INTEGRAÇÃO NUMÉRICA E *LOCKING*

Orlando J. B. A. Pereira

2000

1. Integração Numérica - Regra de Gauss-Legendre

A integração numérica consiste em aproximar o integral de uma função através de um somatório. Considerando o intervalo [-1, 1],

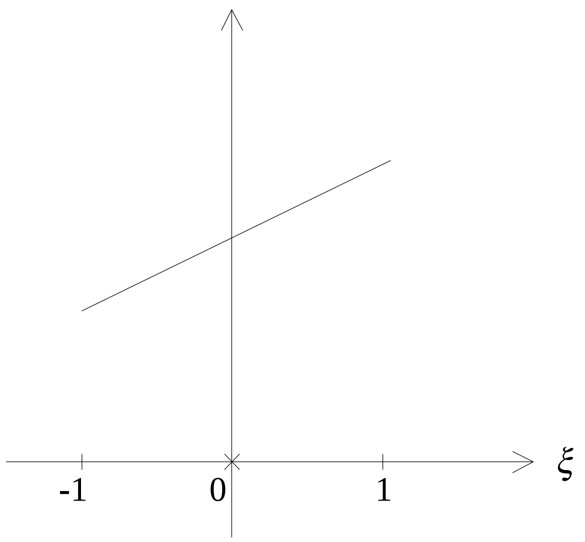
$$\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi \cong \sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i),$$

onde ξ_i são as coordenadas dos pontos de integração e w_i os pesos desses pontos.

Utilizando um único ponto:

$n = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi \cong 2 f(0)$

Para $f(\xi) = a + b\,\xi$, a integração é sempre exacta.



Utilizando 2 pontos:

$n = 2 \Rightarrow \int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi \cong w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2)$

Uma vez que existem 4 parâmetros, considere-se um polinómio $f(\xi) = a + b\,\xi + c\,\xi^2 + d\,\xi^3$.

Então, $\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi = a\int_{-1}^{1} 1 d\xi + b\int_{-1}^{1} \xi\, d\xi + c\int_{-1}^{1} \xi^2 d\xi + d\int_{-1}^{1} \xi^3 d\xi$.

Para a integração ser exacta,

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = \int_{-1}^{1} 1 d\xi \\ w_1\xi_1 + w_2\xi_2 = \int_{-1}^{1} \xi \, d\xi \\ w_1\xi_1^2 + w_2\xi_2^2 = \int_{-1}^{1} \xi^2 d\xi \\ w_1\xi_1^3 + w_2\xi_2^3 = \int_{-1}^{1} \xi^3 d\xi \end{cases}.$$

Sendo as equações não lineares, este sistema é de difícil resolução. Contudo, demonstra-se que as coordenadas dos pontos de Gauss são os zeros dos polinómios de Legendre, pelo que:

$$\begin{cases} \xi_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \xi_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

Nestas condições, os pesos são facilmente obtidos resolvendo o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 2 \\ w_2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) + w_2 \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 0 \end{cases}.$$

Portanto, $\begin{cases} w_1 = 1 \\ w_2 = 1 \end{cases}$.

Genericamente, a regra de integração de Gauss de n pontos permite integrar exactamente polinómios de grau $2\,n - 1$.

2. *Shear-Locking* em elementos finitos de laje de Mindlin-Reissner

Dos termos não nulos da matriz $\boldsymbol{D}$, os que estão relacionados com a deformação por flexão podem ser agrupados numa submatriz $\boldsymbol{D}_f$, enquanto os relacionados com a deformação por corte podem ser agrupados na submatriz $\boldsymbol{D}_c$, pelo que se pode escrever:

$$\boldsymbol{D} = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{D}_f & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_c \end{array}\right].$$

O mesmo pode ser feito para o operador de compatibilidade:

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{A}_f \\ \hline \boldsymbol{A}_c \end{array}\right].$$

Consequentemente,

$$\boldsymbol{B}_{(e)} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{\Psi}_{(e)} = \left[\frac{\boldsymbol{B}_{f(e)}}{\boldsymbol{B}_{c(e)}}\right].$$

Substituindo estas expressões na expressão da matriz de rigidez elementar, verifica-se que esta é a soma duma parcela relativa à deformação por flexão com uma parcela relativa à deformação por corte, isto é:

$$\boldsymbol{K}_{(e)} = \int_{\Omega_{(e)}} \boldsymbol{B}_{(e)}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_{(e)} d\Omega = \int_{\Omega_{(e)}} \boldsymbol{B}_{f(e)}^T \boldsymbol{D}_f \boldsymbol{B}_{f(e)} d\Omega + \int_{\Omega_{(e)}} \boldsymbol{B}_{c(e)}^T \boldsymbol{D}_c \boldsymbol{B}_{c(e)} d\Omega = \boldsymbol{K}_{f(e)} + \boldsymbol{K}_{c(e)}.$$

Quando h/L diminui, como

$$\boldsymbol{D}_f = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{4} \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{D}_c = \frac{5}{6}\frac{Eh}{2\left(1+\nu\right)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

os termos de $\boldsymbol{K}_{f(e)}$ tornam-se muito pequenos face aos de $\boldsymbol{K}_{c(e)}$.

Nestas circunstâncias, o erro numérico na soma de $\boldsymbol{K}_{f(e)}$ com $\boldsymbol{K}_{c(e)}$ faz com que os deslocamentos do modelo de elementos finitos dependam principalmente da deformabilidade por corte. Isto é precisamente o oposto do que sucede na realidade, pois os deslocamentos duma laje fina dependem principalmente da deformabilidade por flexão.

Como a deformabilidade por corte é proporcional a $1/h$ e a deformabilidade por flexão é proporcional a $1/h^3$, isto significa que a rigidez do modelo de elementos finitos, à partida sempre maior do que a da laje real, está ainda a ser sobrestimada devido aos erros numéricos.

Este fenómeno de sobrestimação da rigidez é designado por *locking* ou, sendo devido à rigidez de corte, *shear-locking*.

Quando a integração da matriz de rigidez é efectuada numericamente, através da regra de Gauss, a sobrestimação da rigidez pode ser evitada reduzindo o número de pontos de integração utilizados.

A integração reduzida diminui a rigidez da malha de elementos finitos, podendo até tornar a malha menos rígida do que a laje real. Além disso, pode tornar a matriz de rigidez global mal condicionada, causando o aparecimento de deslocamentos espúrios, ou mesmo singular.

Para evitar o mau condicionamento da matriz de rigidez global, a integração reduzida não deve ser uniforme, afectando as duas parcelas da rigidez, mas selectiva, subintegrando apenas a parcela de corte.

Os elementos finitos de grau mais baixo são os mais sensíveis ao fenómeno de *locking*, quando a integração é completa. Simultaneamente, são os mais susceptíveis de originar uma matriz de rigidez global mal condicionada, quando a integração é reduzida, mesmo de forma selectiva.