcular os parâmetros fundamentais de rigidez à flexão, foi implementada uma função em C (**RotStiffCoef**) que está descrita na seção 8. A implementação considera uma barra com variação cúbica do momento de inércia da seção transversal.

Alguns resultados obtidos por esta implementação são comparados com tabelas atribuídas a Guldán apresentadas por Süsserkind [2]. Essas tabelas contém valores para os parâmetros fundamentais de vigas em mísula com seção transversal retangular. As Tabelas 4 e 5 comparam os valores calculados pela presente metodologia [vc] com os mostrados por Süsserkind [2] para vigas em mísula reta com valores da relação  $I_B/I_A$  variando de 1,000 a 0,005. Os valores dos coeficientes de rigidez à rotação ( $K_A$  e  $K_B$ ) são mostrados de forma adimensional multiplicados por  $l/(E I_B)$ . Os valores do coeficiente de transmissão de momentos ( $t_{AB}$ ) também são mostrados de forma adimensional multiplicados por  $K_A l/(E I_B)$ . Valores para o outro coeficiente de transmissão de momentos ( $t_{BA}$ ) podem ser obtidos com base na relação  $K_A \cdot t_{AB} = K_B \cdot t_{BA}$  – vide equação (4).

Tabela 4 – Parâmetros fundamentais de rigidez à rotação para vigas em mísula reta com seção transversal retangular ( $I_B/I_A$  variando de 1,000 a 0,150).

$I_B/I_A$	1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,200	0,150
$K_A l/(E I_B)$ [vc]	4,00	4,33	4,73	5,23	5,87	6,74	7,99	9,94	13,55	16,90
$K_A l/(E I_B)$ [2]	4,00	4,30	4,74	5,23	5,88	6,74	7,99	9,94	13,55	16,90
$K_B l/(E I_B)$ [vc]	4,00	4,11	4,23	4,38	4,55	4,77	5,05	5,44	6,05	6,54
$K_B l/(E I_B)$ [2]	4,00	4,08	4,24	4,38	4,55	4,77	5,05	5,44	6,05	6,54
$t_{AB} K_A l/(E I_B)$ [vc]	2,00	2,11	2,24	2,39	2,58	2,83	3,17	3,67	4,50	5,22
$t_{AB} K_A l/(E I_B)$ [2]	2,00	2,08	2,25	2,39	2,58	2,83	3,17	3,67	4,51	5,22

Tabela 5 – Parâmetros fundamentais de rigidez à rotação para vigas em mísula reta com seção transversal retangular ( $I_B/I_A$  variando de 0,120 a 0,005).

$I_B/I_A$	0,120	0,100	0,080	0,060	0,050	0,040	0,030	0,020	0,010	0,005
$K_A l/(E I_B)$ [vc]	20,07	23,11	27,48	34,37	39,63	47,19	59,17	81,51	141,57	247,26
$K_A l/(E I_B)$ [2]	20,07	23,11	27,43	34,37	39,63	47,20	59,17	81,51	141,57	247,26
$K_B l/(E I_B)$ [vc]	6,94	7,29	7,74	8,38	8,81	9,37	10,15	11,37	13,85	16,93
$K_B l/(E I_B)$ [2]	6,94	7,29	7,68	8,38	8,81	9,37	10,15	11,37	13,85	16,93
$t_{AB} K_A l/(E I_B)$ [vc]	5,85	6,42	7,20	8,35	9,17	10,29	11,95	14,76	21,22	30,59
$t_{AB} K_A l/(E I_B)$ [2]	5,85	6,42	7,14	8,35	9,17	10,29	11,95	14,76	21,22	30,59

Observa-se nessa comparação que as diferenças entre os resultados atuais e os apresentados por Süsskind são mínimas, demonstrando que a presente metodologia está correta. A vantagem da presente metodologia é que ela calcula numericamente os parâmetros fundamentais de rigidez para qualquer valor da relação  $I_B/I_A$  e para qualquer forma de seção transversal (não só a retangular).

## 7 Determinação de reações momento de engastamento para carregamento transversal linearmente distribuído

Outra aplicação importante da analogia da viga conjugada é a determinação dos momentos  $\hat{M}_A$  e  $\hat{M}_B$  de engastamento perfeito nas extremidades de barras submetidas a cargas arbitrárias. A Figura 13 mostra o diagrama de momentos fletores de uma viga (real) biengastada submetida a um carregamento linearmente distribuído, sendo a taxa de carregamento distribuído no início da barra igual a  $q_A$  e a taxa no final igual a  $q_B$ .

Assim como foi feito na seção anterior, é conveniente decompor o diagrama de momentos fletores na viga de forma a explicitar os valores de  $\hat{M}_A$  e  $\hat{M}_B$ . Além disso, o efeito da carga distribuída também é separado no diagrama. Conforme indica a Figura 13, o diagrama de momentos fletores é dividido em duas parcelas lineares, uma dependente só de  $\hat{M}_A$  e outra dependente só de  $\hat{M}_B$ , e em uma parcela cúbica  $M_q(x)$ , que corresponde ao polinômio do terceiro grau resultante da carga linearmente distribuída atuando na viga biapoiada (apoios articulados):

$$M(x) = \hat{M}_A \cdot \left(\frac{x}{l} - 1\right) + \hat{M}_B \cdot \left(\frac{x}{l}\right) + M_q(x); \quad (37)$$

$$M_q(x) = \frac{q_B - q_A}{6 \cdot l} \cdot x^3 + \frac{q_A}{2} \cdot x^2 - \frac{2 \cdot q_A \cdot l + q_B \cdot l}{6} \cdot x. \quad (38)$$

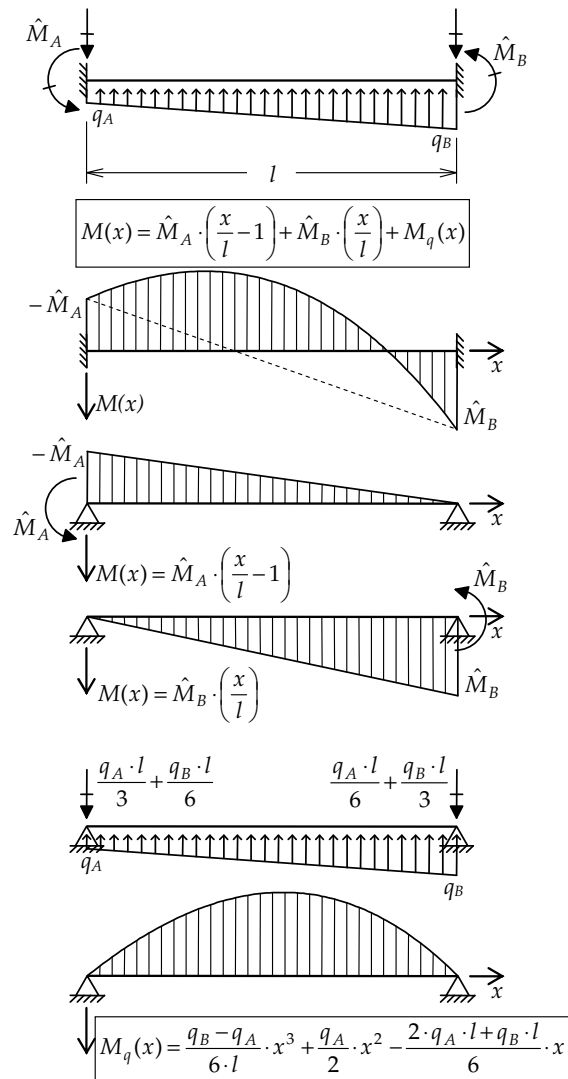


Figura 13 – Diagrama de momentos fletores de viga (real) biengastada para uma carga linearmente distribuída.

Para determinar os valores de  $\hat{M}_A$  e  $\hat{M}_B$  pela analogia da viga conjugada, é necessário converter as condições de contorno em termos de deslocamentos e rotação da viga real para condições de contorno em termos de momentos fletores e esforços cortantes na viga conjugada. A tradução dessas condições de contorno está mostrada na Figura 14 e segue o que está indicado na Tabela 3. As duas extremidades da viga conjugada estão livres (sem apoio). Essa figura também mostra o carregamento na viga conjugada, que corresponde a  $q^C(x) = M(x)/EI(x)$ , sendo que  $M(x)$  é dado pelas equações (37) e (38).

A determinação dos momentos de engastamento  $\hat{M}_A$  e  $\hat{M}_B$  é feita de maneira análoga ao que foi feito na seção anterior, isto é, impõe-se que o carregamento da viga conjugada seja autoequilibrado. Disso resulta duas equações de equilíbrio na viga conjugada. A primeira impõe que o somatório das forças verticais na viga conjugada seja nulo e a segunda equação impõe que o somatório dos momentos em relação ao ponto A na viga conjugada seja nulo:

$$\left( \int_0^l \frac{(x/l) - 1}{EI(x)} dx \right) \cdot \hat{M}_A + \left( \int_0^l \frac{x/l}{EI(x)} dx \right) \cdot \hat{M}_B + \int_0^l \frac{M_q(x)}{EI(x)} dx = 0; \quad (39)$$

$$\left( \int_0^l \frac{(x^2/l) - x}{EI(x)} dx \right) \cdot \hat{M}_A + \left( \int_0^l \frac{x^2/l}{EI(x)} dx \right) \cdot \hat{M}_B + \int_0^l \frac{M_q(x) \cdot x}{EI(x)} dx = 0. \quad (40)$$

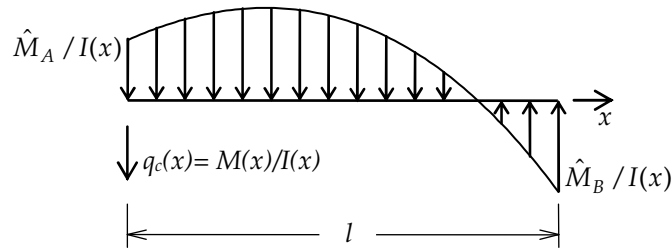


Figura 14 – Viga conjugada e seu carregamento para determinação dos momentos de engastamento para uma carga linearmente distribuída.

Foi implementada uma função em C (**FixEnd\_q**) que está descrita na seção 8 para calcular os momentos de engastamento perfeito de uma barra com variação cúbica do momento de inércia da seção transversal para uma solicitação de carga transversal linearmente distribuída.

Para testar esta implementação, é feita uma comparação com tabelas de Guldan apresentadas por Sússekind [2]. Essa tabelas contém valores para os momentos de engastamento perfeito de vigas com seção transversal retangular e somente consideram o caso de uma carga transversal uniformemente distribuída ( $q = q_A = q_B$ ). As Tabelas 6 e 7 mostram a comparação dos valores calculados pela presente metodologia [vc] com os mostrados por Sússekind [2] para vigas em mísula reta com valores da relação  $I_B/I_A$  variando de 1,000 a 0,005. Os valores dos momentos de engastamento perfeito ( $\hat{M}_A$  e  $\hat{M}_B$ ) são mostrados de forma adimensional multiplicados por  $12/ql^2$ . Observa-se pelas equações (13) e (14) que  $ql^2/12$  é o valor dos momentos de engastamento perfeito para uma barra com momento de inércia constante e solicitada por uma carga uniformemente distribuída  $q$ .

Tabela 6 – Momentos de engastamento perfeito para vigas em mísula reta com seção transversal retangular para carga transversal uniformemente distribuída ( $I_B/I_A$  variando de 1,000 a 0,150).

$I_B/I_A$	1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,200	0,150
$\hat{M}_A 12 / ql^2$ [vc]	1,000	1,021	1,045	1,073	1,105	1,144	1,192	1,256	1,349	1,416
$\hat{M}_A 12 / ql^2$ [2]	1,000	1,018	1,043	1,071	1,110	1,146	1,193	1,255	1,348	1,416
$-\hat{M}_B 12 / ql^2$ [vc]	1,000	0,979	0,956	0,930	0,901	0,867	0,826	0,776	0,708	0,663
$-\hat{M}_B 12 / ql^2$ [2]	1,000	0,978	0,955	0,931	0,897	0,866	0,826	0,777	0,709	0,663

Tabela 7 – Momentos de engastamento perfeito para vigas em mísula reta com seção transversal retangular para carga transversal uniformemente distribuída ( $I_B/I_A$  variando de 0,120 a 0,005).

$I_B/I_A$	0,120	0,100	0,080	0,060	0,050	0,040	0,030	0,020	0,010	0,005
$\hat{M}_A 12 / ql^2$ [vc]	1,469	1,513	1,567	1,638	1,683	1,739	1,812	1,916	2,095	2,274
$\hat{M}_A 12 / ql^2$ [2]	1,469	1,513	1,571	1,638	1,683	1,739	1,812	1,916	2,095	2,274
$-\hat{M}_B 12 / ql^2$ [vc]	0,629	0,602	0,570	0,531	0,507	0,479	0,445	0,400	0,331	0,272
$-\hat{M}_B 12 / ql^2$ [2]	0,629	0,602	0,566	0,531	0,507	0,479	0,445	0,400	0,331	0,272

As Tabelas 6 e 7 mostram que são mínimas as diferenças entre os resultados atuais e os apresentados por Süsserkind, demonstrando que a presente implementação está correta. A vantagem da presente implementação é que ela calcula numericamente os momentos de engastamento perfeito para qualquer valor da relação  $I_B/I_A$ , para qualquer forma de seção transversal (não só a retangular) e para cargas transversais linearmente distribuídas (não somente cargas uniformes).

## 8 Implementação computacional

Com base no exposto nas seções 6 e 7 foram implementadas funções utilizando a linguagem computacional C para fazer o cálculo dos parâmetros fundamentais de uma barra com variação cúbica do momento de inércia da seção transversal ao longo do seu vão (mísula reta). Dessa forma, foi implementada uma função (**RotStiffCoef**) para calcular os coeficientes de rigidez à rotação  $K_A$  e  $K_B$  e os coeficientes de transmissão de momentos  $t_{AB}$  e  $t_{BA}$ , e outra função (**FixEnd\_q**) para calcular as reações momentos de engastamento perfeito provocados por uma carga transversal linearmente distribuída.

A função **RotStiffCoef** resolve dois sistemas de duas equações com duas incógnitas: o sistema formado pelas equações (27) e (28); e o sistema formado pelas equações (33) e (34). A função **FixEnd\_q** resolve o sistema formado pelas equações (39) e (40).

Os coeficientes dessas equações correspondem a integrais de divisões de polinômios. Portanto, as funções **RotStiffCoef** e **FixEnd** fazem uso de uma função auxiliar (**IntegraDivPoli**) que faz o cálculo da integral da divisão de dois polinômios quaisquer. Essas três funções são descritas a seguir.

```
void RotStiffCoef( double len, double I0, double I1, double I2, double I3,  
                 double* Ka, double* Kb, double* tab, double* tba )
```

Esta função calcula os coeficientes de rigidez à rotação e os coeficientes de transmissão de momentos para uma barra com variação cúbica do momento de inércia da seção transversal.

*Parâmetros:*

<b>len</b>	– comprimento da barra	(input)
<b>I0</b>	– valor do momento de inércia da seção transversal no início da barra	(input)
<b>I1</b>	– valor do momento de inércia a 1/3 do vão da barra	(input)
<b>I2</b>	– valor do momento de inércia a 2/3 do vão da barra	(input)
<b>I3</b>	– valor do momento de inércia no final da barra	(input)
<b>Ka</b>	– coeficiente de rigidez à rotação no início da barra	(output)
<b>Kb</b>	– coeficiente de rigidez à rotação no final da barra	(output)
<b>tab</b>	– coeficiente de transmissão de momentos do início para o fim da barra	(output)
<b>tba</b>	– coeficiente de transmissão de momentos do fim para o início da barra	(output)

```
void FixEnd_q( double len, double qa, double qb, double I0, double I1,  
              double I2, double I3, double* Ma, double* Mb )
```

Esta função calcula as reações momentos de engastamento perfeito para uma barra com variação cúbica do momento de inércia da seção transversal solicitada por uma carga transversal linearmente distribuída ao longo do seu vão.

A convenção de sinais para carga transversal é tal que valores positivos correspondem à direção para cima (na direção do eixo local  $y$  transversal à barra).

A convenção de sinais para as reações momentos de engastamento é tal que valores positivos correspondem a momentos no sentido anti-horário.

*Parâmetros:*

<b>len</b>	– comprimento da barra	(input)
<b>qa</b>	– valor da carga transversal no início da barra	(input)
<b>qb</b>	– valor da carga transversal no final da barra	(input)
<b>I0</b>	– valor do momento de inércia da seção transversal no início da barra	(input)
<b>I1</b>	– valor do momento de inércia a 1/3 do vão da barra	(input)
<b>I2</b>	– valor do momento de inércia a 2/3 do vão da barra	(input)
<b>I3</b>	– valor do momento de inércia no final da barra	(input)
<b>Ma</b>	– reação de engastamento perfeito no início da barra	(output)
<b>Mb</b>	– reação de engastamento perfeito no início da barra	(output)

```
double IntegraDivPoli( int grauPoliNumerador, double* PoliNumerador,  
                      int grauPoliDenominador, double* PoliDenominador,  
                      double a, double b)
```

Esta função realiza a integração da divisão de dois polinômios no intervalo [a,b].

A função verifica se é necessário subdividir o intervalo de integração. No caso de a diferença entre o valor da integral calculado em todo o trecho ser diferente, a menos de uma tolerância, da soma dos valores calculados nas duas metades do trecho, a função calcula recursivamente a integral em cada metade do trecho. A função utiliza integração numérica de Gauss com quatro pontos de integração em cada trecho.

*Parâmetros:*

<b>grauPoliNumerador</b>	– grau do polinômio do numerador	(input)
<b>PoliNumerador</b>	– coeficientes do polinômio do numerador	(input)
<b>grauPoliDenominador</b>	– grau do polinômio do denominador	(input)
<b>PoliDenominador</b>	– coeficientes do polinômio do denominador	(input)
<b>a</b>	– limite inferior de integração	(input)
<b>b</b>	– limite superior de integração	(input)

*Retorna:*

Resultado da integração.

## 9 Conclusões

Este trabalho mostrou que é possível determinar parâmetros fundamentais para barras com variação linear da altura da seção transversal (mísula reta) de uma forma numérica, simples e eficiente.

A metodologia adotada, baseada na analogia da viga conjugada, resultou em uma implementação computacional em C. Uma função implementada calcula coeficientes de rigidez à rotação e coeficientes de transmissão de momentos para barras isoladas. Outra função calcula reações momentos de engastamento perfeito para barras submetidas a cargas transversais linearmente distribuídas. Os parâmetros calculados por essas funções são considerados fundamentais pois podem ser utilizados como base para o cálculo de todos os outros parâmetros (soluções fundamentais) que descrevem o comportamento de uma barra isolada no contexto do Método dos Deslocamentos.

As funções implementadas estão prontas para serem incorporadas a qualquer programa de análise de estruturas que utilizem este método. Isso já está sendo realizado no programa Ftool [10].

Como continuação do trabalho, sugere-se a determinação de reações momentos de engastamento perfeito para outras solicitações, tais como variação de temperatura. Além disso, seria importante a consideração de mísulas parabólicas (altura da seção transversal variando em um polinômio do segundo grau ao longo do comprimento da barra). Para tanto, é necessário considerar a variação do momento de inércia da seção transversal utilizando um polinômio do sexto grau.



## 10 Agradecimentos

Os autores agradecem o pesquisador Alexandre de Oliveira Lopes do Tecgraf/PUC-Rio pela ajuda na implementação da função que calcula a integral da divisão de polinômios. A aluna teve uma bolsa de iniciação científica (PIBIC) do CNPq.

## 11 Referências

- 1 - White, R.N., Gergely, P. e Sexsmith, R.G. **Structural Engineering – Combined Edition – Vol. 1: Introduction to Design Concepts and Analysis – Vol. 2: Indeterminate Structures**, John Wiley & Sons, New York, 1976.
- 2 - Süssekind, J.C. **Curso de Análise Estrutural – Vol. 3: Método das Deformações e Processo de Cross**, Editora Globo, Porto Alegre, 1977.
- 3 - Martha, L.F. **Métodos Básicos da Análise de Estruturas**, <http://www.tecgraf.puc-rio.br/~lfm>, 2006.
- 4 - Süssekind, J.C. **Curso de Análise Estrutural – Vol. 2: Deformações em Estruturas e Método das Forças**, Editora Globo, Porto Alegre, 1977.
- 5 - Tauchert, T.R. **Energy Principles in Structural Mechanics**, McGraw-Hill, New York, 1974.
- 6 - Féodosiev, V. **Resistência dos Materiais**, Edições Lopes da Silva, Porto, Portugal, 1977.
- 7 - Beer F.P. e Johnston Jr, E.R. **Resistência dos Materiais**, Terceira Edição, MAKRON Books, São Paulo, 1996.
- 8 - Timoshenko, S.P. e Gere, J.E. **Mecânica dos Sólidos, Vols. 1**, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1994.
- 9 - West, H.H. **Analysis of Structures: An Integration of Classical and Modern Methods**, Segunda Edição, John Wiley & Sons, Nova Iorque, 1989.
- 10 - Martha, L.F. **Ftool: Two-dimensional frame analysis tool**, <http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftool>, 2002.