



**Edgar Quispe Ccapacca**

**Construção de padrões para geração de  
malhas por decomposição hierárquica de  
domínio**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para  
obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Luiz Fernando Campos Ramos Martha

Rio de Janeiro  
Julho de 2015



**Edgar Quispe Ccapacca**

**Construção de padrões para geração de  
malhas por decomposição hierárquica de  
domínio**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Luiz Fernando Campos Ramos Martha**  
Orientador  
Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

**Prof. Antônio Carlos de Oliveira Miranda**  
Universidade de Brasília

**Prof. André Maués Brabo Pereira**  
Universidade Federal Fluminense

**Prof. Hélio Côrtes Vieira Lopes**  
Departamento de Informática - PUC-Rio

**Prof. José Eugenio Leal**  
Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 23 de julho de 2015

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Edgar Quispe Ccapacca**

Graduou-se em Engenharia Civil na Universidad Nacional de San Agustín (Arequipa, Perú). Suas principais áreas de interesse são: Análise de Estabilidade das Estruturas, Mecânica Computacional, Computação Gráfica e Geometria Computacional.

#### Ficha Catalográfica

Quispe Ccapacca, Edgar

Construção de padrões para geração de malhas por decomposição hierárquica de domínio / Edgar Quispe Ccapacca; orientador: Luiz Fernando Campos Ramos Martha. - 2015.

v., 113 f. il. (color) ; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, 2015.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Civil - Teses. 2. Malha quadrilateral. 3. Padrões de decomposição de domínio. 4. Padrões de geração de malha. 5. Parâmetros geométricos. 6. Parâmetros topológicos. 7. Condição de realizabilidade. 8. Condições essenciais. I. Martha, Luiz Fernando Campos Ramos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. III. Título

À memória do meu pai.

## Agradecimentos

A Deus, por me dar força para enfrentar os obstáculos que surgiram ao longo desta caminhada.

Ao CAPES e ao Tecgraf/PUC-Rio, pelos auxílios financeiros concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Ao professor Luiz Fernando Martha pela confiança, amizade, compreensão e pelas inúmeras revisões do trabalho.

Aos professores Antônio Miranda (UnB), André Pereira (UFF) e Hélio López (PUC-Rio) pelas inúmeras observações e sugestões para melhorar este trabalho.

Aos meus colegas do Tecgraf/PUC-Rio, por estarem sempre dispostos a ajudar e acima de tudo pela amizade.

Aos meus pais pelo apoio na minha decisão de fazer o mestrado, pela confiança depositada e alegria que sempre me proporcionaram.

## Resumo

Ccapacca, Edgar Quispe; Martha, Luiz Fernando Campos Ramos. **Construção de padrões para geração de malhas por decomposição hierárquica de domínio.** Rio de Janeiro, 2015. 113p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Neste trabalho aborda-se a geração de malha quadrilateral sobre domínios delimitados por duas, três e quatro curvas de bordo, usando padrões de decomposição de domínio, os quais são aplicados sobre domínios que satisfazem um conjunto de condições chamadas de essenciais que permite a geração de malha sobre eles. No entanto, a metodologia desenvolvida pode ser estendida para ser aplicada sobre outras topologias de domínio. A ideia é decompor um domínio em subdomínios, cada subdomínio é decomposto de forma independente até que todos os subdomínios permitam gerar malha usando diretamente o algoritmo de mapeamento transfinito bilinear. A decomposição é feita pela criação de curvas internas fictícias que delimitarão os subdomínios. Estas curvas podem intersectar-se dando lugar a pontos de interseção, os quais são chamados de parâmetros geométricos e podem ser variados para mudar a geometria dos subdomínios com o propósito de melhorar a qualidade da malha gerada. Os subdomínios são delimitados por curvas que terão um número definido de subdivisões, isto será chamado de parâmetros topológicos e de cujos valores dependerá o tipo de decomposição aplicada nos subdomínios. Os padrões de decomposição foram projetados dando lugar aos padrões de geração de malha que têm valores definidos para seus parâmetros geométricos e topológicos. Desta forma é possível conhecer a topologia e o nível de decomposição hierárquica a priori. Os parâmetros topológicos podem ser variados dinamicamente para encontrar a topologia de malha de melhor qualidade sobre um domínio. Foram incluídos exemplos para mostrar a aplicabilidade da metodologia proposta.

## Palavras-chave

Malha quadrilateral; padrões de decomposição de domínio; padrões de geração de malha; parâmetros geométricos; parâmetros topológicos; condição de realizabilidade; condições essenciais.

## Abstract

Ccapacca, Edgar Quispe; Martha, Luiz Fernando Campos Ramos (Advisor). **Template construction for mesh generation by hierarchical domain decomposition.** Rio de Janeiro, 2015. 113p. MSc. Dissertation - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In this work, it is discussed quadrilateral mesh generation using patterns of domain decomposition. Mesh generation is treated on domains delimited by two, three and four curves. Patterns of domain decomposition are applied to domains that satisfy a set of conditions called essential conditions. However, the approach developed can be applied to other domain topologies. Mesh generation begins with an initial domain decomposition, each subdomain also is independently decomposed until all the subdomains enable mesh generation using bilinear mapping. The decomposition is done by creating fictitious internal curves that demarcate the subdomains. These curves can intersect giving rise to points of intersection, which are called geometric parameters and can be varied to change the geometry of the subdomains in order to improve the quality of the generated mesh. The subdomains are bounded by curves, which have a defined number of subdivisions, this will be called topological parameters and of whose values depend the type of decomposition applied on subdomains. Patterns of decomposition were designed giving way to patterns of mesh generation that have values set for its geometric and topological parameters, in this way is possible to know the topology and the level of hierarchical decomposition a priori. Topological parameters were dynamically varied to show the possibility of finding various mesh topologies on a domain. Examples are included to show the applicability of the proposed methodology.

## Keywords

Quadrilateral mesh; patterns of domain decomposition; patterns of mesh generation; geometric parameters; topological parameters; realizability condition; essential conditions.

## Sumário

1. Introdução	16
1.1. Revisão bibliográfica	18
1.2. Objetivos	20
1.3. Organização do texto	21
2. Base Teórica	23
2.1. Representação dual de uma malha quadrilateral	23
2.2. Domínio	24
2.2.1. Domínio base	24
2.2.2. Domínio realizável e irrealizável	24
2.3. Condições definidas sobre domínios	27
2.3.1. Condição de paridade	27
2.3.2. Condição de realizabilidade	28
2.3.3. Condições essenciais e não essenciais	29
2.3.4. Condição de triplo mapeamento bilinear	32
2.4. Padrões de decomposição de domínio	34
2.4.1. Tipos de padrões de decomposição de domínio	36
2.4.2. Parâmetros associados aos padrões de decomposição de domínio	37
2.5. Padrões de geração de malha	40
2.5.1. Padrão base	42
2.5.2. Grau de um padrão de geração de malha	42
2.6. Critérios a considerar no projeto de padrões de geração de malha	43

3. Projeto de Padrões de Geração de Malha Quadrilateral	46
3.1. Padrão de geração de malha Q1A -4 curvas- grau 1	47
3.2. Padrão de geração de malha Q2A -4 curvas- grau 1 e 2	51
3.3. Padrão de geração de malha Q3A -3 curvas- grau 1 e 2	55
3.4. Padrão de geração de malha Q4A -3 curvas- grau 2 e 3	60
3.5. Padrão de geração de malha Q5A -2 curvas- grau 3 e 4	65
4. Geração Dinâmica de Malha Quadrilateral usando Padrões	70
4.1. Geração baseada no padrão de decomposição Q1	71
4.2. Geração baseada no padrão de decomposição Q2	72
4.3. Geração baseada no padrão de decomposição Q3	73
4.4. Geração baseada no padrão de decomposição Q4	74
4.5. Geração baseada no padrão de decomposição Q5	75
5. Conclusões e trabalhos futuros	77
5.1. Conclusões	77
5.2. Trabalhos futuros	78
6. Referências Bibliográficas	79
A Outros Projetos de Padrões de Geração de Malha	80
A.1. Padrão de geração de malha Q2B -4 curvas- grau 1 e 2	80
A.2. Padrão de geração de malha Q3B -3 curvas- grau 1 e 2	83
A.3. Padrão de geração de malha Q4B -3 curvas- grau 1 e 2	88
A.4. Padrão de geração de malha Q5B -2 curvas- grau 2 e 3	92
B. Padrões para Geração de Malha Hexaedral	97
B.1. Padrões de decomposição 3d duais	98

B.2. Projeto de padrões de geração de malha hexaedral	99
B.2.1. Padrão de geração de malha H1A- grau 1	99
B.2.2. Padrão de geração de malha H2A- grau 1 e 2	103
B.2.3. Padrão de geração de malha H3A- grau 1	107
B.2.4. Padrão de geração de malha H4A- grau 1 e 2	110

## Lista de figuras

Figura 1.1. Malha quadrilateral estruturada vs. malha quadrilateral não estruturada	16
Figura 1.2. Coordenadas paramétricas e curvas de bordo	18
Figura 1.3. Refinamento de malha quadrilateral usando templates de refinamento	19
Figura 2.1. Representação dual de malha quadrilateral	23
Figura 2.2. Exemplo de domínio delimitado por três curvas de bordo	24
Figura 2.3. Domínios com número mínimo de arestas	25
Figura 2.4. Domínio não realizável e realizável geometricamente	26
Figura 2.5. Decomposição de domínio que gera subdomínio irrealizável e realizável	26
Figura 2.6. Existência do dual sobre domínios que cumprem a condição de paridade	28
Figura 2.7. Mínimo número de subdivisões necessárias para decompor um domínio	28
Figura 2.8. Condição de triplo mapeamento bilinear sobre um domínio triangular	33
Figura 2.9. Exemplo da condição de triplo mapeamento bilinear	34
Figura 2.10. Padrões de decomposição de domínio para geração de malhas quadrilaterais	35
Figura 2.11. Padrões não duais complementados com padrões duais	37
Figura 2.12. Valores mínimo e máximo dos parâmetros topológicos de bordo associados a Q1, Q2 e Q3	39
Figura 2.13. Valores mínimo e máximo dos parâmetros topológicos de bordo associados a Q4 e Q5	40
Figura 2.14. Exemplo de padrão de geração de malha com definição de parâmetros	41
Figura 2.15. Relação entre padrão de geração de malha e a malha gerada por ele	41

Figura 2.16. Exemplo de diagramas de árvore de padrões de geração de malha	43
Figura 2.17. Variação da decomposição hierárquica por variação dos parâmetros topológicos internos	44
Figura 3.1. Padrão de geração de malha Q1A	48
Figura 3.2. Parâmetros geométricos propostos para o padrão de geração de malha Q1A	51
Figura 3.3. Decomposição hierárquica gerada pelo padrão de geração de malha Q1A	51
Figura 3.4. Padrão de geração de malha Q2A	52
Figura 3.5. Decomposição hierárquica gerada pelo padrão de geração de malha Q2A	55
Figura 3.6. Padrão de geração de malha Q3A	56
Figura 3.7. Decomposição hierárquica gerada pelo padrão de geração de malha Q3A	59
Figura 3.8. Malha gerada com e sem teste prévio da condição de triplo mapeamento bilinear	60
Figura 3.9. Padrão de geração de malha Q4A	61
Figura 3.10. Decomposição hierárquica gerada pelo padrão de geração de malha Q4A	64
Figura 3.11. Modelo real com um domínio de geometria alongada	65
Figura 3.12. Padrão de geração de malha Q5A	66
Figura 3.13. Decomposição hierárquica gerada pelo padrão de geração de malha Q5A	69
Figura 4.1. Diálogo que permite variar dinamicamente os parâmetros geométricos e topológicos	71
Figura 4.2. Variação dos parâmetros geométricos de uma malha	71
Figura 4.3. Geração dinâmica baseada na decomposição Q1	72
Figura 4.4. Geração dinâmica baseada na decomposição Q2	73
Figura 4.5. Geração dinâmica baseada na decomposição Q3	74
Figura 4.6. Geração dinâmica baseada na decomposição Q4	75
Figura 4.7. Geração dinâmica baseada na decomposição Q5	76

Figura A.1. Padrão de geração de malha Q2B	81
Figura A.2. Decomposição hierárquica gerada pelo padrão de geração de malha Q2B	83
Figura A.3. Padrão de geração de malha Q3B	84
Figura A.4. Decomposição hierárquica gerada pelo padrão de geração de malha Q3B	88
Figura A.5. Padrão de geração de malha Q4B	89
Figura A.6. Decomposição hierárquica gerada pelo padrão de geração de malha Q4A	92
Figura A.7. Padrão de geração de malha Q5B	93
Figura A.8. Decomposição hierárquica gerada pelo padrão de geração de malha Q5B	96
Figura B.1. Notação para as malhas de superfície	98
Figura B.2. Padrões de decomposição para geração de malha hexaedral	99
Figura B.3. Padrão de geração de malha H1A	100
Figura B.4. Decomposição hierárquica gerada pelo padrão de geração de malha H1A	103
Figura B.5. Padrão de geração de malha H2A	104
Figura B.6. Decomposição hierárquica gerada pelo padrão de geração de malha H2A	107
Figura B.7. Padrão de geração de malha H3A	108
Figura B.8. Decomposição hierárquica gerada pelo padrão de geração de malha H3A	110
Figura B.9. Padrão de geração de malha H4	111
Figura B.10. Decomposição hierárquica gerada pelo padrão de geração de malha H4A	113

## Lista de tabelas

Tabela 2.1. Padrão de decomposição usado sobre um domínio que satisfaz alguma condição essencial

35

La tarea no consiste en ver lo que nadie ha visto,  
sino en pensar lo que todavía nadie ha pensado sobre  
aquello que todos ven.

Arthur Schopenhauer

# 1 Introdução

O método de “mapeamento transfinito bilinear” permite gerar malhas quadrilaterais, mas ele apresenta a desvantagem de que o domínio deve estar delimitado por quatro curvas de bordo. Além disso, os números de subdivisões de duas curvas de bordo opostas devem ser iguais. Portanto, esse método só permite gerar “malhas quadrilaterais estruturadas”.

Em uma “malha quadrilateral estruturada”, a “valência de um nó interior” (número de subdivisões ou faces adjacentes ao nó) é constante (valência 4). Em uma “malha quadrilateral não estruturada” a valência de cada nó interior é variável, por exemplo 3, 4, 5 etc. (Sandia, 2011). A vantagem de gerar malhas quadrilaterais não estruturadas é que os algoritmos de geração de malha podem ser aplicados sobre domínios delimitados com qualquer número de curvas de bordo.

A Figura 1.1 mostra exemplos de malha quadrilateral estruturada e duas malhas quadrilaterais não estruturadas.



Figura 1.1: Malha quadrilateral estruturada vs. malha quadrilateral não estruturada

Neste trabalho, usa-se dois termos referidos a padrões: “padrões de decomposição de domínio” e “padrões de geração de malha”. Os padrões de decomposição de domínio só mostram a topologia de decomposição de um domínio, com parâmetros associados a eles simbolicamente. No entanto, os padrões de geração de malha, além de mostrar a topologia de decomposição de um domínio, têm valores definidos para esses parâmetros. A topologia de decomposição de um

domínio, mostra como foi decomposto o domínio. O procedimento de definir valores para esses parâmetros é chamado de “projeto do padrão de geração de malha”.

Neste trabalho, aborda-se a geração de malha por decomposição hierárquica de domínio. O processo de decomposição é realizado até que todos os subdomínios permitam a geração de malha usando diretamente o algoritmo de mapeamento transfinito bilinear. É apresentada uma metodologia que permite definir a “topologia de decomposição hierárquica” que terá o domínio, baseada principalmente no projeto prévio de padrões de geração de malha. São apresentados o projeto de padrões de geração de malha baseado na teoria desenvolvida.

A geração de malhas quadrilaterais é realizada sobre domínios delimitados por duas, três e quatro curvas de bordo. Neste trabalho, os domínios delimitados por três e quatro curvas de bordo também são chamados de domínio “triangular” e “quadrangular” respectivamente. Os termos triangular e quadrangular fazem referência a três e quatro curvas de bordo respectivamente, mas as curvas de bordo não precisam ser linhas retas. Usa-se o termo “topologia de domínio” para fazer referência a estes domínios.

O termo “malha quadrilateral” faz referência a malhas com todos seus elementos quadrilaterais.

A avaliação em coordenadas paramétricas da posição de qualquer ponto dentro do domínio que é gerado no processo de decomposição hierárquica, é efetuada por meio das equações de “mapeamento transfinito bilinear” para domínios com quatro curvas de bordo e “mapeamento transfinito trilinear” para domínios com três curvas de bordo. Domínios com duas curvas de bordo, podem ser considerados como domínios com quatro curvas, dividindo cada curva de bordo em duas curvas. Este critério foi adotado por Miranda & Martha (2013), com bons resultados.

Não é objetivo deste trabalho descrever detalhadamente os métodos de mapeamento transfinito. Para mais informação pode-se revisar os trabalhos de Haber et al. (1981) e Gordon & Hall (1973). As equações (1.1) e (1.2) apresentam as expressões de interpolação transfinita para mapeamento bilinear e trilinear respectivamente.

$$\begin{aligned}
P(u, v) = & (1 - v)\psi_1(u) + v\psi_2(u) + (1 - u)\xi_1(v) \\
& + u\xi_2(v) - (1 - u)(1 - v)F(0,0) \\
& - (1 - u)vF(0,1) - uvF(1,1) \\
& - u(1 - v)F(1,0)
\end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}
T(u, v, w) = & \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{u}{1 - v} \right) \xi(v) + \left( \frac{w}{1 - v} \right) \eta(1 - v) \right. \\
& + \left( \frac{v}{1 - w} \right) \eta(w) + \left( \frac{u}{1 - w} \right) \psi(1 - w) \\
& + \left( \frac{w}{1 - u} \right) \psi(u) + \left( \frac{v}{1 - u} \right) \xi(1 - u) \\
& \left. - w\psi(0) - u\xi(0) - v\eta(0) \right]
\end{aligned} \tag{1.2}$$

A Figura 1.2 mostra as coordenadas paramétricas e curvas de bordo para domínios delimitados por três e quatro curvas de bordo.

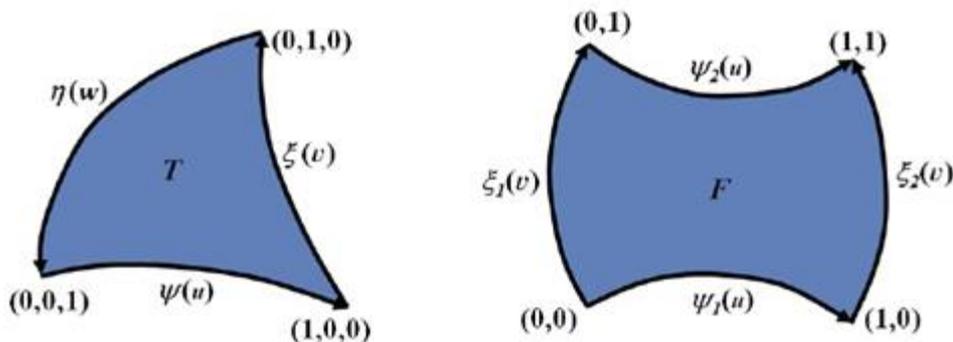


Figura 1.2: Coordenadas paramétricas e curvas de bordo (Miranda & Martha, 2013)

## 1.1

### Revisão bibliográfica

Na literatura existem alguns métodos de geração de malha baseados em decomposição de domínio.

O método de subdivisão de ponto médio “Midpoint subdivision”, decompõe um domínio em subdomínios quadrangulares. Cada subdomínio é mapeado com interpolação transfinita (Sandia, 2011). No entanto, o método limita-se a domínios cujas curvas de bordo têm igual número de subdivisões.

O refinamento de malha usando “templates de refinamento de elemento” é baseado na ideia de decomposição de domínio. A tarefa do refinamento é encontrar uma transição desde a parte refinada para a parte grossa da malha. Isto é feito através da inserção de templates nos elementos de transição, este procedimento é

feito recursivamente até conseguir o nível de refinamento adequado (Schneiders, 2000). A Figura 1.3 mostra esta ideia.

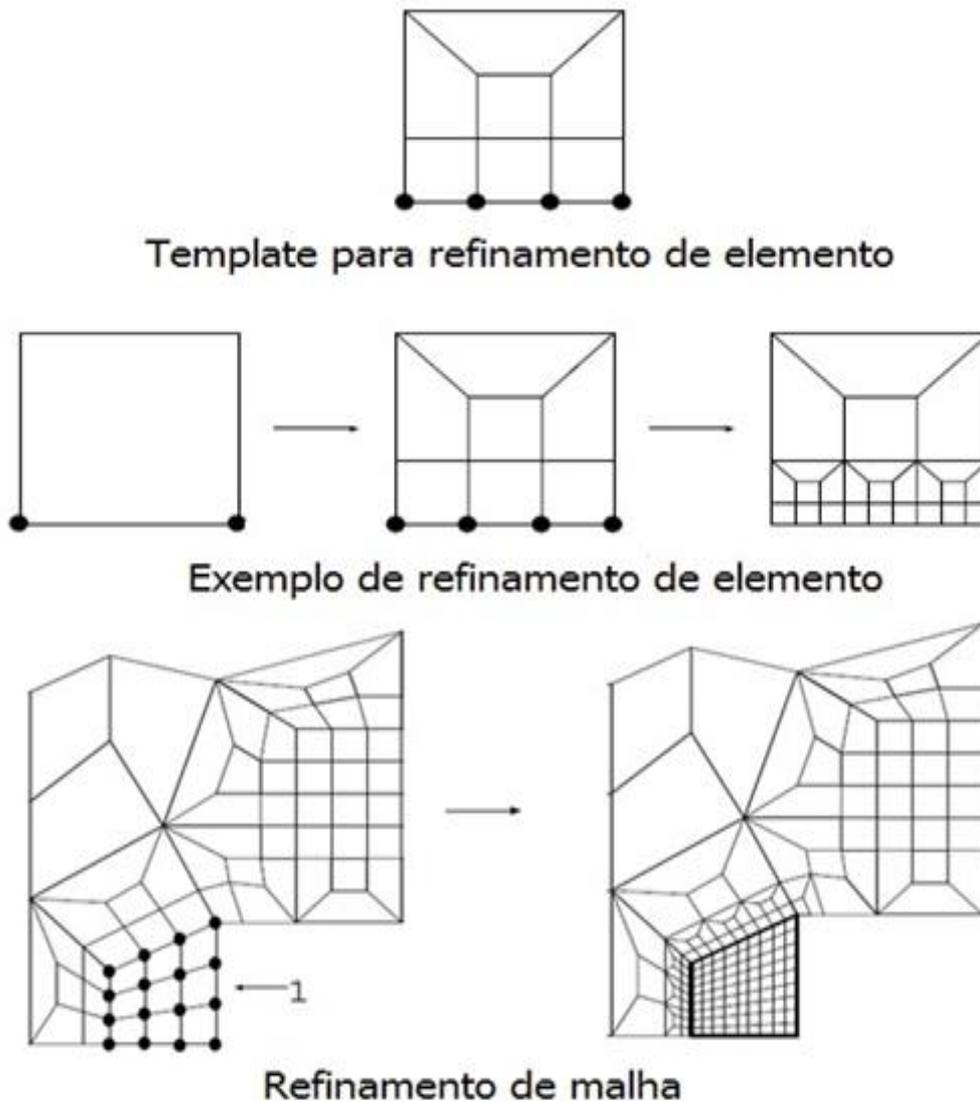


Figura 1.3: Refinamento de malha quadrilateral usando templates de refinamento (Schneiders, 2000)

No tutorial Ansys (2005) é apresentada a geração de malhas quadrilaterais de transição apenas para o caso de domínios limitados por quatro curvas. São apresentadas padrões de geração que geram malha sobre alguns casos particulares de subdivisão de curvas de bordo do domínio, pois eles não foram formulados em um processo de decomposição hierárquica.

Outras técnicas de geração de malha existentes na literatura baseadas em decomposição de domínio, como “quad-tree”, “medial axis” etc. são mencionadas no trabalho de Owen (1998).

Este trabalho é apresentado como uma extensão e generalização do trabalho feito por Miranda & Martha (2013), onde é abordado a geração de malhas quadrilaterais em um processo de decomposição hierárquica usando “templates” (padrões). O método é baseado em uma decomposição hierárquica de região, onde no último nível de decomposição é possível gerar elementos quadrilaterais com uma estratégia de mapeamento convencional.

Embora a geração de malha quadrilateral baseada em decomposição hierárquica de domínio tenha sido explorada, este trabalho apresenta algumas contribuições:

- A metodologia é baseada na possibilidade de definir de maneira prévia a topologia de decomposição hierárquica que terá o domínio.
- São introduzidos alguns termos novos com o objetivo de apresentar a metodologia de um modo formal.
- É apresentada uma metodologia para projetar padrões de geração de malha baseada em critérios de refinamento e qualidade de malha.
- São definidos parâmetros que permitem variar a topologia e a geometria da malha gerada, bem como melhorar a qualidade e controlar o refinamento de malha.
- São apresentadas um conjunto de condições que são indispensáveis para aplicar um padrão de geração de malha sobre um domínio.
- Apresenta-se um método de geração dinâmica de malha sobre um domínio baseado na variação de certos parâmetros definidos neste trabalho.

## 1.2 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é apresentar uma metodologia para geração de malha quadrilateral por decomposição hierárquica de domínio. Como objetivos específicos, citam-se:

- Apresentar formalmente um método de geração de malha baseado em decomposição hierárquica de domínio.
- Estudar a geração de malha em domínios delimitados por duas, três e quatro curvas.

- Apresentar um conjunto de padrões de decomposição de domínio a serem usados sobre domínios que satisfazem um conjunto de condições.
- Mostrar o projeto de padrões de geração de malha quadrilateral a partir dos padrões de decomposição de domínio definidos neste trabalho.
- Apresentar um conjunto de condições indispensáveis que permite definir o padrão a ser usado sobre um domínio.
- Apresentar um método de geração dinâmica de malha sobre um domínio baseado na variação de certos parâmetros definidos neste trabalho.

### 1.3

#### Organização do texto

O capítulo 2 descreve a teoria desenvolvida e utilizada no processo de geração de malha baseada em decomposição hierárquica de domínio. São apresentados alguns padrões de decomposição de domínio e sua aplicabilidade sobre um domínio. São introduzidos alguns termos novos, cujo conhecimento é indispensável para o entendimento do trabalho.

No capítulo 3 apresenta-se a geração de malha quadrilateral, baseado no projeto de padrões de geração de malha. São explicados os critérios sob o qual os padrões de geração de malha foram projetados. Foram incluídos alguns exemplos resultado da implementação dos padrões de geração de malha. Cada exemplo é apresentado com sua respectiva árvore de decomposição que mostra a decomposição hierárquica efetuada sobre o domínio no processo de geração de malha.

No capítulo 4 é apresentada um método de geração de malha chamado de “geração dinâmica de malhas quadrilaterais”. A geração neste caso é baseada no uso dos padrões de decomposição de domínio, com valores arbitrários de parâmetros que podem variar, os quais só decompõem o domínio em subdomínios. No entanto, para a geração de malha nos subdomínios são usados os padrões de geração de malha projetados no capítulo anterior. Também foram incluídos alguns exemplos.

Finalmente, no capítulo 5 são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Foram incluídos ainda dois apêndices onde são apresentados outros projetos de padrões de geração de malha quadrilateral e também foi abordado o caso hexaedral como uma extensão da teoria desenvolvida

## 2 Base Teórica

Este capítulo tem por objetivo explicar os termos utilizados neste trabalho. Foram introduzidos alguns termos novos com o propósito de apresentar formalmente a metodologia desenvolvida. Estes “termos novos” são exclusivos para a metodologia desenvolvida.

### 2.1 Representação dual de uma malha quadrilateral

A representação de uma malha quadrilateral composta de elementos, arestas e nós, é conhecida como o “primal”. As malhas quadrilaterais têm uma representação dual similar ao diagrama de Voronoi de uma malha triangular de Delaunay (Sandia, 2011). O “diagrama dual de uma malha quadrilateral” está formado por um grupo de curvas chamados “cordas duais”.

Para desenhar o dual de uma malha quadrilateral é necessário localizar os “vértices duais”. Um vértice dual é definido no centroide de cada face quadrilateral e no centroide de cada aresta de bordo. O vértice no centroide de um elemento quadrilateral é a interseção de duas cordas duais.

Conectando os “vértices duais” através de elementos adjacentes criam-se as “arestas do dual”. A corda dual é obtida por união das arestas duais adjacentes. Cada aresta dual é parte de exatamente uma corda dual.

A Figura 2.1 mostra a representação dual de uma malha quadrilateral.

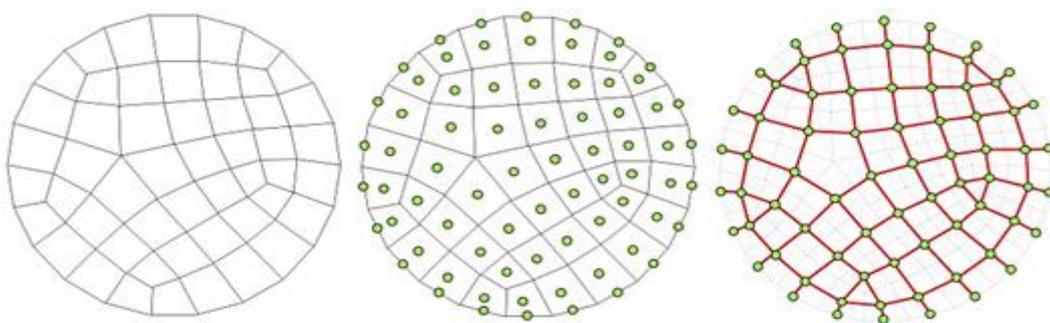


Figura 2.1: Representação dual de malha quadrilateral (Sandia, 2011)

## 2.2 Domínio

Um domínio é uma região fechada limitada por curvas chamadas de “curvas de bordo”. Cada curva de bordo tem um número arbitrário de subdivisões, mas para o caso de gerar malhas quadrilaterais usando padrões o domínio deve satisfazer um conjunto de condições que são definidas mais adiante. As subdivisões serão chamadas também de segmentos de bordo. A Figura 2.2 mostra um exemplo de domínio com subdivisão das curvas de bordo.



Figura 2.2: Exemplo de domínio delimitado por três curvas de bordo

### 2.2.1 Domínio base

No contexto de geração de malhas usando “padrões”, “domínio base” é um domínio quadrangular onde o número de subdivisões de curvas de bordo opostas são iguais. A geração de malha sobre este domínio pode ser feita usando diretamente o algoritmo de mapeamento transfinito bidimensional. O objetivo de decompor um domínio usando padrões é gerar vários subdomínios base. O nome “domínio base” foi dado porque faz referência ao “caso base” ou fim de uma decomposição hierárquica.

### 2.2.2 Domínio realizável e irrealizável

Domínio realizável é aquele domínio onde é possível gerar malha. Isto tem a ver com a existência de um número mínimo de subdivisões sobre o domínio. Por exemplo, um domínio quadrangular com só uma subdivisão em cada curva de bordo é realizável pois este domínio já é um elemento quadrilateral de malha.

Domínio irrealizável é aquele que não pode ser decomposto em subdomínios por não existirem o mínimo número de subdivisões para decompô-lo. Portanto, não é possível gerar malha sobre este domínio. Por exemplo, um domínio delimitado por três curvas com uma subdivisão sobre cada curva de bordo é irrealizável, pois não pode conter pelo menos um elemento quadrilateral. Um domínio delimitado por três curvas pelo menos deveria ter duas subdivisões sobre cada curva de bordo, assim este poderia ser decomposto em três elementos quadrilaterais. Para domínios delimitados por duas curvas de bordo precisa-se ter pelo menos quatro subdivisões sobre cada curva de bordo, assim poderiam ser decompostos em dois subdomínios triangulares e cada um destes decompostos em três elementos quadrilaterais. No entanto, sob outros critérios de decomposição é possível decompor um domínio delimitado por três curvas com subdivisões (1,2,3) e um domínio delimitado por duas curvas de bordo com subdivisões (3,3), como mostrado na Figura 2.3

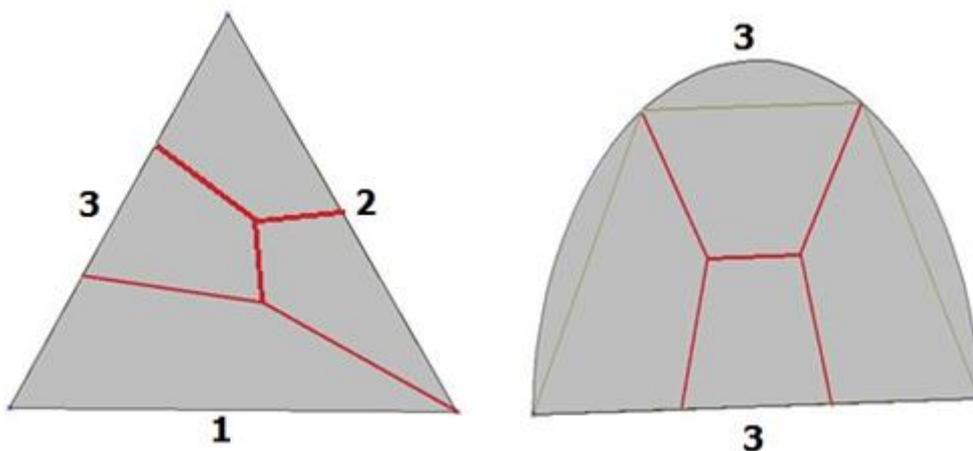


Figura 2.3: Domínios com número mínimo de arestas

Existem domínios que dependem da geometria da curva de bordo para serem realizáveis, eles serão chamados de “geometricamente realizáveis”. A Figura 2.4 mostra esta ideia. Neste trabalho, no processo de decomposição hierárquica, evitar-se-á gerar domínios que dependem da geometria das curvas de bordo para serem realizáveis.

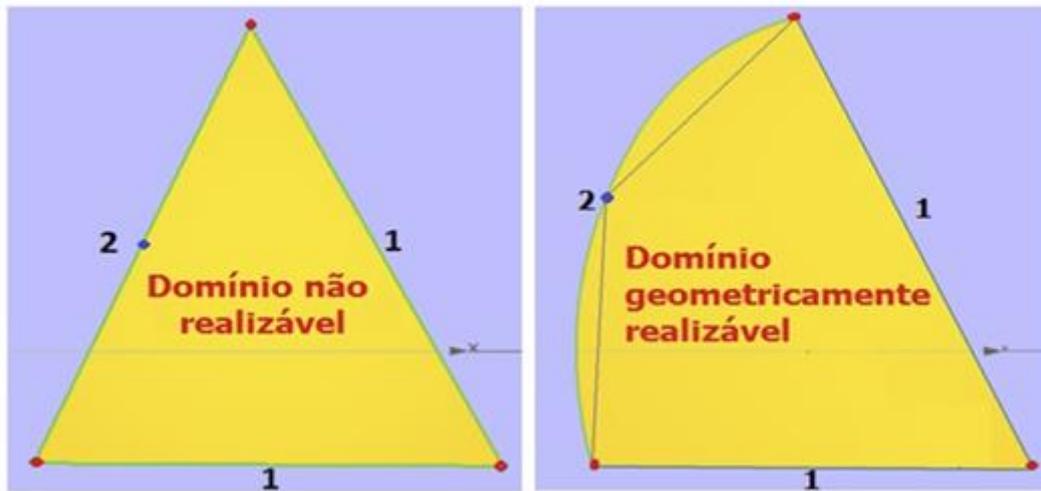


Figura 2.4: Domínio não realizável e realizável geometricamente

A geração de subdomínios realizáveis está diretamente associada a como foi concebida a decomposição do domínio. A Figura 2.5 mostra dois exemplos de malhas geradas por decomposição de um domínio delimitado por três curvas de bordo. No primeiro caso a decomposição gera um subdomínio irrealizável. No segundo caso ambos subdomínios são realizáveis.

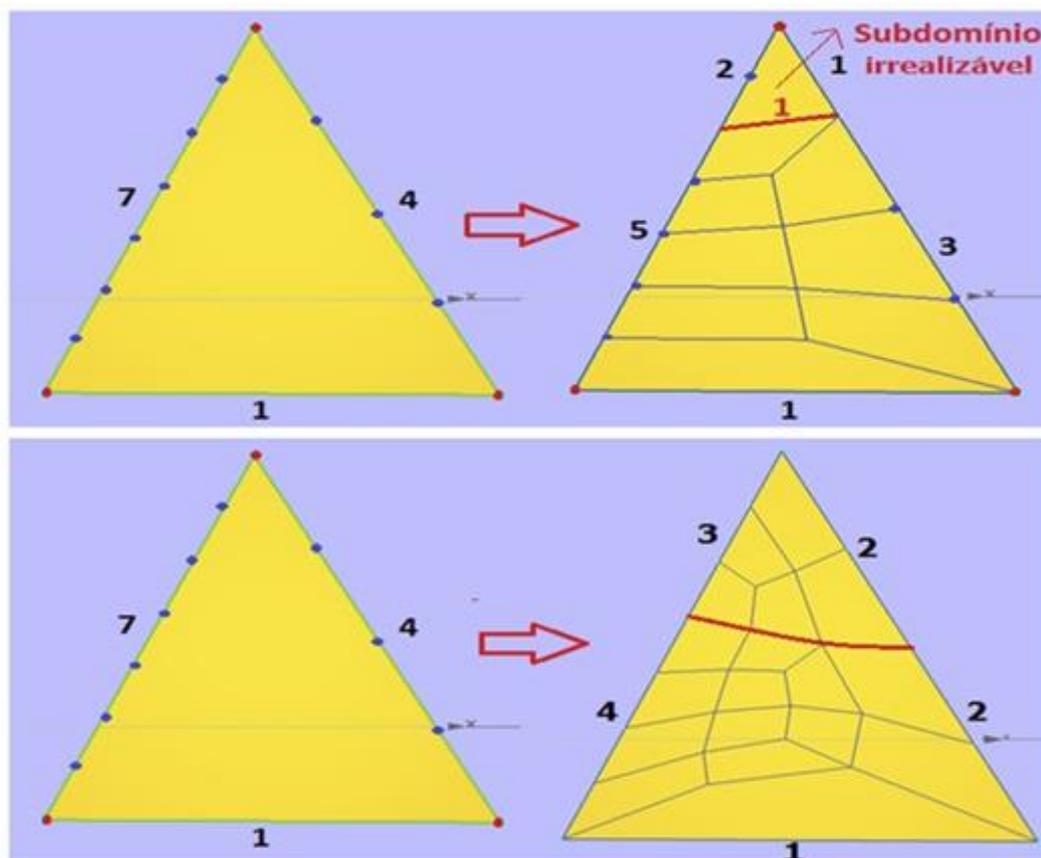


Figura 2.5: Decomposição de domínio que gera subdomínio irrealizável e realizável

## 2.3 Condições definidas sobre domínios

### 2.3.1 Condição de paridade

Uma malha quadrilateral tem um número par de arestas ao redor do seu contorno (Murdoch et al., 1997). Portanto, é possível gerar malha sobre um domínio, se este tem em total um número par de subdivisões sobre as suas curvas de bordo. Esta ideia pode ser reforçada pela equação (2.1) que apresenta uma relação entre o número de elementos  $Q$ , o número de arestas internas,  $E_i$  e o número de arestas de bordo (igual ao número de subdivisões)  $E_b$  de uma malha quadrilateral. Esta relação foi deduzida por analogia com o caso hexaedral apresentado por Schneiders (2000). Da equação (2.1) deduz-se que para qualquer malha quadrilateral o número  $E_b$  de subdivisões de bordo é par.

$$4Q = 2E_i + E_b \quad (2.1)$$

Outra forma de verificar a exigência desta condição é a partir da existência do dual de uma malha quadrilateral. “Toda corda dual que começa sobre um segmento de curva de bordo, deve terminar sobre outro segmento de curva de bordo” (Murdoch et al., 1997). Portanto, é necessária a existência de um número total par de subdivisões (segmentos) sobre as curvas de bordo. A Figura 2.6 mostra um desenho de cordas duais, cada uma delas une dois segmentos diferentes das curvas de bordo. No segundo caso não é possível desenhar todas as cordas duais porque não se cumpre a “condição de paridade”, o que significa que não é possível gerar malha quadrilateral nesse caso.

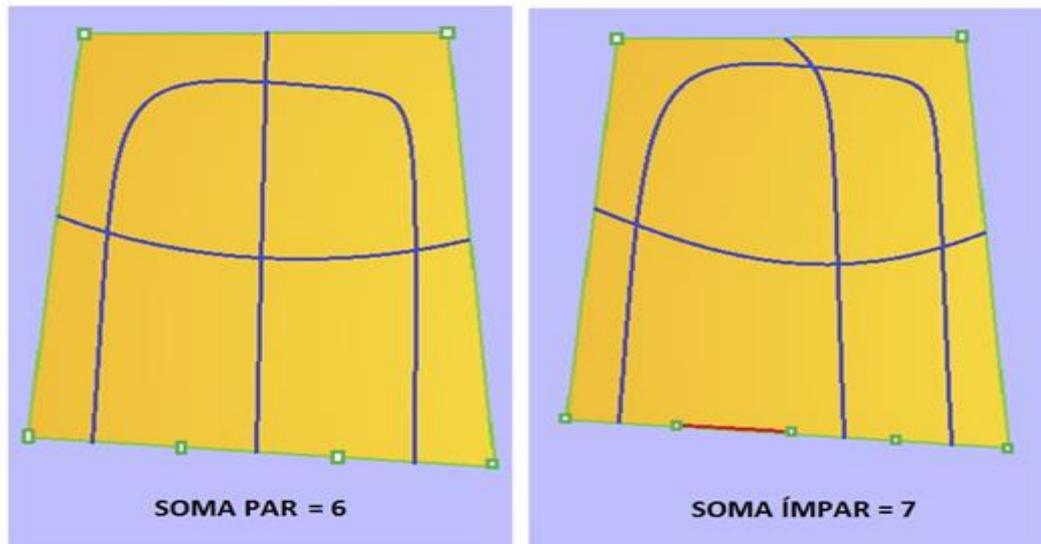


Figura 2.6: Existência do dual sobre domínios que cumprem a condição de paridade

### 2.3.2 Condição de realizabilidade

A condição de realizabilidade tem a ver com o mínimo número de subdivisões necessárias sobre cada curva de bordo de um domínio para que seja possível a decomposição do mesmo. A Figura 2.7 mostra alguns exemplos de domínios com o menor número de subdivisões possíveis onde foi possível a decomposição. No entanto, podem existir alguns outros, mas neste trabalho serão considerados como mínimo os mostrados na Figura 2.7.

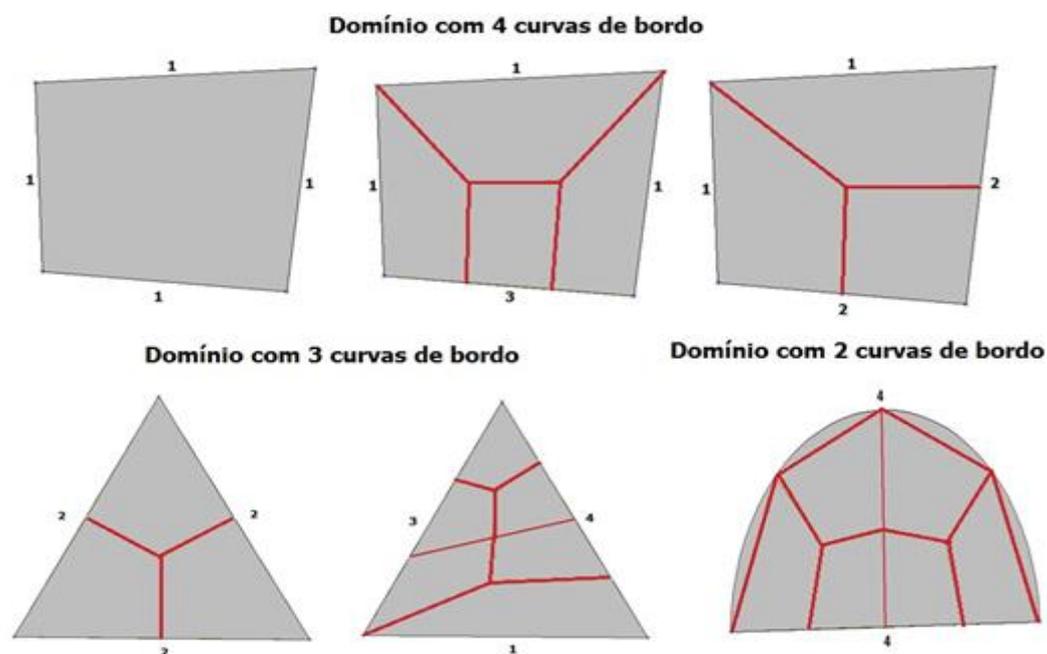


Figura 2.7: Mínimo número de subdivisões necessárias para decompor um domínio

### 2.3.3 Condições essenciais e não essenciais

Para definir o padrão de decomposição a ser aplicado sobre um domínio, faz-se necessário definir um conjunto de condições que deve satisfazer o domínio. De maneira geral, estas condições estão baseadas em relações de igualdade, desigualdade e proporcionalidade entre o número de subdivisões das curvas de bordo do domínio.

As condições essenciais São um conjunto de condições independentes entre si. Cada condição essencial apresenta um caso que não pode ser incluído em outra condição essencial já definida. Estas condições são consideradas essenciais porque não existe domínio que não verifique nenhuma delas e sobre um domínio apenas uma delas pode ser verificada.

As condições não essenciais São condições que não precisam ser consideradas porque o domínio que as verifica, também verifica uma condição essencial. Estas condições, mesmo sendo formuladas de forma diferente às condições essenciais, apresentam um caso que pode ser incluído em alguma condição essencial. Por isso, as condições não essenciais podem ser consideradas como casos particulares das condições essenciais.

Esta distinção entre condições “essenciais” e “não essenciais” é importante, pois os padrões devem ser aplicados sob condições essenciais por elas apresentarem casos gerais. Desta forma, a existência de padrões de decomposição para domínios que satisfazem condições essenciais é imprescindível e suficiente para garantir a geração de malha sobre uma topologia de domínio.

Neste trabalho, serão definidos padrões para domínios que satisfazem “condições essenciais”. No entanto, não se deve descartar a possibilidade de usar as condições não essenciais em conjunto com as condições essenciais, mas para isto também deveriam ser definidos padrões para domínios que satisfazem condições não essenciais, o que foge do escopo deste trabalho.

#### **Condições essenciais sobre domínios com quatro curvas de bordo**

Seja um domínio quadrangular com curvas de bordo e número de subdivisões  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  respectivamente. Sendo a curva  $A$  oposta à curva  $B$  e a curva  $C$  oposta à curva  $D$ . Foram necessárias verificar três “condições essenciais”.

1. Primeira condição.  $A=B$  e  $C=D$ . O domínio tem curvas de bordo opostas com igual número de subdivisões. Este caso é considerado o caso base, pois este domínio não é decomposto hierarquicamente.
2. Segunda condição.  $A=B$  e  $C \neq D$  ou  $C=D$  e  $A \neq B$ . O domínio tem duas curvas de bordo opostas com igual número de subdivisões e as outras duas curvas opostas têm diferente número de subdivisões.
3. Terceira condição.  $A \neq B$  e  $C \neq D$ . O domínio tem curvas de bordo cujo número de subdivisões de cada uma é diferente com a curva de bordo oposta.

Como exemplo de “condições não essenciais”, pode-se mencionar o caso quando o domínio tem os quatro lados iguais  $A=B=C=D$ , este é um caso que pode ser incluído na primeira condição essencial. O caso quando três curvas de bordo consecutivas têm igual número de subdivisões, por exemplo  $A=B=C=N$  e  $D \neq N$ , é um caso particular que pode ser incluído na segunda condição essencial. O caso quando todas as curvas de bordo têm diferente número de subdivisões  $A \neq B \neq C \neq D$ , representa um caso que pode ser incluído na terceira condição essencial.

Deve-se observar que as condições não essenciais acima mencionadas foram formuladas de forma diferente, mas apresentam casos que podem ser considerados dentro das condições essenciais.

### **Condições essenciais sobre domínios com três curvas de bordo**

Um domínio delimitado por três curvas de bordo, pode ser decomposto em três subdomínios quadrangulares, portanto, para gerar malha seria suficiente com as condições essenciais para domínios quadrangulares. No entanto, com o propósito de melhorar a qualidade de malha sobre domínios que apresentam grandes diferenças entre o número de subdivisões das suas curvas de bordo, definem-se um conjunto de condições baseadas em relações de proporcionalidade entre o número de subdivisões das curvas de bordo. O grau de comparação é medido por um fator inteiro  $k > 1$ , que indica quão grande é o número de subdivisões de uma curva de bordo em relação a outra.

Seja um domínio triangular com curvas de bordo e número de subdivisões  $A$ ,  $B$ ,  $C$  respectivamente. Onde cumpre-se que  $A \geq B \geq C$ .

1. Primeira condição.  $B < kC$ . O domínio tem uma curva de bordo cujo número de subdivisões é  $k$  vezes menor em comparação com a curva que tem o menor número de subdivisões.
2. Segunda condição.  $A \geq kC$  e  $B \geq kC$ . O domínio tem duas curvas de bordo cujo número de subdivisões é pelo menos  $k$  vezes maior que a curva com menor número de subdivisões. O domínio que satisfizer esta condição será chamado de “domínio alongado”.

O fator  $k$  define o mínimo valor a partir do qual o domínio será considerado “alongado”. Neste trabalho foi adotado o valor de  $k=2$ . Como exemplo de condições não essenciais para domínios delimitados por três curvas pode se mencionar o caso quando as três curvas de bordo têm igual número de subdivisões  $A=B=C=N$ , este caso é um caso particular da primeira condição essencial pois a primeira condição essencial funciona para  $A \geq B \geq C$  e também se verifica que  $N < kN$  para  $k > 1$ . Outro exemplo é quando duas curvas de bordo têm igual número de subdivisões e a terceira curva tem um número de subdivisões que é  $k$  vezes menor em comparação com as outras duas, por exemplo  $A=B=N$  e  $N \geq kC$ . Este último caso, apresenta uma formulação parecida à segunda condição essencial, mas é só um caso particular dela, pois se restringe ao caso quando  $A$  e  $B$  são iguais. No entanto, a segunda condição essencial é mais geral pois funciona para  $A \geq B$ .

Desta forma qualquer domínio delimitado por três curvas de bordo com um número arbitrário de subdivisões satisfará uma e só uma condição essencial.

### **Condições sobre domínios com duas curvas de bordo**

Neste caso não serão definidas condições essenciais. No entanto, de maneira similar ao caso de domínios delimitados por três curvas de bordo, pode-se estabelecer um conjunto de condições essenciais para garantir a qualidade de malha, baseado principalmente em relações de proporcionalidade. Por exemplo, quando uma curva de bordo tem um número de subdivisões muito maior em comparação com a outra. O grau de comparação pode ser medido também por um fator inteiro  $k > 1$ , que indica quão maior é o número de subdivisões de uma curva em relação à outra.

Neste trabalho, aproveitar-se-á o fato de que um domínio delimitado por duas curvas de bordo pode ser decomposto em dois subdomínios triangulares e cada um

destes em três subdomínios quadrangulares, por isso apenas é necessário a existência das condições essenciais definidas para domínios triangulares e quadrangulares.

#### 2.3.4 Condição de triplo mapeamento bilinear

A condição de triplo mapeamento bilinear é definida como uma relação entre o número de subdivisões das curvas de bordo de um domínio triangular, que permite decompô-lo em “três subdomínios quadrangulares”, sendo que a malha em cada um deles, pode ser gerada diretamente usando o método de mapeamento transfinito bilinear. Esta relação está dada pelas equações (2.2), (2.3) e (2.4)

$$A < B + C \quad (2.2)$$

$$B < A + C \quad (2.3)$$

$$C < A + B \quad (2.4)$$

De forma diferente em relação às condições anteriores, esta condição não é exigida para a geração de malha quadrilateral. Esta condição é apenas um critério que pode ser testado sobre um domínio triangular com o propósito de verificar a possibilidade de gerar malha em cada subdomínio usando diretamente o método de mapeamento transfinito, dado que geralmente isso apresenta boa qualidade de malha.

A condição de triplo mapeamento bilinear pode ser enunciada da seguinte maneira: “Se o número de subdivisões de qualquer curva de bordo é sempre menor que a soma do número de subdivisões das outras duas, então é possível decompor o domínio em três subdomínios base”. Esta condição só é válida sobre domínios triangulares que satisfazem a condição de paridade e realizabilidade.

Para ilustrar isto, a Figura 2.8 mostra um domínio triangular com número de subdivisões  $A$ ,  $B$  e  $C$  respectivamente, com valores de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  que satisfazem a condição de paridade e realizabilidade. Também cumpre-se que  $A < B + C$ ,  $B < A + C$  e  $C < A + B$ . Deve-se, encontrar valores para  $a$ ,  $b$  e  $c$  que representam o número de subdivisões que deve ser tomado em cada curva de bordo para decompor o domínio.

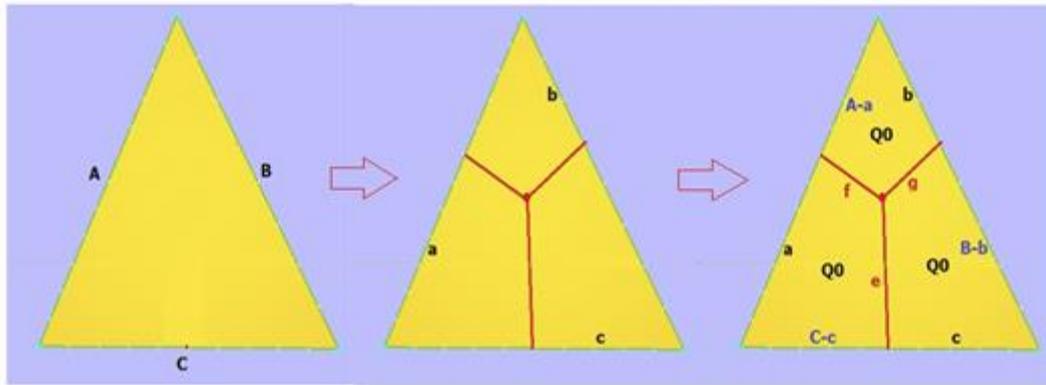


Figura 2.8: Condição de triplo mapeamento bilinear sobre um domínio triangular

Da figura deve-se cumprir que:

$$a = B - b \quad (2.5)$$

$$b = C - c \quad (2.6)$$

$$c = A - a \quad (2.7)$$

Somamos as três expressões da eq. (2.2).

$$a + b + c = \frac{A + B + C}{2} \quad (2.8)$$

Outra forma de expressar a condição de triplo mapeamento bilinear, mantendo a relação de paridade entre as curvas de bordo é:

$$A + 2 \leq B + C \quad (2.9)$$

$$B + 2 \leq A + C \quad (2.10)$$

$$C + 2 \leq A + B \quad (2.11)$$

Combinando adequadamente as eq. (2.2), eq. (2.3) e eq. (2.4), obtém-se os valores para a, b e c.

$$a = \frac{A + B - C}{2} \quad (2.12)$$

$$b = \frac{B + C - A}{2} \quad (2.13)$$

$$c = \frac{C + A - B}{2} \quad (2.14)$$

Dado que os subdomínios devem ser base, o número de subdivisões de cada curva interna deve ser igual ao número de subdivisões das subcurvas de bordo opostas a elas. A Figura 2.9 mostra um exemplo onde cumpre-se a condição de triplo mapeamento bilinear e outro onde não se cumpre.

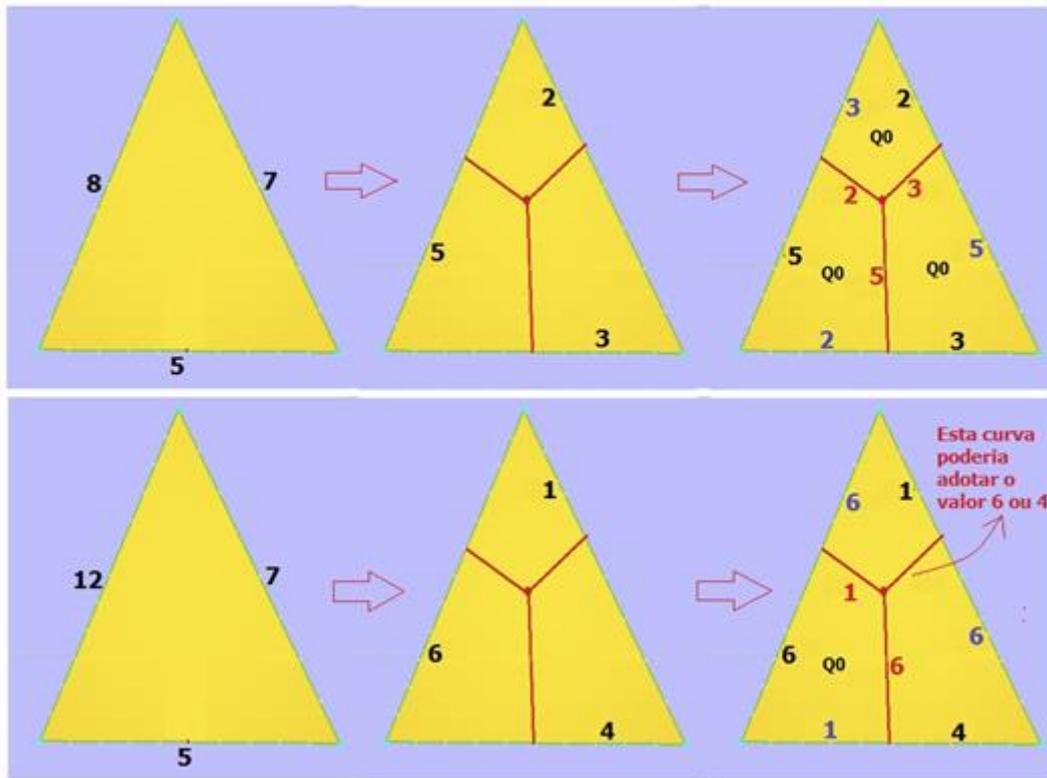


Figura 2.9: Exemplo da condição de triplo mapeamento bilinear

## 2.4 Padrões de decomposição de domínio

Apresenta-se um conjunto de padrões que permitem decompor domínios delimitados por duas, três e quatro curvas de bordo. São apresentados cinco padrões de decomposição de domínio, cada um deles será usado conforme qual seja a condição essencial verificada sobre o domínio. No caso de domínios que verifiquem a primeira condição essencial para domínios quadrangulares, por ser este o caso base, não há um padrão de decomposição de domínio, mas sim um padrão de geração de malha chamado de “padrão base”, que será denotado por “Padrão Q0”, e que corresponde ao algoritmo de mapeamento transfinito bilinear.

A Figura 2.10 mostra os padrões de decomposição de domínio tratados neste trabalho para geração de malhas quadrilaterais.

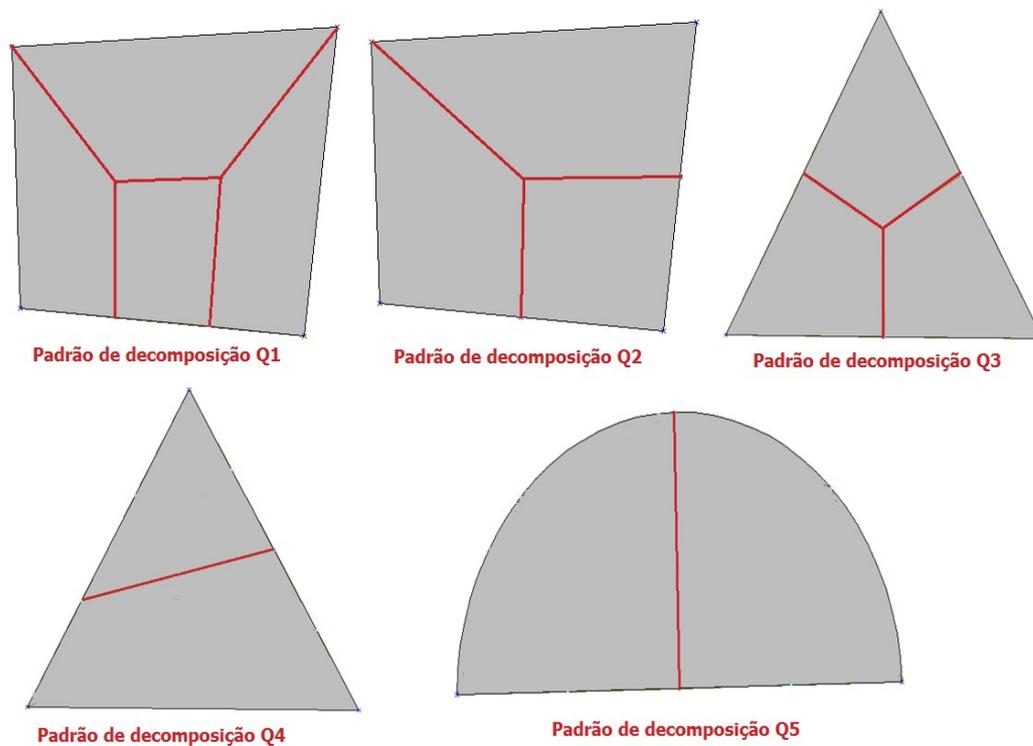


Figura 2.10: Padrões de decomposição de domínio para geração de malhas quadrilaterais

A Tabela 2.1 mostra o padrão de decomposição a ser usado quando o domínio em estudo satisfaz alguma condição essencial definida neste trabalho.

Padrão de decomposição	Condição sobre domínio	Topologia de domínio
Não há decomposição	Primeira condição	Limitado por 4 curvas de bordo
Padrão Q1	Segunda condição	Limitado por 4 curvas de bordo
Padrão Q2	Terceira condição	Limitado por 4 curvas de bordo
Padrão Q3	Primeira condição	Limitado por 3 curvas de bordo
Padrão Q4	Segunda condição	Limitado por 3 curvas de bordo
Padrão Q5	Não foi definido	Limitado por 2 curvas de bordo

Tabela 2.1: Padrão de decomposição usado sobre um domínio que satisfaz alguma condição essencial

### 2.4.1 Tipos de padrões de decomposição de domínio

A representação da topologia de decomposição que gera um padrão sobre um domínio, representa uma malha grossa. Desde que toda malha completamente quadrilateral tem representação dual, os padrões de decomposição de domínio são classificados em “padrões de decomposição duais” e “padrões de decomposição não duais”.

1. Padrões de decomposição duais. São padrões cuja decomposição de domínio gera só subdomínios quadrangulares. Portanto estes padrões têm representação dual. Os padrões de decomposição de domínio Q1, Q2 e Q3 da Figura 2.10 são padrões de decomposição duais.
2. Padrões de decomposição não duais. A decomposição de domínio gerada por estes padrões tem pelo menos um subdomínio não quadrangular, por isso estes padrões não têm representação dual. Os padrões Q4 e Q5 da Figura 2.10 são não duais.

No processo de decomposição hierárquica, os padrões de decomposição não duais sempre são complementados com padrões de decomposição duais para garantir a geração de malha, pois o “algoritmo de mapeamento transfinito” só trabalha em domínios delimitados por quatro curvas de bordo. A Figura 2.11 mostra dois padrões de decomposição não duais complementadas com padrões duais.

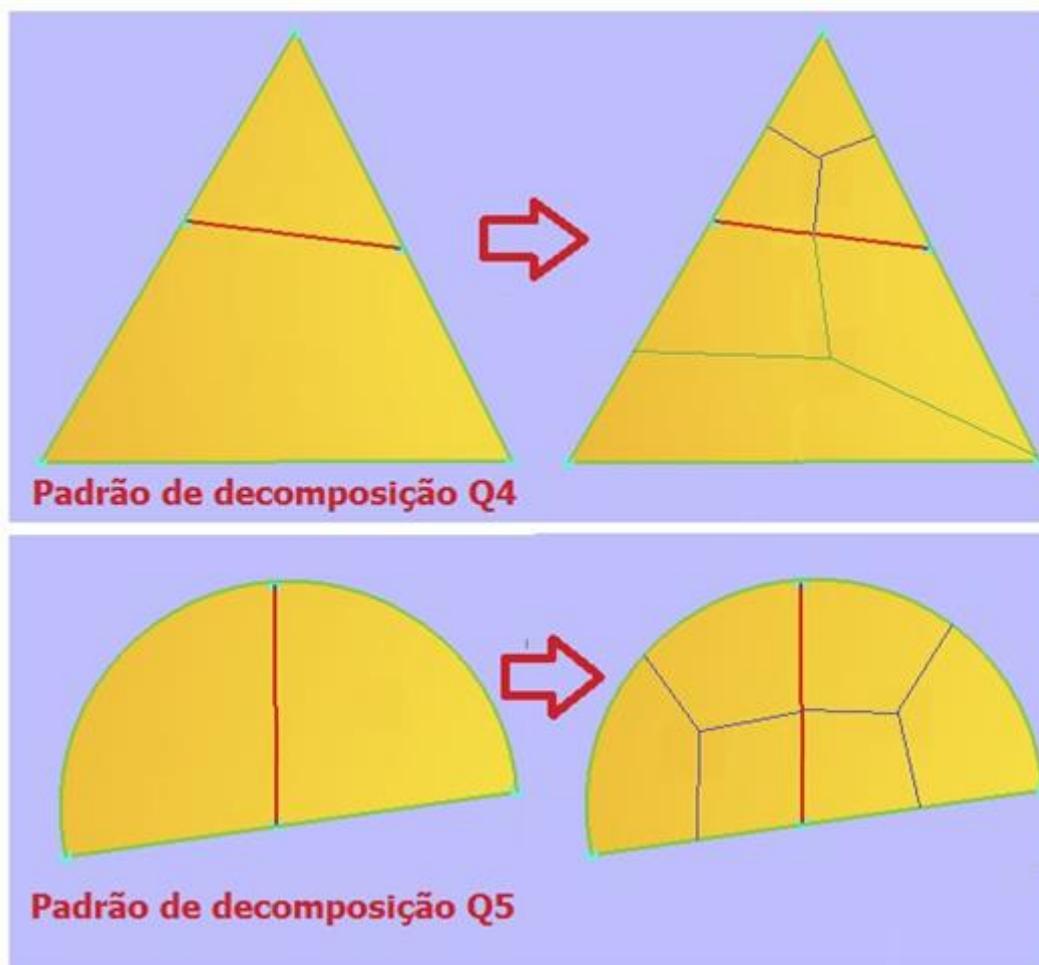


Figura 2.11: Padrões não duais complementados com padrões duais

#### 2.4.2 Parâmetros associados aos padrões de decomposição de domínio

Existem dois tipos de parâmetros associados cujos valores podem “variar dinamicamente”. Variar dinamicamente quer dizer mudar os valores dos parâmetros após ter gerado a malha sobre um domínio com valores padrão.

Os parâmetros geométricos definem a geometria dos subdomínios, pois definem os pontos de interseção entre as curvas internas fictícias que delimitam os subdomínios (se houver interseção). A variação dinâmica muda a geometria dos elementos da malha gerada. Isto pode ser usado como critério de qualidade de malha. Estes parâmetros têm valores entre zero e um.

Os parâmetros topológicos definem o número de subdivisões que terão as curvas de bordo dos subdomínios. Definem-se dois tipos: Os parâmetros topológicos internos e os parâmetros topológicos de bordo.

Os parâmetros topológicos internos definem o número de subdivisões das curvas internas fictícias que delimitam os subdomínios. A variação destes parâmetros é usada como critério de refinamento de malha. Os parâmetros topológicos de bordo definem o número de subdivisões ou segmentos consecutivos (subcurvas), tomadas sobre as curvas de bordo para delimitar os subdomínios. A variação destes parâmetros muda a extensão geométrica dos subdomínios.

De forma geral a variação dos parâmetros topológicos muda a orientação e o tipo de padrão de decomposição a ser aplicado sobre os subdomínios. Isto permite gerar várias topologias de malha para um mesmo domínio. No entanto, estes parâmetros têm valores limites. De maneira geral, estes valores limites foram adotados como o propósito de evitar subdomínios irrealizáveis. Valores fora desses limites são considerados “valores não válidos”.

A Figura 2.12 mostra os valores limites para os parâmetros topológicos de bordo associados aos padrões de decomposição Q1, Q2 e Q3. No caso dos padrões Q4 e Q5 também são apresentados valores limites para os parâmetros topológicos internos, dado que estes geram subdomínios triangulares, como é mostrado na Figura 2.13.

O valor mínimo para o parâmetro interno  $c$  foi definido baseado em critérios de realizabilidade. No entanto, deve-se adotar algum critério para o definir o valor máximo, pois pode não fazer sentido que o parâmetro interno tome valores muito grandes. Valores muito grandes poderiam produzir malhas de baixa qualidade. Neste trabalho, adota-se o critério de não ultrapassar a soma do número de subdivisões de um subdomínio triangular. Por exemplo, no subdomínio triangular de Q4, dado que  $c < a + b$ , pode-se adotar o valor de  $c = a + b - 2$ . No entanto, outros critérios podem ser adotados.

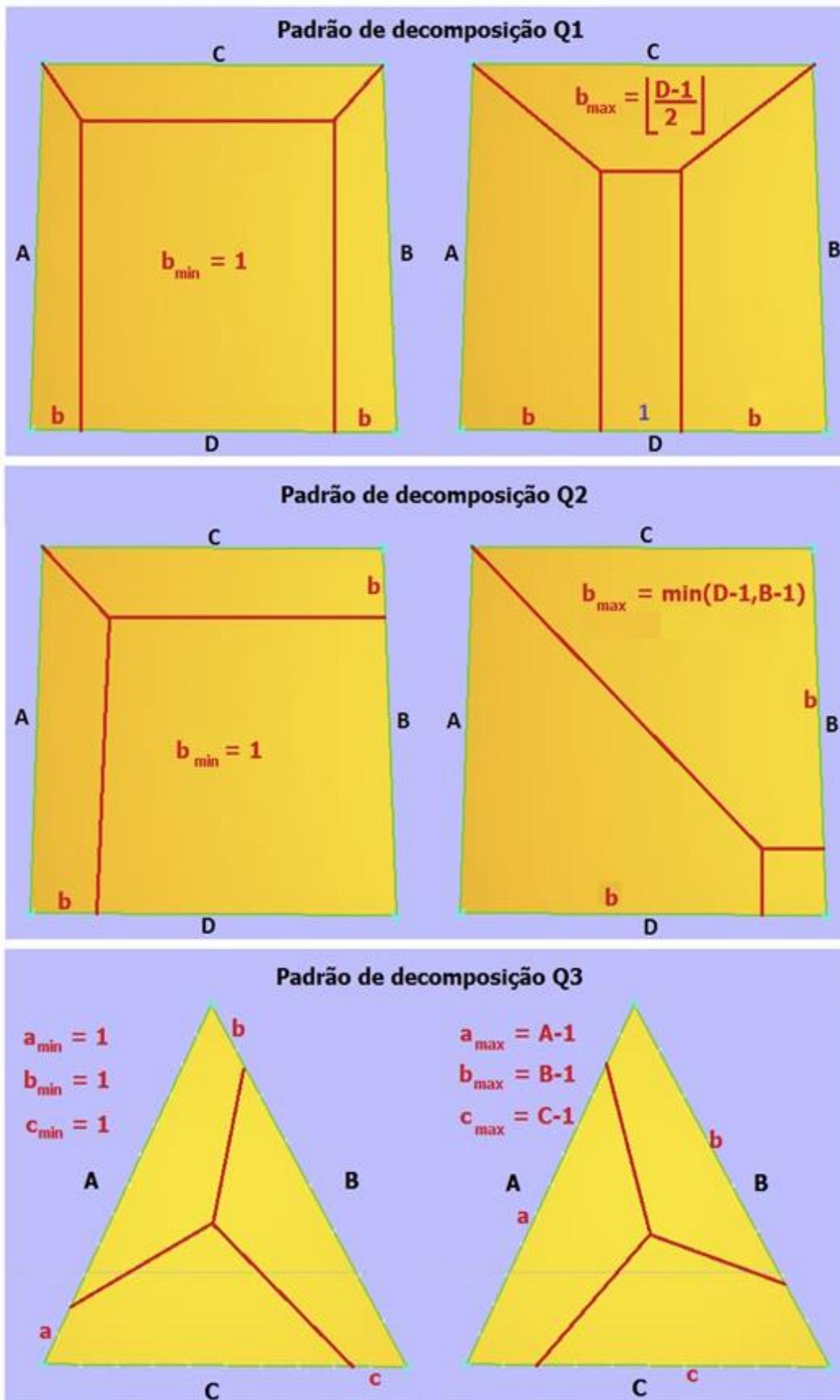


Figura 2.12: Valores mínimo e máximo dos parâmetros topológicos de bordo associados a Q1, Q2 e Q3

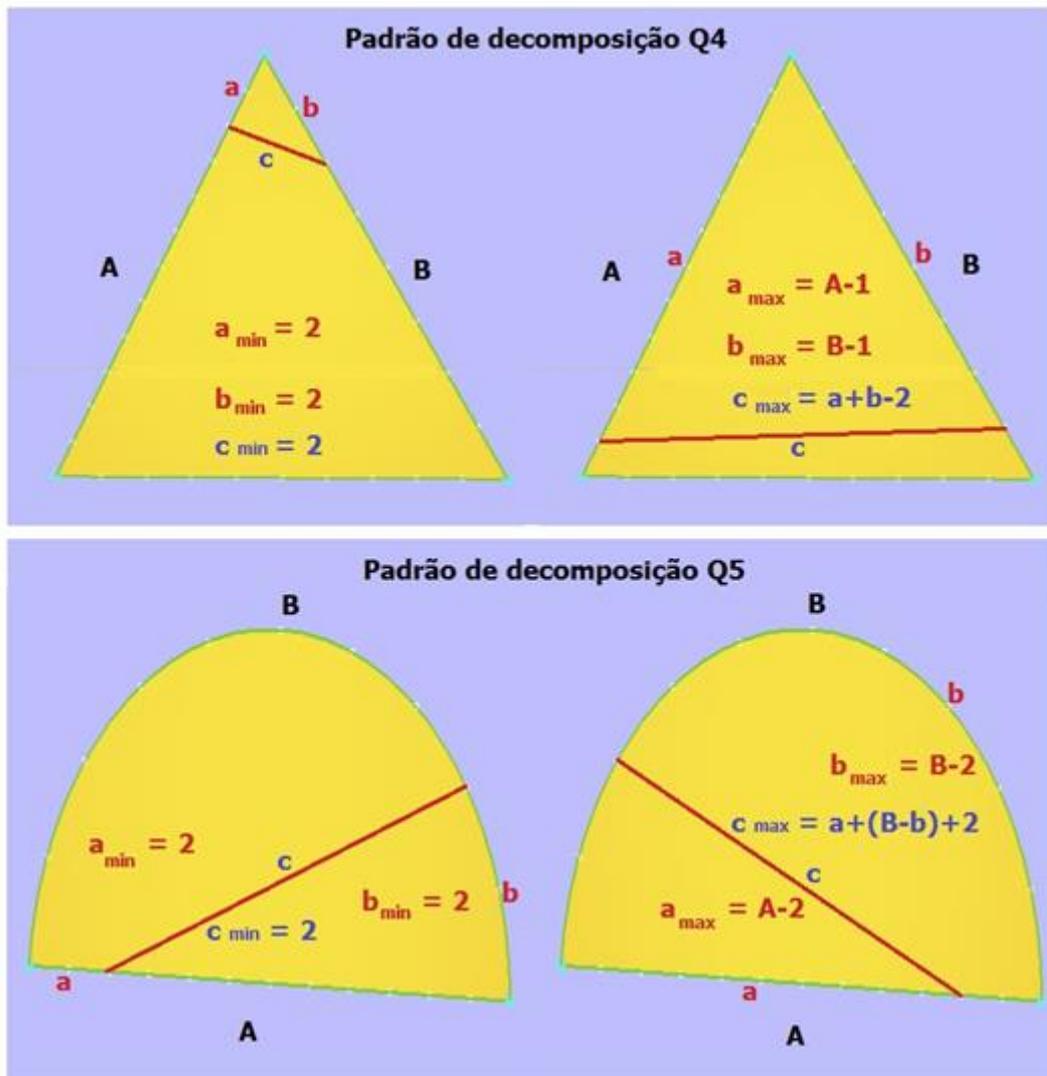


Figura 2.13: Valores mínimo e máximo dos parâmetros topológicos de bordo associados a Q4 e Q5

## 2.5 Padrões de geração de malha

Um padrão de geração de malha é um modelo que representa a decomposição hierárquica do domínio nos dois primeiros níveis de decomposição. Para ilustrar isto, a Figura 2.14 mostra um exemplo de padrão de geração de malha quadrilateral, projetado a partir do padrão de decomposição Q2. A decomposição no segundo nível foi definida pelos valores adotados para os parâmetros topológicos. Se estes valores foram outros o padrão de decomposição no segundo nível seria diferente ou teria diferente orientação. Para entender o padrão de decomposição usado e sua orientação dentro do subdomínio é necessário revisar as condições essenciais para domínios delimitados por quatro curvas de bordo.

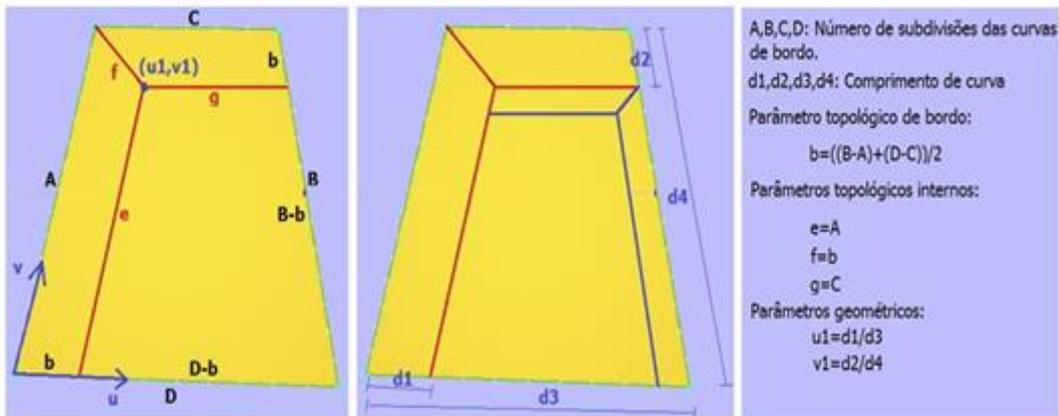


Figura 2.14: Exemplo de padrão de geração de malha com definição de parâmetros

A diferença entre um padrão de decomposição de domínio e um padrão de geração de malha é que este tem parâmetros geométricos e topológicos associados a um valor. O procedimento de definir valores para os parâmetros geométricos e topológicos é chamado de “projeto do padrão de geração de malha”. Todo padrão de geração de malha é projetado a partir de um padrão de decomposição de domínio.

A Figura 2.15 mostra a relação entre um padrão de geração de malha e a malha gerada por este. Observe que sobre cada subdomínio do padrão a malha foi gerada usando o método de mapeamento transfinito bilinear.

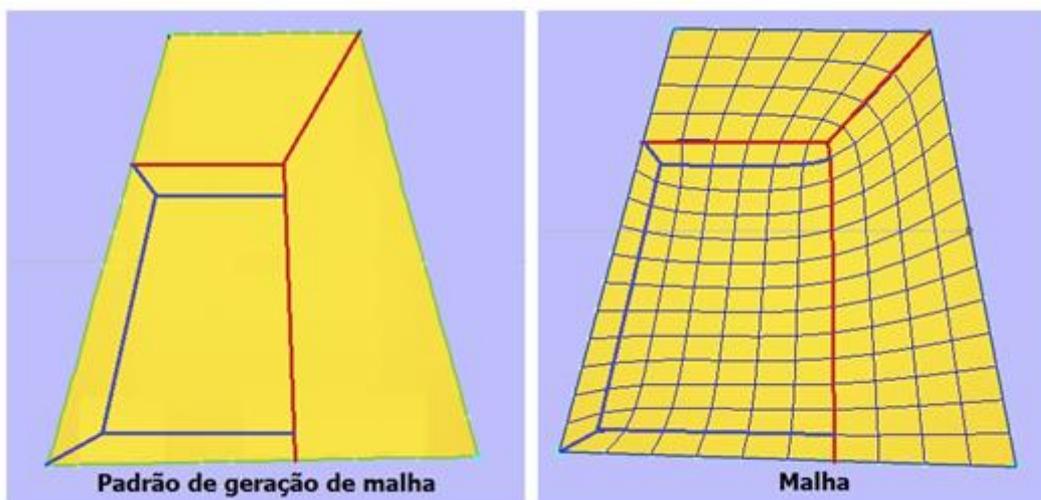


Figura 2.15: Relação entre padrão de geração de malha e a malha gerada por ele

Para definir o padrão de geração de malha a ser aplicado sobre um domínio, deve-se primeiro identificar o número de curvas de bordo que delimitam o domínio, testar as condições de paridade e realizabilidade e depois verificar as condições essenciais correspondentes.

### 2.5.1 Padrão base

Este padrão corresponde ao algoritmo de mapeamento transfinito bidimensional, que gera malha sobre um domínio base. Como já foi dito o padrão base é denotado por padrão  $Q_0$ .

### 2.5.2 Grau de um padrão de geração de malha

O grau de um padrão de geração de malha está definido pelo “nível de decomposição hierárquica” efetuado sobre um domínio. Padrões de geração de malha com origem em “padrões de decomposição duais” podem ter grau 1. Padrões de geração de malha com origem em “padrões de decomposição não duais” sempre terão grau maior que 1, porque eles precisam ser complementados com padrões de decomposição duais. Na Figura 2.11 foi explicada esta ideia.

Para visualizar a decomposição hierárquica sobre um domínio, o grau do padrão de geração de malha e todos os padrões de geração de malha que o compõem, pode ser útil usar um “diagrama de árvore” onde o nó raiz da árvore representa o padrão de geração de malha que gera a decomposição inicial. Os nós internos representam os padrões de geração de malha nos subdomínios e as folhas da árvore representam o número total de subdomínios base. O grau do padrão de geração representado pelo nó raiz, está definido pela altura do mesmo. A Figura 2.16 mostra três exemplos de diagramas de árvore. O padrão base  $Q_0$  é representado por um só nó, representando apenas a raiz da árvore cuja altura é zero e portanto, seu grau também é zero.

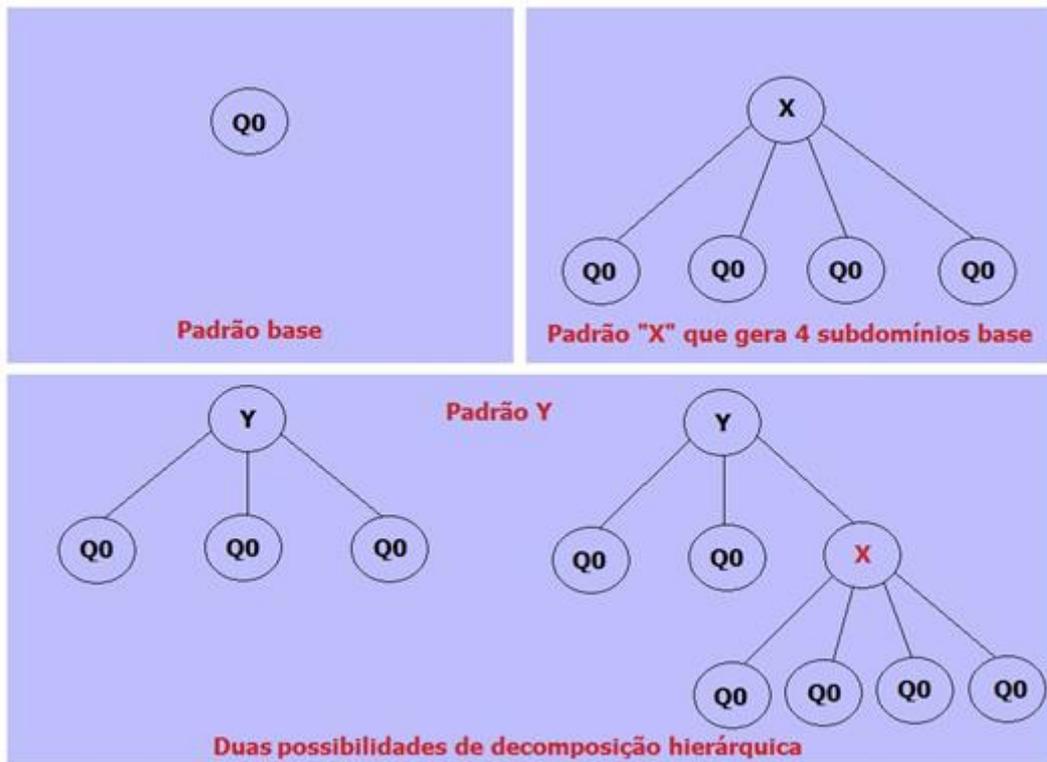


Figura 2.16: Exemplo de diagramas de árvore de padrões de geração de malha

## 2.6

### **Crítérios a considerar no projeto de padrões de geração de malha**

#### 1. Variação da topologia de decomposição hierárquica

Como já foi dito a variação da topologia de decomposição hierárquica tem a ver principalmente com a variação dos parâmetros topológicos. A variação destes parâmetros produz uma variação nas “condições essenciais” dos subdomínios e daí a variação do padrão de decomposição a ser usado neles e sua orientação.

Dado um projeto que representa a decomposição hierárquica de um domínio, os parâmetros topológicos devem ser avaliados pensando em satisfazer as condições essenciais nos subdomínios para que os padrões de decomposição sejam aplicados neles e conseguir a decomposição hierárquica projetada sobre o domínio.

A Figura 2.17 mostra dois exemplos cada um deles com duas possíveis orientações para os padrões de decomposição aplicados dentro dos subdomínios. Isto é feito por variação dos parâmetros topológicos internos.

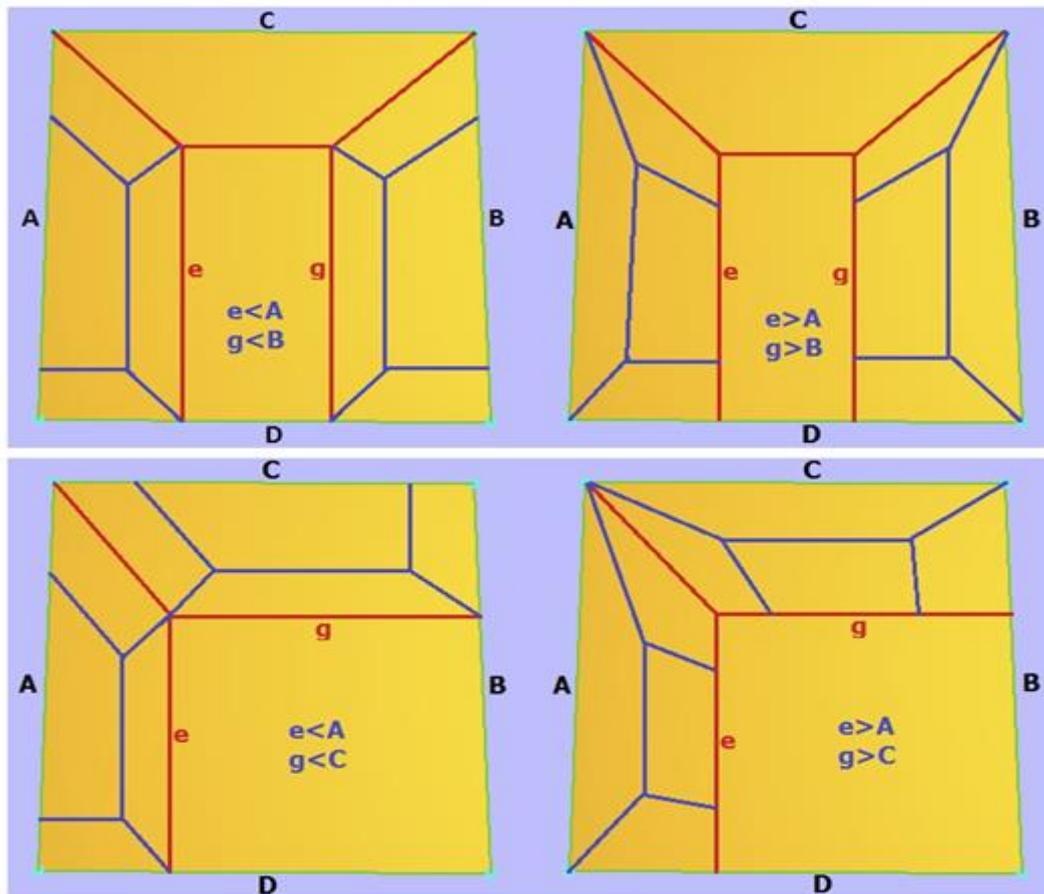


Figura 2.17: Variação da decomposição hierárquica por variação dos parâmetros topológicos internos

## 2. Refinamento de malha

O refinamento de malha pode conseguir-se por projetar padrões de geração de malha de alto grau. Isto consegue-se por fazer que um padrão de geração de malha com grau maior o igual que 1 faça parte de pelo menos um subdomínio de outro padrão de geração de malha. Este procedimento gera malhas mais refinadas, sobretudo naquela região onde foi inserido o padrão de geração de malha. Quanto maior o nível de decomposição hierárquica, mais refinada é a malha gerada. O termo inserir um padrão dentro de outro, pode ser explicado em um diagrama de árvore, por “substituir” uma subárvore por outra com maior altura. Substituir um padrão de geração por outro padrão de geração só é possível se ambas satisfazem a mesma condição essencial, ou seja, se ambos foram projetados tendo como origem o mesmo padrão de decomposição.

Outra forma de obter malhas refinadas é variar os parâmetros topológicos de bordo para definir a extensão dos subdomínios. Gerar decomposição hierárquica

em regiões de menor extensão gera malhas mais refinadas sobre elas. Deve-se ter cuidado de não diminuir demasiado a extensão dos subdomínios que terão decomposição hierárquica, pois a malha gerada nelas poderia ser de baixa qualidade.

O refinamento também pode ser conseguido aumentando o número de subdivisões dos parâmetros topológicos internos, pois ao aumentar o número de subdivisões, aumenta o número de elementos da malha.

### 3. Convergência da decomposição hierárquica

A convergência da decomposição hierárquica efetuada por um padrão de geração de malha tem a ver com a geração de malha em todos os subdomínios gerados hierarquicamente. Para isso ao projetar padrões de geração de malha, deve-se garantir o cumprimento das condições de realizabilidade e paridade em cada um dos subdomínios. Deve conhecer-se as condições essenciais dentro dos subdomínios a priori para assegurar que elas sejam satisfeitas e permitir gerar malha sobre eles. Além disso deve-se projetar padrões associados a cada padrão de decomposição de domínio definido.

### 4. Qualidade de malha

Para gerar malhas de qualidade é importante determinar a melhor orientação relativa que terão os padrões de decomposição de domínio dentro dos subdomínios, pois há orientações que geram malhas de baixa qualidade. Isto pode definir-se considerando a geometria do subdomínio e a sua extensão. A geometria dos subdomínios é definida pelos parâmetros geométricos. A extensão da geometria dos subdomínios é controlada pelos parâmetros topológicos de bordo. Deve-se evitar gerar decomposição hierárquica em subdomínios com extensão muito pequena para evitar muita distorção dos elementos. Uma vez definida a orientação e o padrão de decomposição a ser aplicado sobre os subdomínios, são avaliados os parâmetros topológicos que permitam conseguir isso.

### 5. Existência de malha sobre um domínio

A malha sobre uma topologia de domínio com qualquer número de subdivisões nas suas curvas de bordo, que cumpre as condições de paridade e realizabilidade existe desde que se tenha padrões de geração de malha que são aplicados sobre domínios que satisfazem um conjunto de condições essenciais.

### 3

## Projeto de Padrões de Geração de Malha Quadrilateral

Neste capítulo, os padrões de decomposição de domínio serão projetados para gerar padrões de geração de malha. Aqui são definidos valores para os parâmetros geométricos e topológicos. Os parâmetros geométricos são calculados em função de comprimentos de curvas de bordo. Os parâmetros topológicos são calculados em função de número de subdivisões das curvas de bordo.

Apresenta-se o projeto de cinco padrões de geração de malha associados aos cinco padrões de decomposição de domínio. Por uma questão de simplicidade e clareza de exposição dos conceitos, apresenta-se o projeto dos padrões, baseado em critérios simples e fáceis de entender e portanto, não pretende-se afirmar que os projetos feitos aqui, são os mais ótimos em termos de qualidade de malha. No entanto, no apêndice A, foram incluídos outros projetos alternativos para os padrões com o propósito de mostrar que o projeto de padrões pode ser feito de diversas formas e baseado em diversos critérios ou combinação de critérios.

No projeto, primeiro deve-se definir a topologia de decomposição hierárquica que terá o domínio, com uma orientação escolhida tendo em consideração o critério de qualidade de malha e depois definir como devem ser calculados os parâmetros topológicos que permitirão que toda malha gerada pelo padrão tenha a “topologia de decomposição hierárquica” escolhida.

Para descrever o projeto de padrões de geração de malha, as condições essenciais em conjunto com as condições de paridade e realizabilidade, são agrupadas em “condições de domínio e subdomínio”. As “condições de domínio” definem o padrão de geração de malha a ser usado sobre o domínio. As “condições de subdomínio” são condições para os subdomínios, e definem os padrões de geração de malha a serem usados neles. Cada subdomínio foi nomeado com o propósito de poder descrever a decomposição hierárquica (se houver) em cada um deles.

As condições de realizabilidade e de paridade devem ser verificadas em todos os subdomínios. A condição de realizabilidade tem a ver diretamente com evitar

valores não válidos para os parâmetros topológicos (valores fora dos limites estabelecidos). A condição de paridade é verificada algebricamente, usando simples axiomas como a soma de números pares é par, o resto de dividir um número par por 2 é zero etc. Usa-se o “operador módulo” (denotado por **mod**) que dá o resto de uma divisão. As variáveis são o número de subdivisões das curvas que delimitam os subdomínios. Obviamente o número de subdivisões sobre uma curva de bordo nunca é zero. A paridade sobre subdomínios projetados para serem base é evidente, pois nesse caso cada curva de bordo tem um número de subdivisões igual que a curva de bordo oposta. Isto faz que sempre a soma seja par. A paridade deve ser verificada principalmente naqueles subdomínios projetados para terem decomposição hierárquica.

Os padrões de geração de malha projetados são denotados usando uma letra qualquer ao lado do nome do padrão de decomposição que lhe deu origem. O fato de colocar uma letra qualquer serve apenas para diferenciar um projeto de outro. O que realmente tem importância é o padrão de decomposição de origem, pois dessa forma é fácil saber sob qual condição essencial é aplicado o padrão de geração de malha. Por exemplo, os padrões Q2X e Q2Y, têm como origem o padrão de decomposição Q2 e, portanto, podem ser aplicados sobre domínios quadrangulares que satisfazem a terceira condição essencial. No entanto, as letras X e Y foram usadas para diferenciar um projeto de outro, e sobre um domínio pode ser usada qualquer delas.

### 3.1

#### **Padrão de geração de malha Q1A -4 curvas- grau 1**

Este padrão de geração mostrado na Figura 3.1, foi projetado baseado no “template T1” apresentado por Miranda & Martha (2013). No entanto, aqui é apresentado usando a metodologia proposta e de uma forma mais detalhada.

Dado que o padrão tem origem no padrão de decomposição Q1, o domínio é decomposto em quatro subdomínios quadrangulares. Cada um dos subdomínios será base. Desta forma este padrão depende só do padrão base e por isso formará parte de outros padrões de geração de malha que precisarem usá-lo.

A Figura 3.1 mostra o nome dado a cada subdomínio, a distribuição dos padrões de geração de malha nos subdomínios, os parâmetros topológicos e os parâmetros geométricos.

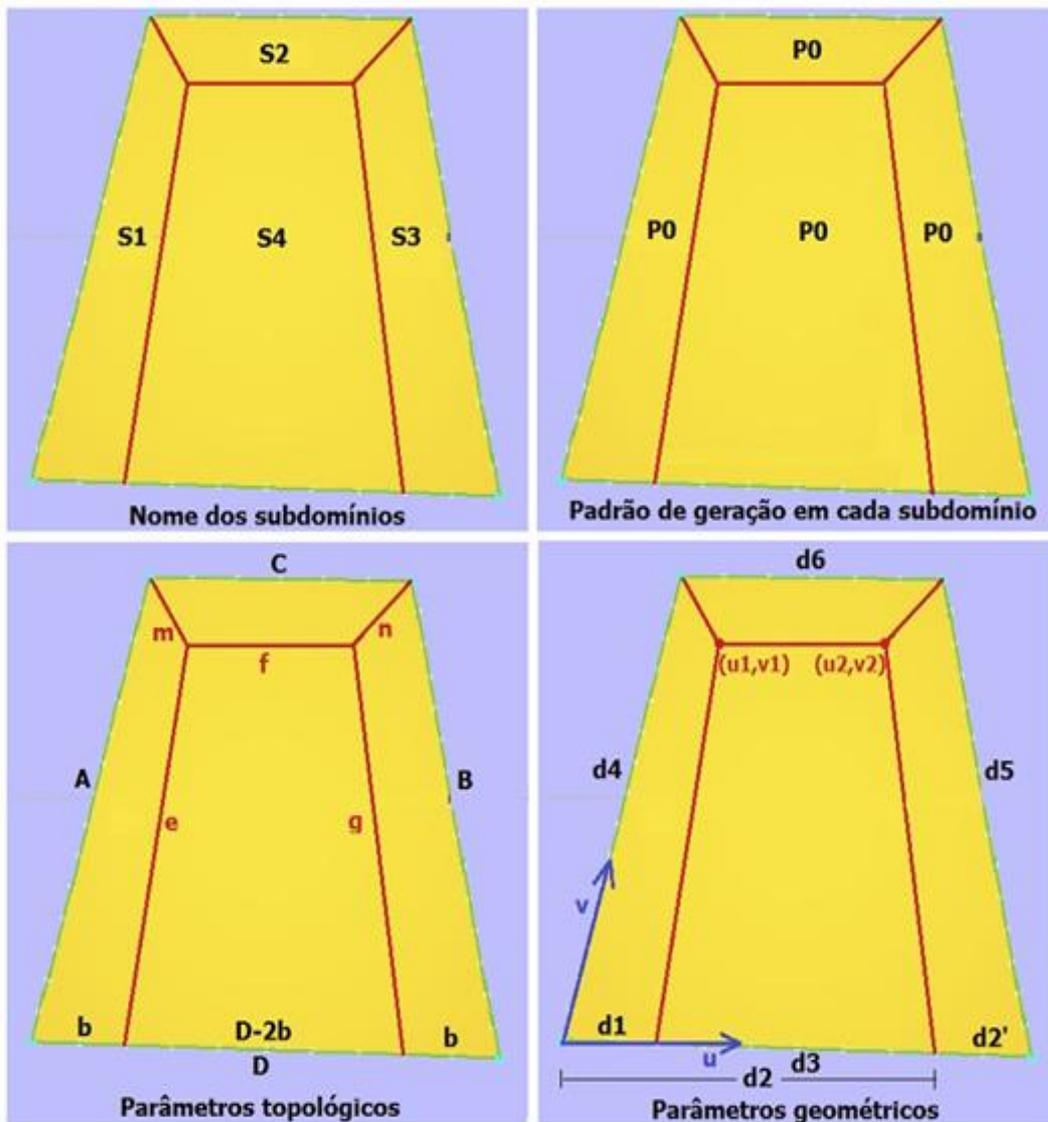


Figura 3.1: Padrão de geração de malha Q1A

**Notação:**

A, B, C, D: Número de subdivisões das curvas de bordo.

b: Número de subdivisões de subcurva de bordo.

e, f, g, m, n: Número de subdivisões das curvas internas.

$d_1, d_2, d_2', d_3, d_4, d_5, d_6$ : Comprimentos sobre as curvas de bordo

$u_1, u_2, v_1, v_2$ : Coordenadas em espaço paramétrico.

**Condições de domínio:**

$$(A + B + C + D) \bmod 2 = 0 \quad (3.1)$$

$$A = B \quad (3.2)$$

$$C < D \quad (3.3)$$

### Cálculo dos parâmetros topológicos internos:

As curvas internas são subdivididas com um número de subdivisões igual às curvas de bordo opostas a elas. O propósito é fazer que os subdomínios S1, S2 e S3 sejam base e se houver decomposição hierárquica, seja só na região S4.

$$e = A \quad (3.4)$$

$$f = C \quad (3.5)$$

$$g = B \quad (3.6)$$

$$m = b \quad (3.7)$$

$$n = b \quad (3.8)$$

### Cálculo do parâmetro topológico de bordo:

O parâmetro topológico  $b$  é calculado com a finalidade de fazer a região S4 domínio base. Já duas curvas opostas de S4 têm igual número de subdivisões ( $e=g$ ). Agora precisa-se que  $f=D-2b$ . Dado que  $f=C$ , isolando  $b$ , obtém-se:

$$b = \frac{D - C}{2} \quad (3.9)$$

### Condições de subdomínio:

O valor do parâmetro topológico de bordo adotado, não permite decomposição hierárquica em S4. O subdomínio S4, verifica as seguintes igualdades:

$$e = g \quad (3.10)$$

$$f = D - 2b \quad (3.11)$$

### Teste de paridade no subdomínio S4

$$\begin{aligned} & [e + f + g + (D - 2b)] \text{mod } 2 \\ &= [A + C + B + (D - 2b)] \text{mod } 2 \\ &= [(A + B + C + D) - 2b] \text{mod } 2 \\ &= [\text{par} - \text{par}] \text{mod } 2 = [\text{par}] \text{mod } 2 = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

### Parâmetros geométricos:

Os parâmetros geométricos são calculados em função dos comprimentos das curvas de bordo, tal como são feitos no trabalho de Miranda & Martha (2013), mas neste caso será considerado um fator de correção que permite melhorar a qualidade

da malha em situações onde a geometria é muito irregular. Este fator é uma relação entre os comprimentos das curvas de bordo  $C$  e  $D$ , e tem por objetivo diminuir os valores de  $v_1$  e  $v_2$  quando  $d_6$  é muito maior que  $d_3$ , e aumentar os valores de  $v_1$  e  $v_2$  em caso contrário. No caso em que as curvas  $C$  e  $D$  sejam aproximadamente iguais em comprimento, o fator de correção está cerca de 1, e, portanto,  $v_1$  e  $v_2$  são praticamente os mesmos que os apresentados por Miranda & Martha (2013).

$$factor = \frac{d_6}{d_3} \quad (3.13)$$

$$u_1 = \frac{d_1}{d_3} \quad (3.14)$$

$$u_2 = \frac{d_2}{d_3} \quad (3.15)$$

$$v_1 = \frac{d_4}{d_4 + d_1 * factor} \quad (3.16)$$

$$v_2 = \frac{d_5}{d_5 + d'_2 * factor} \quad (3.17)$$

A Figura 3.2 mostra um exemplo com geometria muito irregular, a qual foi melhorada usando os parâmetros geométricos propostos neste trabalho. Neste caso, o fator de correção fez com que os valores de  $v_1$  e  $v_2$  diminuam proporcionalmente à distorção geométrica do domínio.

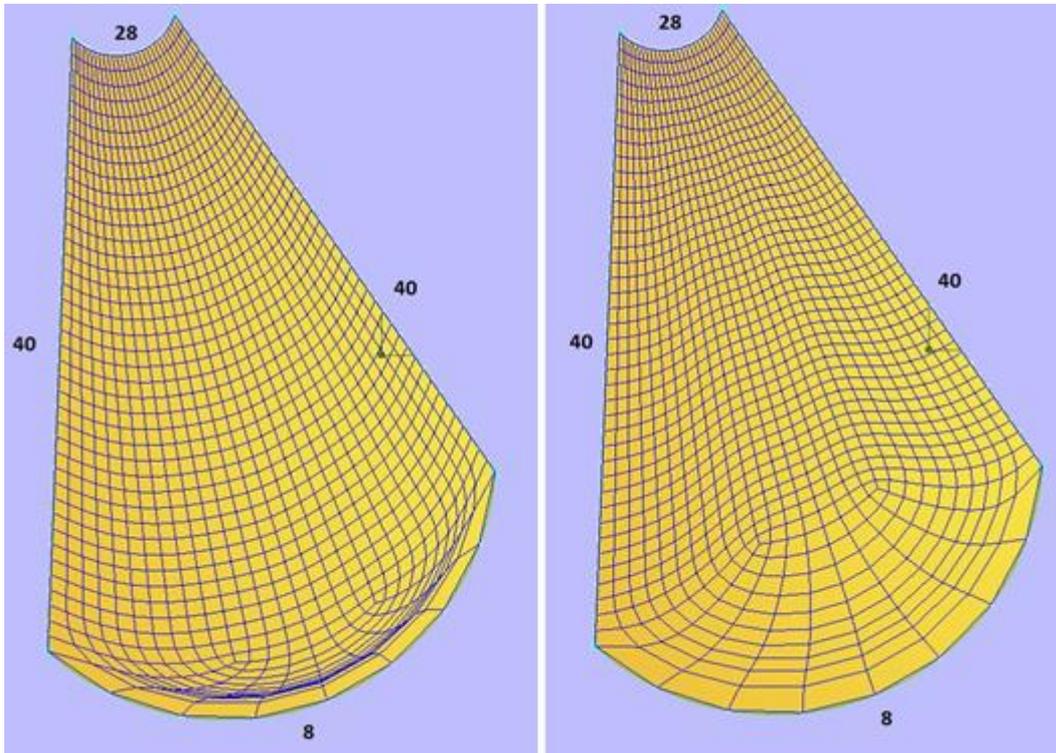


Figura 3.2: Parâmetros geométricos propostos para o padrão de geração de malha Q1A

A Figura 3.3 apresenta um exemplo de malha gerada com um diagrama de árvore que mostra a decomposição feita.

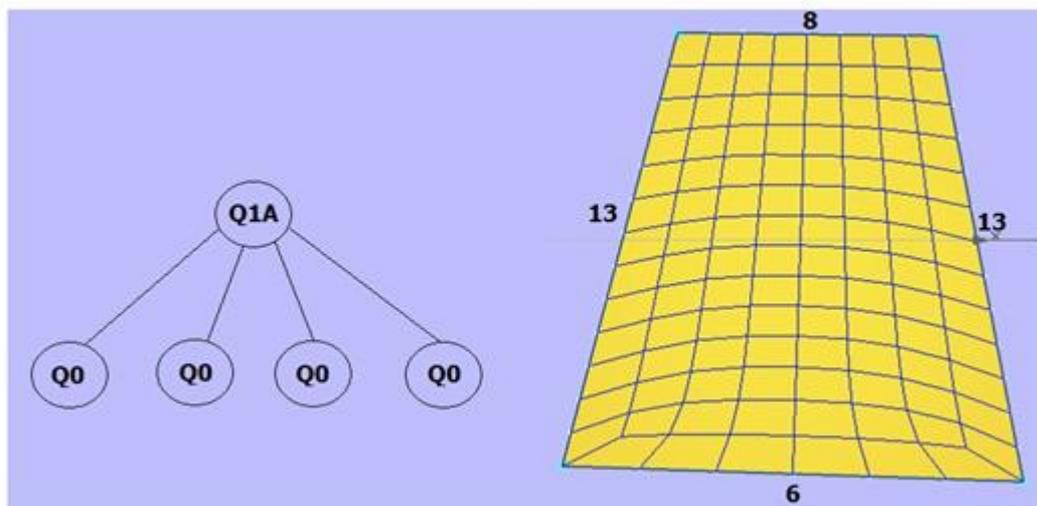


Figura 3.3: Decomposição hierárquica gerada pelo padrão de geração de malha Q1A

### 3.2

#### Padrão de geração de malha Q2A -4 curvas- grau 1 e 2

Este padrão de geração de malha, indicado na Figura 3.4, decompõe o domínio inicialmente em 3 subdomínios quadrangulares. É considerado “autor-recursivo”. Isto quer dizer que ele mesmo pode ser incluído para formar parte de

algum subdomínio. Neste caso a decomposição hierárquica no subdomínio S3 pode ser efetuado por ele mesmo. No entanto, este padrão pode ou não ter decomposição hierárquica no subdomínio S3 (ver condições de subdomínio).

A Figura 3.4 mostra o nome dado a cada subdomínio, a distribuição dos padrões de geração de malha nos subdomínios, os parâmetros topológicos e geométricos.

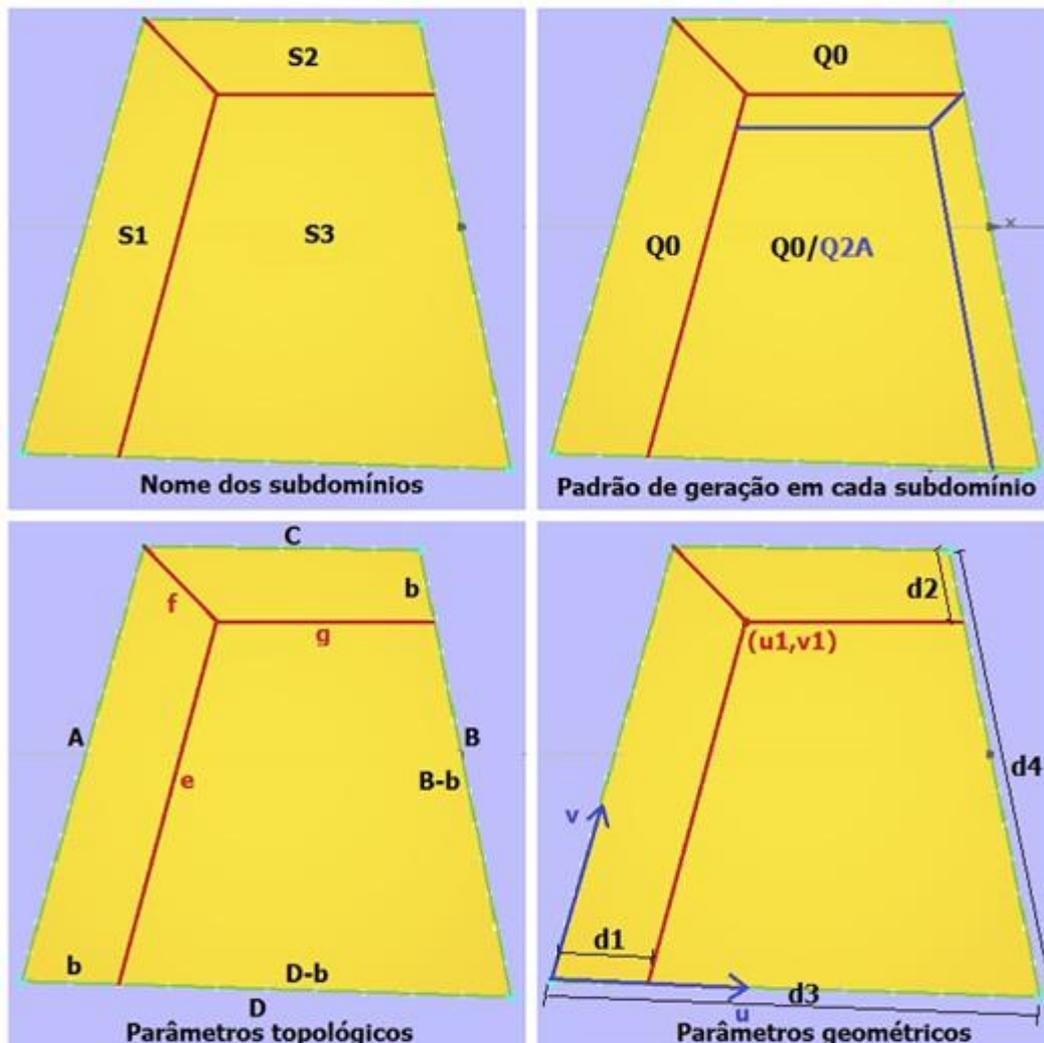


Figura 3.4: Padrão de geração de malha Q2A

**Notação:**

A, B, C, D: Número de subdivisões das curvas de bordo.

b: Número de subdivisões da subcurva de bordo.

e, f, g: Número de subdivisões das curvas internas.

$d_1, d_2, d_3, d_4$ : Comprimentos sobre as curvas de bordo.

$u_1, v_1$ : Coordenadas em espaço paramétrico.

**Condições de domínio:**

$$(A + B + C + D) \bmod 2 = 0 \quad (3.18)$$

$$A < B \quad (3.19)$$

$$C < D \quad (3.20)$$

**Cálculo dos parâmetros topológicos internos:**

Os subdomínios S1 e S2 serão base. Portanto, subdivide-se cada curva interna igual que a curva ou subcurva de bordo oposta a elas, com o propósito de gerar decomposição hierárquica só na região S3.

$$e = A \quad (3.21)$$

$$f = b \quad (3.22)$$

$$g = C \quad (3.23)$$

**Cálculo do parâmetro topológico de bordo:**

Para gerar decomposição em S3 como a mostrada na Figura 3.4, precisa-se que  $A > B - b$  e  $C < D - b$ . Então  $b > B - A$  e  $b < D - C$ . Sendo  $B - A < b < D - C$ , um valor de  $b$  que satisfaz esta condição é a média destas diferenças.

$$b = \frac{(B - A) + (D - C)}{2} \quad (3.24)$$

Deve-se garantir que o mesmo padrão de geração de malha é gerado novamente em S3 e agora é convergente. Sendo  $b$  definido pela equação anterior avalia-se o número de subdivisões restantes gerada pelo padrão de geração de malha, no subdomínio S3.

$$B - b = B - \frac{B}{2} + \frac{A}{2} - \frac{D}{2} + \frac{C}{2} = \frac{A + B}{2} - \frac{D - C}{2} \quad (3.25)$$

$$D - b = D - \frac{B}{2} + \frac{A}{2} - \frac{D}{2} + \frac{C}{2} = \frac{A - B}{2} + \frac{D + C}{2} \quad (3.26)$$

Avalia-se a diferença do número de subdivisões nas curvas opostas do subdomínio, resultando o mesmo. Isto leva à “condição de subdomínio (segunda possibilidade) e, portanto, o padrão de geração de malha em S3, desta vez converge.

$$A - (B - b) = A - \left( \frac{A + B}{2} - \frac{D - C}{2} \right) = \frac{A - B}{2} + \frac{D - C}{2} \quad (3.27)$$

$$(D - b) - C = \frac{A - B}{2} + \frac{C + D}{2} - C = \frac{A - B}{2} + \frac{D - C}{2} \quad (3.28)$$

### Condições de subdomínio:

Primeira possibilidade. Quando  $B-A \neq D-C$ , é gerado novamente o padrão de geração de malha Q2A em S3

$$e > B - b \quad (3.29)$$

$$g < D - b \quad (3.30)$$

Segunda possibilidade. Quando  $B-A = D-C$ , o padrão de geração a usar em S3 é o padrão base Q0.

$$e = B - b \quad (3.31)$$

$$g = D - b \quad (3.32)$$

### Teste de paridade no subdomínio S3

$$\begin{aligned} & [e + (B - b) + (D - b) + g] \text{mod } 2 \\ & = [A + (B - b) + (D - b) + C] \text{mod } 2 \\ & = [(A + B + C + D) - 2b] \text{mod } 2 \\ & = [\text{par} - \text{par}] \text{mod } 2 = [\text{par}] \text{mod } 2 = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

A Figura 3.5 mostra dois exemplos de malha gerada com seu respectivo diagrama de árvore que mostra a decomposição hierárquica em cada caso.

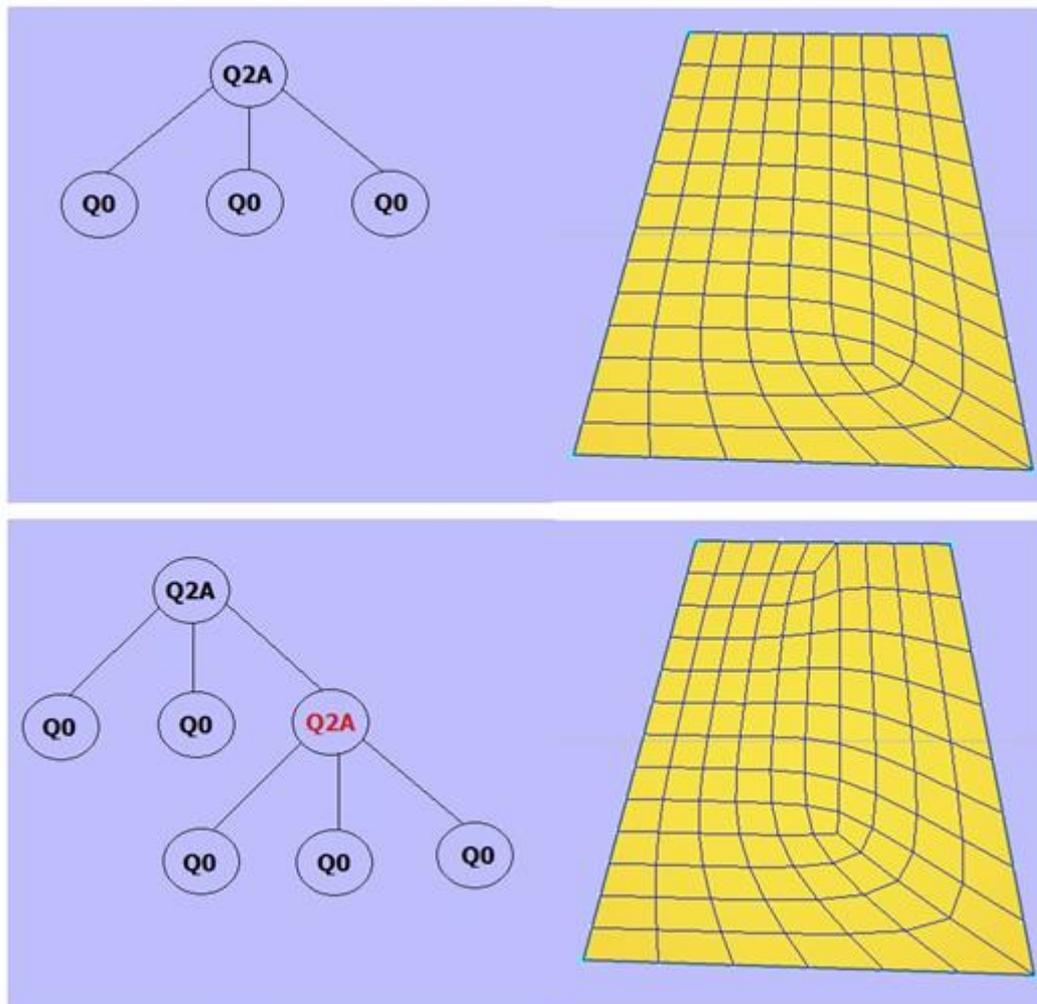


Figura 3.5: Decomposição hierárquica gerada pelo padrão de geração de malha Q2A

### 3.3

#### Padrão de geração de malha Q3A -3 curvas- grau 1 e 2

Este padrão de geração, tem como origem o padrão de decomposição Q3. O domínio é decomposto inicialmente em três subdomínios quadrangulares, sendo que um deles pode ou não ter decomposição hierárquica (ver condições de subdomínio).

Os parâmetros topológicos de bordo coincidem com os parâmetros definidos na condição de “triplo mapeamento bilinear” ( $a, b, c$ ). No entanto, não será usado este critério para definir o valor dos parâmetros topológicos, mas será apresentado um exemplo de malha gerada se os parâmetros topológicos forem calculados em função da condição de triplo mapeamento. Isto mostrará que os parâmetros topológicos definidos não são únicos.

A Figura 3.6 mostra o nome dado a cada subdomínio, a distribuição dos padrões de geração de malha nos subdomínios, os parâmetros topológicos e geométricos.

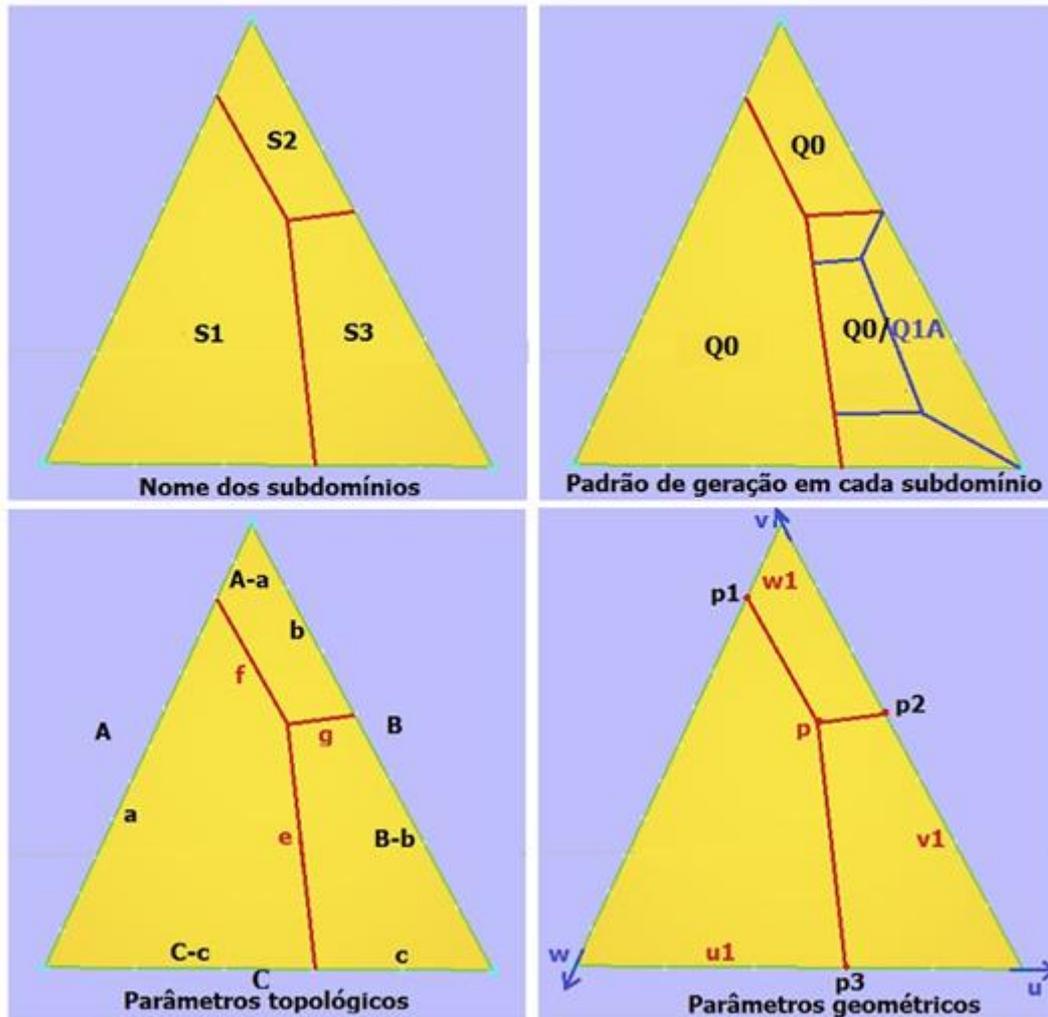


Figura 3.6: Padrão de geração de malha Q3A

#### Notação:

A, B, C: Número de subdivisões das curvas de bordo.

a, b, c: Número de subdivisões das subcurvas de bordo.

e, f, g: Número de subdivisões das curvas internas.

$u_1, v_1, u_2, v_2$ : Coordenadas em espaço paramétrico.

k: Fator que impede gerar malha sobre domínios “alongados”. Adotado  $k=2$ .

#### Condições de domínio:

$$(A + B + C) \bmod 2 = 0 \quad (3.34)$$

$$B \leq A \quad (3.35)$$

$$C \leq A \quad (3.36)$$

$$C \leq B < kC \quad (3.37)$$

**Condições de domínio realizável:**

$$A \geq 2 \quad (3.38)$$

$$B \geq 2 \quad (3.39)$$

$$C \geq 2 \quad (3.40)$$

**Cálculo dos parâmetros topológicos de bordo:**

$$c = \left\lfloor \frac{C}{2} \right\rfloor \quad (3.41)$$

$$a = A - c \quad (3.42)$$

$$b = C - c \quad (3.43)$$

**Cálculo dos parâmetros topológicos internos:**

$$e = \max(a, B - b) \quad (3.44)$$

$$f = b = C - c \quad (3.45)$$

$$g = c = A - a \quad (3.46)$$

**Condições de subdomínio:**

Primeira possibilidade. Quando  $A > B$  e  $B \geq C$ , é gerado o padrão de geração de malha Q1A no subdomínio S3.

$$a > B - b \quad (3.47)$$

$$b = C - c \quad (3.48)$$

$$c = A - a \quad (3.49)$$

Segunda possibilidade. Quando  $A = B$  e  $B \geq C$ , é gerado o padrão de geração de malha Q0 no subdomínio S3.

$$a = B - b \quad (3.50)$$

$$b = C - c \quad (3.51)$$

$$c = A - a \quad (3.52)$$

### Teste de paridade no subdomínio S3:

Sendo três curvas, o número de subdivisões das curvas devem ser ou dois ímpares e um par ou todas pares.

CASO 1: Sejam A, B e C pares.

Sendo C par, então  $c, a, b, f$  e  $g$  são pares, também  $B-b$  é par, portanto  $e$  é par. Cumpre-se então a paridade.  $[c+e+g+(B-b)] \bmod 2=0$ .

CASO 2: Sejam A e B ímpares e C par.

Sendo C par, então  $c$  e  $C-c$  são pares, e dado que  $A-a=c$  e  $b=C-c$ , daí  $a$  é ímpar e  $b$  é par, e, portanto,  $B-b$  é ímpar. Dado que  $e=B-b$ ,  $e$  também é ímpar. Por outro lado, dado que  $f=b=C-c$  e  $g=c=A-a$ , então  $f$  e  $g$  são pares. Portanto, cumpre-se a paridade no subdomínio S3.  $[c+e+g+(B-b)] \bmod 2=0$ .

### Parâmetros geométricos:

$$u_1 = u_{C-c} \quad (3.53)$$

$$v_1 = v_{B-b} \quad (3.54)$$

$$w_1 = w_{A-a} \quad (3.55)$$

$$p_1 = (0, w_1) \quad (3.56)$$

$$p_2 = (1 - v_1, v_1) \quad (3.57)$$

$$p_3 = (u_1, 0) \quad (3.58)$$

$$p = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{3} \quad (3.59)$$

A Figura 3.7 mostra dois exemplos de malha gerada pelo padrão com seu respectivo diagrama de árvore.

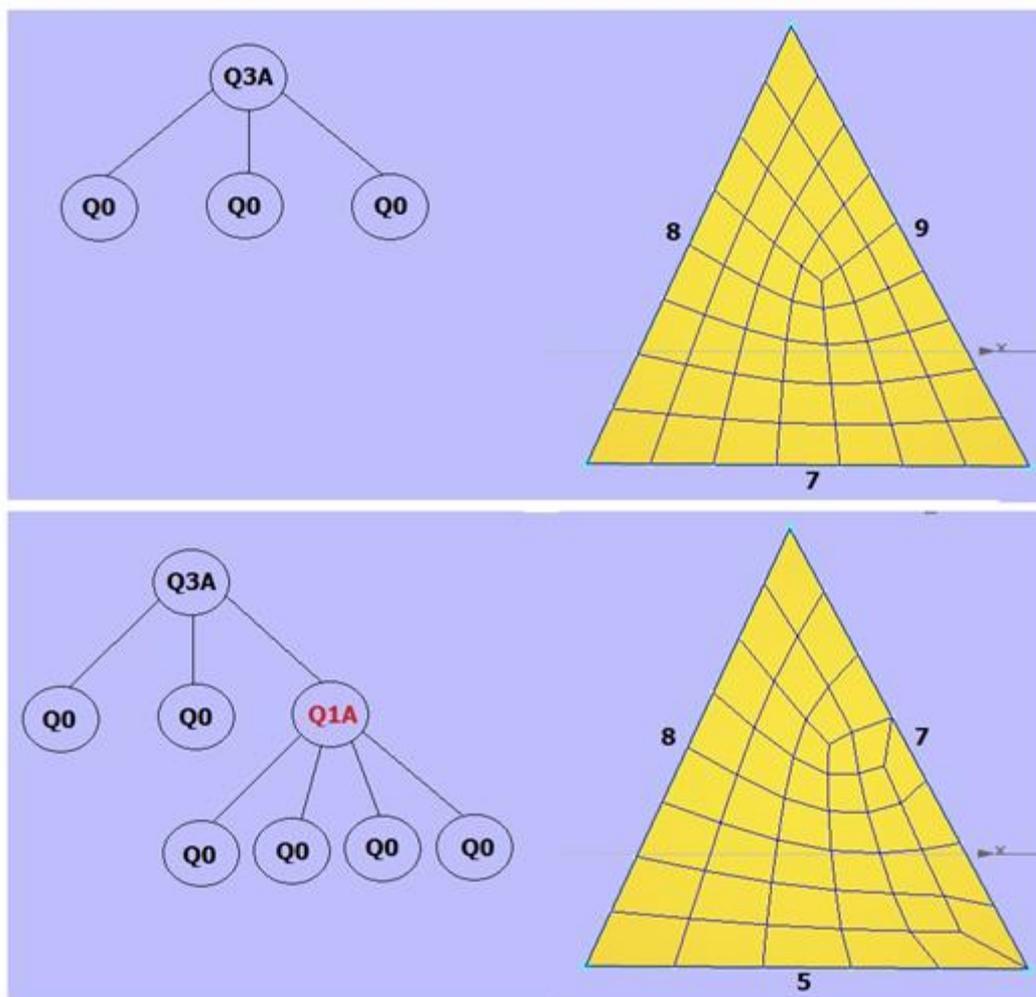


Figura 3.7: Decomposição hierárquica gerada pelo padrão de geração de malha Q3A

A Figura 3.8 mostra duas malhas, uma delas foi gerada fazendo um teste prévio da condição de triplo mapeamento bilinear, isto muda os valores dos parâmetros topológicos. Portanto, é possível combinar o critério do triplo mapeamento bilinear com o critério adotado neste padrão para a geração de malha.

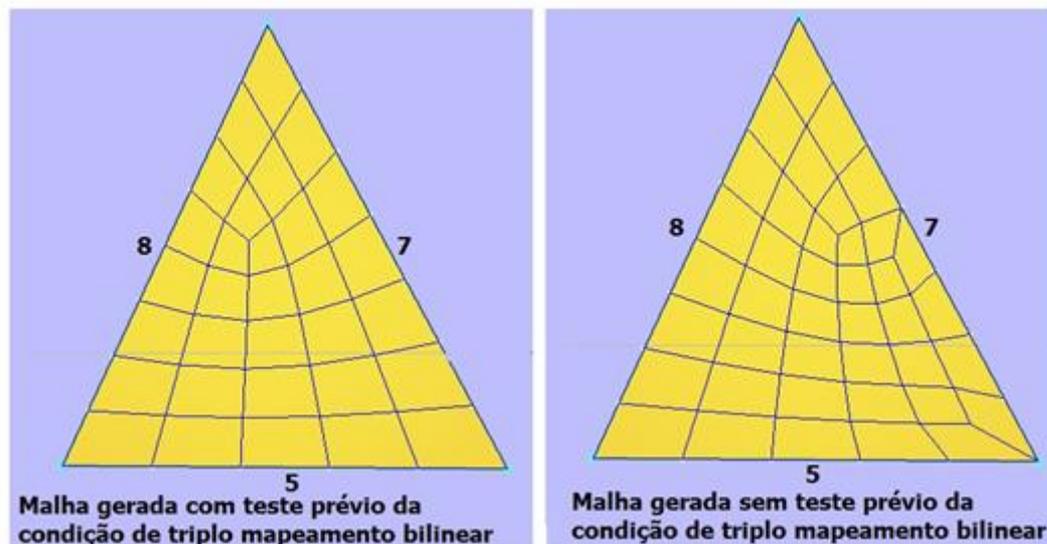


Figura 3.8: Malha gerada com e sem teste prévio da condição de triplo mapeamento bilinear

### 3.4

#### Padrão de geração de malha Q4A -3 curvas- grau 2 e 3

Este padrão de geração de malha, indicado na Figura 3.9, é definida para domínios delimitados por três curvas de bordo considerados “alongados”. Além disso foi concebido para ser autorrecursivo (ele próprio pode ser incluído para formar parte de um subdomínio). O domínio é decomposto inicialmente em dois subdomínios, um deles triangular que pode ser ainda “alongado” e outro quadrilateral. Este padrão de geração de malha tem duas possibilidades de decomposição hierárquica em S1 e três possibilidades de decomposição hierárquica em S2 (ver condições de subdomínio).

O grau deste padrão de geração pode chegar a ser maior que 3, isso vai depender de quão alongado seja o domínio. Ele pode-se incluir várias vezes para formar parte do subdomínio triangular resultante em cada decomposição feita.

A Figura 3.9 mostra o nome dado a cada subdomínio, a distribuição dos padrões de geração de malha nos subdomínios, os parâmetros topológicos e a orientação dos padrões de geração dentro dos subdomínios. Neste caso não há parâmetros geométricos, pois só existe uma curva interna que delimita os subdomínios da decomposição inicial.

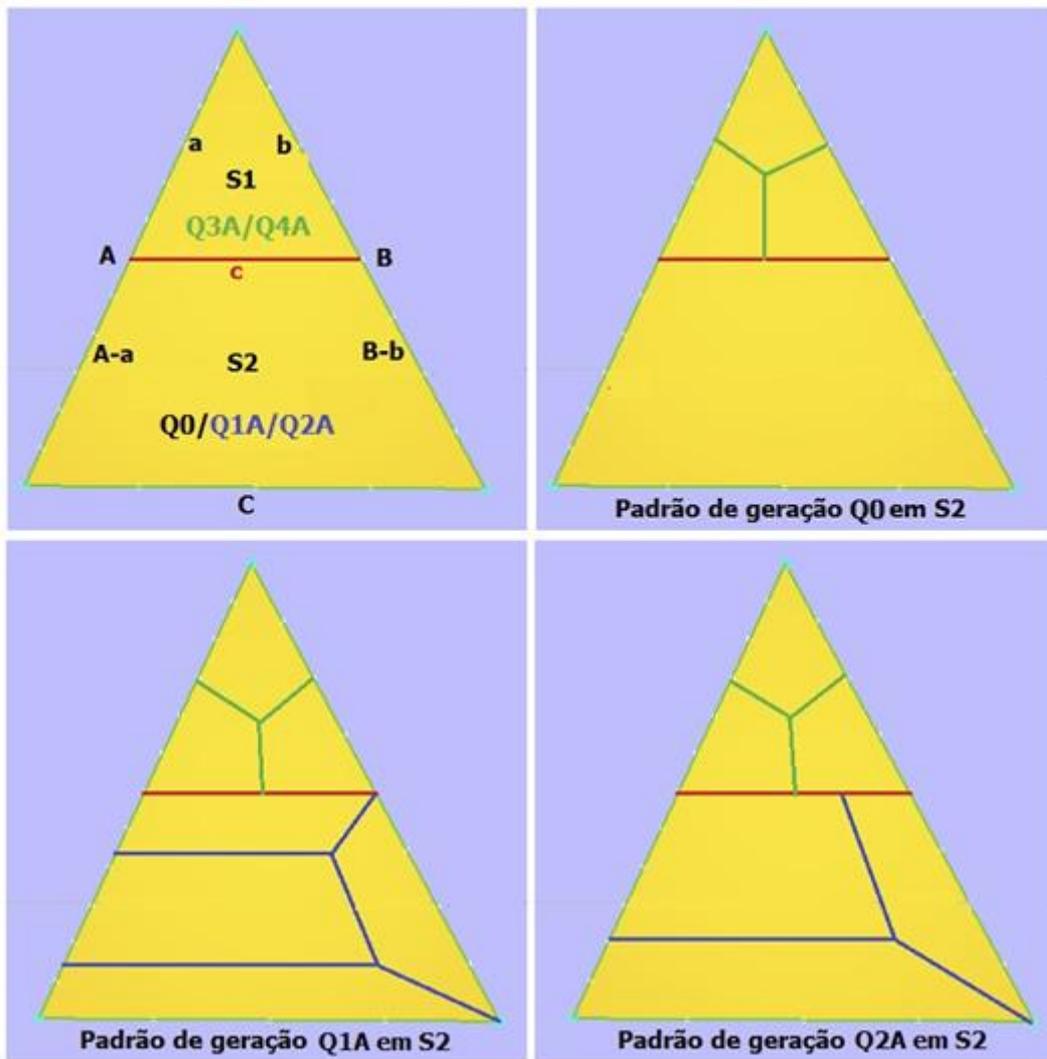


Figura 3.9: Padrão de geração de malha Q4A

**Notação:**

A, B, C: Número de subdivisões das curvas de bordo.

a, b: Número de subdivisões das subcurvas de bordo.

c: Número de subdivisões da curva interna.

k: Fator que define se um domínio triangular é considerado “alongado”. Adotado  $k=2$ .

**Condições de domínio:**

$$(A + B + C) \bmod 2 = 0 \quad (3.60)$$

$$A \geq kC \quad (3.61)$$

$$B \geq kC \quad (3.62)$$

$$A \geq B \quad (3.63)$$

**Condições de realizabilidade:**

$$A \geq 3 \quad (3.64)$$

$$B \geq 3 \quad (3.65)$$

$$C \geq 1 \quad (3.66)$$

**Cálculo do parâmetro topológico de bordo:**

$$a = \left\lfloor \frac{A}{2} \right\rfloor \quad (3.67)$$

$$b = \left\lfloor \frac{B}{2} \right\rfloor \quad (3.68)$$

Caso  $b$  seja 1, por exemplo quando  $B$  é 3, estabelece-se o mínimo necessário para gerar uma decomposição Q3, no subdomínio S1 (condição de realizabilidade em S1).

$$\text{if } b = 1 \rightarrow b = 2 \quad (3.69)$$

**Cálculo do parâmetro topológico interno:**

Adota-se o critério de avaliar o parâmetro  $c$  com o propósito de tentar que em S2, seja gerado o padrão Q1A.

$$c = C \quad (3.70)$$

Quando  $C=1$  deve-se corrigir a curva interior  $c$ , para permitir que o subdomínio S1 seja realizável.

$$\text{if } c = 1 \rightarrow c = 2 \quad (3.71)$$

No entanto, faz-se o teste de paridade em S1. Se não cumpre, incrementa-se  $c$  em uma unidade.

$$\text{if } (a + b + c) \bmod 2 \neq 0 \rightarrow c = c + 1 \quad (3.72)$$

**Condições de subdomínio:**

Primeira possibilidade. O subdomínio S1 é gerado com padrão de geração de malha Q3A ou é chamado novamente Q4A. Quando  $A=B$ , o padrão de geração de malha Q0 é gerado no subdomínio S2. Também quando  $A$  é par e  $B=A-1$ .

$$A - a = B - b \quad (3.73)$$

$$c = C \quad (3.74)$$

Segunda possibilidade. O subdomínio S1 é gerado com padrão de geração de malha Q3A ou é chamado novamente Q4A. O padrão de geração de malha Q1A é gerado no subdomínio S2.

$$A - a > B - b \quad (3.75)$$

$$c = C \quad (3.76)$$

Terceira possibilidade. O subdomínio S1 é gerado com padrão de geração de malha Q3A ou é chamado novamente Q4A. O padrão de geração de malha Q2A é gerado no subdomínio S2, quando não se cumpre a paridade em S1 e  $c$  é corrigido aumentando em uma unidade.

$$A - a > B - b \quad (3.77)$$

$$c > C \quad (3.78)$$

### **Teste de paridade nos subdomínios S1 e S2:**

No cálculo dos parâmetros topológicos, faz-se um teste de paridade onde o parâmetro interno  $c$  é corrigido se for necessário para cumprir a paridade nos subdomínios. Portanto, isto já garante a paridade. No entanto, pode-se fazer um teste detalhado para verificar a paridade em cada subdomínio, seguindo um procedimento similar aos efetuados nos padrões de geração de malha anteriores.

### **Parâmetros geométricos:**

Não há interseção de curvas interiores dentro do domínio.

A Figura 3.10 mostra alguns exemplos de malha gerada pelo padrão de geração de malha com seus respectivos diagramas de decomposição hierárquica.

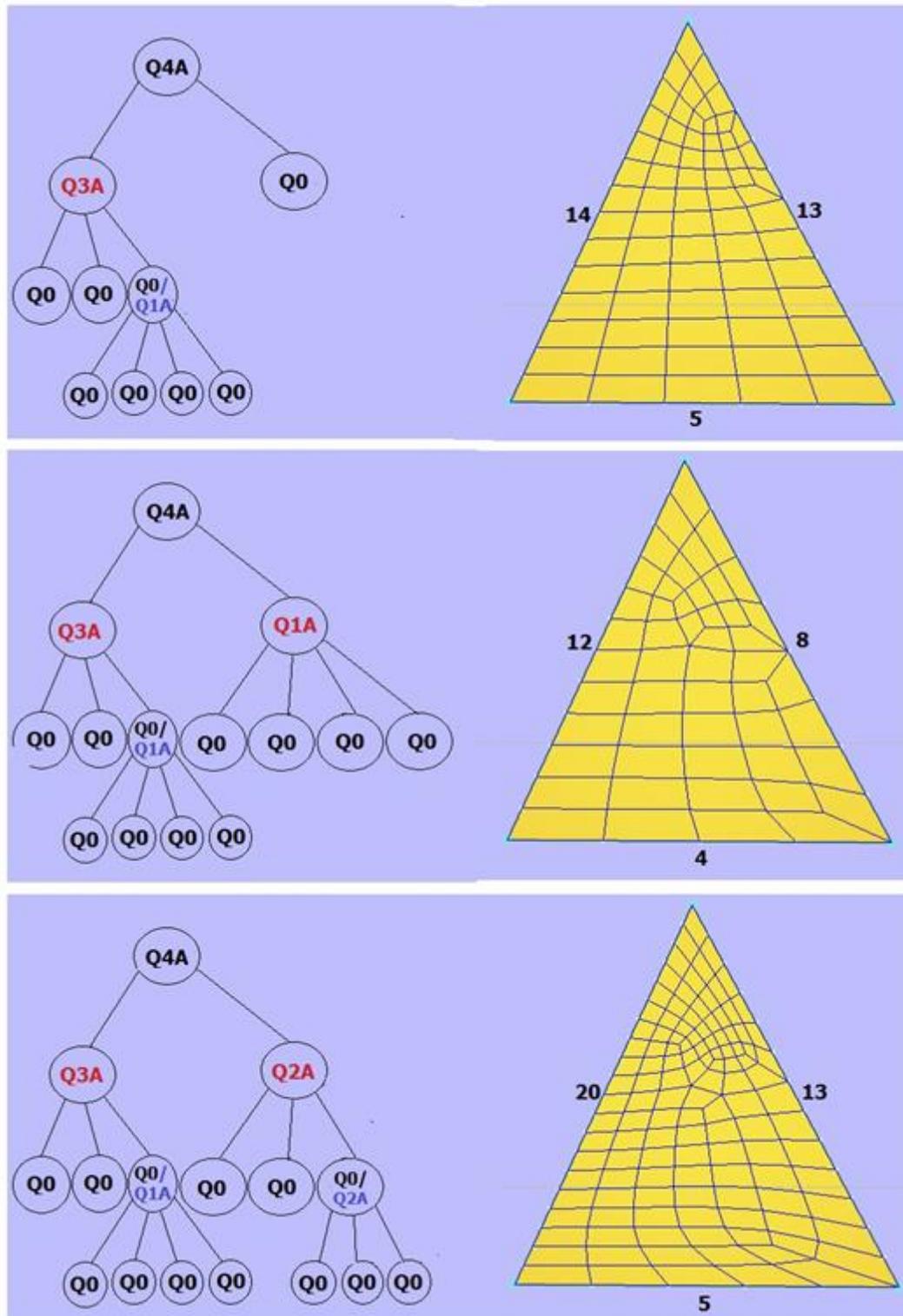


Figura 3.10: Decomposição hierárquica gerada pelo padrão de geração de malha Q4A

A Figura 3.11 mostra um modelo real com um domínio cuja geometria é “alongada”, onde é possível aplicar o padrão Q4A. O domínio é quadrangular, no entanto, é possível selecionar três vértices e considerá-lo como triangular. Neste caso o padrão tem comportamento autorrecursivo.

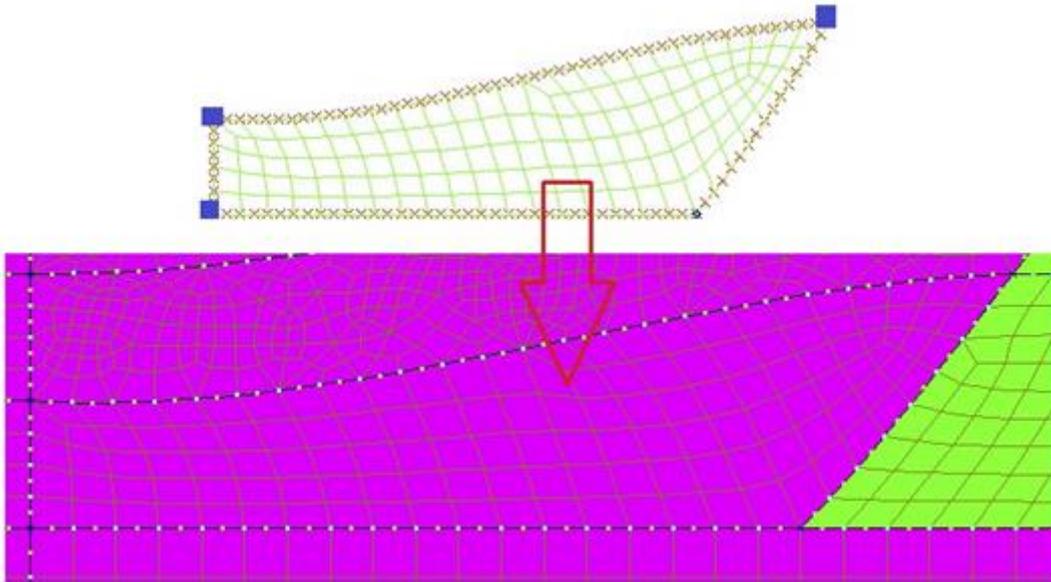


Figura 3.11: Modelo real com um domínio de geometria alongada

### 3.5

#### Padrão de geração de malha Q5A -2 curvas- grau 3 e 4

Este padrão de geração, é indicado na Figura 3.12. O domínio é decomposto inicialmente em 2 subdomínios triangulares. Este padrão de geração tem duas possibilidades de decomposição hierárquica em ambos os subdomínios (ver condições de subdomínio).

A Figura 3.12 mostra o nome dado a cada subdomínio, os parâmetros topológicos, a distribuição dos padrões de geração em cada subdomínio e a orientação que terão os padrões de geração de malha. Não há parâmetros geométricos, pois só existe uma curva que delimita os subdomínios da decomposição inicial.

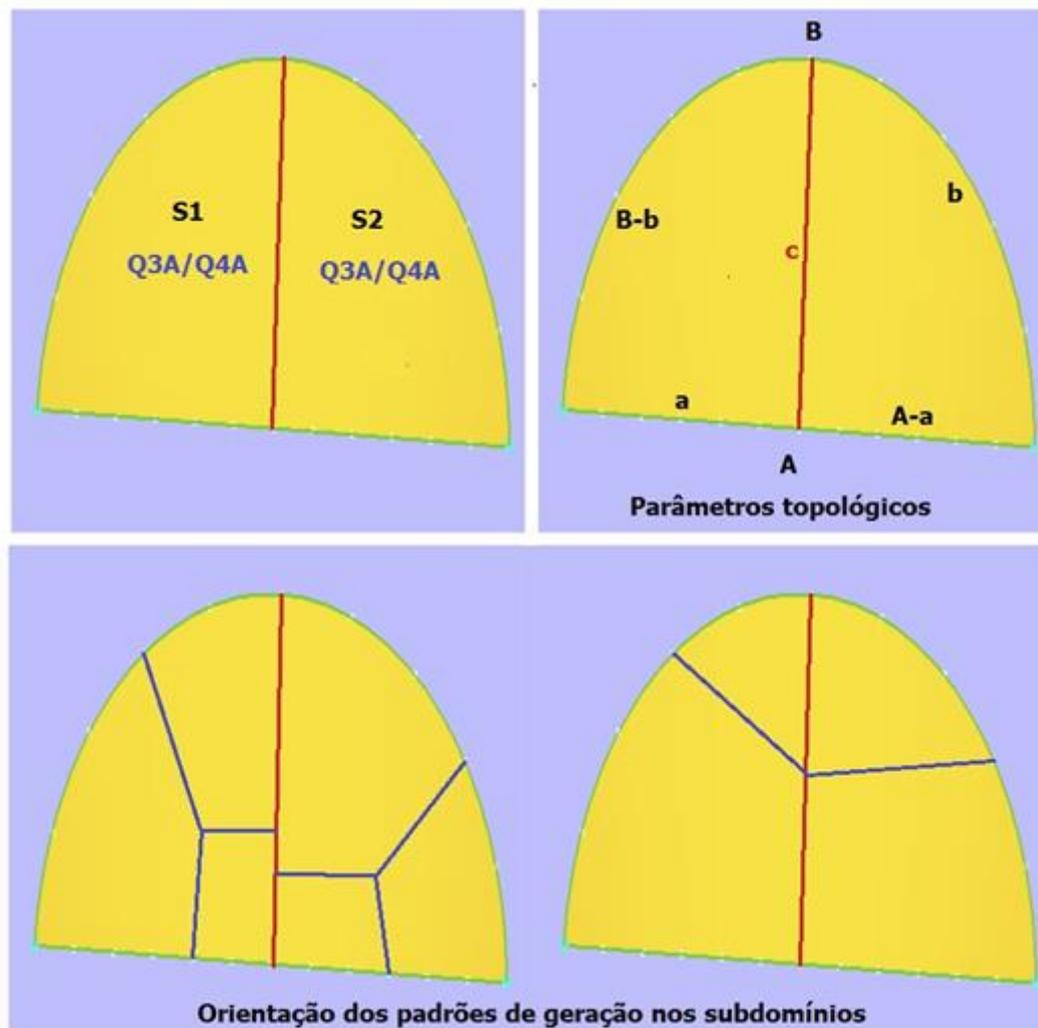


Figura 3.12: Padrão de geração de malha Q5A

**Notação:**

A, B: Número de subdivisões das curvas de bordo.

a, b: Número de subdivisões das subcurvas de bordo.

c: Número de subdivisões da curva interna.

**Condições de domínio:**

$$(A + B) \bmod 2 = 0 \quad (3.79)$$

$$A \leq B \quad (3.80)$$

**Condições de domínio válido realizável:**

$$A \geq 4 \quad (3.81)$$

$$B \geq 4 \quad (3.82)$$

**Cálculo do parâmetro topológico de bordo:**

$$a = \left\lfloor \frac{A}{2} \right\rfloor \quad (3.83)$$

$$b = \left\lfloor \frac{B}{2} \right\rfloor \quad (3.84)$$

**Cálculo do parâmetro topológico interno:**

Adota-se o critério de avaliar o parâmetro  $c$  como a soma das outras curvas de bordo do subdomínio  $S1$ . No entanto, este valor pode ser muito grande, por isso será diminuído em quatro ou duas unidades conforme seja o caso

$$c = \begin{cases} a + (B - b) - 4, & \text{if } (a + (B - b)) > 5 \\ a + (B - b) - 2, & \text{if } (a + (B - b)) \leq 5 \end{cases} \quad (3.85)$$

**Condições de subdomínio:**

Primeira possibilidade. Quando os dois subdomínios triangulares são “alongados”. Isto pode acontecer quando  $B \geq kA$ , onde  $k$  é um fator que indica que  $B$  é pelo menos  $k$  vezes maior do que  $A$  em número de subdivisões (adotado  $k=2$ ). Neste caso usa-se o padrão Q4A em ambos os subdomínios.

$$B - b > ka \quad (3.86)$$

$$c > ka \quad (3.87)$$

$$b \geq k(A - a) \quad (3.88)$$

$$c \geq k(A - a) \quad (3.89)$$

Segunda possibilidade. Quando os subdomínios triangulares não são “alongados”. Isto pode acontecer quando  $B < kA$ , onde  $k$  é o fator definido anteriormente. Neste caso usa-se o padrão Q3A em ambos os subdomínios.

$$B - b < ka \quad (3.90)$$

$$c < ka \quad (3.91)$$

$$b < k(A - a) \quad (3.92)$$

$$c \geq k(A - a) \quad (3.93)$$

Tendo em conta como foi calculado o parâmetro  $c$  e as relações inferidas a partir de como foram calculados os parâmetros  $a$  e  $b$ :  $a \leq A - a$ ,  $b \leq B - b$ . Cumpre-se as seguintes desigualdades:

$$c < a + (B - b) \quad (3.94)$$

$$c < (A - a) + b \quad (3.95)$$

### Teste de paridade nos subdomínios S1 e S2

No subdomínio S1:

$$\begin{aligned} & [a + (B - b) + c] \text{mod } 2 \\ &= [a + (B - b) + (a + (B - b) - 2)] \text{mod } 2 \\ &= [2(a + (B - b)) - 2] \text{mod } 2 \\ &= [\text{par} - \text{par}] \text{mod } 2 = [\text{par}] \text{mod } 2 = 0 \end{aligned} \quad (3.96)$$

No subdomínio S2:

$$\begin{aligned} & [(A - a) + b + c] \text{mod } 2 \\ &= [(A - a) + b + (a + (B - b) - 2)] \text{mod } 2 \\ &= [(A + B) - 2] \text{mod } 2 \\ &= [\text{par} - \text{par}] \text{mod } 2 = [\text{par}] \text{mod } 2 = 0 \end{aligned} \quad (3.97)$$

### Parâmetros geométricos:

Não há pontos interiores gerados pela decomposição dentro do domínio, portanto não há parâmetros geométricos.

A Figura 3.13 mostra dois exemplos de malha gerada pelo padrão de geração de malha com seus respectivos diagramas de árvore.

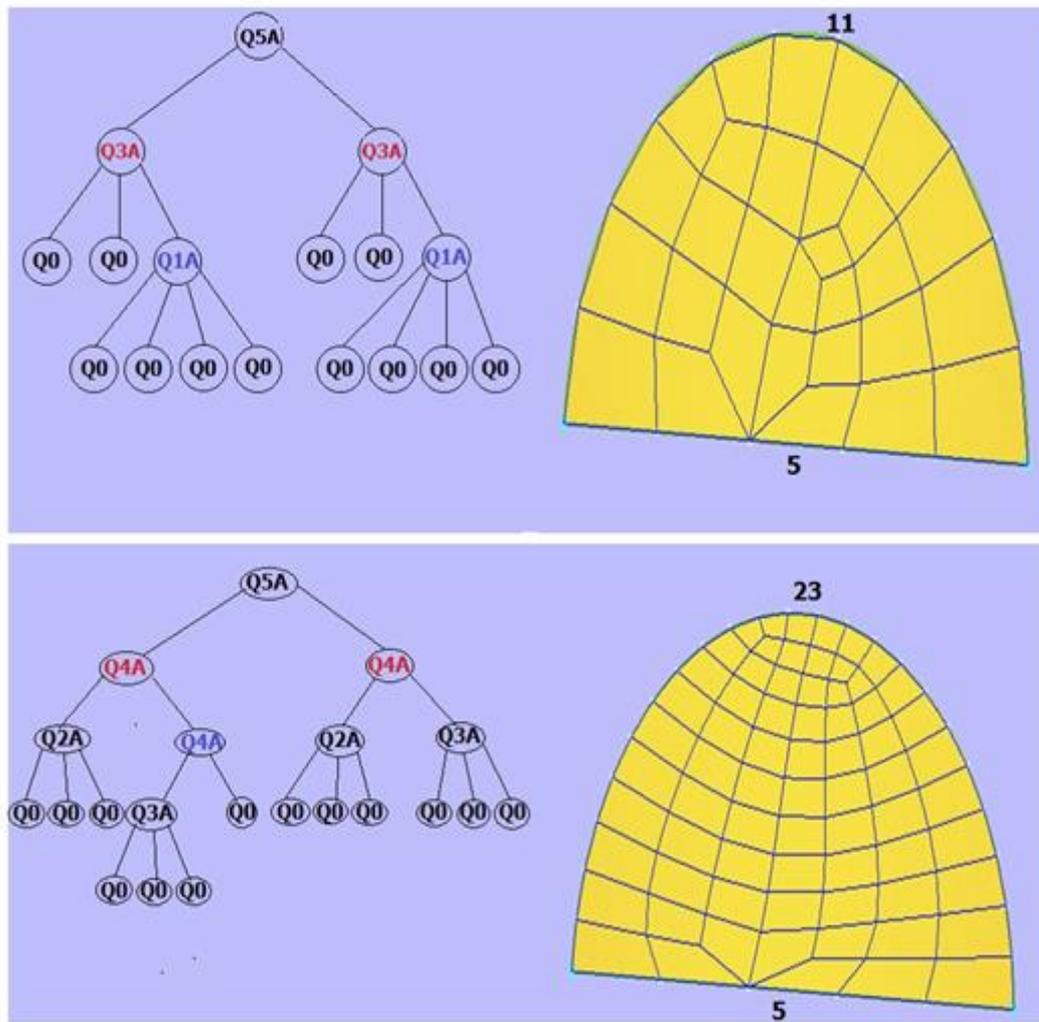


Figura 3.13: Decomposição hierárquica gerada pelo padrão de geração de malha  $Q5A$

## 4

### Geração Dinâmica de Malha Quadrilateral usando Padrões

No capítulo anterior foram projetados padrões de geração de malhas para domínios triangulares e quadrangulares com parâmetros topológicos definidos. Neste capítulo, apresenta-se a geração de malhas por variação dinâmica dos parâmetros topológicos.

A ideia é tomar uma decomposição inicial que gera subdomínios triangulares e/ou quadrangulares sobre um domínio com parâmetros topológicos quaisquer. Os valores limites destes parâmetros foram estabelecidos nas Figuras 2.12 e 2.13. Os valores compreendidos entre estes limites são considerados valores válidos. A malha dentro dos subdomínios será gerada pelos padrões já projetados no capítulo anterior, mas para isso deve-se apenas assegurar que a condição de paridade seja sempre satisfeita em cada subdomínio e considerar valores válidos dos parâmetros topológicos para gerar só subdomínios realizáveis.

Tanto os parâmetros topológicos internos e de bordo podem ser variados dinamicamente, usando valores válidos. No caso em que a paridade sobre um subdomínio não se cumpra, pode-se adotar o critério de corrigir algum parâmetro interno incrementando ou decrementando seu número de subdivisões. Neste trabalho foi adotado o critério de incrementar o número de subdivisões.

Variar os parâmetros topológicos sobre um domínio, permite encontrar malhas de diversas qualidades, pois há valores dos parâmetros que geram melhor qualidade de malha do que outros. No entanto, pode-se melhorar a qualidade de malha, simplesmente mudando a geometria dos elementos de uma malha gerada. Isto consegue-se variando dinamicamente os parâmetros geométricos dos padrões de geração de malha.

A Figura 4.1 mostra um diálogo implementado que permite variar dinamicamente tanto os parâmetros geométricos, quanto os parâmetros topológicos.

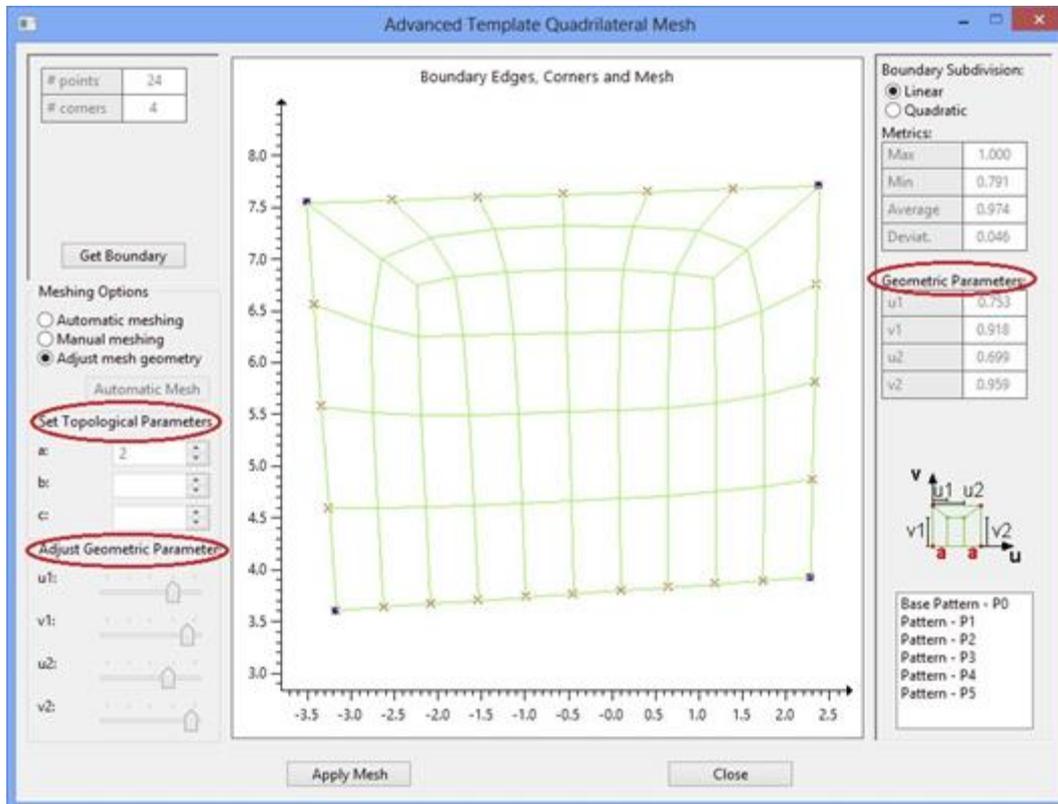


Figura 4.1: Diálogo que permite variar dinamicamente os parâmetros geométricos e topológicos

A Figura 4.2 mostra a variação dos parâmetros geométricos de uma malha cujos valores padrão foram ligeiramente mudados.

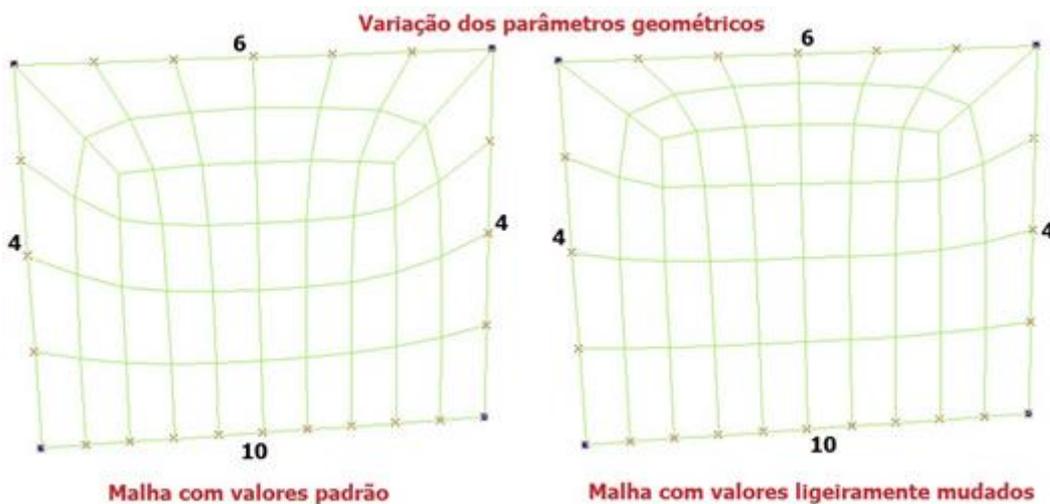


Figura 4.2: Variação dos parâmetros geométricos de uma malha

#### 4.1

##### Geração baseada no padrão de decomposição Q1

O domínio é decomposto em quatro subdomínios quadrangulares, a geração de malha nestes subdomínios está garantida pelos padrões de geração de malha (Q0,

Q1A, Q2A) para domínios quadrangulares. A decomposição hierárquica só será gerada no subdomínio S4. Para gerar decomposição hierárquica nos restantes subdomínios, pode-se usar valores diferentes de  $b$  e/ou variar os parâmetros topológicos internos. Deve-se fazer cumprir a paridade em cada subdomínio para assegurar que qualquer valor válido do parâmetro topológico de bordo  $b$  permita gerar malha em todos os subdomínios. Neste caso será variado apenas o parâmetro topológico de bordo  $b$ .

A expressão que define a paridade no subdomínio S4 é:  $A+B+C+(D-2b)$ , e é par para qualquer valor de  $b$ .

A Figura 4.3 mostra o resultado de uma variação dinâmica dos parâmetros topológicos, baseado no padrão de decomposição Q1. O domínio é o mesmo em ambos os casos.

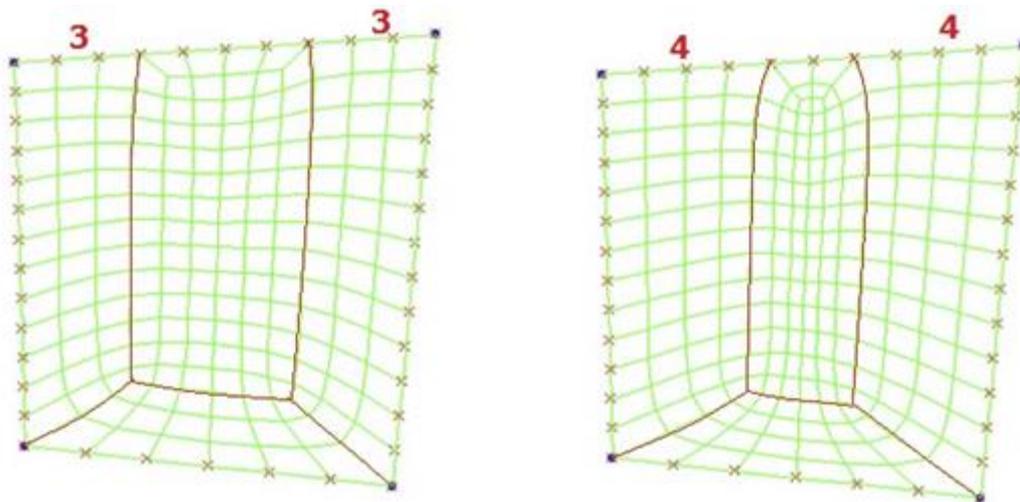


Figura 4.3: Geração dinâmica baseada na decomposição Q1

## 4.2

### Geração baseada no padrão de decomposição Q2

O domínio é decomposto em três subdomínios quadrangulares, a geração de malha nestes subdomínios está garantida pelos padrões de geração de malha (Q0, Q1A, Q2A) para domínios quadrangulares. A decomposição hierárquica só será gerada no subdomínio S3. Para gerar decomposição hierárquica nos restantes subdomínios, pode-se usar valores diferentes de  $b$  e/ou variar os parâmetros topológicos internos. Deve-se fazer cumprir a paridade em cada subdomínio para assegurar que qualquer valor válido do parâmetro topológico de bordo  $b$  permita

gerar malha em todos os subdomínios. Neste caso também será variado só o parâmetro topológico de bordo  $b$ .

A expressão que define a paridade no subdomínio S3 é:  $A+C+(B-b)+(D-b)$ , e é par para qualquer valor de  $b$ .

A Figura 4.4 mostra o resultado de uma variação dinâmica dos parâmetros topológicos, baseado no padrão de decomposição Q2. O domínio é o mesmo em ambos os casos.

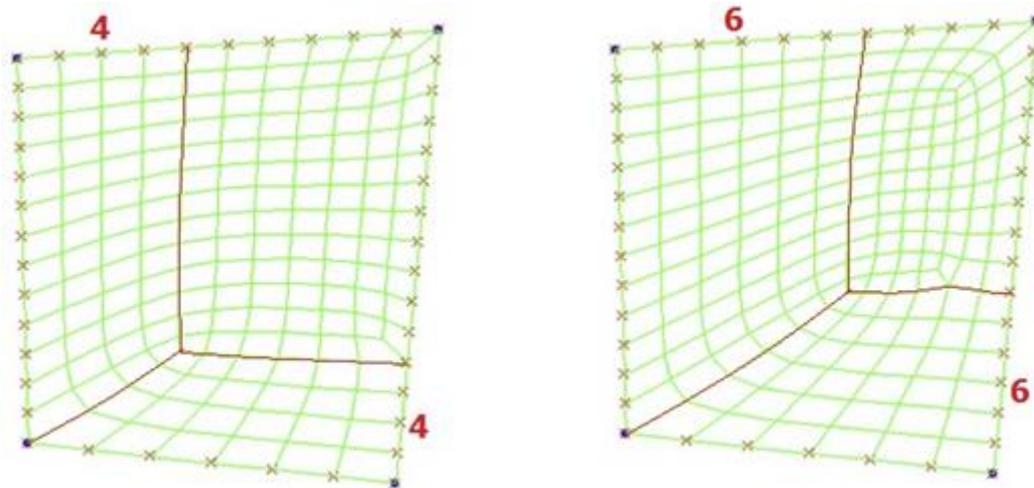


Figura 4.4: Geração dinâmica baseada na decomposição Q2

### 4.3 Geração baseada no padrão de decomposição Q3

O domínio é decomposto em três subdomínios quadrangulares, a geração de malha nestes subdomínios está garantida pelos padrões de geração de malha associados a (Q0, Q1A, Q2A) para domínios quadrangulares. A decomposição hierárquica será gerada nos três subdomínios. Neste caso serão variados os três parâmetros topológico de bordo  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Deve-se fazer cumprir a paridade nos três subdomínios para assegurar que quaisquer valores válidos dos parâmetros topológicos de bordo permitam gerar malha em todos os subdomínios. Caso não se cumpra a paridade em qualquer subdomínio, serão corrigidos os parâmetros internos  $e$ ,  $f$ ,  $g$  (incrementados em uma unidade). Alternativamente também poderiam ser decrementados em uma unidade.

As expressões que definem a paridade nos subdomínios são:

S1:  $a+(C-c)+f+e$ , é par para quaisquer valores de  $a, b, c$  com  $e$  corrigido ou não.

S2:  $e+c+(B-b)+g$ , é par para quaisquer valores de  $a, b, c$  com  $g$  corrigido ou não.

S3:  $g+b+(A-a)+f$ , é par para quaisquer valores de  $a, b, c$  com  $f$  corrigido ou não.

Dado três valores válidos para os parâmetros topológicos  $a, b, c$  sobre um domínio triangular. Estas expressões ao ser verificadas em ordem sequencial garantem que ao final todos os subdomínios cumprem a condição de paridade.

A Figura 4.5 mostra o resultado de uma variação dinâmica dos parâmetros topológicos, baseado no padrão de decomposição Q3. O domínio é o mesmo em ambos os casos.

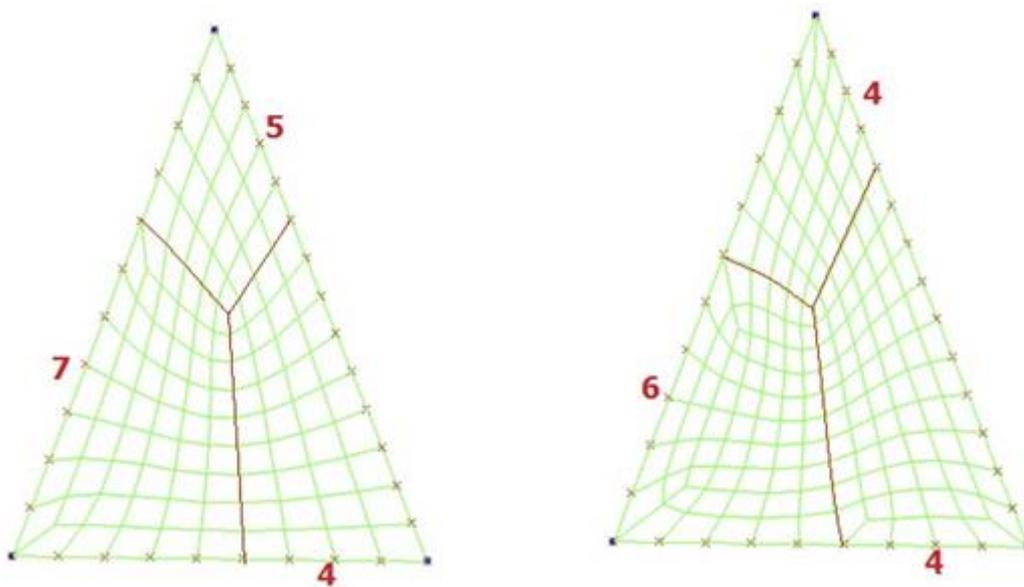


Figura 4.5: Geração dinâmica baseada na decomposição Q3

#### 4.4

#### Geração baseada no padrão de decomposição Q4

O domínio é decomposto em dois subdomínios, um triangular e outro quadrilateral, a geração de malha nestes subdomínios está garantida pelos padrões de geração de malha (Q3A e Q4A) e (Q0, Q1A, Q2A) para domínios triangulares e quadrangulares. A decomposição hierárquica será gerada nos dois subdomínios. Neste caso, vai-se variar os parâmetros de bordo  $a, b$  e o parâmetro interno  $c$ . Deve-se fazer cumprir a paridade em cada subdomínio para assegurar que quaisquer

valores válidos dos parâmetros topológicos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  permitam gerar malha nos dois subdomínios. Caso não se cumpra a paridade em qualquer subdomínio, será corrigido o parâmetro topológico interno  $c$  (incrementado em uma unidade). Alternativamente também poderia ser decrementado em uma unidade.

As expressões que definem a paridade nos subdomínios são:

S1:  $a+b+c$  é par para quaisquer valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  com  $c$  corrigido ou não.

S2:  $(A-a)+c+(B-b)+C$ , é par para quaisquer valores de  $a, b, c$  com  $c$  corrigido ou não.

A Figura 4.6 mostra o resultado de uma variação dinâmica dos parâmetros topológicos, baseado no padrão de decomposição Q4. O domínio é o mesmo em ambos os casos.

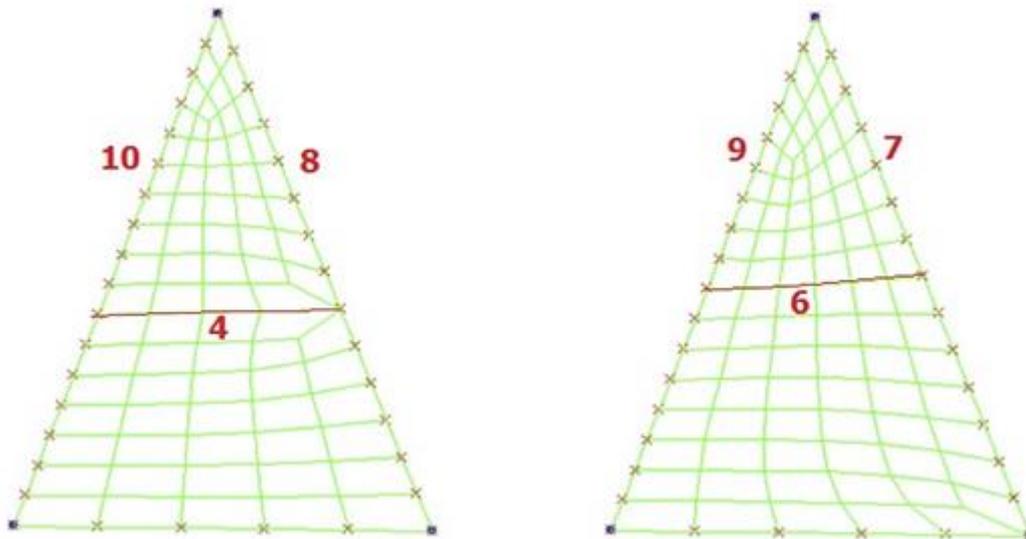


Figura 4.6: Geração dinâmica baseada na decomposição Q4

## 4.5

### Geração baseada no padrão de decomposição Q5

O domínio é decomposto em dois subdomínios triangulares, a geração de malha nestes subdomínios está garantida pelos padrões de geração de malha (Q3A e Q4A) para domínios triangulares. A decomposição hierárquica será gerada nos dois subdomínios. Neste caso, vai-se variar os parâmetros de bordo  $a$ ,  $b$  e o parâmetro interno  $c$ . Deve-se fazer cumprir a paridade em cada subdomínio para assegurar que quaisquer valores válidos dos parâmetros topológicos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  permitam gerar malha nos dois subdomínios. Caso não se cumpra a paridade em

qualquer subdomínio, será corrigido o parâmetro topológico interno  $c$  (incrementado em uma unidade). Alternativamente também poderia ser decrementado em uma unidade.

As expressões que definem a paridade nos subdomínios são:

S1:  $(B-b)+a+c$ , é par para quaisquer valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$  com  $c$  corrigido ou não.

S2:  $c+(A-a)+b$ , é par para quaisquer valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$  com  $c$  corrigido ou não.

A Figura 4.7 mostra o resultado de uma variação dinâmica dos parâmetros topológicos, baseado no padrão de decomposição Q5. O domínio é o mesmo em ambos os casos.

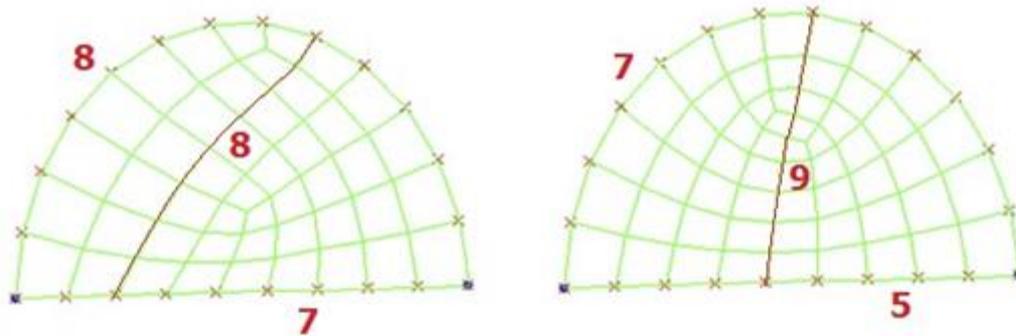


Figura 4.7: Geração dinâmica baseada na decomposição Q5

## 5 Conclusões e Trabalhos Futuros

### 5.1 Conclusões

Este trabalho foi focado na geração de malhas quadrilaterais baseada no projeto de padrões de geração de malha, a partir de padrões de decomposição de domínio definidos neste trabalho.

A metodologia pode ser usada para introduzir um esquema de refinamento de malha. Este esquema depende do nível de decomposição, o qual está associado diretamente à variação dos parâmetros topológicos, principalmente dos parâmetros topológicos internos. Dado que os parâmetros topológicos internos são definidos no interior do domínio e poderiam variar quase livremente.

A topologia de decomposição hierárquica de um padrão de geração de malha é determinada pelos parâmetros topológicos internos e de bordo. No projeto de padrões de geração de malha devem calcular-se os parâmetros topológicos segundo alguns critérios definidos neste trabalho e também deve-se testar a convergência da decomposição hierárquica nos seus subdomínios.

No projeto de padrões, deve-se garantir o cumprimento das condições de paridade e realizabilidade em todos os subdomínios, de outro modo ao aplicar um padrão sobre um domínio, alguns subdomínios poderiam ficar sem malha.

A variação dinâmica dos parâmetros geométricos permite melhorar a qualidade de malha ao mudar a geometria dos elementos da malha gerada. A geração dinâmica de malha por variação dinâmica dos parâmetros topológicos, permite gerar diversas topologias de malha sobre um domínio, a partir de um mesmo padrão de decomposição. Esta variação permite escolher a malha de melhor qualidade sobre um domínio.

## 5.2 Trabalhos futuros

- Propõe-se implementar um método de otimização via algoritmos genéticos para obter os “parâmetros topológicos” que geram a melhor qualidade de malha sobre um determinado domínio, tendo em consideração alguns indicadores de qualidade de malha (por exemplo “jacobian”, “ratio” e “skews”).
- De igual forma também propõe-se implementar um método de otimização via algoritmos genéticos para obter os “parâmetros geométricos” que melhoram a qualidade de uma malha, tendo em consideração os indicadores de qualidade de malha já mencionados.
- Outro trabalho importante é implementar a geração de malha quadrilateral definindo outros padrões de decomposição. Isto pode ser complementado com a implementação de padrões de geração de malha para domínios delimitados por um número maior de quatro curvas.

## 6

### Referências Bibliográficas

ANSYS, I. **ANSYS Modeling and Meshing Guide**. 2005.

GORDON, W. J.; HALL, C. A. **Construction of curvilinear co-ordinate systems and applications to mesh generation**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 7:461-477, 1973.

HABER, R.; SHEPHARD, M. S.; ABEL, J. F.; GALLAGHER, R. H.; GREENBERG, D. P. **A general two-dimensional, graphical finite element preprocessor utilizing discrete transfinite mappings**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 17:1015-1044, 1981.

MIRANDA, A.; MARTHA, L. F. **Hierarchical template-based quadrilateral mesh generation**. Engineering with Computers, 2013.

MIRANDA, A. **Hierarchical template-based hexahedral mesh generation**. In: USNCCM - 2013 - 12TH U.S. NATIONAL CONGRESS ON COMPUTATIONAL MECHANICS, 2013.

MURDOCH, P.; BENZLEY, S.; BLACKER, T.; MITCHELL, S. A. **The spatial twist continuum: A connectivity based method for representing all-hexahedral finite element meshes**. Finite Elements in Analysis and Design, 28:137-149, 1997.

OWEN, S. J. **A survey of unstructured mesh generation technology**. 1998.

SANDIA LABORATORIES. **Hex mesh theory**. 2011.

SCHNEIDERS, R. **Algorithms for quadrilateral and hexahedral mesh generation**. In: PROCEEDINGS OF THE VKI LECTURE SERIES ON COMPUTATIONAL FLUID DYNAMIC, 2000.

## **A**

### **Outros Projetos de Padrões de Geração de Malha**

Com o propósito de mostrar a possibilidade de projetar padrões de geração de malha de diversas formas, são apresentados outros projetos alternativos.

A metodologia proposta para projetar padrões de geração de malha, será aplicado para obter os padrões (templates) propostos no trabalho de Miranda & Martha (2013).

#### **A.1**

##### **Padrão de geração de malha Q2B -4 curvas- grau 1 e 2**

Este padrão de geração de malha é mostrado na Figura A.1. O domínio é decomposto em 3 subdomínios quadrangulares, sendo que um deles pode ter decomposição hierárquica. Neste caso o subdomínio S3 poderia conter o padrão Q1A.

Dado que este padrão não é incluído para formar parte de algum subdomínio, este padrão não é “autorrecursivo”.

A Figura A.1 mostra o nome dado a cada subdomínio, a distribuição dos padrões de geração de malha nos subdomínios, os parâmetros topológicos e os parâmetros geométricos.

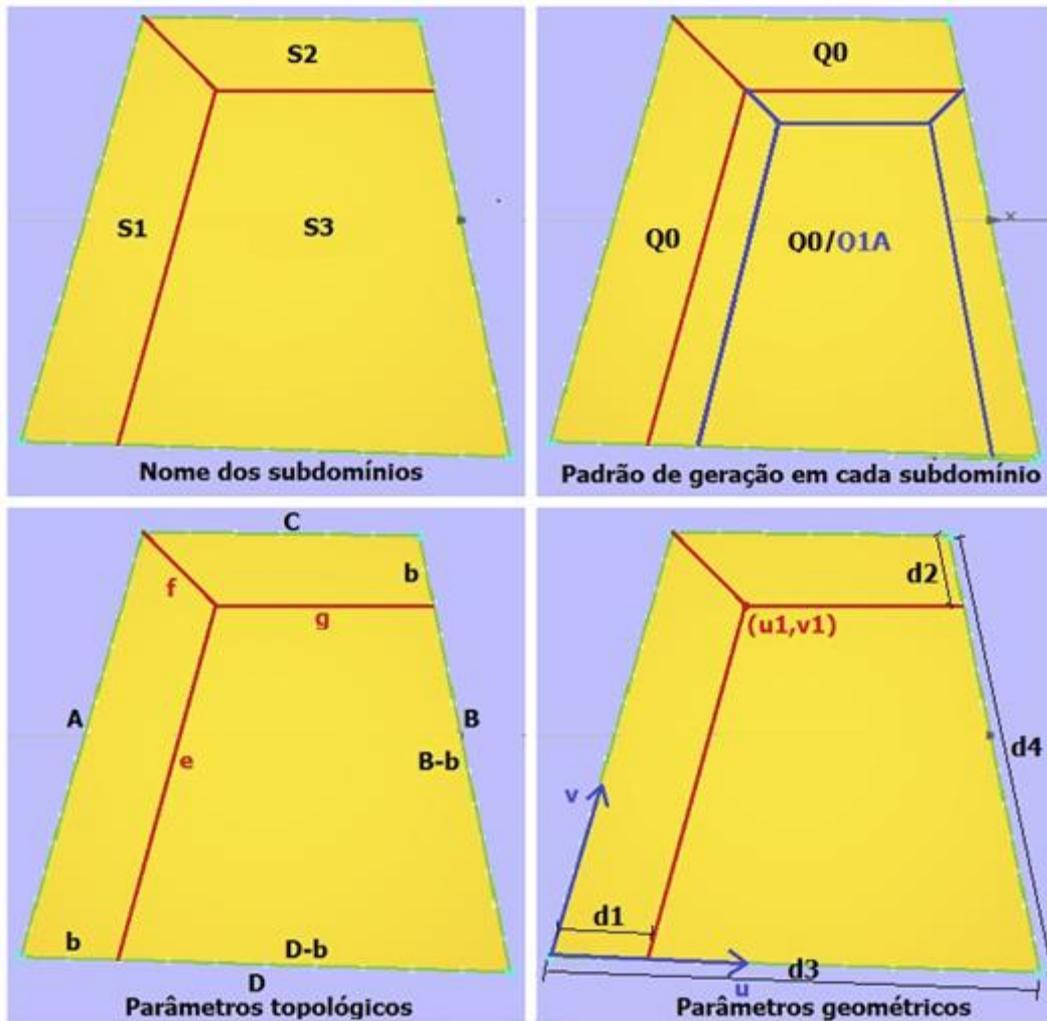


Figura A.1: Padrão de geração de malha Q2B

**Notação:**

A, B, C, D: Número de subdivisões das curvas de bordo.

b: Número de subdivisões da subcurva de bordo.

e, f, g: Número de subdivisões das curvas internas.

$d_1, d_2, d_3, d_4$ : Comprimentos sobre as curvas de bordo.

$u_1, v_1$ : Coordenadas em espaço paramétrico.

**Condições de domínio:**

$$(A + B + C + D) \bmod 2 = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$A < B \quad (\text{A.2})$$

$$C < D \quad (\text{A.3})$$

**Cálculo dos parâmetros topológicos internos:**

Subdivide-se as curvas internas igual que as curvas de bordo opostas, com a finalidade de gerar a decomposição hierárquica só na região S3.

$$e = A \quad (\text{A.4})$$

$$f = b \quad (\text{A.5})$$

$$g = C \quad (\text{A.6})$$

### Condições de subdomínio:

Primeira possibilidade. Quando  $B-A \neq D-C$  é gerado o padrão de geração de malha Q1A no subdomínio S3.

$$e = B - b \quad (\text{A.7})$$

$$g < D - b \quad (\text{A.8})$$

Segunda possibilidade. Quando  $B-A = D-C$  o padrão de geração de malha gerado no subdomínio S3 é o padrão de geração de malha base Q0.

$$e = B - b \quad (\text{A.9})$$

$$g = D - b \quad (\text{A.10})$$

### Cálculo do parâmetro topológico de bordo:

$$\text{if } D - C > A - B \rightarrow A = B - b \text{ and } C < D - b \quad (\text{A.11})$$

$$\text{Portanto, } b = B - A \text{ and } b < D - C$$

$$\text{if } D - C < A - B \rightarrow A < B - b \text{ and } C = D - b \quad (\text{A.12})$$

$$\text{Portanto, } b < B - A \text{ and } b = D - C$$

$$\text{if } D - C = A - B \rightarrow A = B - b \text{ and } C = D - b \quad (\text{A.13})$$

$$\text{Portanto, } b = B - A \text{ and } b = D - C$$

Das expressões anteriores,  $b \leq B - A$  e  $b \leq D - C$  Portanto:

$$b = \min(B - A, D - C) \quad (\text{A.14})$$

### Teste de paridade no subdomínio S3:

$$\begin{aligned} & [e + (B - b) + (D - b) + g] \text{ mod } 2 \\ & = [A + (B - b) + (D - b) + C] \text{ mod } 2 \\ & = [(A + B + C + D) - 2b] \text{ mod } 2 \\ & = [\text{par} - \text{par}] \text{ mod } 2 = [\text{par}] \text{ mod } 2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

### Parâmetros geométricos:

$$u_1 = \frac{d_1}{d_3} \quad (\text{A.16})$$

$$v_1 = \frac{d_2}{d_4} \quad (\text{A.17})$$

A Figura A.2 mostra dois exemplos de malha gerada pelo padrão de geração de malha, com a decomposição hierárquica gerada em cada caso.

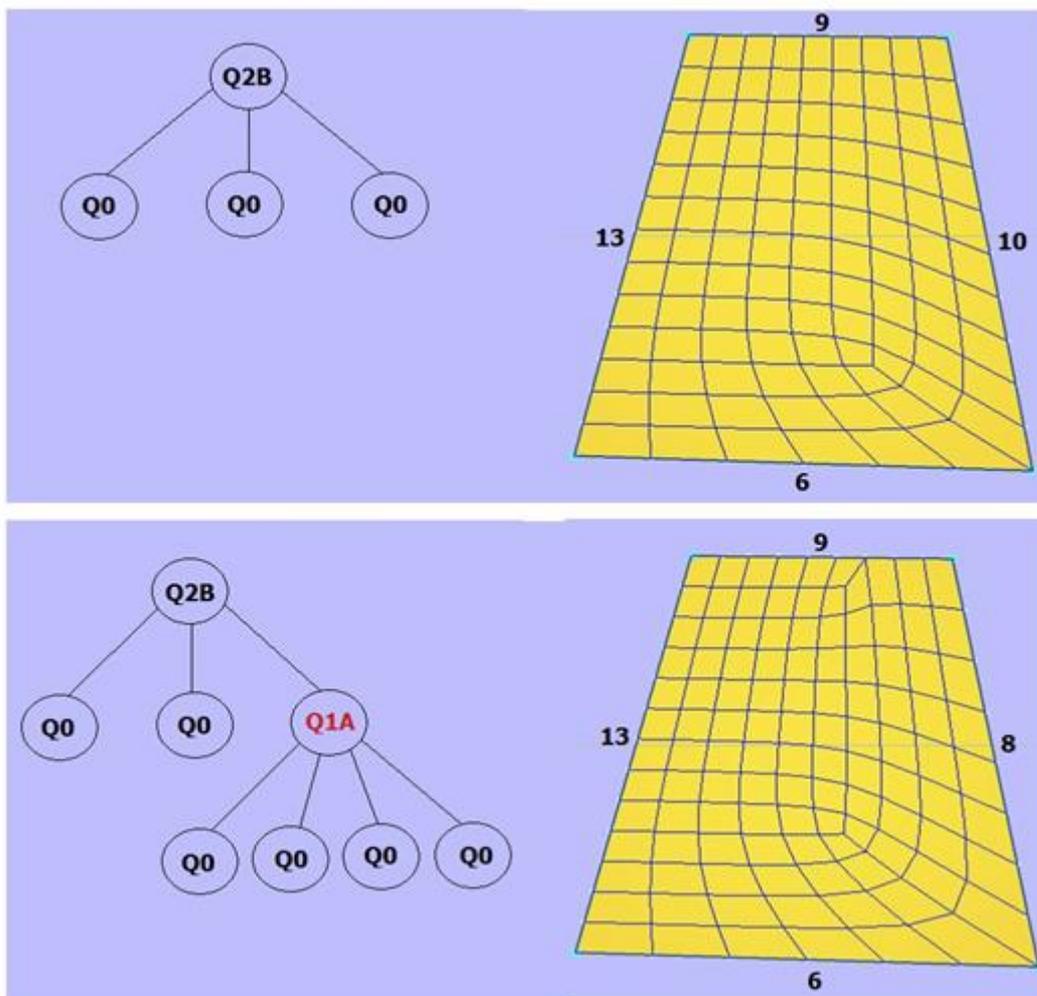


Figura A.2: Decomposição hierárquica gerada pelo padrão de geração de malha Q2B

## A.2

### Padrão de geração de malha Q3B -3 curvas- grau 1 e 2

Este padrão de geração de malha é mostrado na Figura A.3. O domínio é decomposto inicialmente em 3 subdomínios quadrangulares, sendo que o subdomínio S3 pode ter decomposição hierárquica (ver condições de subdomínio).

As condições de domínio impostas garantem uma boa qualidade da malha gerada, impedindo gerar sobre domínios considerados “alongados”.

A diferença com o padrão de geração de malha Q3A é apenas na orientação do padrão de decomposição interno. Esta ideia pode servir para mostrar a importância que tem definir a orientação que terá um padrão dentro de um subdomínio, pois há orientações que geram melhor qualidade do que outras.

Os parâmetros topológicos são calculados em função da condição de “triplo mapeamento bilinear”. No entanto, quando não for possível, é adotado outro critério para definir os parâmetros topológicos.

A Figura A.3 mostra o nome dado a cada subdomínio, a distribuição dos padrões de geração de malha nos subdomínios, os parâmetros topológicos e os parâmetros geométricos.

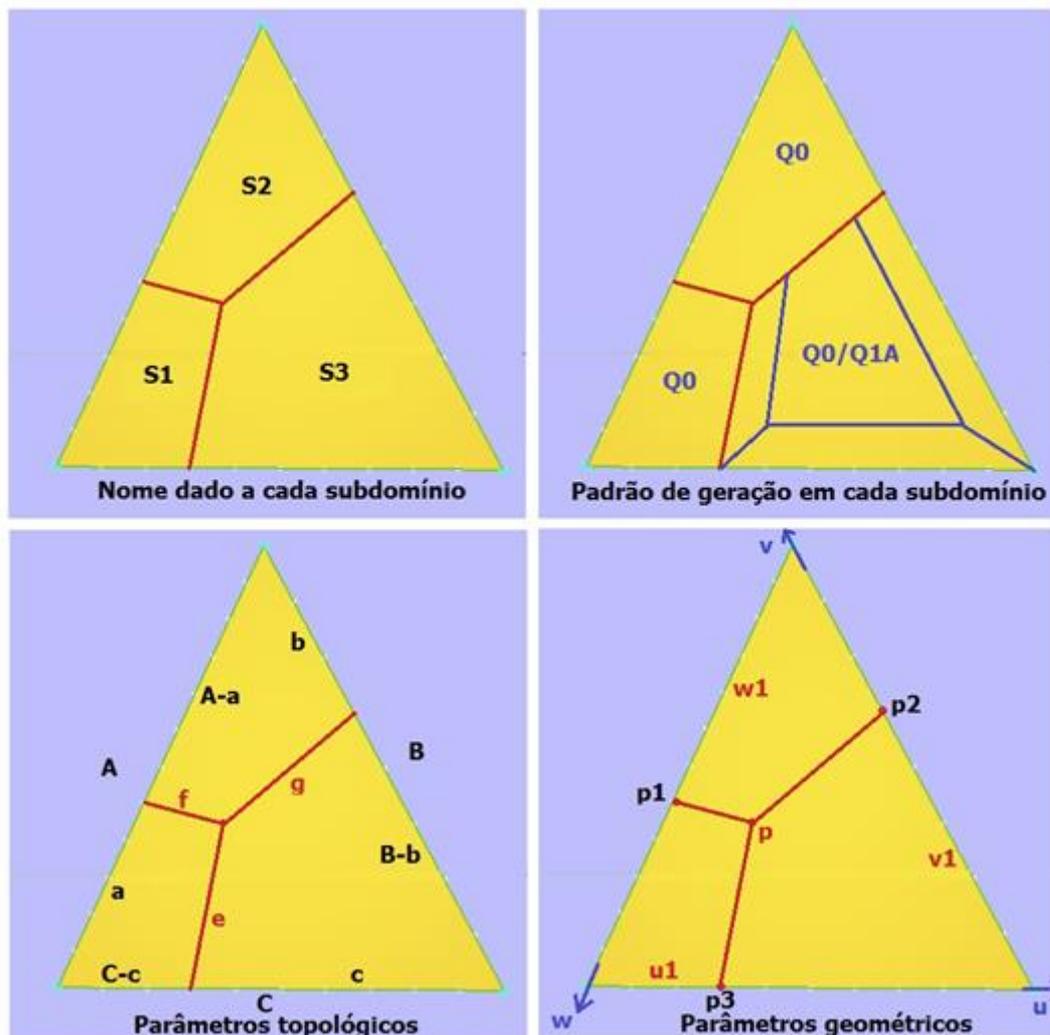


Figura A.3: Padrão de geração de malha Q3B

**Notação:**

A, B, C: Número de subdivisões das curvas de bordo.

a, b, c: Número de subdivisões das subcurvas de bordo.

e, f, g: Número de subdivisões das curvas internas.

u1, v1, u2, v2: Coordenadas em espaço paramétrico.

p1, p2, p3, p: Pontos em espaço paramétrico.

k: Fator que define se um domínio triangular é considerado “alongado” (Adotado k=2).

**Condições de domínio:**

$$(A + B + C) \bmod 2 = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$B \leq A \quad (\text{A.19})$$

$$C \leq A \quad (\text{A.20})$$

$$C \leq B < kC \quad (\text{A.21})$$

**Condições de domínio realizável:**

$$A \geq 2 \quad (\text{A.22})$$

$$B \geq 2 \quad (\text{A.23})$$

$$C \geq 2 \quad (\text{A.24})$$

**Cálculo dos parâmetros topológicos de bordo:**

Estes parâmetros são calculados baseados na ideia de que é satisfeita a “condição de triplo mapeamento bilinear”, mas quando isto não acontece são inseridas correções, com a finalidade de evitar número inválido de parâmetros (zero ou negativo).

$$a = \frac{A + B - C}{2} \quad (\text{A.25})$$

$$b = \frac{B + C - A}{2} \quad (\text{A.26})$$

$$c = \frac{C + A - B}{2} \quad (\text{A.27})$$

Correções dos parâmetros a, b e c em caso sejam negativo ou zero.

$$\text{minEdge} = \min(a, b, c) \quad (\text{A.28})$$

$$\text{if } \text{minEdge} \leq 0 \rightarrow \text{offset} = 1 - \text{minEdge}$$

$$a = \begin{cases} a + \text{offset}, & \text{if } a \leq 0 \\ a - \text{offset}, & \text{if } a > 0 \end{cases}$$

$$b = \begin{cases} b + \text{offset}, & \text{if } b \leq 0 \\ b - \text{offset}, & \text{if } b > 0 \end{cases}$$

$$c = \begin{cases} c + \text{offset}, & \text{if } c \leq 0 \\ c - \text{offset}, & \text{if } c > 0 \end{cases}$$

### Cálculo dos parâmetros topológicos internos:

Os valores de subdivisão das curvas internas são tomados igual às subcurvas de bordo opostas a elas quando as subcurvas de bordo são iguais e é adotado o valor máximo quando as subcurvas de bordo opostas a uma curva interna são diferentes.

$$e = a = B - b \quad (\text{A.29})$$

$$f = b = C - c \quad (\text{A.30})$$

$$g = \max(c, A - a) \quad (\text{A.31})$$

### Condições de subdomínio:

Primeira possibilidade. Quando  $A \geq B + C$ , é gerado o padrão de geração de malha Q1A no subdomínio S3.

$$a = B - b \quad (\text{A.32})$$

$$b = C - c \quad (\text{A.33})$$

$$c < A - a \quad (\text{A.34})$$

Segunda possibilidade. Quando  $A < B + C$ , é gerado o padrão de geração de malha Q0 no subdomínio S3.

$$a = B - b \quad (\text{A.35})$$

$$b = C - c \quad (\text{A.36})$$

$$c = A - a \quad (\text{A.37})$$

### Teste de paridade nos subdomínios S1, S2 e S3:

Começa-se do fato de que  $a = B - b$  e  $b = C - c$ , cumpre-se em ambas condições de subdomínio e, portanto,  $e = a = B - b$  e  $f = b = C - c$ .

No subdomínio S1:

$$\begin{aligned}
 & [a + f + e + (C - c)] \bmod 2 \\
 & = [a + (C - c) + a + (C - c)] \bmod 2 \\
 & = [2a + 2(C - c)] \bmod 2 \\
 & = [\text{par} + \text{par}] \bmod 2 = [\text{par}] \bmod 2 = 0
 \end{aligned} \tag{A.38}$$

No subdomínio S2:

Dado que  $A \geq C$ , tem-se que cumpre a condição de subdomínio  $A - a \geq c$ , então  $g = A - a$ .

$$\begin{aligned}
 & [f + (A - a) + b + g] \bmod 2 \\
 & = [b + (A - a) + b + (A - a)] \bmod 2 \\
 & = [2b + 2(A - a)] \bmod 2 \\
 & = [\text{par} + \text{par}] \bmod 2 = [\text{par}] \bmod 2 = 0
 \end{aligned} \tag{A.39}$$

No subdomínio S3: Da condição de subdomínio  $b = C - c$ , tem-se que  $c = C - b$ .

$$\begin{aligned}
 & [e + g + (B - b) + c] \bmod 2 \\
 & = [a + (A - a) + (B - b) + (C - b)] \bmod 2 \\
 & = [(A + B + C) - 2b] \bmod 2 \\
 & = [\text{par} - \text{par}] \bmod 2 = [\text{par}] \bmod 2 = 0
 \end{aligned} \tag{A.40}$$

### Parâmetros geométricos:

Para definir a geometria interna da decomposição inicial são tomados os mesmos parâmetros geométricos do padrão de geração de malha Q3A. A Figura A.4 mostra dois exemplos de malha gerada pelo padrão de geração de malha, com a decomposição hierárquica em cada caso.

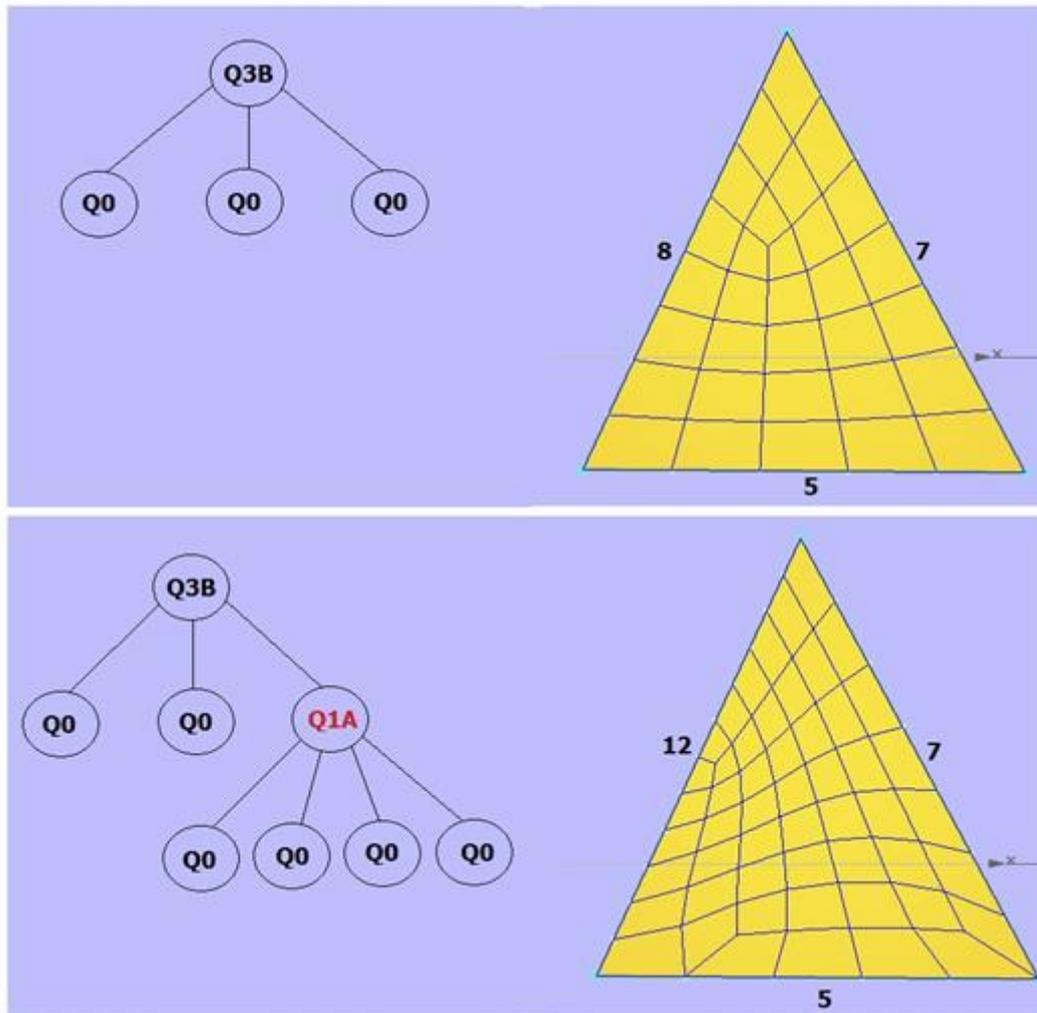


Figura A.4: Decomposição hierárquica gerada pelo padrão de geração de malha Q3B

### A.3 Padrão de geração de malha Q4B -3 curvas- grau 1 e 2

Este padrão de geração de malha, mostrado na Figura A.5, é aplicado sobre domínios triangulares considerados “alongados”. O domínio é decomposto em 2 subdomínios, um triangular e outro quadrilateral. Ambos os subdomínios podem ter decomposição hierárquica (ver condições de subdomínio).

No trabalho de Miranda & Martha (2013), este padrão foi definido para domínios que têm como mínimo (2,4,4) número de subdivisões nas curvas de bordo. No entanto, foi feita uma simples correção para permitir que o mínimo número de subdivisões seja (1,3,4).

A Figura A.5 mostra um domínio triangular “alongado” com o nome dado a cada subdomínio, a distribuição dos padrões de geração de malha nos subdomínios,

os parâmetros topológicos e a orientação dos padrões de geração nos subdomínios. Não há parâmetros geométricos.

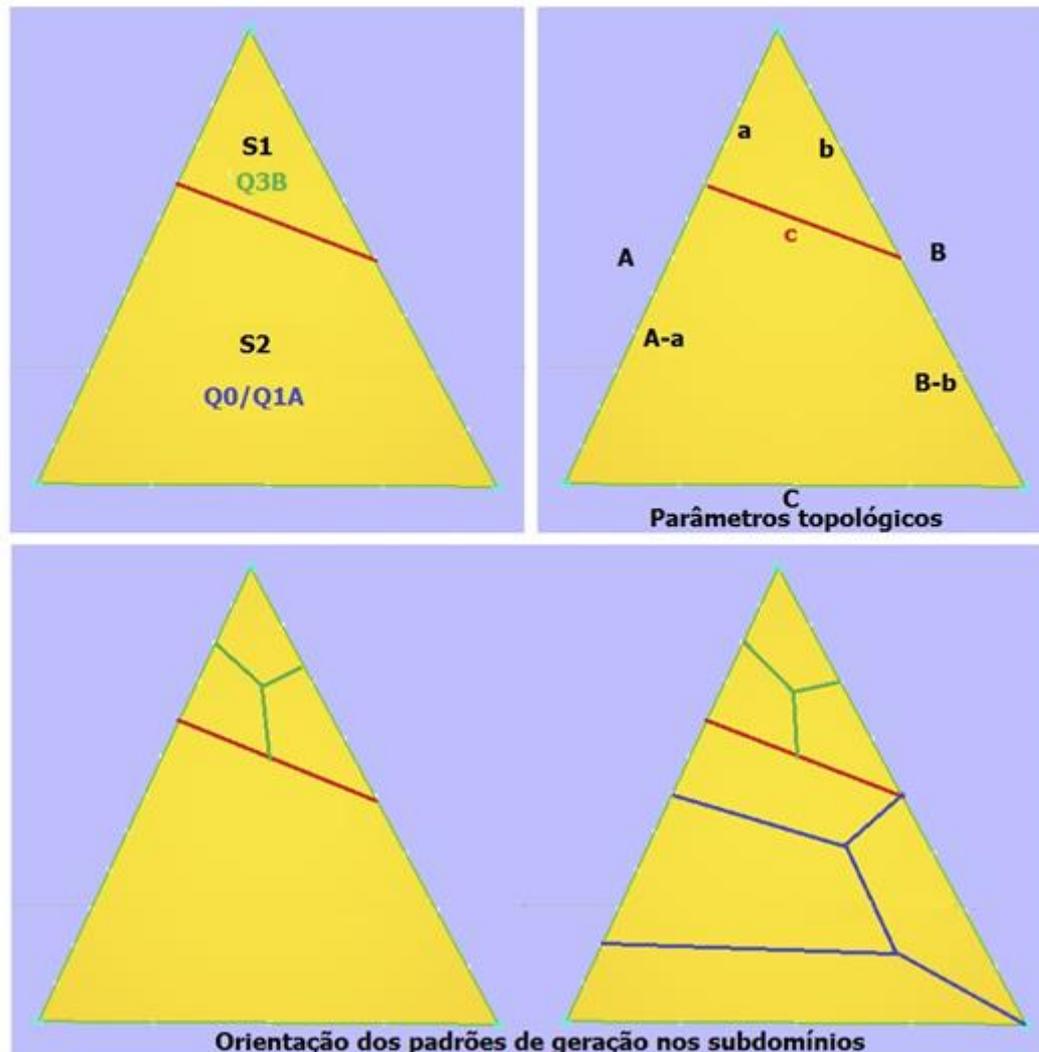


Figura A.5: Padrão de geração de malha Q4B

**Notação:**

A, B, C: Número de subdivisões das curvas de bordo.

a, b: Número de subdivisões das subcurvas de bordo.

c: Número de subdivisões da curva interna.

k: Fator que define se um domínio triangular é considerado “alongado” (Adotado  $k=2$ ).

**Condições de domínio:**

$$(A + B + C) \bmod 2 = 0 \quad (\text{A.41})$$

$$A \geq kC \quad (\text{A.42})$$

$$B \geq kC \quad (\text{A.43})$$

$$A \geq B \quad (\text{A.44})$$

**Condições de domínio realizável:**

$$A \geq 4 \quad (\text{A.45})$$

$$B \geq 4 \quad (\text{A.46})$$

$$C \geq 2 \quad (\text{A.47})$$

**Cálculo do parâmetro topológico interno:**

$$c = C \quad (\text{A.48})$$

**Cálculo dos parâmetros topológicos de bordo:**

$$a = C \quad (\text{A.49})$$

$$b = C \quad (\text{A.50})$$

São feitas algumas correções quando  $C$  é ímpar, com a finalidade de fazer cumprir a condição de paridade na região triangular  $S1$ .

$$\text{if}((a + b + c) \bmod 2 \neq 0 \text{ and } A > B) \rightarrow a = a + 1 \quad (\text{A.51})$$

$$\text{if}((a + b + c) \bmod 2 \neq 0 \text{ and } B \geq A) \rightarrow b = b + 1$$

Aqui foi implementado mais uma correção com a finalidade de permitir  $C=1$  e  $A \geq 3, B \geq 3$ .

$$\text{if } C = 1 \rightarrow a = b = c = 2 \quad (\text{A.52})$$

**Condições de subdomínio:**

Tendo em conta como são calculados os parâmetros topológicos  $a=b=c$ , embora  $c$  incremente em uma unidade para satisfazer a paridade em  $S1$ , a condição de triplo mapeamento bilinear sempre é satisfeita no subdomínio  $S1$ . Portanto, o subdomínio  $S1$  é gerado com padrão de geração de malha Q3B (com triplo mapeamento).

Primeira possibilidade. O subdomínio  $S2$  é gerado com padrão de geração de malha Q1A.

$$A - a > B - b \quad (\text{A.53})$$

$$c = C \quad (\text{A.54})$$

Segunda possibilidade. O subdomínio S2 é gerado com padrão de geração de malha Q0.

$$A - a = B - b \quad (\text{A.55})$$

$$c = C \quad (\text{A.56})$$

### Teste de paridade no subdomínio S1 e S2:

Sendo três curvas o número de subdivisões das curvas devem ser dois ímpares e um par ou todas pares.

CASO 1: Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  pares.

No subdomínio S1: Sendo  $C$  par, então  $a$ ,  $b$  e  $c$  são pares, portanto  $(a+b+c) \bmod 2=0$ . Cumpre-se então a paridade em S1.

No subdomínio S2: Sendo  $A$  e  $a$  pares,  $A-a$  é par também. Sendo  $B$  e  $b$  pares,  $B-b$  é par também. Por outro lado,  $c$  e  $C$  são pares, então  $[(A-a)+c+(B-b)+C] \bmod 2=0$ . Portanto, cumre-se também a condição de paridade neste subdomínio.

CASO 2: Sejam  $A$  e  $B$  ímpares e  $C$  par.

No subdomínio S1: Sendo  $C$  par, então  $a$ ,  $b$  e  $c$  são pares, portanto  $(a+b+c) \bmod 2=0$ . Cumpre-se então a paridade em S1.

No subdomínio S2: Sendo  $A$  ímpar e  $a$  par,  $A-a$  é ímpar. Sendo  $B$  ímpar e  $b$  par,  $B-b$  é ímpar. Por outro lado,  $c$  e  $C$  são pares, então  $[(A-a)+c+(B-b)+C] \bmod 2=0$ . Portanto, cumre-se também a condição de paridade neste subdomínio.

### Parâmetros geométricos:

Não existem parâmetros geométricos para este caso, pois não existem pontos interiores a definir dentro do domínio.

A Figura A.6 mostra dois exemplos de malha gerada pelo padrão de geração de malha, com a decomposição hierárquica em cada caso.

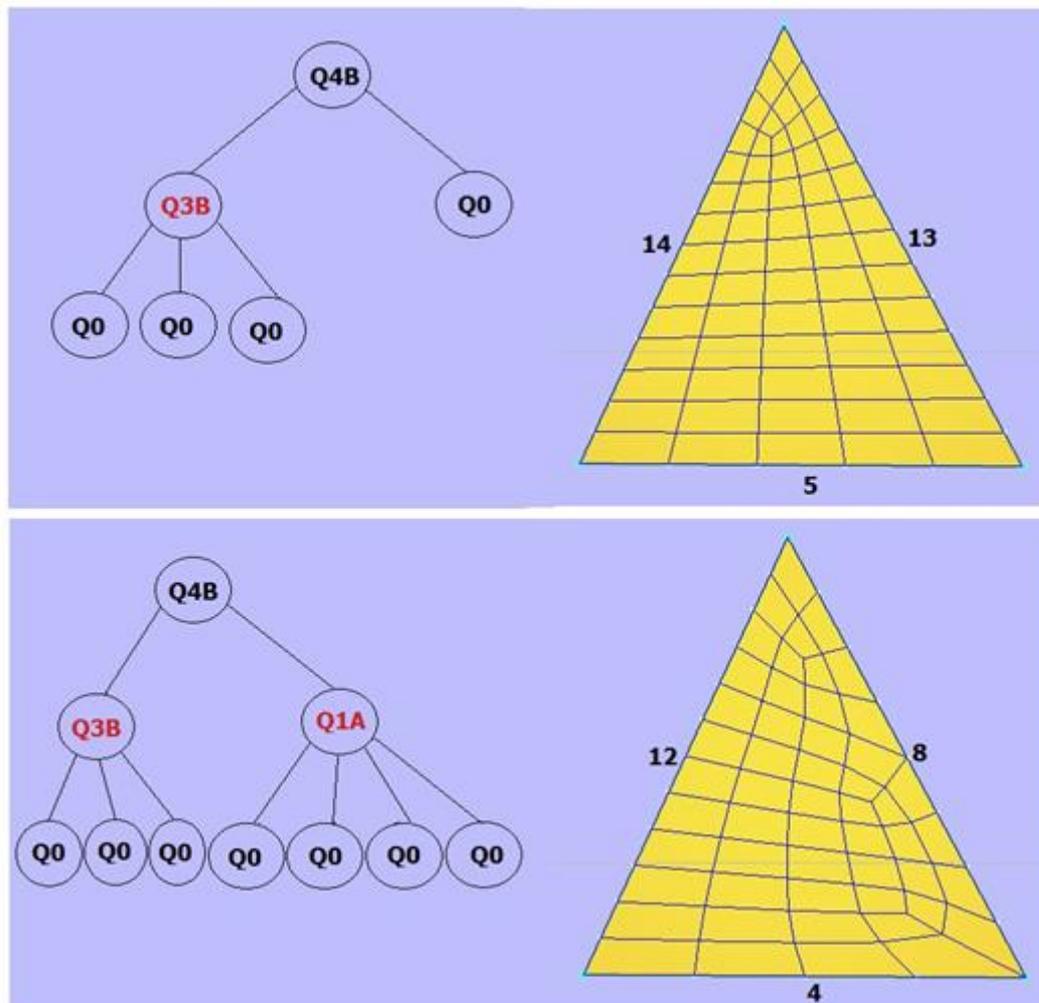


Figura A.6: Decomposição hierárquica gerada pelo padrão de geração de malha Q4A

#### A.4

##### Padrão de geração de malha Q5B -2 curvas- grau 2 e 3

Este padrão de geração de malha, indicado na Figura A.7, é aplicado sobre domínios delimitados por duas curvas de bordo. O domínio é decomposto inicialmente em 2 subdomínios triangulares que podem ou não ser alongados.

Este padrão foi projetado baseado no padrão (template) para domínios com duas curvas de bordo proposto no trabalho de Miranda & Martha (2013). Infelizmente este padrão de geração de malha tem uma desvantagem, o número de subdivisões da curva interior é determinada em função da distância de abertura das curvas de bordo, o que impede conhecer a priori as possibilidades de decomposição hierárquica nos subdomínios S1 e S2. No entanto, mesmo assim baseado na experiência do seu uso foram definidas as condições de subdomínio, mas não se

pode determinar com precisão quando acontecerá cada uma delas pelo fato de termos uma dependência da distância de abertura entre ambas as curvas de bordo.

Portanto, para conhecer a priori a topologia de decomposição hierárquica que terá o padrão de geração sobre um domínio, é recomendável definir os parâmetros topológicos internos em função de número de subdivisões.

A Figura A.7 mostra o nome dado a cada subdomínio, a distribuição dos padrões de geração de malha nos subdomínios, os parâmetros topológicos e a possível orientação dos padrões de geração dentro dos subdomínios.

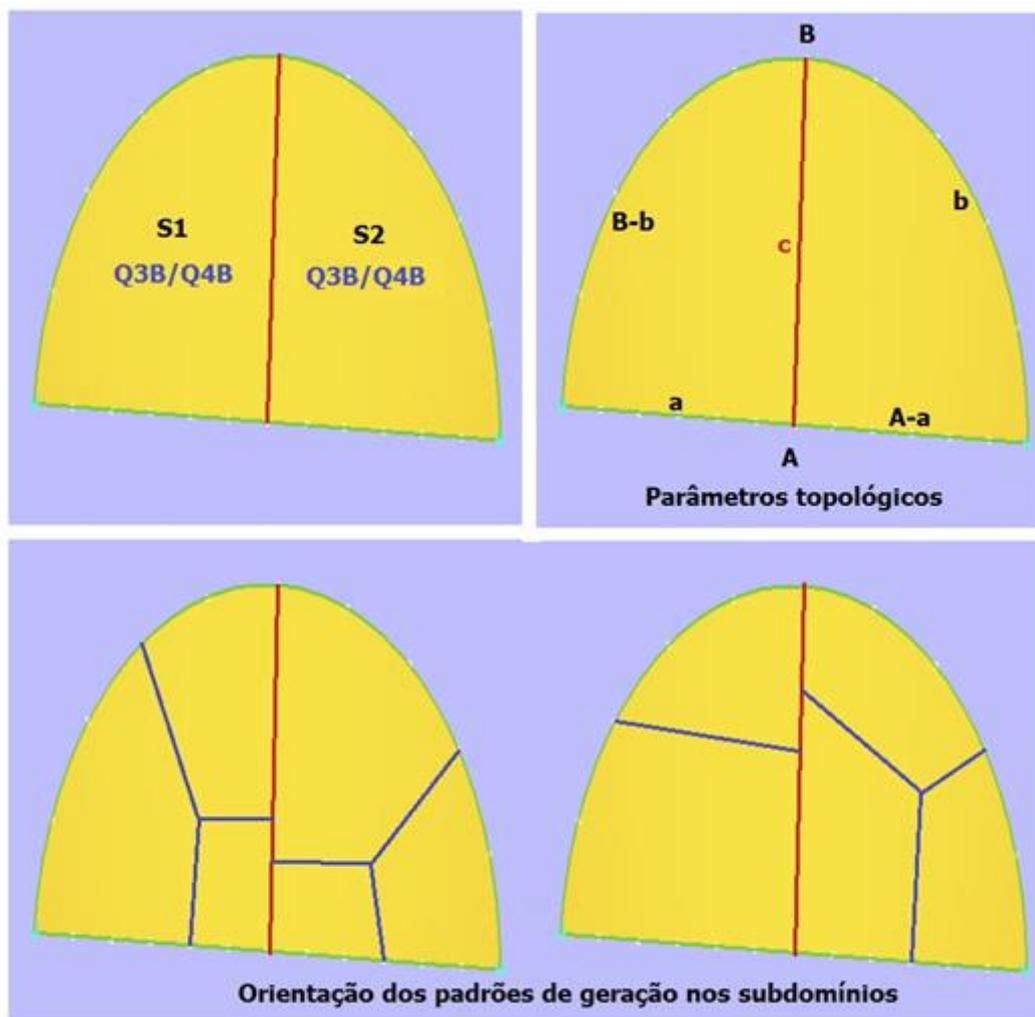


Figura A.7: Padrão de geração de malha Q5B

**Notação:**

A, B: Número de subdivisões das curvas de bordo.

a, b: Número de subdivisões das subcurvas de bordo.

c: Número de subdivisões da curva interna.

$d_A, d_B, d_c$ : Comprimentos em espaço cartesiano das curvas A, B, C.

avg: Média dos comprimentos das curvas A e B.

**Condições de domínio:**

$$(A + B) \bmod 2 = 0 \quad (\text{A.57})$$

$$A \leq B \quad (\text{A.58})$$

**Condições de domínio realizável:**

$$A \geq 4 \quad (\text{A.59})$$

$$B \geq 4 \quad (\text{A.60})$$

**Cálculo dos parâmetros topológicos de bordo:**

$$a = \left\lfloor \frac{A}{2} \right\rfloor \quad (\text{A.61})$$

$$b = \left\lfloor \frac{B}{2} \right\rfloor \quad (\text{A.62})$$

**Cálculo do parâmetro topológico interno:**

$$avg = \frac{d_A + d_B}{A + B} \quad (\text{A.63})$$

$$c = \frac{d_c}{avg} \quad (\text{A.64})$$

Faz-se correção ao valor obtido:

$$c = \begin{cases} 2, & \text{if } (c < 2) \\ c + 1, & \text{if } ((a + c + (B - b)) \bmod 2 \neq 0) \end{cases} \quad (\text{A.65})$$

**Condições de subdomínio:**

Tendo em consideração que o valor do parâmetro  $c$  está em função da distância de abertura das curvas de bordo e não do número de subdivisões das curvas de bordo, é difícil estabelecer a priori a relação entre  $c$  e os restantes parâmetros. Mas pelos testes realizados com domínios de abertura proporcional às curvas de bordo, mantem-se a relação a seguir:

$$c < a + (B - b) \quad (\text{A.66})$$

$$c < (A - a) + b \quad (\text{A.67})$$

As possibilidades de decomposição hierárquica nos subdomínios são parecidas ao caso do padrão Q5A. No entanto, pode também dar-se o caso de que um subdomínio seja alongado e outro não.

### Teste de paridade no subdomínio S1 e S2:

Como são só duas curvas, ambas devem ter número de subdivisões pares ou ímpares, para cumprir a condição de paridade.

CASO 1: Se  $A$  e  $B$  são pares, suas metades são pares: Então  $a$  e  $A-a$  são pares,  $b$  e  $B-b$  são pares.

No subdomínio S1:  $a+(B-b)$  é par, portanto  $c$  deve também ser par para cumprir a condição de paridade:  $[a+c+(B-b)] \bmod 2=0$ . Isto consegue-se usando as correções feitas na avaliação do parâmetro topológico interno  $c$ . Portanto, neste caso está garantido a condição de paridade neste subdomínio.

No subdomínio S2:  $(A-a)+b$  é par, portanto requer-se que  $c$  seja par para cumprir a condição de paridade:  $[(A-a)+b+c] \bmod 2=0$ . Isto consegue-se do valor anterior de  $c$  que é par, portanto também se cumpre a condição de paridade neste subdomínio.

CASO 2: Se  $A$  e  $B$  são ímpares, uma metade é par e a outra ímpar ou vice-versa: Seja  $a$  ímpar, então  $A-a$  é par. Seja  $b$  par, então  $B-b$  é ímpar.

No subdomínio S1:  $a+(B-b)$  é par, portanto  $c$  deve também ser par para cumprir a condição de paridade:  $[a+(B-b)+c] \bmod 2=0$ . Isto consegue-se usando as correções feitas na avaliação do parâmetro topológico interno  $c$ . Portanto neste caso está garantido a condição de paridade neste subdomínio.

No subdomínio S2:  $(A-a)+b$  é par, portanto requer-se que  $c$  seja par para cumprir a condição de paridade:  $[(A-a)+b+c] \bmod 2=0$ . Isto consegue-se do valor anterior de  $c$  que é par, portanto também se cumpre a condição de paridade neste subdomínio.

### Parâmetros geométricos:

Não há pontos interiores de decomposição dentro do domínio, portanto não há parâmetros geométricos.

A Figura A.8 mostra três exemplos de malha gerada pelo padrão de geração de malha, com a decomposição hierárquica em cada caso.

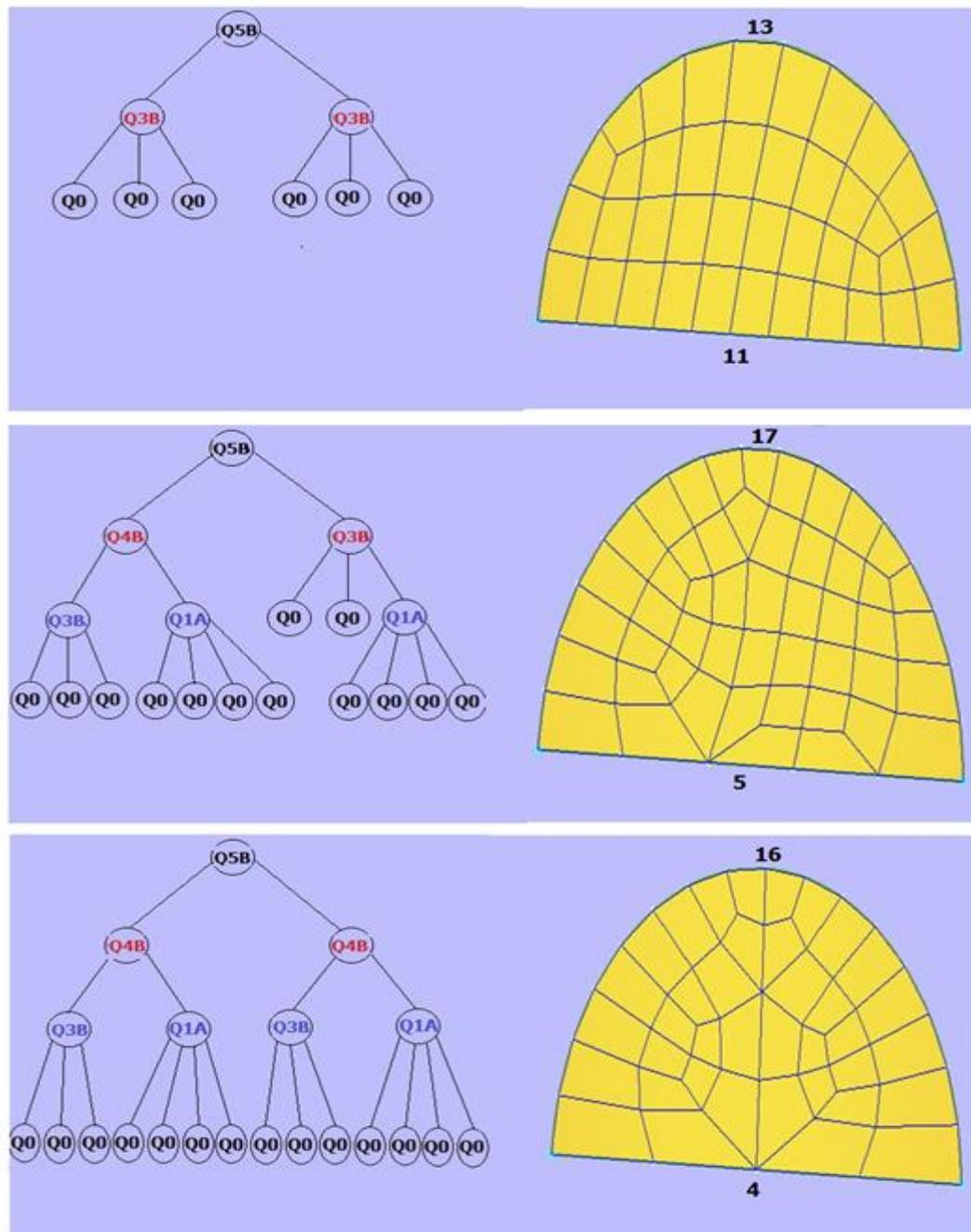


Figura A.8: Decomposição hierárquica gerada pelo padrão de geração de malha Q5B

## **B**

### **Padrões para Geração de Malha Hexaedral**

Aborda-se a geração de malha hexaedral sobre domínios delimitados por seis superfícies de bordo, como uma extensão do caso quadrilateral. Tem-se a restrição que as malhas das superfícies de bordo são geradas com os padrões de geração de malha 2d.

Neste trabalho são tratados quatro tipos de padrões de decomposição de domínio duais e o projeto de padrões de geração de malha a partir delas. Neste caso os parâmetros topológicos fazem referência a malhas de superfície interna ou de bordo.

Para uma melhor visualização dos padrões de geração de malha bidimensionais sobre as superfícies de bordo de um domínio hexaedral, foi adotada uma notação relativa ao observador mostrada a seguir:

$M_F$ : Malha de superfície de bordo frontal.

$M_D$ : Malha de superfície de bordo direita.

$M_S$ : Malha de superfície de bordo superior.

$M_T$ : Malha de superfície de bordo traseira.

$M_E$ : Malha de superfície de bordo esquerda.

$M_I$ : Malha de superfície de bordo inferior.

A Figura B.1 mostra essa notação.

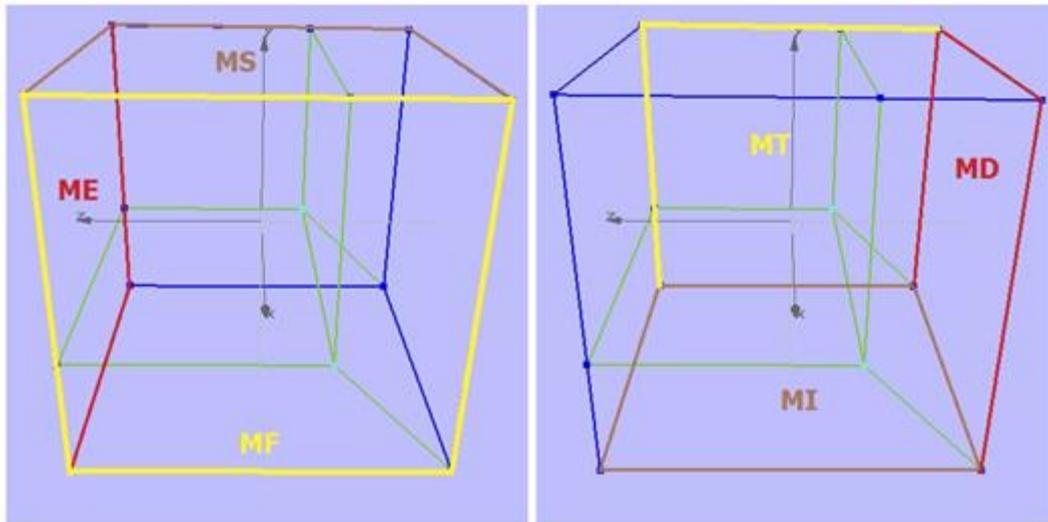


Figura B.1: Notação para as malhas de superfície

Usa-se dois tipos de operadores para comparar malhas de superfície:

- Operador  $\equiv$  para comparar equivalência de topologias de malha com igual número de faces quadrilaterais.
- Operador  $=$  para comparar especificamente quantidade de elementos quadrilaterais sobre uma malha.

### B.1 Padrões de decomposição 3d duais

Aborda-se, só o caso de padrões de decomposição de domínio 3d duais, ou seja, padrões de decomposição de domínio que geram diretamente subdomínios hexaédricos. Trabalhar com padrões de decomposição de domínio não duais implica ter padrões de decomposição de domínio para outras topologias de domínios, tais como tetraedrais, piramidais, prismas triangulares, etc. Explorar padrões de decomposição não duais estão fora do alcance deste trabalho.

Na Figura B.2 define-se os padrões de decomposição de domínio tratados neste trabalho para o caso de malhas hexaedrais. Os subdomínios dos padrões de decomposição de domínio foram nomeados com a finalidade de poder descrever a decomposição hierárquica (se houver) em cada um deles.

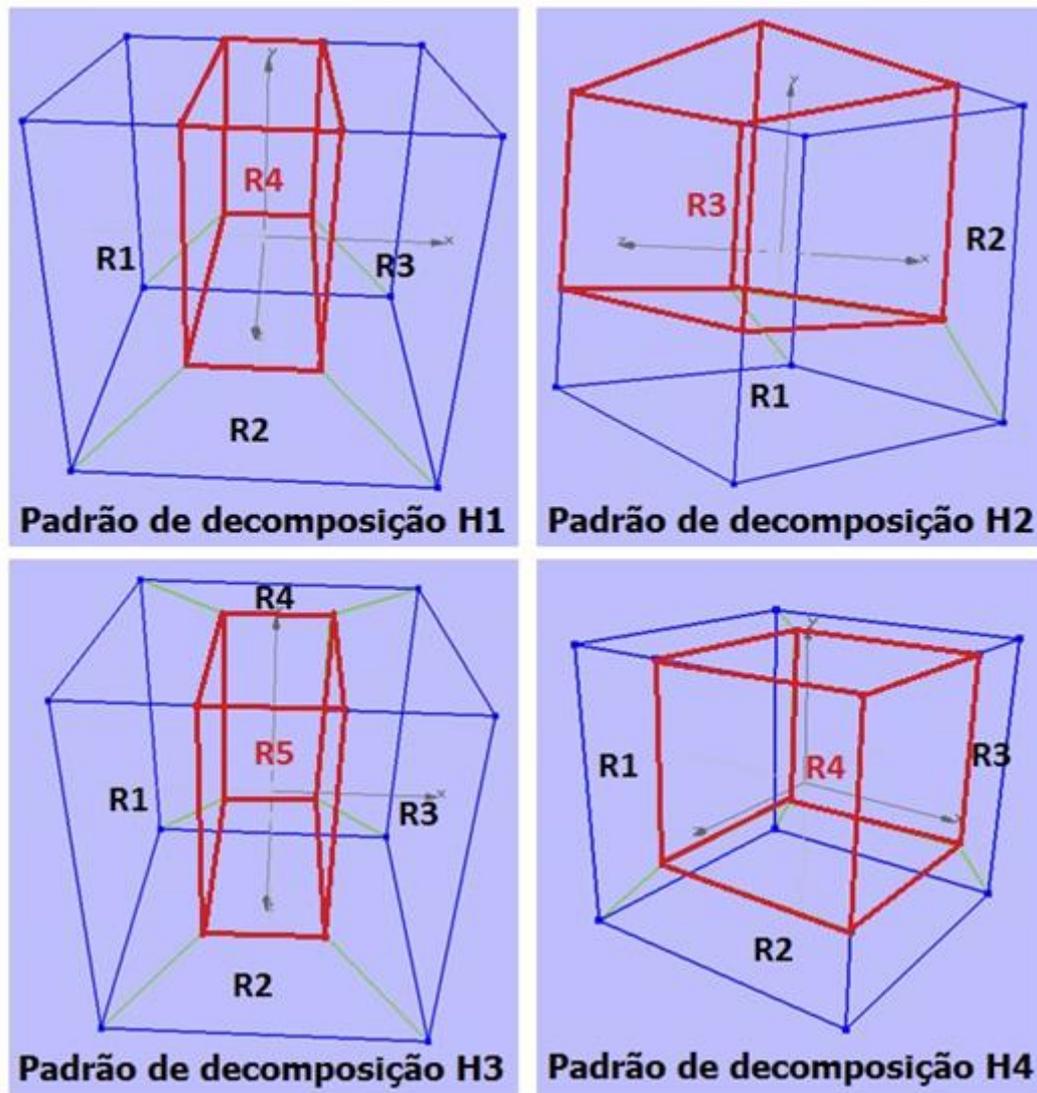


Figura B.2: Padrões de decomposição para geração de malha hexaedral

## B.2

### Projeto de padrões de geração de malha hexaedral

O projeto de padrões é tratado de maneira similar ao caso quadrilateral, mas neste caso o padrão base é denotado por H0.

#### B.2.1

##### Padrão de geração de malha H1A- grau 1

Este padrão de geração de malha é mostrado na Figura B.3. Este padrão foi proposto no trabalho de Miranda, (2013). O padrão divide um domínio hexaedral em quatro subdomínios hexaedrais base.

A Figura B.3 mostra o nome dado a cada subdomínio, a distribuição de padrões de geração de malha nos subdomínios, os parâmetros topológicos, o nome

dado aos subdomínios das superfícies de bordo frontal e traseira e um exemplo de malha gerada pelo padrão.

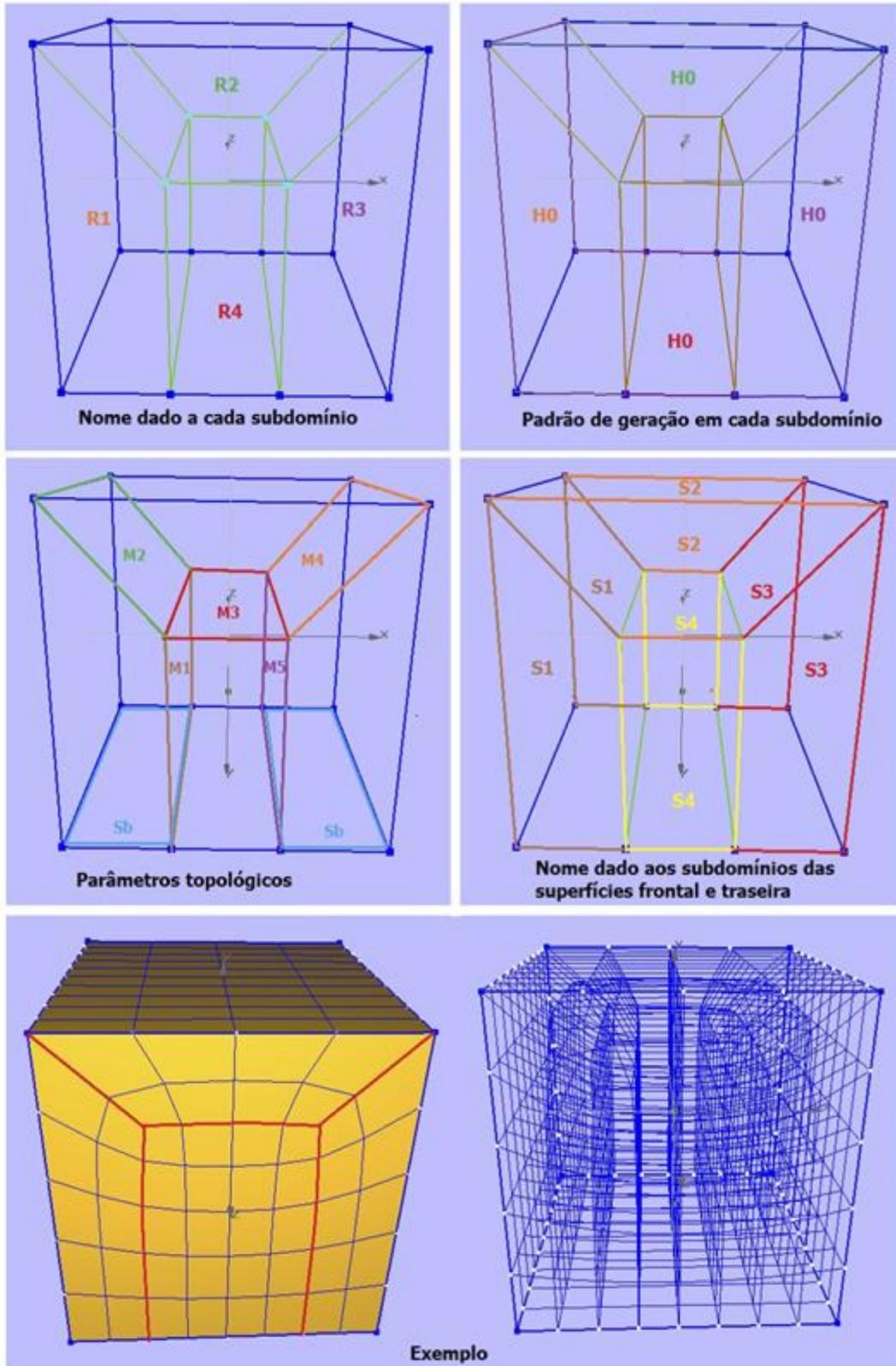


Figura B.3: Padrão de geração de malha H1A

**Notação:**

$M_F, M_D, M_S, M_T, M_E, M_I$ : Número de faces quadrilaterais nas malhas de superfícies de bordo.

$S_b$ : Número de faces quadrilaterais de submalha estruturada Q0 de bordo.

$M_F^{S4}, M_T^{S4}$ : Número de faces quadrilaterais nas submalhas das superfícies de bordo.

$M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$ : Número de faces quadrilaterais nas malhas de superfície internas.

**Condições de domínio:**

$$(M_F + M_T + M_D + M_S + M_E + M_I) \bmod 2 = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$M_F \equiv Q1A \quad (\text{B.2})$$

$$M_T \equiv Q1A \quad (\text{B.3})$$

$$M_D \equiv Q0 \quad (\text{B.4})$$

$$M_E \equiv Q0 \quad (\text{B.5})$$

$$M_I \equiv Q0 \quad (\text{B.6})$$

$$M_S \equiv Q0 \quad (\text{B.7})$$

$$M_F \equiv M_T \quad (\text{B.8})$$

$$M_S < M_T \quad (\text{B.9})$$

$$M_E \equiv M_D \quad (\text{B.10})$$

**Parâmetros topológicos internos:**

São definidas pelas malhas de superfícies internas.

$$M_1 \equiv M_F \quad (\text{B.11})$$

$$M_2 \equiv S_b \quad (\text{B.12})$$

$$M_3 \equiv M_S \quad (\text{B.13})$$

$$M_4 \equiv S_b \quad (\text{B.14})$$

$$M_5 \equiv M_D \quad (\text{B.15})$$

**Parâmetro topológico de bordo:**

Definida pela submalha de superfície de tipo Q0, no bordo inferior. É calculado com a finalidade de fazer a região R4 domínio base, portanto, faz-se que

as malhas inferior e superior do subdomínio R4, sejam idênticas topologicamente.

$$M_3 = M_I - 2S_b.$$

$$S_b = \frac{M_I - M_S}{2} \quad (\text{B.16})$$

#### Condições de subdomínio:

Dado que  $M_E \equiv M_D$ ,  $M_F \equiv M_T$  e a partir do valor do parâmetro topológico de bordo, obtém-se:

$$M_1 \equiv M_5 \quad (\text{B.17})$$

$$M_3 \equiv M_I - 2S_b \quad (\text{B.18})$$

$$M_F^{S_4} \equiv M_T^{S_4} \quad (\text{B.19})$$

#### Teste de paridade no subdomínio R4:

Testa-se a paridade neste subdomínio porque a possível decomposição hierárquica foi direcionada sobre ele. Das condições de subdomínio, cada par de superfícies opostas desta região são idênticas topologicamente, portanto, a soma de elementos de cada par de malhas opostas desta região sempre será par.

$$\begin{aligned} & (M_1 + M_5 + M_3 + (M_I - 2S_b) + M_F^{S_4} + M_T^{S_4}) \text{mod } 2 \\ &= [(M_1 + M_5) + (M_3 + (M_I - 2S_b)) \\ &+ (M_F^{S_4} + M_T^{S_4})] \text{mod } 2 \quad (\text{B.20}) \\ &= [\text{par} + \text{par} + \text{par}] \text{mod } 2 = [\text{par}] \text{mod } 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

#### Parâmetros geométricos:

Não há pontos interiores dentro do domínio. Para a criação das malhas de superfície interna são tomados os parâmetros geométricos das malhas de superfície de bordo.

A Figura B.4 mostra um exemplo de malha gerada pelo padrão com sua decomposição hierárquica.

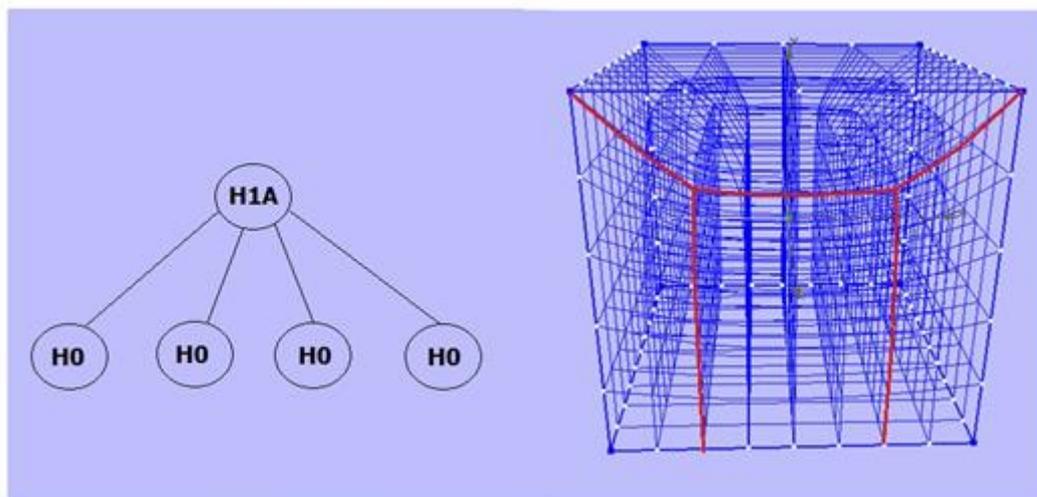


Figura B.4: Decomposição hierárquica gerada pelo padrão de geração de malha H1A

### B.2.2 Padrão de geração de malha H2A- grau 1 e 2

Este padrão de geração de malha é mostrado na Figura B.5, é considerado “autorrecursivo” de maneira similar ao padrão de geração Q2A, pois as malhas de superfície frontal e traseira são iguais ao padrão Q2A. O padrão de geração de malha divide um domínio hexaedral em dois subdomínios hexaedrais base e um que pode ou não ter decomposição hierárquica.

A Figura B.5 mostra o nome dado a cada subdomínio, a distribuição de padrões de geração de malha nos subdomínios, os parâmetros topológicos, o nome dado aos subdomínios das superfícies de bordo frontal e traseira e um exemplo de malha gerada pelo padrão.

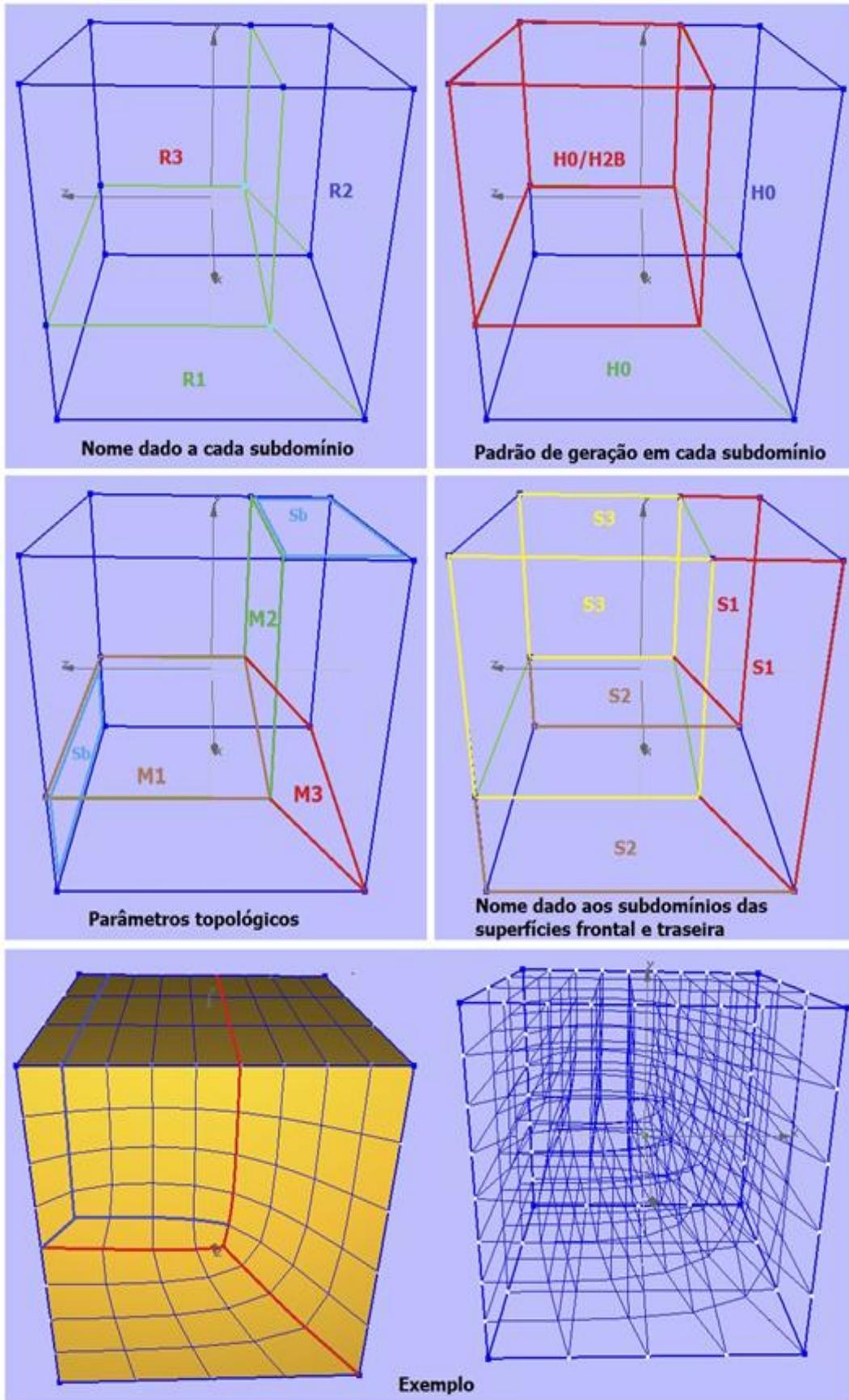


Figura B.5: Padrão de geração de malha H2A

**Notação:**

$M_F, M_D, M_S, M_T, M_E, M_I$ : Número de faces quadrilaterais nas superfícies de bordo.

$S_b$ : Número de faces quadrilaterais de submalha estruturada Q0 de bordo.

$M_F^{S3}, M_T^{S3}$ : Número de faces quadrilaterais nas submalhas das superfícies de bordo.

$M_1, M_2, M_3$ : Número de faces quadrilaterais nas malhas de superfície internas.

**Condições de domínio:**

$$(M_F + M_T + M_D + M_S + M_E + M_I) \bmod 2 = 0 \quad (\text{B.21})$$

$$M_F \equiv Q2A \quad (\text{B.22})$$

$$M_T \equiv Q2A \quad (\text{B.23})$$

$$M_D \equiv Q0 \quad (\text{B.24})$$

$$M_E \equiv Q0 \quad (\text{B.25})$$

$$M_I \equiv Q0 \quad (\text{B.26})$$

$$M_S \equiv Q0 \quad (\text{B.27})$$

$$M_F \equiv M_T \quad (\text{B.28})$$

$$M_I > M_S \quad (\text{B.29})$$

$$M_E > M_D \quad (\text{B.30})$$

**Parâmetros topológicos internos:**

$$M_1 = M_I \quad (\text{B.31})$$

$$M_2 \equiv M_D \quad (\text{B.32})$$

$$M_3 \equiv S_b \quad (\text{B.33})$$

**Parâmetro topológico de bordo:**

Dado que as malhas de superfície frontal e traseira são equivalentes ao padrão de geração de malha Q2A, o parâmetro de bordo é calculado de forma parecida ao realizado para o padrão de geração de malha Q2A.

$$S_b = \frac{(M_I - M_S) + (M_E - M_D)}{2} \quad (\text{B.34})$$

**Condições de subdomínio:**

Primeira possibilidade.

$$M_1 < M_S - S_b \quad (\text{B.35})$$

$$M_E - S_b < M_2 \quad (\text{B.36})$$

$$M_F^{S_3} \equiv M_T^{S_3} \quad (\text{B.37})$$

Segunda possibilidade.

$$M_1 \equiv M_S - S_b \quad (\text{B.38})$$

$$M_E - S_b \equiv M_2 \quad (\text{B.39})$$

$$M_F^{S_3} \equiv M_T^{S_3} \quad (\text{B.40})$$

#### Teste de paridade no subdomínio:

$$\begin{aligned} & (M_1 + (M_S - S_b) + M_2 + (M_E - S_b) + M_F^{S_3} + M_T^{S_3}) \bmod 2 \\ &= [(M_1 + (M_S - S_b)) + (M_2 + (M_E - S_b)) \\ &+ (M_F^{S_3} + M_T^{S_3})] \bmod 2 \quad (\text{B.41}) \\ &= [\textit{par} + \textit{par} + \textit{par}] \bmod 2 = [\textit{par}] \bmod 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

#### Parâmetros geométricos:

Não há pontos interiores dentro do domínio, portanto não há parâmetros geométricos internos.

A Figura B.6 mostra dois exemplos de malha gerada pelo padrão de geração de malha, com a decomposição hierárquica em cada caso.

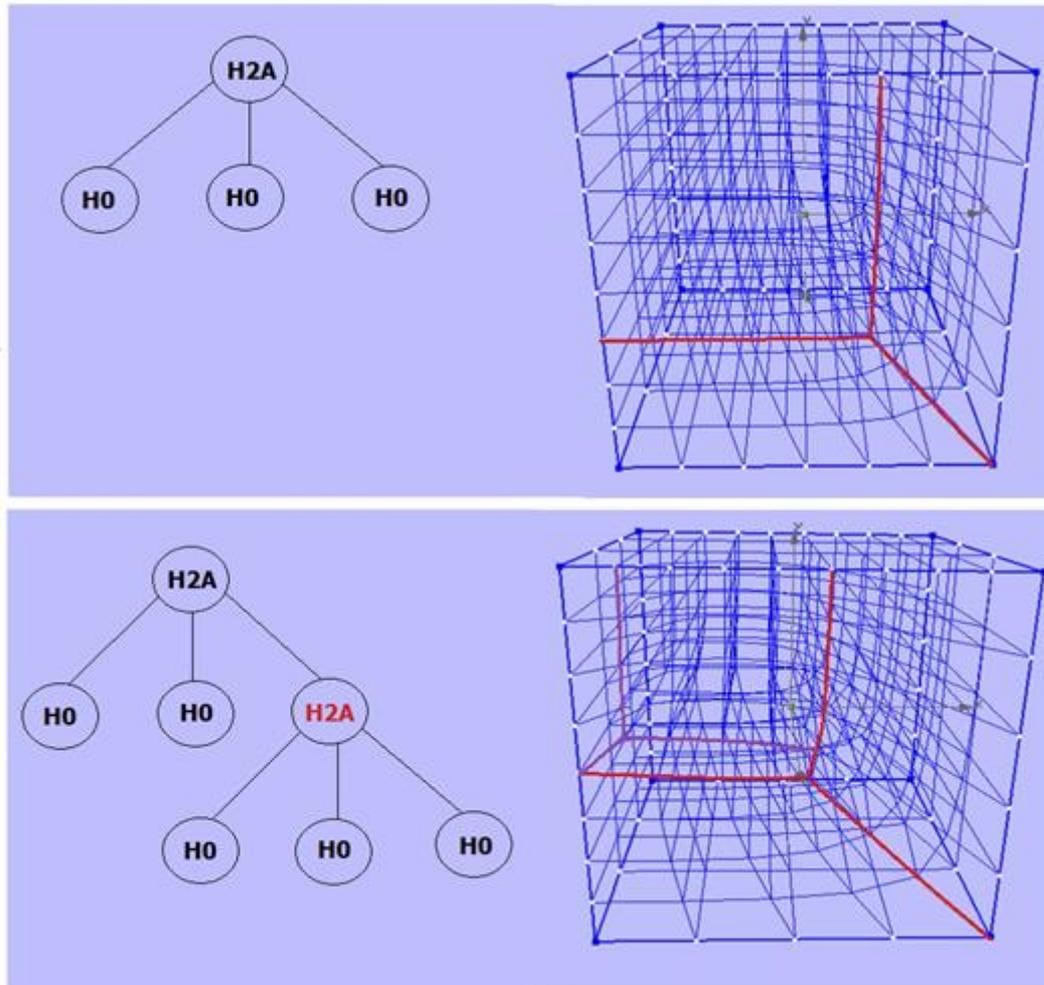


Figura B.6: Decomposição hierárquica gerada pelo padrão de geração de malha H2A

### B.2.3 Padrão de geração de malha H3A- grau 1

Este padrão de geração de malha é mostrado na Figura B.7. Foi proposto por Miranda (2013). O padrão de geração de malha divide um domínio hexaedral em cinco subdomínios hexaedrais base.

A Figura B.7 mostra o nome dado a cada subdomínio, a distribuição de padrões de geração de malha nos subdomínios, os parâmetros topológicos internos, o nome dado aos subdomínios das superfícies de bordo frontal e superior e um exemplo de malha gerada pelo padrão. Neste caso não foram definidos parâmetros topológicos de bordo.

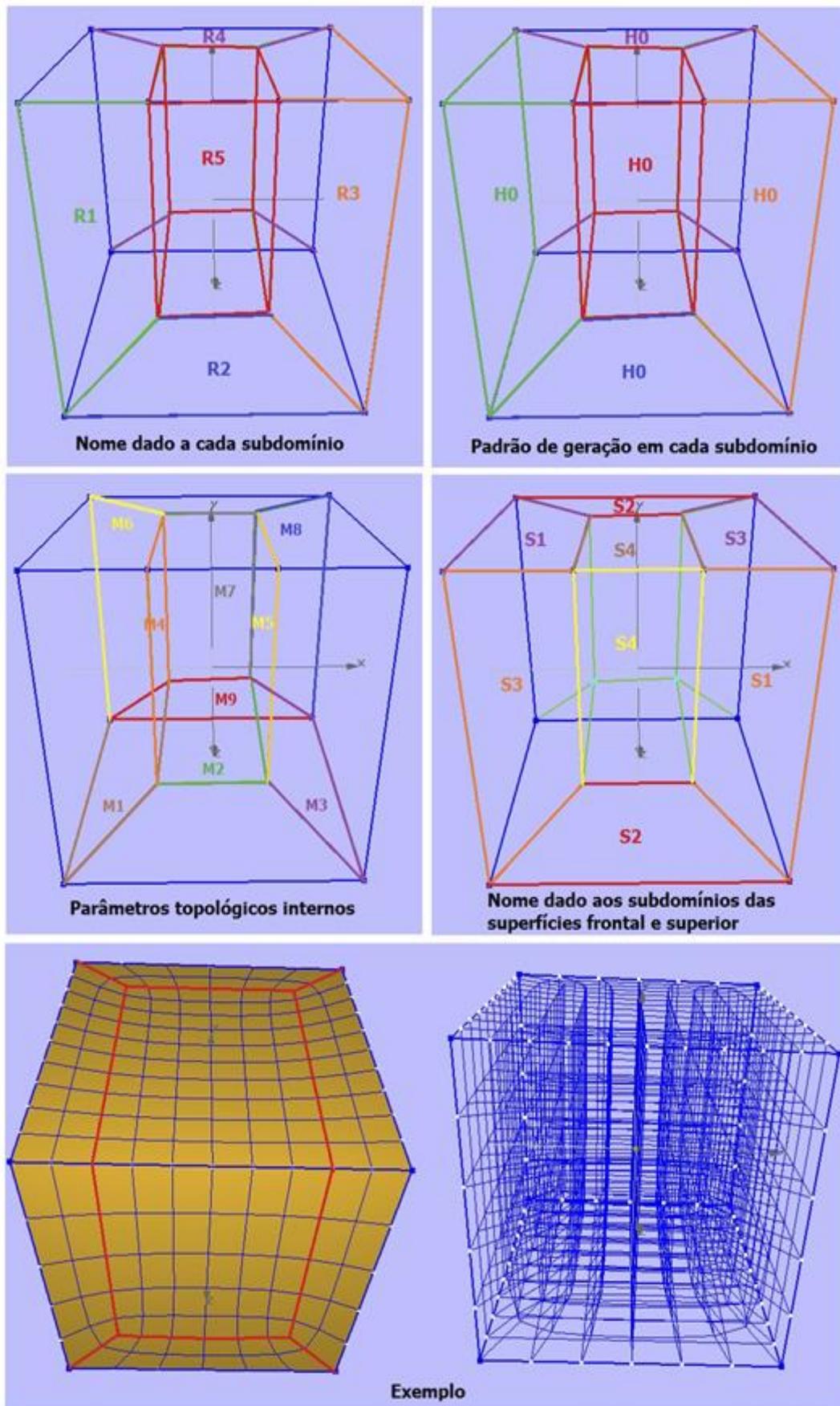


Figura B.7: Padrão de geração de malha H3A

**Notação:**

$M_F, M_D, M_S, M_T, M_E, M_I$ : Número de faces quadrilaterais nas superfícies de bordo.

$M_S^{S1}, M_S^{S3}, M_F^{S1}, M_F^{S3}, M_F^{S2}, M_S^{S2}, M_F^{S4}, M_S^{S4}$ : Número de faces quadrilaterais nas submalhas das superfícies de bordo.

$M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8, M_9$ : Número de faces quadrilaterais nas malhas de superfície internas.

**Condições de domínio:**

$$(M_F + M_T + M_D + M_S + M_E + M_I) \bmod 2 = 0 \quad (\text{B.42})$$

$$M_F \equiv Q1A \quad (\text{B.43})$$

$$M_T \equiv Q0 \quad (\text{B.44})$$

$$M_D \equiv Q0 \quad (\text{B.45})$$

$$M_E \equiv Q0 \quad (\text{B.46})$$

$$M_I \equiv Q0 \quad (\text{B.47})$$

$$M_S \equiv Q1A \quad (\text{B.48})$$

$$M_T < M_F \quad (\text{B.49})$$

$$M_I < M_S \quad (\text{B.50})$$

$$M_E \equiv M_D \quad (\text{B.51})$$

**Parâmetros topológicos internos:**

$$M_1 = M_S^{S1} \quad (\text{B.52})$$

$$M_2 \equiv M_1 \quad (\text{B.53})$$

$$M_3 \equiv M_S^{S3} \quad (\text{B.54})$$

$$M_4 \equiv M_E \quad (\text{B.55})$$

$$M_5 \equiv M_D \quad (\text{B.56})$$

$$M_6 \equiv M_F^{S3} \quad (\text{B.57})$$

$$M_7 \equiv M_T \quad (\text{B.58})$$

$$M_8 \equiv M_F^{S1} \quad (\text{B.59})$$

$$M_9 \equiv M_S^{S2} \equiv M_F^{S2} \quad (\text{B.60})$$

### Parâmetro topológico de bordo:

Não será definido nenhum parâmetro topológico.

### Condições de subdomínio:

$$M_4 \equiv M_5 \quad (\text{B.61})$$

$$M_2 \equiv M_S^{S_4} \quad (\text{B.62})$$

$$M_7 \equiv M_F^{S_4} \quad (\text{B.63})$$

### Teste de paridade no subdomínio:

O teste de paridade pode ser feito de maneira similar aos efetuados nos padrões de geração de malha anteriores.

Parâmetros geométricos: São adotados os pontos internos de interseção das projeções dos parâmetros geométricos das malhas de superfície de bordo.

A Figura B.8 mostra um exemplo de malha gerada pelo padrão de geração de malha, com sua decomposição hierárquica.

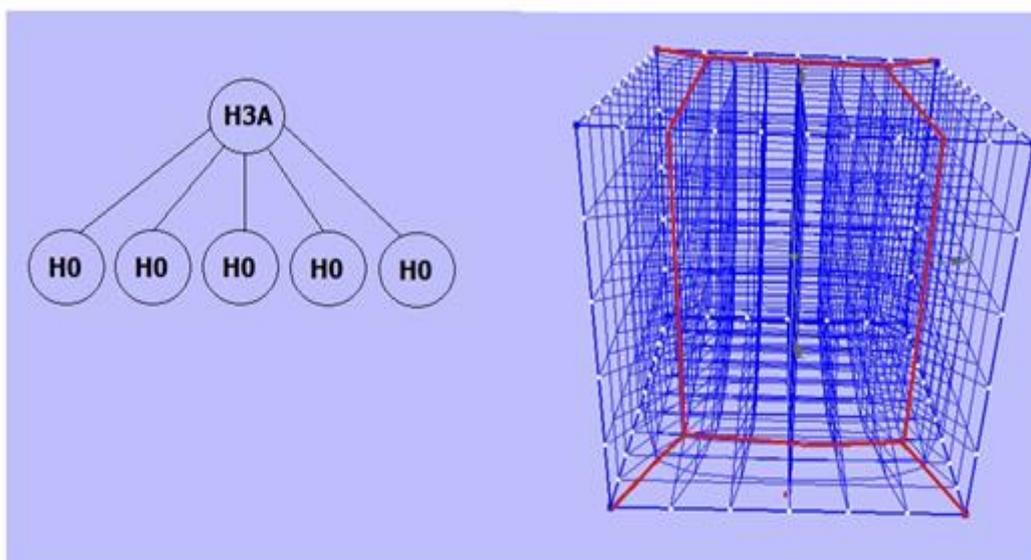


Figura B.8: Decomposição hierárquica gerada pelo padrão de geração de malha H3A

### B.2.4

#### Padrão de geração de malha H4A- grau 1 e 2

Este padrão de geração de malha é mostrado na Figura B.9. Foi proposto por Miranda (2013). O padrão de geração de malha decompõe um domínio hexaedral

em três subdomínios hexaédricos base e um que pode ter ou não decomposição hierárquica.

A Figura B.9 mostra o nome dado a cada subdomínio, a distribuição de padrões de geração de malha nos subdomínios, os parâmetros topológicos internos, o nome dado aos subdomínios das superfícies de bordo frontal, superior e direita e um exemplo de malha gerada pelo padrão. Não foram definidos parâmetros topológicos de bordo.

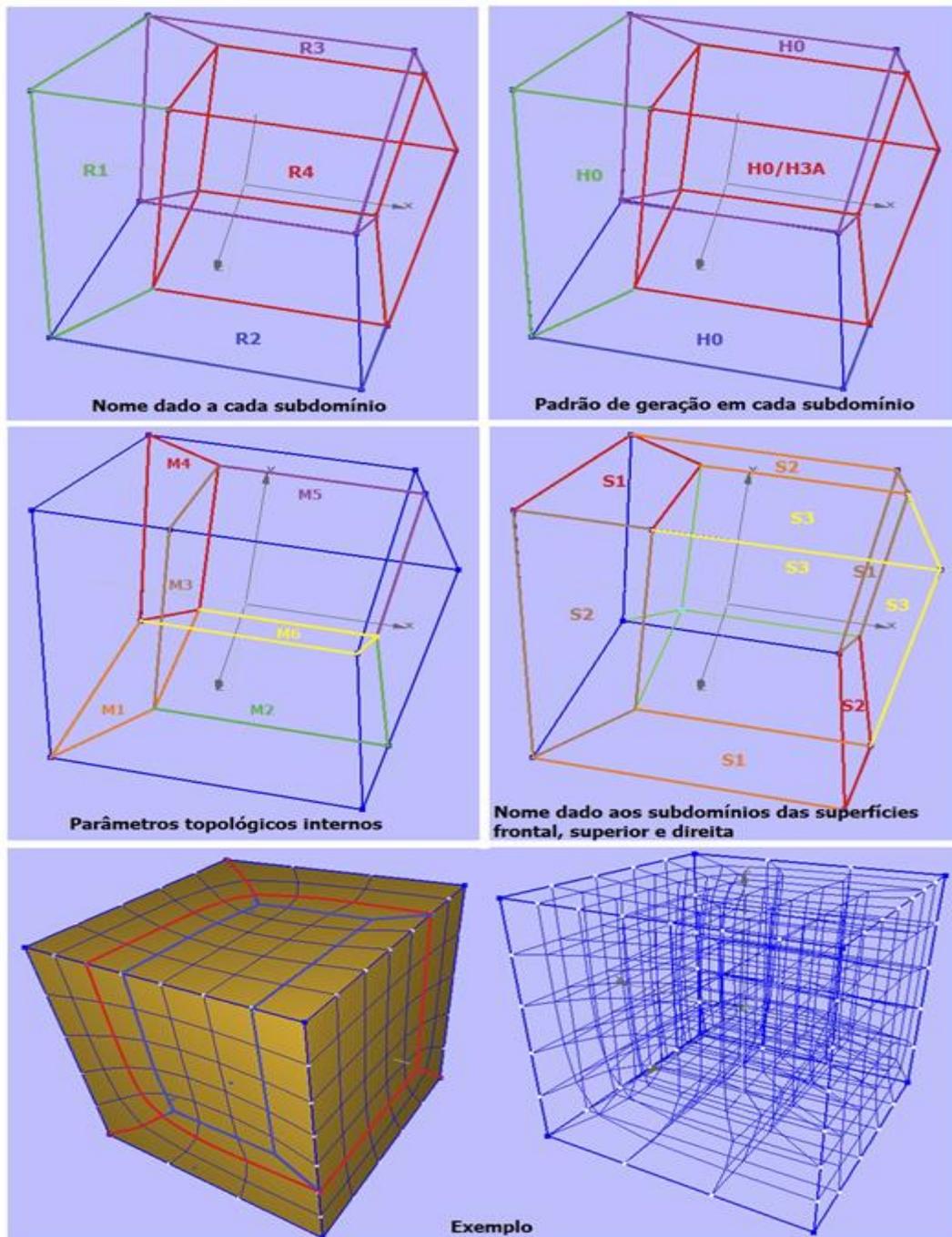


Figura B.9: Padrão de geração de malha H4

**Notação:**

$M_F, M_D, M_S, M_T, M_E, M_I$ : Número de faces quadrilaterais nas superfícies de bordo.

$M_S^{S1}, M_D^{S2}, M_F^{S2}, M_D^{S1}, M_F^{S1}, M_S^{S2}, M_S^{S3}, M_D^{S3}, M_F^{S3}, M_S^{S3}, M_D^{S3}, M_F^{S3}$ : Número de faces quadrilaterais nas submalhas das superfícies de bordo.

$M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ : Número de faces quadrilaterais nas malhas de superfície internas.

**Condições de domínio:**

$$(M_F + M_T + M_D + M_S + M_E + M_I) \bmod 2 = 0 \quad (\text{B.64})$$

$$M_F \equiv Q2B \quad (\text{B.65})$$

$$M_T \equiv Q0 \quad (\text{B.66})$$

$$M_D \equiv Q2B \quad (\text{B.67})$$

$$M_E \equiv Q0 \quad (\text{B.68})$$

$$M_I \equiv Q0 \quad (\text{B.69})$$

$$M_S \equiv Q2B \quad (\text{B.70})$$

$$M_F > M_T \quad (\text{B.71})$$

$$M_D > M_E \quad (\text{B.72})$$

$$M_S > M_I \quad (\text{B.73})$$

**Parâmetros topológicos internos:**

$$M_1 = M_S^{S1} \equiv M_D^{S2} \quad (\text{B.74})$$

$$M_2 \equiv M_I \quad (\text{B.75})$$

$$M_3 \equiv M_E \quad (\text{B.76})$$

$$M_4 \equiv M_F^{S2} \equiv M_D^{S1} \quad (\text{B.77})$$

$$M_5 \equiv M_T \quad (\text{B.78})$$

$$M_6 \equiv M_F^{S1} \equiv M_S^{S2} \quad (\text{B.79})$$

**Parâmetro topológico de bordo:**

Não será definido parâmetro topológico neste caso.

**Condições de subdomínio:**

Primeira possibilidade.

$$M_2 < M_S^{S_3} \quad (\text{B.80})$$

$$M_3 \equiv M_D^{S_3} \quad (\text{B.81})$$

$$M_5 < M_F^{S_3} \quad (\text{B.82})$$

Segunda possibilidade.

$$M_2 \equiv M_S^{S_3} \quad (\text{B.83})$$

$$M_3 \equiv M_D^{S_3} \quad (\text{B.84})$$

$$M_5 \equiv M_F^{S_3} \quad (\text{B.85})$$

### Teste de paridade no subdomínio:

O teste de paridade pode ser feito de maneira similar aos efetuados nos padrões de geração de malha anteriores.

### Parâmetros geométricos:

Como parâmetro geométrico, é adotado o ponto interno de interseção das projeções dos parâmetros geométricos das malhas de superfície de bordo frontal superior e direita.

A Figura B.10 mostra dois exemplos de malha gerada pelo padrão de geração de malha, com a decomposição hierárquica em cada caso.

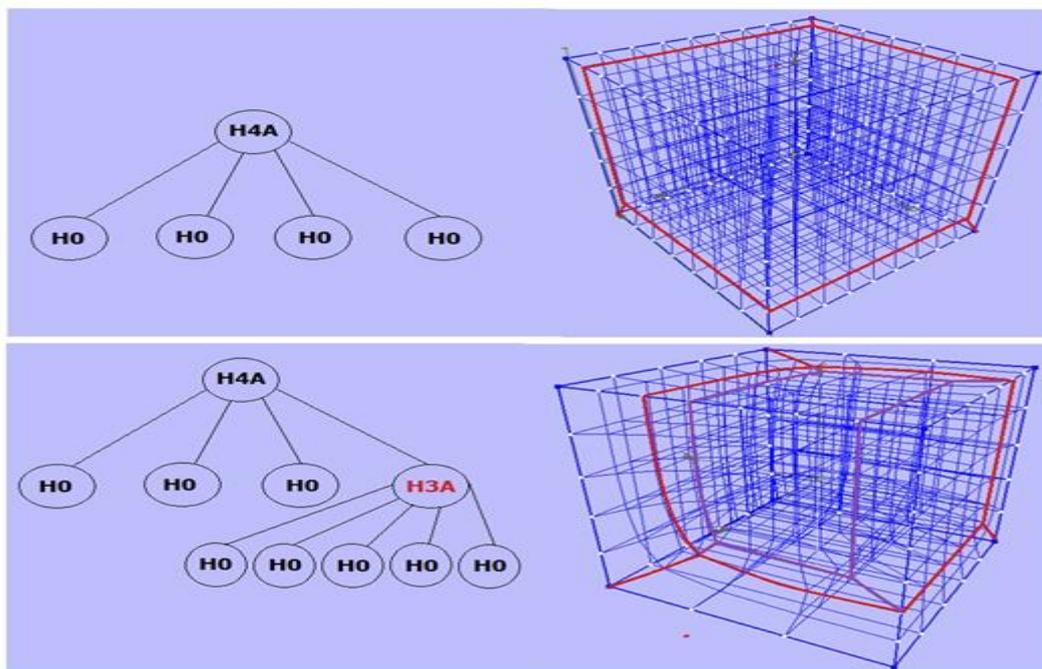


Figura B.10: Decomposição hierárquica gerada pelo padrão de geração de malha H4A